Exercices

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = ln(x+1)$ **2.** $f(x) = ln(|x|+1)$ **3.** $f(x) = ln(|x+1|)$

4. $f(x) = \sqrt{x^2+x}$ **5.** $f(x) = \sqrt{cos(x)}$ **6.** $f(x) = tan(x^2+1)$

7. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{5-x}-1}$ **8.** $f(x) = (1+x)^x$

Exercice 2. *Calculs de limites*
Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+x-1}{2x^4-x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1+x^5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\sin^2(x)}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ 9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\dfrac{1}{x^2})^x$

Exercice 3. *Etudes succintes*
Déterminer dans chaque cas le domaine de définition, le domaine d'étude, le domaine de dérivabilité, l'expression de la dérivée et dresser le tableau de variation de la fonction.

1. $f_1(x) = \ln(x^4)$ 2. $f_2(x) = \ln^4(x)$ 3. $f_3(x) = \ln(4x)$

4. $f_4(x) = (x^2-2x)e^x$ 5. $f_5(x) = \sqrt{x^2-2}$ 6. $f_6(x) = \dfrac{sin(x)+cos(x)}{sin(x)-cos(x)}$

7. $f_7(x) = e^{\frac{x^3}{2}}$ 8. $f_8(x) = \sqrt{e^{x^3}}$ 9. $f_9(x) = e^{\sqrt{3+\cos x}}$

10. $f_{10}(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$

Vrai ou Faux ?

1. Une suite est toujours soit majorée, soit minorée.
2. Toute suite convergente est monotone.
3. Toute suite convergente est bornée.
4. Si une suite est monotone et bornée alors elle converge.
5. Si une suite converge alors elle est monotone et bornée.
6. Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
7. Si la suite $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l ou $-l$.
8. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, la suite $(x_{2n+n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
9. Si la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
10. Le produit d'un suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.
11. Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.
12. La différence de deux suites équivalentes converge vers 0.
13. Le quotient de deux suites équivalentes non nulles tend vers 1.

Exercice 4. Modèles explicites.
Déterminez les limites des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{n^2+3n+1}{1+n^2+n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
2. $u_n = \frac{|\sin(n)|}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
3. $u_n = \frac{2^n}{n^5+3n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
4. $u_n = (n^4+1)(n^3+2)e^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
5. $u_n = \frac{\log(n)}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
6. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
7. $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

8. $u_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Dynamique des populations : modélisation

On considère une population de dix mille micro-organismes.

Parmi ces micro-organismes, certains portent un gène qui les rend phosphorescents. La population X est celle portant ce gène et Y est le reste de la population.

Chaque jour, on mesure la taille de chaque population et on constate que 20% des micro-organismes de X mutent vers Y alors que 5% des micro-organismes de Y mutent vers X.

Sachant qu'au jour 0, un quart des micro-organismes est phosphorescent et en supposant que le nombre de ces micro-organismes reste constant, quelle est la population de X et de Y au bout de 1 jour, 2 jours, 5 jours, 10 jours ?

Exercice 6. Modèle arithmétique.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

où b et $x \geq 0$ sont deux nombres réels. Montrez que $u_n = bn + x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Modèle malthusien (ou géométrique).
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= au_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

où a et $x \geq 0$ sont deux nombres réels.

1. Montrez que $u_n = xa^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Soient $a = \frac{1}{2}$ et $x = 1000$, en supposant que n représente un nombre de mois et u_n un nombre d'individus, dans combien de temps la population sera-t-elle inférieure à 1 (cas d'extinction) ?
   (b) Soient $a = 2$ et $x = 2$, en supposant que n représente un nombre de mois et u_n un nombre d'individus, dans combien de temps la population atteindra-t-elle 1000 individus ?

Exercice 8. Modèle malthusien controlé.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + b \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

où $a \neq 1$, b et $x \geq 0$ sont des nombres réels.

1. Montrez que $u_n = a^n(x + \frac{b}{a-1}) - \frac{b}{a-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En supposant que $a = 2$ et $x = 10$, trouvez b tel que la population se stabilise (i.e tende vers une valeur finie non nulle).

Exercice 9. Modèle à ressources limitées (compétition).
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= f(u_n)u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

où $x \geq 0$ est un nombre réel et $f : [0, \infty) \to [0, 1]$ est la fonction définie par

$$f(y) = \begin{cases} a & \text{si} \quad y < 2, \\ \frac{2a}{y} & \text{si} \quad y \geq 2. \end{cases}$$

Déterminez la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants.

1. $x = 3$ et $a = \frac{1}{2}$.
   On pourra commencer par montrer que $0 < u_n < 2 \quad \forall n \geq 1$.
2. $x = 1$ et $a = 2$.

Exercice 10. Modèle à ressources limitées (partage).
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= f(u_n)u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

où $x \geq 0$ est un nombre réel et $f : [0, \infty) \to [0, 1]$ est la fonction définie par

$$f(y) = \begin{cases} a & \text{si} \quad y < 2, \\ 0 & \text{si} \quad y \geq 2. \end{cases}$$

1. Déterminez la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants.
   (1) $a=\frac{1}{2}$ et $x\geq 0$ quelconque, (2) $a=1$ et $x=1$,
   (3) $a=1$ et $x=3$, (4) $a=2$ et $x\geq 0$ quelconque.
2. On considère $x=1$ avec pour unité le million d'individus et le mois comme unité de temps. Au bout de combien de temps la population sera-t-elle inférieure à 100 individus dans le cas où $a=\frac{9}{10}$?
   Même question dans le cas $a=\frac{11}{10}$.

Exercice 11. Modèle de Hassel.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{au_n}{(1+u_n)^b} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

où a, b et $x\geq 0$ sont des nombres réels.

1. On suppose que $a=\frac{1}{2}$ et que b et x sont des nombres positifs quelconques. Montrez que $u_n\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.
2. On suppose $a=2$, $b=1$ et $x=2$. Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1$.
3. On suppose $a=2$, $b=1$ et $x=\frac{1}{2}$. Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1$.
4. On suppose $a=2$, $b=\frac{1}{2}$ et $x=2$. Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=3$.

Exercice 12. Contrôle par introduction d'une population stérile.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{2u_n}{1+u_n}\frac{u_n}{u_n+s} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \\ u_0 &= 1, \end{cases}$$

où s est un nombre réel positif.

1. Montrez que, pour $s\geq 2$, $u_n\in[0,1] \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
2. Montrez que, pour $s\geq 2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que, en choisissant $s\geq 2$, on ammene la population vers l'extinction.

Exercice 13. Les lapins de Fibonacci.
On considère des couples de lapins tels que, chaque mois, chaque couple donne naissance à un nouveau couple qui devient lui même productif dès l'age de deux mois. Après n mois, leur nombre u_n est donné par la suite suivante.

$$\begin{cases} u_{n+2} &= u_{n+1}+u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}, \\ u_0 &= 0, \\ u_1 &= 1. \end{cases}$$

1. Montrez que $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n) \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
2. Justifiez, dans ce cas très idéalisé, le modèle ci dessus (i.e pourquoi a-t-on $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$).

Exercice 14. Modèle logistique.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n(1-bu_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

où $b>0$ et $x\geq 0$ sont des nombres réels.

1. Montrez que si $x\in\{0,\frac{1}{b}\}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.
2. Montrez que si $x\in]0,\frac{1}{2b}]$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\frac{1}{2b}$.
3. Montrez que si $x\in[\frac{1}{2b},\frac{1}{b}[$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\frac{1}{2b}$.

Exercice 15. Modèle de Gompertz.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n-u_n\ln(u_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

Montrez que si $x\in]0,e[$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1$.

Exercice 16. Modèle avec prédation et prélèvement
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= a\frac{u_n^2}{u_n^2+b^2}-Eu_n \quad \forall n\in\mathbb{N}, \\ u_0 &= x, \end{cases}$$

où $a>0$, b et $E>0$ sont des réels.

1. Chercher les limites possibles d'une telle suite.
2. Si $E = 0$ et $a^2 > 4b^2$, en utilisant la question précédente et le fait que $t \mapsto \frac{at^2}{t^2+b^2}$ est croissante, montrer que pour $0 < x < \frac{a-\sqrt{a^2-4b^2}}{2}$ alors
$$0 < a\frac{u_n}{u_n^2 + b^2} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
3. Si $E = 0$ et $a^2 > 4b^2$, montrer que si $0 < x < \frac{a-\sqrt{a^2-4b^2}}{2}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Si $a > 2$ et $b = 1$, montrer que si $E > (a-2)/2$ alors la suite est décroissante et si $x > 0$ elle converge vers 0.
5. Quelle est la morale de cette dernière question ?

Exercice 17. Raisonnement critique.
Expliquez les limites des modèles précédents.