Exercices

Exercice 1. Déterminer dans les cas suivants les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f est bijective et donner dans chaque cas l'expression de la bijection réciproque.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

2. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Exercice 2. *Fonctions trigonométriques réciproques :*

1. Montrer que la fonction *sinus* est une bijection croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$.
2. On note arcsin (*arc sinus*) sa bijection réciproque : arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ avec $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (utiliser la formule $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$).
3. Montrer que la fonction *cosinus* est une bijection décroissante de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$. On note arccos (*arc cosinus*) sa bijection réciproque : arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$. Montrer que arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ avec $(\arccos(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. Montrer que la fonction *tan* est une bijection croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan (*arc tangente*) sa bijection réciproque. Montrez que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 3.

1. On considère les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$f_1 : x \mapsto \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f_2 : x \mapsto \arcsin x$$

   a) Déterminer les ensembles de définitions de ces deux fonctions et calculer leurs dérivées.

   b) En déduire une relation liant f_1 et f_2.

2. On considère maintenant la fonction $g : x \mapsto \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Simplifier l'expression de g.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$ **2.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x| dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x) dx$ **4.** $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$

5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+4x^2} dx$ **6.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$

7. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{4-x^2} dx$ (poser $x = 2\cos(t)$, $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$)

Exercice 5. Calculer l'aire de la surface limitée par les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ et la parabole d'équation $y = x^2 - x$.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2} dx$ (écrire $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ sous la forme $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$)

2. $\displaystyle\int_1^{2} \ln^2 x dx$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$

4. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{e^{-2x}}{(1+2e^{-x})^2} dx$

5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{x^2+1} dx$ (poser $t = x^2 + 1$)

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Á l'aide d'une intégration par parties, écrire I_n en fonction I_{n-2} pour $n \geq 2$.
3. Déduire des questions précédentes la valeur de I_n.