Feuilles de TD 5

Exercice 1

Soit X une variable continue dont la densité de probabilité est donnée par

$$f_X(x) = K.(1 - x^2)1_{[-1,1]}(x)$$

.

- Calculez K pour que f_X soit bien une densité de probabilité.
- Calculez l'espérance et la variance de X.
- Calculez aussi $\mathbb{P}\big(X \in [0,1]\big)$.

Exercice 2

Dans une population masculine, il existe 46% de fumeurs. On tire au sort un échantillon de n sujets dans cette population.

- Quelle est la loi du nombre de fumeurs pour un échantillon de n=10 hommes ?
- Quelle est la loi du nombre de fumeurs pour un échantillon de n=100 hommes ?
- Donner dans les 2 cas précédents la probabilité de trouver moins de 30% de fumeurs dans l'échantillon.

Exercice 3

On considère une variable X qui suit une loi $\mathcal{B}(1000, 1/2)$.
On veut calculer $\mathbb{P}\Big(X/1000 \in [1/2 - 1/10 + 1/2 + 1/10]\Big)$

- Si on veut caculer directement cette probabilité, il faut faire une somme. Combien y a-t-il de termes dans cette somme ? Pour chaque terme, combien y-a-t-il d'opérations $\times$ à réaliser ?
- Donnez une majoration de $\mathbb{P}\Big(X/1000 \in [1/2 - 1/10 + 1/2 + 1/10]\Big)$ en utilisant l'inégalité de Tchebytchev.

Exercice 4

On considère les familles de 3 enfants. On admettra que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.5 et que le sexe de chacun des enfants n'influe pas sur celui des autres.

- Quelle est la probabilité qu'une famille de 3 enfants ne comporte pas de garçon ?
- Quelle est la probabilité qu'une famille de 3 enfants comporte 1 seul garçon ?
- Quelle est la probabilité qu'une famille de 3 enfants comporte au moins 1 fille ?
- Quelle est la probabilité qu'une famille de 3 enfants comporte trois enfants du même sexe ?
- Calculez l'espérance et la variance de la variable "nombre de naissance de garçons dans une famille de 3 enfants".

Exercice 5

Soient trois urnes contenant des boules blanches et noires. La proportion de boules noires est variable d'une urne à l'autre et vaut : $1/2$ pour la première urne, $1/3$ pour la deuxième urne et $1/4$ pour la troisième. On tire une boule dans chaque urne, quelle est la loi de la variable aléatoire X définissant le nombre de boules noires obtenue ? *Plus dur :* sachant que l'on a tiré une seule boule noire sur 3, quelle est la probabilité que cette boule provienne de la première urne ?

Exercice 6

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre 2 (de densité de probabilité $f_X(t) = 2\,e^{-2t}\,1_{\mathbb{R}^+}(t)$). On voudrait connaître la loi de probabilité de la variable suivante: $Y = [X]$ (partie entière de X).

- Quelles sont les valeurs possibles pour Y ?
- Comment calculer $\mathbb{P}\big(Y = k\big)$ en se servant de la loi de X ?
- Quelle est la loi de Y ?

Exercice 7

Un sys-admin d'un gros réseau a envisagé de fêter son anniversaire avec ses amis bien qu'étant de garde ce soir là. Toutefois, avant de lancer les invitations, il veut évaluer les chances d'être disponible à cette date. Il calcule la moyenne des interventions par garde durant le mois précédent et trouve 2. Il fait alors l'hypothèse que le nombre d'intervention suit une loi de Poisson.

- Quelle est la probabilité que le sys-admin passe toute la soirée avec ses amis sans être dérangé ?

- Il estime qu'au delà de 3 interventions pendant la soirée, l'ambiance de la fête sera cassée. Quelle est cette probabilité ?

Exercice 8

Un groupe de programmeurs est chargé d'écrire un grand nombre de programmes simples, dans un temps très court. Notons p la proportion de programmes defectueux produits pendant le mois de Janvier. Afin d'estimer p, le responsable de ce groupe choisit au hasard n programmes parmis ceux réalisés pendant le mois. Il soumet chacun de ces programmes à une étude minutieuse des bugs (béta-test). Chaque étude prend beaucoup de temps et occupe un testeur à temps plein, ce qui justifie le fait qu'il soit impossible de tester *tous* les programmes.

- Montrez que, même si on ne connaît pas p, on peut affirmer que $p(1-p) \leq 1/4$.
- On notera $\hat{p}$ la proportion de programmes bugués trouvée sur l'échantillon des n programmes. Quelle est la loi de $\hat{p}$?
- En utilisant l'inégalité de Tchebytchev, montrez que

$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{p} - p\right| \geq t\right) \leq \frac{1}{4nt^2}$$

.

- Calculez le nombre de programmes à tester pour que

$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{p} - p\right| \geq 0,1\right) \leq 5\%$$

.

- On veut maintenant que $\hat{p}$ estime p au pourcentage près. Calculez le nombre de programmes qu'il faudrait tester pour avoir

$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{p} - p\right| \geq 0,01\right) \leq 5\%.$$

(est-ce raisonnable ?)

- Une autre méthode pour évaluer le nombre de bugs (un programme défectueux peut comporter plusieurs bugs) consiste à faire tester, pour mettons 1000 programmes, 50 programmes. On fait tourner les programmes sur des données et on trouve alors 27 programmes sans bug. En supposant que le nombre de bugs par programme suit une loi de Poisson, quelle est le nombre total de bugs dans l'ensemble des 1000 programmes ?

Exercice 9

Afin d'améliorer l'organisation d'un magasin vendant des produits P, on a réalisé une étude sur la fréquentation de la boutique. Celle-ci amontré que le nombre horaire de visiteurs suivait une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

- Quelle est la probabilité qu'un client au moins se présente en une heure ?
- On estime à 20% la probabilité qu'un visiteur achète effectivement un produit P. Quelle est la probabilité qu'en une heure 2 personnes achètent un produit P ?
- Déterminer l'espérance et la variance du nombre d'acheteurs (du produit P) par heure.