Exercice 2.14 (R)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = |x|^{\frac{1}{x+2}}$

1° Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[$.

2° Soit g définie par $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x} - \ln(|x|)$. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

3° Étudier les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$. En déduire les variations de f.

4° Déterminer les limites de $f'(x)$ lorsque x tend vers 2 et 0.

5° Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de la droite d'équation $y = 1$.

6° Construire la courbe représentant f.

Exercice 2.15 (R)
On considère la fonction définie par : $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x+1} + x - 3$.

1° Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2° Montrer que la courbe représentant f possède :
– au voisinage de $-\infty$ une asymptote ;
– au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique d'axe vertical.

3° Déterminer f' et f''. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

4° Montrer que la courbe représentant f coupe son asymptote en un point.

5° Dessiner la courbe représentant f.

Exercice 2.16 (R)
Étudier la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

Chapitre III

Exercices sur les nouvelles fonctions de référence.

Exercice III.1 (A) puis (E)

1° Calculer $\arcsin(-x)$, $\arccos(-x)$, $\arctan(-x)$ en fonction respectivement de $\arcsin x$, $\arccos x$ et $\arctan x$.

2° Simplifier les expressions suivantes : $\sin(\arcsin x)$; $\sin(\arccos x)$; $\cos(\arccos x)$; $\cos(\arcsin x)$; $\tan(\arctan x)$ (On précisera dans chaque cas le domaine de validité.)

3° Établir des formules pour $\sin(\arctan x)$, $\cos(\arctan x)$, $\tan(\arcsin x)$, $\tan(\arccos x)$: (On précisera dans chaque cas le domaine de validité.)

Exercice III.2 (A)

On considère la fonction $f \ : \ x \longmapsto \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Donner l'ensemble de définition de f, sa parité, son ensemble de dérivabilité, calculer $f'(x)$ et calculer $f(1)$.
Déduire de l'étude précédente que
$\forall x > 0, \quad \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
Quelle formula analogue a-t-on pour $x < 0$?

Exercice III.3 (A) puis (E)

Après avoir précisé leurs ensembles de définition, représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1° $f_1 : x \longmapsto \arcsin(\sin x)$; 2° $f_2 : x \longmapsto \arccos(\cos x)$; 3° $f_3 : x \longmapsto \arctan(\tan x)$;

4° $f_4 : x \longmapsto \arccos(\sin x)$; 5° $f_5 : x \longmapsto \arcsin(\cos x)$.

Exercice III.4 (E)

Démontrer les égalités suivantes (en précisant leur domaine de validité).

1° $\tan\big(2\arctan x\big) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

2° $\cos\big(4\arctan x\big) = \dfrac{x^4-6x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

Exercice III.5 (R)

Simplifier l'expression : $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$. (On précisera le domaine de validité de la formule obtenue).

Exercice III.6 (E)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin(2x^2-1)$.

1° Montrer que f est définie et continue sur $[-1,1]$. Quelle particularité de f permet de réduire son domaine d'étude ?

2° Montrer que f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. Déterminer f'.

3° Montrer que :

si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\quad f(x) = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$;

si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $\quad f(x) = -2\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}$.

Donner, sur ces deux intervalles, une expression de $f(x)$ utilisant la fonction arccos.

4° Tracer la courbe représentant f.

5° La fonction f est-elle dérivable en -1 ? en 0 ? en 1 ?

Exercice III.7 (E)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

1° Étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$. En déduire que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En déduire aussi que f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$. Quelle propriété de f permettrait de réduire le domaine d'étude ?

2° Calculer la dérivée $f'(x)$.

3° Montrer que si x appartient à $[-1,1]$, alors $f(x) = 2\arctan x$.

4° Exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan x$ pour $x > 1$.

5° Tracer la courbe représentant f.

6° La fonction f est-elle dérivable en -1 ? en 1 ?