Exercice 3.8 (R)

Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{e}^{\arcsin x}$ et en donner une représentation graphique.

Exercice 3.9 (R)

Soit $a > 0$. On considère la fonction : $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)$.

1° Quel est son domaine de dérivabilité ? Calculer sa dérivée.

2° Pour quelles valeurs de x a-t-on : $\arctan x + \arctan a = \arctan\left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)$?

3° Donner une autre formule pour les autres valeurs de x, puis pour $a < 0$.

Exercice 3.10 (E)

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, démontrer les formules suivantes :

1° $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

2° $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Que vaut $\arctan 2 + \arctan 3$? et $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$?

3° Démontrer la formule de John Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$.

Exercice 3.11 (A)

Démontrer les formules

1. $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^x$;
2. $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$;
3. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{sh}(y)$;
4. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\ \mathrm{sh}(y)$.
5. Donner, en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$, des expressions de $\mathrm{sh}(2x)$ et de $\mathrm{ch}(2x)$.
6. Quelle est la relation analogue (en trigonométrie circulaire) de la relation :
   $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^x$?

Exercice 3.12 (R)

1. Démontrer pour tout x réel : $2\ \mathrm{argth}\big(\tan(x)\big) = \mathrm{argth}\big(\sin(2x)\big)$.
2. Démontrer pour tout x réel : $\arctan\big(\mathrm{sh}(x)\big) = \arcsin\big(\mathrm{th}(x)\big)$.
   On pose $f(x) = \arctan\big(\mathrm{sh}(x)\big)$.
3. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante.
4. Montrer que l'image de $\mathbb{R}$ par f est l'intervalle : $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. Montrer que la fonction f admet pour fonction réciproque la fonction g définie par :
   $g(y) = \mathrm{Argsh}\big(\tan(y)\big)$.

Chapitre IV

Exercices sur l'intégration.

Exercice IV.1 (A)

Pour chacune des fractions suivantes, la décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) et en donner une primitive.

$\dfrac{1}{x^2+3x+2}$; $\dfrac{x}{x^2+3x+2}$; $\dfrac{x^2}{x^2+3x+2}$; $\dfrac{x^4}{x^2+3x+2}$;
$\dfrac{1}{x^3+6x^2+11x+6}$; $\dfrac{1}{x^3+x}$; $\dfrac{x}{x^3-4x^2+5x-2}$.

Exercice IV.2 (A)

Evaluer les primitives :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}\,; \qquad \int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x\,; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}\,; \qquad \int \frac{x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x\cdot$$

Exercice IV.3 (E)

Evaluer les primitives :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}\,; \qquad \int \frac{x^2\ \mathrm{d}x}{x^4-1}\,; \qquad \int \frac{x\ \mathrm{d}x}{x^4-1}\,; \qquad \int \frac{x^4+1}{x^5+x^3}\,\mathrm{d}x\ \cdot$$

Exercice IV.4 (E)

Utiliser le changement de variable indiqué pour évaluer les primitives :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos(x)} \quad \left(u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right); \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos(x)} \quad \left(u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right);$$

$$\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \quad (u=\sin(x))\,; \qquad \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)\big(1-\cos(x)\big)^3}\,\mathrm{d}x \quad (u=\cos(x))\,;$$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x \quad (u=\mathrm{e}^x)\,; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{sh}(2x)} \quad (u=\mathrm{e}^x).$$

Exercice IV.5 (R)

Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto |x|$, qui s'annule en $x=1$.

Exercice IV.6 (A)

Utiliser la formule d'intégration par parties pour déterminer les primitives :

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x\,; \qquad \int \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x\,; \qquad \int x\ \sin(x)\ \mathrm{d}x.$$

Exercice IV.7 (E)

Déterminer les primitives :

$$\int \mathrm{Arcsin}(x)\ \mathrm{d}x\,; \qquad \int x^2\ \mathrm{Arctan}(x)\ \mathrm{d}x\,; \qquad \int (x^3+x^2)\mathrm{e}^{4x}\ \mathrm{d}x\,;$$

Exercice IV.8 (R)

Déterminer les primitives :

$$\int x^2\ \mathrm{Arctan}(\sqrt{x})\ \mathrm{d}x\,; \qquad \int x^3\ \sin(2x)\ \mathrm{d}x\,; \qquad \int x^2\ \ln(x^6-1)\ \mathrm{d}x\,;$$

Exercice IV.9 (E)

En utilisant le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, évaluer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 3} \cdot$$

En utilisant le changement de variable $x = 2 + \sin(t)$, évaluer l'intégrale :

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} \cdot$$

Exercice IV.10 (R)

Evaluer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x$.

Quelle est l'aire du disque de rayon 1 ?

Exercice IV.11 (E)

On désigne par I et J des primitives :

$$I = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\ \mathrm{d}x.$$

a) Calculer $I + J$.
b) Calculer $I - J$.
c) En déduire I et J.

Exercice IV.12 (R)

a) Utiliser la formule d'intégration par parties pour déterminer : $\displaystyle\int \frac{t^2\ \mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \cdot$

b) En déduire : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x) + C$.

Exercice IV.13 (R)

Evaluer les intégrales :

$$\int_0^4 \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}\ ; \qquad \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{\mathrm{e}^x}{(3 + \mathrm{e}^x)\ \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}\ \mathrm{d}x \cdot$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2 + \sqrt{x}}\ \mathrm{d}x\ ; \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + \sin(x)}} \cdot$$

Exercice IV.14 (R)

On considère l'intégrale : $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\big(1 + \tan(x)\big)\ \mathrm{d}x$.

a) En posant : $u = \dfrac{\pi}{4} - x$, montrer l'égalité : $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan(u)}\right)\ \mathrm{d}u$.

b) En déduire $I = \dfrac{\pi}{8}\ \ln(2) \cdot$