Chapitre II

Exercices sur les études de fonctions.

Exercice II.1 (A)

Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x-3}\cdot$

Exercice II.2 (A)

Étudier la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{x-1}\cdot$

Exercice II.3 (E)

Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x-2}\cdot$

Exercice II.4 (A)
Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$.

Exercice II.5 (A) Étudier la fonction f définie par : $f(x) = x - \sqrt{x+1}$.
En particulier, on montrera que la courbe n'a pas d'asymptote, mais possède une branche parabolique dont on précisera la direction asymptotique.
On précisera qu'elle est la tangente au point d'abscisse $x = -1$.

Exercice II.6 (E) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1° Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire que f peut être prolongée à $\mathbb{R}$ par continuité. Soit $\widehat{f}$ ce prolongement.

2° Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire que $\widehat{f}$ est dérivable en $x = 0$ et préciser sa tangente à l'origine.

3° Terminer l'étude de la fonction.

Exercice II.7 (R)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 \, \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1° Montrer que f peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier. Soit g ce prolongement.

2° Montrer que g est dérivable en 0, et calculer sa dérivée.

3° Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.

4° Montrer que g' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Nous venons d'étudier un exemple classique d'une fonction «pathologique», qui est dérivable, mais dont la dérivée n'est pas continue. Il vaut mieux ne pas essayer de poursuivre l'étude de cette fonction !

Exercice II.8 (R)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1° Montrer que f peut être prolongée à $\mathbb{R}$ par continuité.

2° Montrer que son prolongement $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice II.9 (R)

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x \ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1° Montrer que cette fonction peut être prolongée à $\mathbb{R}$ par continuité.

2° En quels points ce prolongement est-il dérivable ?

Exercice II.10 (E)

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f \ : \ x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Exercice II.11 (E)

Étudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f \ : \ x \longmapsto \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}+5}{\mathrm{e}^{x}-2}\right).$$

Exercice II.12 (E)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$.

1° Déterminer son domaine de définition et son domaine de dérivabilité.

2° Calculer sa dérivée et montrer qu'il existe une fonction g telle que : $f'(x) = -\dfrac{x}{(x^3-1)^2}\ g(x)$; pour tout x appartenant au domaine de dérivabilité de f.

3° Étudier g et en déduire le tableau des variations de f.

4° Terminer l'étude de la fonction f.

Exercice II.13 (R)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

1° Montrer que f est définie et dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

2° Soit g définie par $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$. Montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

3° Étudier la fonction g. Peut-on en déduire que f est croissante ?

4° Terminer l'étude de f. Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes du domaine de définition. Montrer aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Dessiner la courbe représentant f.