

LICENCE 2 ANNÉE - PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES  
TD – Feuille 6.1

Estimations, Théorèmes limites et Statistiques

---

**Exercice 1** On lance  $n$  fois un dé 6 faces équilibrés, et on note  $S_n$  la somme des points obtenus.

1. Quelle est la probabilité que  $S_n/n$  converge vers 3.5? Vers 3?
2. Choisir  $n$  de sorte que, approximativement, on ait  $\mathbb{P}\{|S_n/n - 3.5| \geq 0.1\} \leq 0.1$ .

**Exercice 2**

1. On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  sont des va iid de loi  $\mathcal{N}(5, 1)$ 
  - a) Quelle est la loi de  $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ ?
  - b) Pour  $\epsilon = 0.1$ , estimer  $\mathbb{P}\{|Y_n - 5| > \epsilon\}$  en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  - c) Calculer cette même proba en utilisant explicitement la loi de  $Y_n$  et la table de la loi normale centrée réduite.
2. On suppose maintenant que  $X_1, \dots, X_n$  sont des va iid de loi  $\mathcal{U}(0, 5, 10)$ , et on pose de même  $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ .
  - a) Estimer  $\mathbb{P}\{|Y_n - 5| > 0.04\}$  en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Regarder le cas  $n = 225$ .
  - b) Affiner cette estimation sans calculer la loi de  $Y_n$  en utilisant le TCL...

**Exercice 3 (Sondage et Intervalles de confiance)**

1. Soit  $X$  la variable aléatoire modélisant l'expérience : "prendre un individu au hasard et regarder s'il veut voter pour le candidat A ou non". On suppose que dans la population totale, une proportion  $p$  d'individus va voter pour A. Quelle est la loi de  $X$ ?
2. On répète  $n$  fois l'opération, et on note  $X_i$  la variable aléatoire modélisant le résultat du  $n$ -ième tirage. Quelle est la loi de  $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ ?
3. On pose  $S_n = Y_n/n$ ,  $Z_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \sqrt{n} \frac{S_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$  et  $W_n = \sqrt{n} \frac{S_n - p}{\sqrt{S_n(1-S_n)}}$ . Invoquer les théorèmes du cours qui permettent d'approcher ces différentes variables aléatoires pour  $n$  grand.  
Donnez les limites de ces variables aléatoires (limite en loi ou limite presque sûre).
4. Donnez  $q$  tel que  $\mathbb{P}(|W_n| \leq q) = 0.95$ . En déduire un intervalle (aléatoire)  $I$  tel que  $\mathbb{P}(p \in I) = 0.95$ . Ce  $I$  est appelé "intervalle de confiance pour  $p$  au seuil de confiance  $\alpha = 95\%$ ".
5. L'institut de sondage Ifop a réalisé le 5 et 6 avril 2007 auprès d'un échantillon national de 953 personnes un sondage d'intention de vote. A deux semaines du 1er tour, Sarkozy serait à 29,5%, Royal à 22%, Bayrou à 19% et Le Pen à 14%, selon les résultats de ce sondage.  
Donnez les intervalles de confiance au seuil de 95% des estimations d'intention de vote pour ces différents candidats. Peut-on, d'après ce sondage, et en considérant que personne ne va changer d'avis d'ici là, faire un pronostique valable pour les candidats présents au second tour?