Chapitre 0

Exercices sur les «révisions».

(A) : Exercice d'application immédiate du cours : a priori facile.

(E) : Exercice pouvant faire partie d'un texte d'examen : avec des indications, pas trop difficile.

(R) : Exercice de réflexion : niveau soutenu.

Exercice 0.1 (R)
Montrer, pour tous réels x, y, l'inégalité : $x^2+y^2 \geqslant 2xy$. En déduire, pour tous réels x, y, z, l'inégalité :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx.$$

Exercice 0.2 (A)
Soient a et x des nombres réels. On suppose $a \neq 0$ et $|x - a| < |a|$.
Montrer que x est non nul et que les deux nombres x et a, ont le même signe.

Exercice 0.3 (A)
Résoudre les équations ou inéquations suivantes. Lorsque cela a un sens, on cherchera une interprétation en termes de distances.

1° $|x| = |x + 2|$

2° $|x + 1| = 2|x - 2|$

3° $|x - 1| \leqslant 3|x - 5|$

4° $|x + 1| > x + 4$

5° $|x + 1| \geqslant x - 1 + |x - 2|$

Exercice 0.4 (E)

Soit x un nombre réel **positif ou nul**. On pose : $y = \dfrac{x+3}{x+1}$.

1° Montrer : $x = \sqrt{3} \iff y = \sqrt{3}$.

Dans la suite, on supposera $x \neq \sqrt{3}$

2° Calculer $\dfrac{y - \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}}$. En déduire l'inégalité : $|y - \sqrt{3}| < |x - \sqrt{3}|$.

Exercice 0.5 (A)
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1° $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \dfrac{1}{100}$

2° $\sqrt{2x^2 - 8} > x$

3° $\sqrt{x+1} > x - 1$.

Exercice 0.6 (R)
Soit $E = \left\{p + q\sqrt{2} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}\right\}$ et soit $u = \sqrt{2} - 1$.

1° Montrer que si n est un nombre entier et si v appartient à E, alors nv appartient à E.

2° Montrer que si n est un entier tel que $n \geqslant 1$, alors u^n appartient à E.

3° Montrer $0 < u < \dfrac{1}{2}$. En déduire que si n est un entier tel que $n \geqslant 1$, alors : $0 < u^n < \dfrac{1}{n}$.

4° Soit a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$.
Montrer qu'il existe un entier n tel que $0 < u^n < b - a$.
En déduire qu'il existe un élément de E appartenant à l'intervalle $\left]a, b\right[$.

Exercice 0.7
Soit n un entier naturel non nul.

1° **(A)** Démontrer l'égalité

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

2° **(E)** Soit $A = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots = \displaystyle\sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 2k\leqslant n}} \binom{n}{2k}$ et

soit $B = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \cdots = \displaystyle\sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 2k+1\leqslant n}} \binom{n}{2k+1}$.

Montrer que $A = B$.

3° **(R)** Démontrer l'égalité

$$0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + k\binom{n}{k} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

(*On pourra utiliser la fonction* $f \ : \ t \longmapsto (1+t)^n$, *ou alors établir une formule concernant* $k\binom{n}{k}$)

4° **(R)** Utiliser ce qui précède pour obtenir la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 0.8 (E)
Démontrer les formules :

1° $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \dfrac{\cos 2x \ \sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$;

2° $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\cos 4x \ \sin 3x}{2 \sin x}$.

Exercice 0.9 (A) puis (E)
1° Démontrer les égalités :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ ; \qquad \cos\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

2° Établir des formules analogues pour $\cos\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{24}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{24}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{16}$.