Université de Franche-Comté
**Département de Mathématiques** Février/Mars 2007

LICENCE 2 ANNÉE - PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES
**TD – Feuille 3**

**Probabilités conditionnelles, indépendance, formules des probas totales et de Bayes**

---

**Exercice 1** 1. On jette deux dés parfaits. Vous pariez que l'événement $A$ : *"les deux dés ont le même nombre de points"* est arrivé. Quelle est votre probabilité de gagner ?

2. On jette deux dés parfaits et vous communique que l'événement $B$ : *"la somme des points obtenus vaut* 10*"* est arrivé. Vous pariez sur $A$ ; quelle est la probabilité de gagner ?
3. $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

**Exercice 2** On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On modélise l'événement "*les deux cartes ont la même valeur*" par $A$ et "*les deux cartes ont même couleur*" par $B$. Etudier l'indépendance des événements $A$ et $B$ dans les deux cas suivants :

1. on remet la première carte dans le jeu avant de tirer la deuxième,
2. on tire les deux cartes en même temps.

**Exercice 3** Un homme a 6 chances sur 1000 d'avoir un vrai jumeau. Dans ce cas, si l'un est somnambule, l'autre a une chance sur deux de l'être aussi. 8 fois sur 10, un des jumeaux est droitier, et l'autre gaucher. Ces phénomènes sont indépendants.
Mathieu est somnambule et droitier.
Soit $A$ l'évènement :"Mathieu a un vrai jumeau", $B$ l'évènement "Mathieu a un vrai jumeau gaucher", et C l'évènement "Mathieu a un vrai jumeau somnambule".

1. Quelle probabilité a-t-il d'avoir un vrai jumeau gaucher ?
2. Quelle probabilité a-t-il d'avoir un vrai jumeau somnambule ?
3. Quelle probabilité a-t-il d'avoir un vrai jumeau gaucher et somnambule ?

**Exercice 4** 1. Parmi les 25 sujets du concours de français langue étrangère, Paul and John, initiés par Michèle, en maîtrisent un et un seul, le même. Vrai gentleman, Paul laisse passer John en premièr et ils tirent les sujets (sans remise). Les événements *"John réussit"* et *"Paul réussit"* sont-ils indépendants ? Trouver les probabilités de *"John réussit"* et de *"Paul réussit"*.

2. Même question, si chacun connaît un et un seul sujet, mais qui sont différents l'un de l'autre.

**Exercice 5** La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent chacune l'héritier de leur duché. Montrer que les événements suivants sont indépendants deux à deux, mais ne sont pas indépendants :"*l'héritier d'Aquitaine est une fille*", "*l'héritier de Bourgogne est une fille*" et "*les deux héritiers sont de même sexe*".

**Exercice 6** Un point de coordonnées $(x, y)$ est jeté au hasard dans le carré $[0,1] \times [0,1]$.

1. Soient $A = \{x \leq 1/2\}$, $B = \{y \leq 1/2\}$, $C = \{(x-1/2)(y-1/2) < 0\}$. Représenter graphiquement $A, B, C$. Montrer que $A, B, C$ sont deux à deux indépendants. Montrer que les trois événements $A, B, C$ ne sont pas indépendants.
2.* Soit $r > 0$ et $A_r = \{|x - y| \leq r\}$, $B_r = \{x + y \leq 3r\}$. Représenter graphiquement $A_r$ et $B_r$. Trouver les valeurs de $r$ pour lesquelles les événements $A_r$ et $B_r$ sont indépendants.

**Exercice 7** Lors des opérations de "contrôle de qualité" de produits industriels, deux risques existent : celui de laisser passer un produit non conforme, et celui de rejeter un produit de bonne qualité.

Pour contrôler la qualité des processeurs AmDel®, deux tests d'affilée sont faits. Lors de chacun des tests, un AmDel® déféctueux est détecté avec probabilité 0.9, et un AmDel® correct est mis à la poubelle avec probabilité 0.01.

1. On suppose que les tests sont indépendants. Trouver les probabilités de $R_I$ : *"un AmDel® déféctueux passe le contrôle"* et de $R_{II}$ : *"un AmDel® correct est rejeté"*.
2.* On suppose maintenant qu'on ne sait rien sur la "corrélation" (le caractère de dépendance) entre les deux tests. Estimer les probabilités des mêmes événements $R_I, R_{II}$.
3. On revient aux tests indépendants, mais on en fait un nombre $k$ maintenant. Comment évoluent avec $k$ les risques $R_I, R_{II}$ de se tromper au contrôle ?

**Exercice 8** Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages selon le protocole suivant : si l'on tire une boule blanche, on la remet avec une boule blanches supplémentaire et on arrête les tirages dès que la boule rouge est obtenue. Quelle est la probabilité $p_n$ que le jeu s'arrête au tirage numéro $n$ ? Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

**Exercice 9** On considère le circuit éléctrique suivant :

```
                 --- I1 ---
       |---|                |--- I4 ---|
  ---|       --- I2 ---                 |--- I5 ---
       |----------- I3 -----------|
```

Au dysfonctionnement de chacun des éléments $I_1, \dots, I_5$, le courant dans cet élément ne passe plus. La probabilité pour $I_k$, $k = 1, \dots, 5$, de tomber en panne pendant un an vaut $p_k$. On suppose que les pannes des différents éléments sont indépendantes. Trouver la probabilité de l'événement *"le circuit laisse passer le courant pendant toute une année"*.

**Exercice 10** Le 14 juillet, à Saint-Troupaize, il fait beau sept fois sur dix. Le comité des fêtes dispose de deux sources de prévisions météorologiques indépendantes (Météo-France n'utilise plus de grenouilles) :

Météo-France, qui se trompe deux fois sur cent ; une grenouille verte, qui se trompe une fois sur vingt.

La météo annonce de la pluie, alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. Quel est le temps le plus probable ?

Indications : Introduisons $A_1$ l'événement *"il pleuvra"* et $A_2$ l'événement *"il fera beau"*. Notons $B$ l'événement *"la météo a raison"*, $C$ l'événement *"la grenouille a raison"*, et $D$ l'événement *"la grenouille annonce beau et la météo de la pluie"*. Il s'agit donc de calculer $P(A_1|D)$ et $P(A_2|D)$ et les comparer.

1. Tirer de l'énoncé les valeurs de $P(A_1), P(A_2), P(B), P(C)$.
2. Tirer de l'énoncé les valeurs de $P(D|A_1)$ et de $P(D|A_2)$.
3. Montrer que $A_1, A_2$ forment un système complet d'événements.
4. Appliquer la formule de probas totales pour calculer $P(D)$.
5. Appliquer la formule de Bayes pour calculer $P(A_1|D)$ et $P(A_2|D)$ et conclure.

**Exercice 11** Jojo fait du ski à la station "Vallées blanches". Il est en haut du téléski des Cailloux, et a le choix entre les pistes de Tout-Plat (une bleue), Les-Bosses (une rouge) et Rase-Mottes (une noire). Il va choisir une de ces trois pistes au hasard, de telle façon qu'il choisisse la bleue ou la noire avec probabilité $1/4$, et la rouge, qu'il préfère, avec probabilité $1/2$. Il descend ensuite la piste choisie. Jojo n'est pas encore très à l'aise cette saison, et il tombe avec une probabilité de $0,1$ sur la piste bleue, de $0,15$ sur la piste rouge, et de $0,4$ sur la piste noire.

1. Soit $A =$ "*Jojo tombe en descendant la piste qu'il a choisie*". Calculer $P(A)$.
2. Jojo va descendre une piste ; Bernard l'attend à la terrasse d'un café, et le voit arriver couvert de neige : Jojo est tombé. Sachant cela, quelle est la probabilité que la piste était noire ?

**Exercice 12** On dispose de deux chapeaux : un chapeau melon et un chapeau haut-de-forme. Le chapeau melon contient 9 lapins blancs et 1 noir, le chapeau haut-de-forme contient 3 lapins blancs et 7 noirs. On extrait successivement, et avec remise, deux lapins dans un même chapeau. Pour choisir le chapeau, on lance un dé. Si le chiffre 1 apparaît, on choisit le chapeau melon et sinon on choisit le chapeau haut-de-forme.
Soit $A$ l'événement qui modélise "*on choisit le chapeau melon*" et $B_i$ celui qui modélise "*le $i^{eme}$ lapin extrait est blanc*", $i = 1, 2$.

1. Le premier lapin obtenu est blanc, le second est noir. De quel chapeau est-il plus probable qu'on les ait extraits ?
2. Les événements $B_1$ et $\overline{B_2}$ sont-ils $P$-indépendants ? Que peut-on dire pour $B_1$ et $B_2$ ?
3. Les événements $B_1$ et $\overline{B_2}$ sont-ils $P^A$-indépendants ? sont-ils $P^{\overline{A}}$ -indépendants ?

**Exercice 13** L'abbé Faria transmet à Edmond Dantès, par une série de coups sur le mur séparant leurs celulles, un des trois messages suivants : "AAAA"(="on s'évade ce soir") avec probabilité 0.02, et "BBBB"(="j'ai chaud"), "CCCC"(="j'ai froid"), avec probabilité 0.49 chacun. Chaque lettre est transmise correctement avec probabilité 0.4 et confondue avec chacune des deux autres lettres avec probabilité 0.3. On suppose indépendantes les confusions sur les quatre lettres transmises. Dantès reçoit "ABCA" ; trouver la probabilité que l'abbé Faria voulait dire "AAAA".