Chapitre I

Exercices sur les limites, la continuité et la dérivation.

Exercice I.1 (A), (E) ou (R)
Déterminer les limites suivantes (si elles existent) (le cas échéant, distinguer la limite à droite et la limite à gauche) :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x+5}$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^2-6x+5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+x^2)$; i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(x+x^2)}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^3+2}$; k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$; l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x}\ln(x)$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; n) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\ln(x+1)$; o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$

p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}}{x-1}$; q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-3)}{x-1}$; r) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(2x-3)}{x-1}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$; t) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\sin x}$; u) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\sin x}$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$; w) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$; x) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos x-\sqrt{3}}{2\sin x-1}$

Exercice I.2 (E)
Soit x un nombre réel. La partie entière de x est l'entier noté $\mathrm{E}(x)$ tel que :

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1.$$

a) Préciser $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{E}(x)$ suivant que x_0 soit entier ou non, et en distinguant éventuellement limite à gauche et limite à droite. En quels points la fonction E est-elle continue ? discontinue ? Dessiner la courbe représentant cette fonction.

b) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - \mathrm{E}(x).$$

En quels points, cette fonction est-elle continue ? discontinue ? Montrer que cette fonction est périodique de période 1. Dessiner la courbe représentant cette fonction.

c) (R) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \mathrm{E}(x) - x + \big(x-\mathrm{E}(x)\big)^2.$$

En quels points, cette fonction est-elle continue ? discontinue ? Montrer que cette fonction est périodique de période 1. Dessiner la courbe représentant cette fonction.

Exercice I.3 (A)

On considère la fonction : $f \ : \ x \longmapsto |x^2 - 1|$.
f est-elle dérivable en $x = -1$? $x = 0$? $x = 1$? f est-elle continue en ces mêmes points ?

Exercice I.4 (A)

On considère la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1 + \cos(x)}{1 - \sin(x)}$.
Pourquoi est-elle dérivable sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$?
Déterminer sa dérivée.

Exercice I.5 (E)

Soit n un entier, $n \geqslant 1$. On considère la fonction :

$$f \ : \ x \mapsto \sqrt{x^{n+1} + x^n}.$$

a) Étudier la dérivabilité de cette fonction en $x = 0$.

b) Calculer sa dérivée pour $x \in]0, +\infty[$.

Exercice I.6 (E)
Déterminer les dérivées des fonctions f définies par les formules suivantes :

$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$; a) $f(x) = \dfrac{\sin^2(x) - \sin(x) + 1}{2 \ \sin^2(x) - 1}$; b) $f(x) = \sin\big(\ln(x)\big)$

c) $f(x) = \ln\big(\sin(x)\big)$; d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - \sin(x)}{2 - \cos(x)}}$; e) $f(x) = x \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

Exercice I.7 (E)

Soit n un entier, $n \geqslant 1$. Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions f définies par les formules :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$; b) $f(x) = x^2(1 + x)^n$

c) $f(x) = \sin x$; d) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$

Exercice I.8 (E)

Soit n un entier $n \geqslant 1$. On pose :

$$S_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} \quad \text{et} \quad T_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n.$$

a) Montrer que la dérivée de T_n est S_n.

b) Montrer, si $x \neq 1$, la formule : $T_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - x}{x - 1}$.

c) En déduire, si $x \neq 1$, la formule :

$$S_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1}{(x - 1)^2}.$$

Exercice I.9 (E)
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{2x}$.

1. Quelle est la dérivée n-ième de la fonction f ?
2. Écrire la formule de Taylor-Young pour cette fonction, à l'ordre n, au voisinage d'un point x_0.
3. Donner le d.l.$_0(n)$ de f.

Exercice I.10 (E)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$
En utilisant la factorisation classique :
$1 - X^n = (1-X)(1+X+X^2+\cdots+X^{n-2}+X^{n-1})$ avec $X = 3x$, montrer que f admet un d.l.$_0(n)$.

Exercice I.11 (E)
Déterminer les développements limités des fonctions f suivantes, définies par l'expression de $f(x)$:

1. $f(x) = e^{-3x}$ (à l'ordre 4 au voisinage de 0) ;
2. $f(x) = \sin 2x$ (à l'ordre 5 au voisinage de 0) ;
3. $f(x) = \ln(1-x^3)$ (à l'ordre 6 au voisinage de 0) ;
4. $f(x) = \sqrt{1-x}$ (à l'ordre 3 au voisinage de 0) ;

Exercice I.12 (E)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $f(x) = e^{-2x}$ au voisinage de -1.
2. Déterminer le développement limité de $f\ :\ x \longmapsto \cos x$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$.
3. Déterminer le développement limité de $f\ :\ x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3+x}}$ au voisinage de 0, à l'ordre 2.

Exercice I.13 (E)

1. Déterminer le d.l.$_0(3)$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{9+x}\,\ln(1+3x)$.
2. Déterminer le d.l.$_0(4)$ de la fonction f définie par $f(x) = e^{x^2-x}$.
3. Déterminer le d.l.$_0(3)$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(2-x+x^2)$.
4. Déterminer le d.l.$_0(3)$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{(8-x)^2}$.

Exercice I.14 (E)

1. Déterminer, en vue de l'étude de ses branches infinies, un développement asymptotique à l'ordre 2, au voisinage de l'infini de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{(x+3)x}$.
2. Déterminer, en vue de l'étude de ses branches infinies, un développement asymptotique à l'ordre 2, au voisinage de l'infini de la fonction f définie par $f(x) = x \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$.

Exercice I.15 (E)
Déterminer à l'aide de développements limités les limites suivantes (si elles existent).

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - e^x}{x^2}$;

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt{4 - \frac{x}{3}}}{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x^2} - \cos x}{x^2}$;
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \ln \cos 2x + \sin^2 2x}{x^4}$;
5. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left[\exp\left(\dfrac{x-1}{x^2} \right) - \sqrt{1 + \dfrac{2}{x}} \right]$;
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{2x} \right)^x$;
8. $\lim\limits_{x \to 0} \left[x - x^2 \ln\left(\dfrac{x}{x-1} \right) \right]$;