Université de Franche-Comté
Département de Mathématiques Mars/Avril 2007

LICENCE 2 ANNÉE - PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES
TD – Feuille 5

Variables aléatoires continues (et autres)

On suppose que toutes les variables aléatoires en question sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dans certains cas il sera commode d'en choisir des réalisations concrètes.

Exercice 1 1. Une v.a. peut-elle avoir pour densité la fonction f définie par $f_X(t) = C(1-t^2)$ pour $t \in [-1,1]$, et $f_X(t) = 0$ sinon, avec C une constante réelle ?

2. Quelle est la fonction de répartition de X, lorsqu'elle existe ? Tracer son graphe.

3. Trouver $E[X]$, $V[X]$ dans ce cas. Trouver la médiane de X.

Exercice 2 Le fonction de répartition d'une v.a. X est donnée par $F(t) = 0$ pour $t < 0$, $F(t) = t/4$ pour $0 \leq t < 1$, $F(t) = 1/2 + (t-1)/4$ pour $1 \leq t < 2$, $F(t) = 11/12$ pour $2 \leq t < 3$, enfin $F(t) = 1$ si $t \geq 3$.

1. Trouver $P(X < 2)$, $P(1/2 < X < 3/2)$, $P(X \geq 2/3)$.

2. X admet-elle une densité ?

3. Calculer $E[X]$. Trouver la médiane de X.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire de type $\mathcal{U}([-1,1])$. Quelle est la loi de $Y = X^2$?

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1/2e^{-|x|}$. Montrez que f est une densité. On parlera de loi de Laplace si une variable aléatoire X admet f comme densité. Déterminez l'espérance et la variance de X.

Exercice 5 Proposer un modèle pour la v.a. X décrivant le résultat d'un athlète en saut en hauteur, si
- en moyenne, une tentative sur quatre n'est pas valide, car il percute la barre, son résultat est alors zéro ;
- le résultat est modélisé par un réel positif ou nul.

Cette variable aléatoire est-elle discrète ? à densité ?

Exercice 6 1. Soit F_X la fonction de répartition d'une v.a. X. Soient E, V l'espérance et la variance de X, respectivement. On pose $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la fonction de répartition de Y. Donner $E[Y]$, $V[Y]$.

2. Soit maintenant X de type normal centrée réduite (c'est-à-dire, de paramètres $m = 0$, $\sigma = 1$).
Donner le type et les paramètres de Y.

Exercice 7 1. On considère une v.a. X de type normale centrée réduite (c'est-à-dire, de paramètres $m = 0$, $\sigma = 1$). Trouver la densité de $Y = X^4$, puis celle de $Z = X^4/2$.

2. Trouver $E[Y]$, $E[Z]$ (utiliser un changement de variable, puis l'intégration par parties).

3. On considère une v.a. X de type normale et de paramètres $m = 1$, $\sigma = 1$. Trouver la densité de $W = 2X+3$.

4. A l'aide de calculatrice ou du tableau de la loi normale centrée réduite, trouver $P(W \leq 4.2)$, $P(W > 3.7)$, $P(-0.8 \leq W \leq 4)$.

Exercice 8 On suppose que la durée de conversation téléphonique, mesurée par un nombre réel exprimé en minutes, est une v.a. continue de type exponentiel du paramètre 5 (i.e., sa densité est $f_X(t) = 5e^{-5t}, t > 0$, et $f_X(t) = 0, t < 0$.)

1. Trouver $E[X]$ et $V[X]$.

2. Donner la fonction de répartition de X.

3. Quelle est la probabilité qu'une personne téléphone plus de 10 minutes ? Entre 10 et 20 minutes ?

4. On suppose maintenant que vous payez un euro par minute entamée ; soit Y la v.a. comptant le coût de la communication. Montrer que $Y = \mathrm{Ent}(X) + 1$ ($\mathrm{Ent}(\cdot)$ signifie la partie entière d'un réel). Trouver la loi de Y.

5. Quelle est la probabilité que $X = 10$? Que $Y = 10$? Faire le lien avec les types respectives de X, Y.

Exercice 9 1. La v.a. X représentant le temps de vie d'un certain composant éléctronique peut-elle avoir pour densité $f_X(t) = 10/t^2$, pour $t > 10$, et $f_X(t) = 0$ sinon ?

2. Calculer $P(X > 10)$ et $P(X > 20)$.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. Quelle est la probabilité que parmi six composants, au moins trois fonctionnent durant au moins 20 heures ? On supposera i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées) les durées de vie des différentes composants. Indication : introduire Y la v.a. comptant le nombre de composants en service apres 20 heures de travail, reconnaitre son type et son paramètre.

Exercice 10 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ. On pose $M = \min(X, Y)$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de M.

Exercice 11 1. On choisit au hasard un point dans l'intervalle $[-1, 1]$, on note X sa coordonnée. Donner la densité et la fonction de repartition de X, puis la fonction de repartition et la densité de $Y = |X|$. Quel est le type de Y ? Trouver $E[Y]$, $V[Y]$.

2. On choisit au hasard et de manière indépendante n points dans $[-1, 1]$. On note Y le nombre de points dans l'intervalle $[-1/3, 1/3]$. Donner le type et la loi de Y.

3. On prend $n = 10$, on range les dix points dans l'ordre croissant et on note Z la coordonnée du troisième point. Trouver la loi de Z.

4. On prend maintenant n grand. On considère Y_n le nombre de points qui tombent dans $[0, 1/n]$. Trouver, approximativement, la probabilité $P(Y_n = 5)$ et $P(Y_n \geq 2)$ (utiliser la v.a. W qui représente la limite de Y_n, lorsque $n \to \infty$).

Exercice 12 On choisit au hasard et de manière indépendante deux points dans l'intervalle $[0, 1]$. On note X la distance entre les deux points. Déterminer la fonction de répartition et la densité de X, puis de X^2.

Exercice 13 On considère une v.a. X de type exponentielle de paramètre α. Soit $Y = \ln X$, $Z = \tan X$.

1. Donner la densité f_Y.
2. Montrer que Z est finie "presque surêment", i.e., la valeur de Z est un nombre réel avec probabilité 1.
3. On suppose $\alpha = 1$. Calculer $P(Z > 0)$.

Exercice 14 On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. On note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Soit Y la variable aléatoire telle que $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. Rappeler la loi suivie par Y.
2. En utilisant la calculatrice ou le tableau de la loi normale cenrée réduite, calculer la probabilité pour que X diffère de sa moyenne d'au plus 3 fois son écart type.
3. Même question avec "3 fois" remplacé successivement par "1 fois", "2 fois" et "4 fois" son écart type.

Exercice 15 Une usine fabrique des barres de métal de 2 mètres de long en moyenne. Soit X la longueur d'une barre, on suppose que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Sachant que $E(X^2) = 4.01$, déterminer m et σ.
2. Quelle est la probabilité qu'un barre sortant de l'usine mesure entre 1.98 et 2.02 mètres ?
3. Une barre est jugée bonne si elle mesure entre 1.98 et 2.02 mètres. L'usine fabrique 10^6 barres à l'année. Soit Y le nombre de mauvaises barres fabriquées dans l'année. Quelle est la loi de Y ? Donner une valeur approximative de $P(Y = k)$.

Exercice 16 1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre α. Montrez que :

$$P^{X \geq s}(X \geq t + s) = P(X \geq t), \forall t, s \geq 0$$

2. Soit N_t une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λt. On pose $T = \inf\{t \geq 0; N_t = 1\}$ Quelle est la loi de la variable aléatoire T ? Calculez $E(T)$ et $V(T)$

Exercice 17 Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. La durée de vie moyenne d'une ampoule halogène mesurée en années est modélisée par une variable aléatoire à densité T, de densité définie par $f(t) = (at + b)e^{-\beta t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On observe que $E(T) = \frac{5}{3\beta}$.

1. Exprimer a et b en fonction de β.
2. Déterminez la fonction de répartition F de la variable aléatoire T.
3. On pose $\beta = 3$. Calculez la probabilité que l'ampoule dure plus de 300 jours, sachant qu'elle fonctionne encore au bout de 100 jours. (On supposera qu'une année comporte 365 jours).