Chapitre V

Exercices sur les équations différentielles.

Exercice V.1 (A)
On considère l'équation différentielle linéaire : $y' - 4y = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3$.

1° Montrer qu'il existe un polynôme solution de cette équation.

2° Préciser quelle est l'équation sans second membre associée. La résoudre.

3° En déduire les solutions de l'équation.

4° Trouver la solution y de l'équation telle que $y(0) = -2$.

Exercice V.2 (A)
On considère l'équation différentielle linéaire : $y' - \dfrac{3}{x}\, y = x$.

1° En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver les solutions de cette équation.

2° Trouver la solution y de l'équation telle que $y(0) = 0$.

Exercice V.3 (E)
Résoudre les équations différentielles :

1° $y' - \left(\dfrac{2}{x^2}\right) y = 0\,;$

2° $y' = \dfrac{y-2}{x-1}\,;$

3° $t(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0\,;$

4° $y' - \dfrac{y}{x^2-1} = 1\,;$

5° $(x-1)y' + y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$

6° $xy' - y = \ln|x+1|$.

7° $2x + yy' = 0$

8° $(1-x^2)y' + y = 1$

9° $xy' + y = x$

10° $(\cos x)\, y' - (\sin x)\, y = \cos(2x)$

Exercice V.4 (E)
Les équation différentielles suivantes sont «à variables séparables». Les résoudre.

1° $y' = xy^2\,;$

2° $\sqrt{1-x^2}y' - \sqrt{1-y^2} = 0\,;$

3° $(1+x^2)y' + 2x + 2xy^2 = 0\,;$

4° $(1-t^2)y' - ty^2 - ty - t = 0$.

5° $y' = \dfrac{1-y}{1-2x}$

6° $(1+y)y' = 4x^3$

7° $(4-x^2)yy' = 2(1+y^2)$

Exercice V.5 (R)
Résoudre l' équation différentielle du premier ordre : $y^2 + y'^2 = 1$.

Exercice V.6 (R)
On considère l'équation différentielle (de Bernoulli) : $(E) y' + 2xy = 2xy^3$. Soit $x \mapsto y(x)$ une solution.
On considère la fonction z définie par $z(x) = \dfrac{1}{y(x)^2}$.

1° Montrer que $z'(x) = \dfrac{-2y'(x)}{y(x)^3}$.

2° Former une équation différentielle (E') vérifiée par z.

3° Résoudre (E') puis (E).

Exercice V.7 (A)
Pour chacune des équations différentielles du second ordre suivantes :

a) Donner la solution générale.

b) Trouver la solution particulière qui vérifie $y(0) = y'(0) = 1$.

1° $y'' + 3y' + 2y = 0$

2° $y'' + 2y' + y = 0$

3° $y'' + 2y' + 2y = 0$

4° $y'' - 6y' + 13y = 0$

5° $y'' - y' + y = 0$

6° $12y'' - 60y' + 75y = 0$

7° $20y'' + 9y' + y = 0$

8° $3y'' - 5y' - 2y = 0$

9° $y'' - 8y' + 17y = 0$

Exercice V.8 (R)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1° $y'' + 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^{-3x}$

2° $y'' + 2y' + y = x + 4$;

3° $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$

4° $y'' + 2y' + 2y = 5\,\sin(x)$.

5° $y'' + y = x^2 - 1$

6° $2y'' + y' - y = 3\cos 2x - \sin 2x$

7° $y'' - 4y = 13\cos 3x$

8° $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

Exercice V.9 (E)
Trouver la solution de l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = 6\,\mathrm{e}^{-x}$, telle que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.

Exercice V.10 (E)
Trouver la solution de l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 5\,\cos(t) + 2$, telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice V.11 (E) ou (R)
Trouver les solutions des équations différentielles :

1° $y'' + y = \cos(t)$

2° $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x + e^{2x}$

3° $y'' + 2y' - 8y = 4e^{2x}(3x+5)$

4° $y'' - 4y' + 13y = 10\,\cos(2x) + 25\,\sin(2x)$.

Exercice V.12 (R)
En utilisant la méthode de la variation des constantes trouver les solutions de l'équation différentielle :
$y'' - y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Exercice V.13 (R)
On considère l'équation différentielle (équation d'Euler) :

$$(E) \quad : \quad t^2 y'' + t y' + y = 0$$

On introduit une nouvelle variable u en posant $u = \ln(x)$. Soit z la fonction de la variable u, définie par $z(u) = z(\ln(x)) = y(x) = y(\mathrm{e}^u$.

1° Montrer les relations : $y'(x) = z'(\ln x)\dfrac{1}{x}$ et $y''(x) = z''(\ln x)\dfrac{1}{x^2} - z'(\ln x)\dfrac{1}{x^2}$.

2° Former une équation différentielle (E') vérifiée par z.

3° Résoudre (E') puis (E).

Exercice V.14 (R)
Résoudre l'équation différentielle suivante :
$y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$