Université de Franche-Comté
Département de Mathématiques

Mars 2007

LICENCE 2 ANNÉE - PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES
TD – Feuille 4

Variables aléatoires discrètes

On suppose que toutes les variables aléatoires en question sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Exercice 1 On jette quatre dés parfaits et on appelle X la v.a. comptant le nombre de faces distinctes obtenues. Donner la loi de X et la fonction de répartition.

Exercice 2 On lance un dé à six faces non truqué et on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de X. En déduire la loi de $Y = (X-3)^2$ et la loi de $Z = \dfrac{1}{X}$.

Exercice 3 La distribution de proba d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est donnée par $P(X = k) = \frac{C}{k(k+1)}$.
1. Trouver la valeur de C. 2. Trouver $P(X \leq 3)$. 3. Trouver $P(n_1 \leq X \leq n_2)$ pour $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \leq n_2$.

Exercice 4 Soit S une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $T = -S$? Calculer $E(T)$.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $U = 2S$? Calculer $E(U)$.

Exercice 5 Soit $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Soit Z la variable aléatoire définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} Y(\omega) & \text{si } Y(\omega) \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } Y(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$

Donner la loi de la variable aléatoire Z et calculer son espérance.

Exercice 6 Un gardien de nuit a 10 clefs, dont une seule marche pour ouvrir une porte. Il a deux méthodes. Méthode J : à jeun, il n'essaie qu'une seule fois chaque clef. Méthode I : ivre, il peut essayer chaque clef plusieurs fois.

1. On modélise par X_J (respectivement X_I) le nombre de clefs essayées dans la méthode J (resp. I) avant d'ouvrir la porte (y compris la bonne clef). Pour tout $k \geq 1$, déterminer $P(X_J = k)$ (resp. $P(X_I = k)$). Indiquer le type de X_J et celui de X_I.
2. On sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clefs, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité qu'il était ivre ce jour-ci.

Exercice 7 Pierre et Paul jouent à pile ou face. Chacun lance n fois une pièce de monnaie équilibrée ($n \in \mathbb{N}^*$) et le gagnant est celui qui obtient le plus de pile. On note X_1 (*resp.* X_2) le nombre de pile obtenus par Pierre (*resp. par Paul*).
1. Quel est le type et la loi de X_1 ? De X_2 ? X_1 et X_2 sont-elles identiquement distribuées ? Indépendantes ?
2. Quel est le type et la loi de $X_1 + X_2$? Que représente la v.a. $X_1 + X_2$?
3. Quelle est la probabilité d'un ex-aequo entre Pierre et Paul ? Quelle est la probabilité que Paul gagne ?

Exercice 8 On vous propose de tirer avec remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires. A chaque fois que vous tirez une boule noire, vous perdez 1 euro, remettez la boule noire dans l'urne et (si vous avez 1 euro pour continuer), retirez une boule jusqu'à obtenir une boule blanche. A la première boule blanche obtenue, le jeu s'arrête et vous gagnez N euros.

1. Quelle est la valeur minimale de N pour que vous acceptiez de jouer ?
2. Supposons que vous n'avez au départ que M euros. Quelle est la probabilité de tout perdre ?

Exercice 9 Un chapeau contient au départ un lapin jaune et un lapin bleu. On y effectue une série "d'extractions" de lapins selon le protocole suivant : chaque fois que l'on obtient le lapin jaune, on le remet dans le chapeau, en ajoutant un lapin bleu. On arrête les "extractions" dès que l'on obtient un lapin bleu, et on empoche le gain de $1/X$ kilos de carottes, où X est le nombre d'"extractions" effectuées.

1. Déterminer la loi de la v.a. X. Calculer son espérance, son moment d'ordre deux et sa variance.
2. Déterminer l'espérance du gain.

Exercice 10 La somme de deux v.a. i.i.d (indépendantes , identiquement distribuées) X_1 et X_2 qui suivent la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, 9\}$ peut s'écrire comme $X_1 + X_2 = 10Y + Z$ (ici, Y et Z sont les chiffres de $X_1 + X_2$ dans l'écriture décimale).

1. Trouver les lois de Y et Z. 2. Y et Z sont-elles indépendantes ?
3. Trouver l'espérance, le moment d'ordre deux et la variance de Y et de Z.
4. Tracer les fonctions de répartition de Y et de Z. 5. Trouver la médiane et les quartiles de Z.

Exercice 11 On choisit un entier X au hasard entre 1 et 7, puis un entier Y au hasard entre 1 et X. Déterminer la loi de Y. Donner la fonction de répartition, la médiane, l'espérance et la variance de Y.

Exercice 12 La loi d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est donnée par $P(X = k) = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$. Trouver l'espérance de X. Montrer que X n'a pas de moment d'ordre deux ni de variance.

Exercice 13 On modélise le nombre de vaches tuées par an par des chasseurs, par une variable aléatoire X de type Poisson de paramètre 5.

1. Quel est le nombre de chances pour qu'il y ait 4 vaches ou plus de tuées cette année ?
2. Quel est le nombre de chances pour qu'il n'y ait pas plus d'une vache tuée en dix ans ?

Exercice 14 On répartit n boules au hasard dans quatre boîtes B_1, B_2, B_3, B_4. On note X_i le nombre de boules dans la boîte B_i.

1. Les v.a. X_i sont-elles identiquement distribuées ? Sont-elles indépendantes ?
2. Indiquer le type de X_i et donner sa loi.
3. Indiquer le type et donner la loi de $Y_2 = X_1 + X_2$, de $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$ et de $Y_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Exercice 15
1. Soit X une v.a. discrète. Montrer que $V[X] = E[X(X-1)] - E[X](E[X]-1)$. En déduire la variance de la v.a. de Bernouilli.
2. Soient X, Y des v.a. discrètes de covariance nulle : $\mathrm{cov}(X,Y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} E[(X - EX)(Y - EY)] = 0$. Montrer que $E[XY] = E[X]E[Y]$.
3. Dans la question 2., peut-on dire que X,Y sont indépendantes ? On peut considérer X le nombre de points obtenus sur un dé, et Y qui vaut -4 si ce nombre est un ou six, et qui vaut 5 sinon.

Exercice 16 Soit X, Y i.i.d. v.a. de Poisson de paramètre 3.

1. Rappeler $E[X]$, $V[X]$. Calculer $E[X^2]$. 2. Calculer $V[4X+1]$. 3. Calculer $E[X+Y]$ et $E[XY]$
4. Calculer $V[X+Y]$ et $V[XY]$. 5. Calculer $E[X(X-1)(X-2)]$. 6. En déduire $E[X^3]$ et $E[5X^3]$.

Exercice 17 Un bureau de réservation reçoit, entre 10h et 12h, en moyenne environ 1,2 appels téléphoniques par minute. Le nombre d'appels téléphoniques pendant une minute est modélisé par une variable aléatoire X de type Poisson, de paramètre λ.

1. Quelle est la bonne valeur pour λ ?
2. Quel est le pourcentage de chance pour qu'entre 11h et 11h01, on n'ait aucun appel ? au plus 5 appels ?
3. Quelle est le type et la loi de la variable aléatoire X_n modélisant le nombre d'appels téléphoniques reçus pendant n minutes, entre 10h et 12h ?
4. Quel est le pourcentage de chance de recevoir au plus 4 appels entre 11h et 11h02 ?
5. Soit T la variable aléatoire modélisant la minute du premier appel. Déterminer le type et la loi de T.

Exercice 18 Un éditeur de manuels scolaires a constaté qu'il reçoit, en moyenne, 2 appels téléphoniques par minute en période de rentrée scolaire. Il veut mettre en place un nouveau standard capable de faire face à cette affluence et dont la taille sera indiquée par le nombre d'appels auxquels il pourra répondre sans attente pendant une minute.

1. Donner la loi de probabilité de la v.a. qui représente le nombre d'appels en une minute.
2. Quelle est la probabilité d'observer, en une minute, (a) 2 appels, (b) 3 appels, (c) 6 appels ?
3. Si le standard peut absorber sans attente 2 appels à la minute, pendant quelle proportion de son temps de fonctionnement ce standard donne-t-il satisfaction ?
4. Avec le taux actuel d'appels à la minute, quelle est la taille du standard (en nombre d'appels auquels il peut répondre par minute) qui donnera satisfaction pendant 95% de son temps de fonctionnement ?
5. L'éditeur estime, avec les nouveaux titres prévus à son programme de production, qu'il recevra en moyenne 5 appels par minute dans 2 ans. Quelle doit être la taille du standard qui, dans 2 ans, donnera satisfaction environ 95% du temps de fonctionnement ?

Exercice 19 Les variables X_1 et X_2 suivent la loi de Poisson avec, respectivement, λ_1 et λ_2 comme paramètres. On suppose $\lambda_1 < \lambda_2$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 \leq k) > P(X_2 \leq k)$. Indication : utiliser la dérivée.
2. Donner une interprétation de ce résultat dans le modèle de centrale téléphonique.
3. Exprimer le résultat de 1. en termes des fonctions de répartition de X_1 et X_2.

Exercice 20 On joue à pile ou face avec une pièce truquée telle que la probabilité d'obtenir un pile soit égale à $p \in]0,1[$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir r piles.

1. Déterminer la loi de la v.a. X^r modélisant ce nombre de lancers. Calculer son espérance.
2. Soit Y_1 la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers séparant les deux premiers piles. Les variables X^1 et Y^1 sont-elles indépendantes ? Sont-elles identiquement distribuées ?
3. Soient $X_1, \dots, X_k$ des v.a. i.i.d. de loi géométrique de paramètre p. Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_k$?