Université de Franche-Comté
Licence S1 - STARTER ST Analyse, 2009-2010
Groupe A (V. Lleras)

FEUILLE N° 1

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{2x} & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f et montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Donner l'expression de la fonction réciproque f^{-1} et tracer son graphe.

Exercice 2. Montrer les formules
1. $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(-x) = -\arccos(x) + \pi$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. En déduire $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 3. Après avoir précisé les ensembles de définition, étudier les fonctions:

$$f(x) = \arccos(\cos x) \quad \text{et } g(x) = \arctan(\tan x)$$

Exercice 4. Montrer à l'aide de la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ les égalités :
1. $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$;
2. $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :
1. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ **2.** $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ **3.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - 2\arcsin x}{1 + 2\arcsin x}}$.

Exercice 6.
1. On considère les fonctions f_1 et f_2 définies par :
$f_1 \ : \ x \longmapsto \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad f_2 \ : \ x \longmapsto \arcsin x$.
a/ Déterminer les ensembles de définitions de ces deux fonctions et calculer leurs dérivées.
b/ En déduire une relation liant f_1' et f_2'. Que peut-on en déduire pour f_1 et f_2?
2. On considère maintenant la fonction $g \ : \ x \longmapsto \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Simplifier l'expression de g.

Exercice 7.
1. Montrer que $\text{ch}(x+y) = \text{ch}x \ \text{ch}y + \text{sh}x \ \text{sh}y$.
2. En déduire des formules analogues pour $\text{ch}(x-y)$, $\text{sh}(x+y)$, $\text{sh}(x-y)$, $\text{ch}(2x)$ et $\text{sh}(2x)$.

Exercice 8. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(\text{sh}x) = \arcsin(\text{th}x)$.

Exercice 9. Simplifier les expressions suivantes
1. $f(x) = \text{ch}\Big(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\Big)$ **2.** $g(x) = \text{sh}\Big(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\Big)$