Université de Franche-Comté
Licence S1 - STARTER ST Analyse, 2009-2010
Groupe A (V. Lleras)

FEUILLE N° 2

Exercice 1.
1. Les équations différentielles suivantes sont-elles linéaires ?

a/ $y' + x^2y = x + 1$ **b**/ $y' + xy^2 = x + 1$ **c**/ $(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$ **d**/ $y' = (x + y)^2$.

2. Donner un second membre possible f pour que la fonction $y = e^{2t}$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - 2y = f$.
3. Donner une équation différentielle d'ordre un dont $y = t\ln(t)$ est solution sur $]0, +\infty[$.

4. La fonction $y_1 = e^{2t}\sin(t)$ est-elle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - 2y = e^{2t}\cos(t)$? Qu'en est-il de la fonction $y_2 = e^{2t}\sin(t) + e^{2t}$? En déduire une solution de l'équation homogène associée. Donner la solution générale de l'équation avec second membre.

Exercice 2.
1. Résoudre l'équation différentielle $y' - \frac{1}{t}y = 0$ pour $t > 0$.
2. Donner graphiquement l'allure de la solution générale de cette équation.
3. Déterminer sur le graphique précédent la solution qui vérifie la condition initiale $y(1) = 1$. Déterminer son expression.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle linéaire : $y' - 4y = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3$.
1. Montrer qu'il existe un polynôme solution de cette équation.
2. Préciser quelle est l'équation sans second membre associée. La résoudre.
3. En déduire les solutions de l'équation.
4. Trouver la solution y de l'équation telle que $y(0) = -2$.

Exercice 4. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E) $y' - 3y = sinx$.
1. Résoudre, sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée.
2. Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie par : $p(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $y' = y + t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2. $y' = e^t(1 + y)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3. $t(t + 1)y' + (1 + t)y = 1$ pour $t \in]-1, 0[$.

4. $\frac{1}{t}y' + cos(t)y = 0$ pour $t > 0$.

5. $ty' - y = t^2\arctan(t)$ pour $t \in]0, +\infty[$.

6. $ty' - (t + 2)y(t) + t(t + 1) = 0$ pour $t \in]-\infty, 0[$.

7. $(\cos t)\ y' - (\sin t)\ y = \cos(2t)$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

8. $(t - 1)y' + y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ pour $t \in]-1, 1[$.

9. $(1 - t^2)y' + y = 1$ pour $t \in]-1, 1[$.

Exercice 6. Les équations suivantes sont-elles à variables séparables?
1. $yy' = x + 1$ **2.** $y' = x^2 + y^2$ **3.** $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ **4.** $y' = (x + y)^2 - (x - y)^2$.

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles avec condition initiale suivantes :

1. $yy' = x + 1$ sur $\mathbb{R}$, $y(0) = 2$;

2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ sur $]1, +\infty[$, $y(\sqrt{2}) = 1$;

3. $y' = (x + y)^2 - (x - y)^2$ sur $\mathbb{R}$, $y(1) = 1$.

Exercice 8. On considère pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle

$$\cos(t)y' + \sin(2t)y = \sin(2t). \tag{1}$$

1. Résoudre (1).

2. Déterminer la solution de (1) vérifiant $y(0) = 1$, puis celle vérifiant $y(0) = \frac{1}{2}$.

3. Déduire de ce qui précède la solution de l'équation $\cos(t)y' + \sin(2t)y = 2\sin(2t)$ et qui vérifie $y(0) = \frac{3}{2}$.

Exercice 9. On considère pour $t \in]-\infty, 0[$ l'équation différentielle

$$(e^{-t} - \cos(t))y' + (\sin(t) - \cos(t))y = 1. \tag{2}$$

1. Calculer la dérivée de $\ln(1 - e^t \cos(t))$.

2. Résoudre l'équation homogène associée.

3. Calculer $\int e^t \cos t \, dt$ à l'aide de l'écriture exponentielle de cos.

4. Calculer $\int e^t \cos t \, dt$ à l'aide d'intégration par parties.

5. Résoudre (2).

6. Résoudre $(e^{-t} - \cos(t))y' + (\sin(t) - \cos(t))y = e^{-t} - \cos(t)$.