Feuilles de TD 2 et 3

Exercice 1 : Exemple de variable aléatoire

Soit la variable aléatoire X prenant les valeurs 0, 1, 2, 5 et 8 et telle que la fonction de répartition vérifie :$F_X(0) = 0.5$; $F_X(5) = 15/16$; $\mathbb{P}\Big(X = 2\Big) = \mathbb{P}\Big(X = 8\Big)$; $\mathbb{P}\Big(X = 1\Big) = \mathbb{P}\Big(X = 2 \cup X = 8\Big)$.

1. Donnez la loi de probabilité de X, sa fonction de répartition et faire une représentation graphique.
2. Calculez son espérance et sa variance.

Exercice 2 : variables aléatoires

D'après les résultats de nombreuses enquêtes, il a été établi que seulement 30 personnes sur 100, qui ont été sélectionnées au hasard pour compléter un questionnaire sur un sujet quelconque, retournent le questionnaire complété à l'auteur du sondage.
Supposons qu'une maison de sondage ait sélectionné au hasard 4 personnes et qu'un questionnaire leur soit expédié. On veut définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X suivante: nombre de personnes parmi les quatre complétant et retournant le questionnaire à la maison de sondage.

1. Enumérer la liste des événements possibles, en notant par R: personne ayant retourné le questionnaire, et par N: personne n'ayant pas retourné le questionnaire.
2. Définir la loi de probabilité de X.
3. Vérifier que $\sum P(X = x_i) = 1$.
4. Déterminer $F_X(1)$ puis $F_X(3)$. Décrire avec une phrase ce que veulent dire ces quantités.
5. Quel est le nombre le plus probable de personnes, parmi 4, qui vont retourner le questionnaire ?

Exercice 3 : espérance d'une variable aléatoire

Une corporation sans but lucratif veut lancer une vaste opération dite "Opération Fierté" pour inciter les gens à souscrire à un fonds qui permettrait de financer, en partie, la construction d'un complexe sportif. D'après l'expérience du président de la corporation dans d'autres campagnes similaires, les montants souscrits varient, pour chaque individu sollicité, selon une certaine loi de probabilité: voir tableau ci dessous. De plus, 79 individus sur 1000 sollicités ne souscrivent aucun montant.

Montant souscrit (en euros)	Probabilité
1000	0.001
500	0.010
200	0.050
100	0.120
50	0.150
20	0.200
10	0.150
5	0.100
2	0.080
1	0.060

1. Quel est le montant espéré par individu sollicité ?
2. La corporation espère recueillir 200 000 euros. Environs combien d'individu devrait-on solliciter ?

Exercice 4 : variable aléatoire discrète

On considére X_1 une variable aléatoire suivant la loi "uniforme" sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, c'est à dire: $\mathbb{P}\Big(X_1 = 1\Big) = \mathbb{P}\Big(X_1 = 2\Big) = \ldots = \mathbb{P}\Big(X_1 = 6\Big) = 1/6$

- Calculez $\mathbb{E}\Big(X_1\Big)$, puis $\mathbb{P}\Big(X_1 \in \Big[\mathbb{E}(X_1) - 1/2, \mathbb{E}(X_1) + 1/2\Big]\Big)$.
- Soit X_2 une autre variable aléatoire indépendante de X_1, ayant la même loi de probabilité que X_1. Quelles sont les valeurs possibles pour $Y = (X_1 + X_2)/2$?
- Calculez $\mathbb{P}\Big(Y \in \mathbb{E}(Y) - 1/2, \mathbb{E}(Y) + 1/2\Big)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 5 : valeur absolue d'une variable aléatoire

Considérons une variable aléatoire dicrète X, dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

$\widetilde{x}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}\Big(X = \widetilde{x}\Big)$	0.2	0.1	0.01	0.04	0.25	0.3	0.1

.

- Déterminez la loi de probabilité de $\mid X \mid$.
- Calculez $\mathbb{E}\Big(\mid X \mid \Big)$, puis $\sigma^2(X)$

Exercice 6 : densité de probabilité

Une variable aléatoire continue admet pour loi de densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = 2 - ax$ pour $x \in [0, 2]$ et nulle ailleurs.

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit une loi de densité de probabilité.
2. Pour une telle valeur de a, obtient-on réellement une loi de densité de probabilité ?

Exercice 7 : densité de probabilité

Une variable aléatoire X a pour densité de probabilité $f(x) = a + \frac{2x}{9}$ sur l'intervalle $\Big[1; 4\Big]$ et est nulle en dehors de cet intervalle.

1. Quelle doit-être la valeur de a ?
2. Calculez son espérance et sa variance.
3. Quelle est sa fonction de répartition ?
4. Calculez les probabilités suivantes :
   $\mathbb{P}\Big(X = 2.5\Big)$; $\mathbb{P}\Big(X < 1\Big)$; $\mathbb{P}\Big(X > 3\Big)$ et $\mathbb{P}\Big(2 \leq X \leq 3\Big)$.

Exercice 8 : loi d'une v.a.

Un revolver à six coups ne contient qu'une balle dans son barillet que l'on fait tourner de façon aveugle avant chaque tir.X est la variable aléatoire qui décrit l'événement "le coup part au Xème essai".

1. Quelle est la loi de distribution des probabilités de X ?
2. En déduire la fonction de répartition.
3. Quelle est la probabilité que le coup ne parte pas avant le 8ème essai ?

Exercice 9 : loi de Bernouilli

On considère n variables aléatoires indépendantes, $X_1, X_2, \dots, X_n$. Toutes ces variables on la même loi de probabilité : la loi de Bernoulli de paramètre p qui est définie, par exemple, par $\mathbb{P}\Big(X_1 = 1\Big) = p$ et $\mathbb{P}\Big(X_1 = 0\Big) = 1 - p$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Si X_i représente une expérience dont la probabilité de succès est égale p, alors S_n représente le nombre de succès parmi ces n expériences indépendantes.

- Quelles sont les valeurs possibles pour la variable S_n ?
- En notant C_n^k le nombre de combinaisons possibles de k éléments parmi n éléments, montrez que
$$\mathbb{P}\Big(S_n = k\Big) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$
- Vérifiez que la somme des probabililtés $\mathbb{P}\Big(S_n = k\Big)$ fait bien 1.
- Que valent $\mathbb{E}(S_n)$, et $\mathrm{Var}(S_n)$?
- **Plus dur :** on pose $\nu_m = \inf n \geq 1\,,\, S_n = m$ et $N_m = \nu_m - m$. Déterminer la loi de N_m et sa fonction génératrice.
- En déduire l'espérance et la variance de N_m.

Exercice 10 : Estimation de paramètres d'une v.a.

Parmi la population des singes d'une certaine forêt tropicale, on note p la proportion de singes mâles. Si cette proportion est trop forte ou trop faible (par rapport à la proportion "normale" $1/2$), alors cela veut dire qu'il y a un sérieux dérèglement démographique, et les scientifiques pourront chercher la cause possible de ce dérèglement (pollution, changement de climat, etc). Afin d'estimer cette propotion p, on capture n singes au hasard. Pour chacun des singes, on note $X_i = 0$ si le singe est une femelle, et $X_1 = 1$ si c'est un mâle. *Pour simplifier les calculs*, on va supposer que l'on a capturé 4 singes. Sur cet échantillon de 4 singes, on note $\hat{p}$ la proportion de mâles.

- Exprimez $\hat{p}$ en fonction de $X_1,\ X_2, \ldots, X_4$. Pourquoi doit on considérer $\hat{p}$ comme une variable aléatoire ?
- Quelle est la loi de $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$?
- Que valent $\mathbb{E}\Big(\hat{p}\Big)$ et $\mathrm{Var}(\hat{p})$?
- On suppose que la proportion p (inconnue) vaut $0,5$. On voudrait savoir si $\hat{p}$ approxime suffisament bien p, disons à $1/10$ près. Calculez $\mathbb{P}\Big(\hat{p} \in [p - 1/10, p + 1/10]\Big)$. En quoi cette valeur nous renseigne-t-elle sur la "précision" de $\hat{p}$?
- On suppose maintenant que l'on a capturé 10 singes au lieu de 4. On note $\hat{p}_2$ la proportion de mâles dans cet échantillon. En appliquant une méthode similaire à la question précédente, calculez $\mathbb{P}\Big(\hat{p}_2 \in [p - 1/10, p + 1/10]\Big)$. Quel est, entre $\hat{p}$ et $\hat{p}_2$, l'estimateur le plus performant pour estimer p ?

Exercice 11 : comparaison de deux variables aléatoires

On considère deux variables X_1 et X_2. La loi de probabilité du couple (X_1, X_2) est donnée dans le tableau suivant.

$(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2})$	-1	0	1
0	$1/16$	$1/16$	$1/32$
1	$1/16$	$1/16$	$2/16$
2	$5/16$	0	$9/32$

On peut donc lire sur ce tableau, par exemple, que $\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 0) = 0$

- Déterminez la loi de X_1, calculez $\mathbb{E}(X_1)$.
- Mêmes questions pour X_2.
- Calculez $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$ et $\mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$ Est ce que X_1 et X_2 sont indépendantes?