

# Modélisation, analyse et simulation de problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides

Vanessa Lleras

**Directeur**

Patrick Hild

**Rapporteurs**

Bertrand Maury

Serge Nicaise

**Examineurs**

Christine Bernardi

Mihaï Bostan

Marco Picasso

Yves Renard

Laboratoire de Mathématiques de Besançon  
UMR CNRS 6623

20 novembre 2009

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux problèmes de contact concernant :

- ① les estimations d'erreur en mécanique des solides

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux problèmes de contact concernant :

- ① les estimations d'erreur en mécanique des solides
- ② l'analyse du comportement asymptotique de leurs solutions en quasi-statique

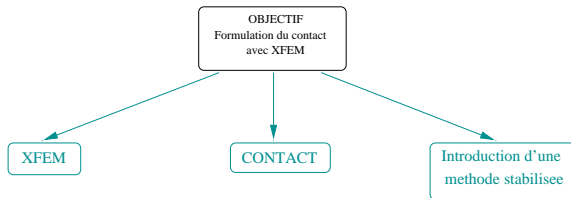
Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux problèmes de contact concernant :

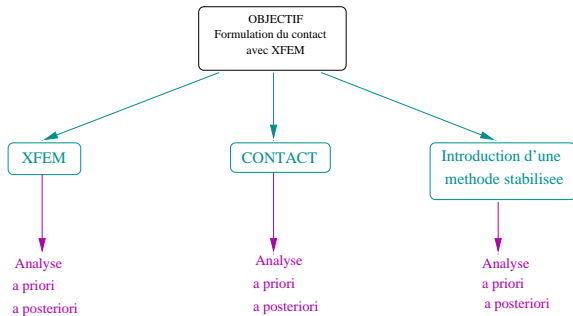
- ① les estimations d'erreur en mécanique des solides
- ② l'analyse du comportement asymptotique de leurs solutions en quasi-statique
- ③ la dynamique des globules rouges en mécanique des fluides

Première partie

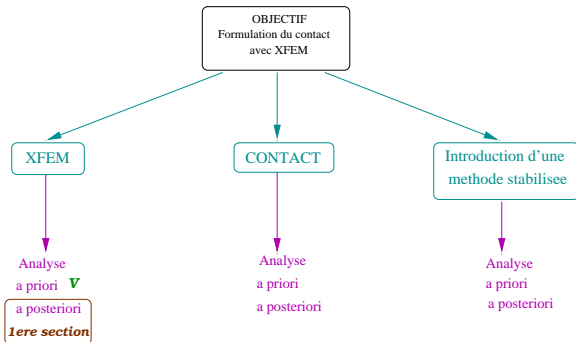
Qualité des calculs en mécanique des solides

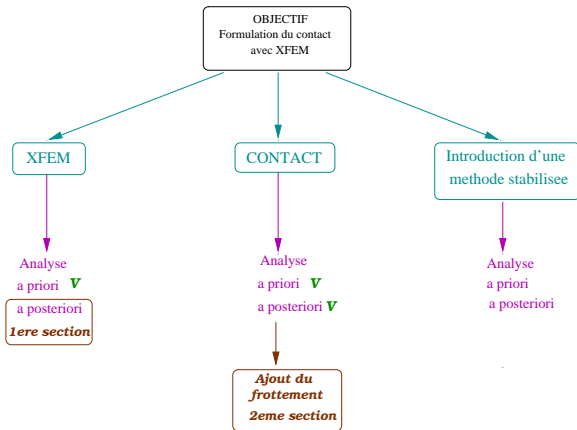
OBJECTIF  
Formulation du contact  
avec XFEM

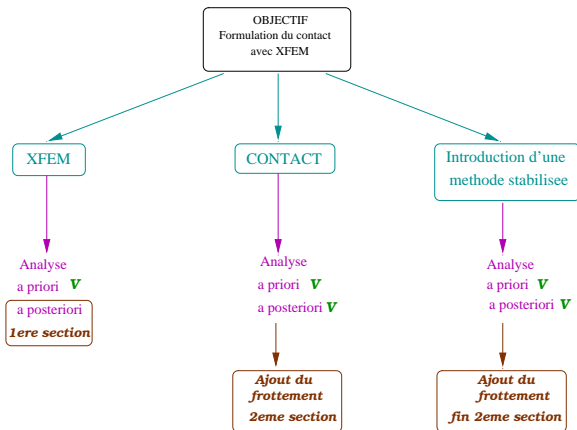


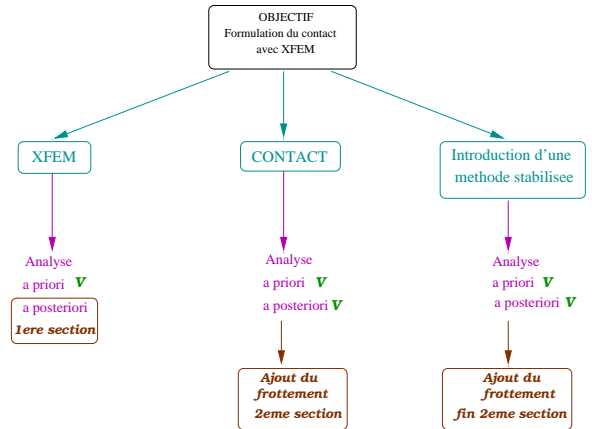




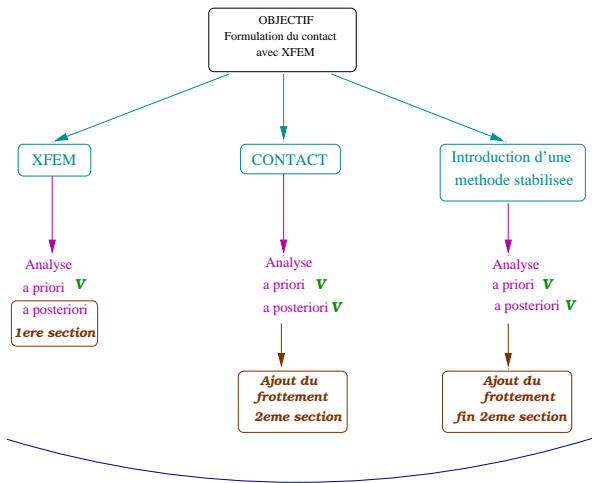








***XFEM avec Contact, Analyse a priori : 3eme section***



***XFEM avec Contact, Analyse a priori : 3eme section***

***Analyse a posteriori : perspectives***

***ajout du frottement : perspectives***

## Présentation des estimations d'erreur

- ① Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact
- ② Estimations a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb
- ③ Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact

Les principales sources d'erreur pour un problème statique sont :

- ▶ la modélisation mathématique du problème physique,
- ▶ la discrétisation spatiale du problème,
- ▶ la discrétisation fonctionnelle,
- ▶ la résolution numérique.

Les principales sources d'erreur pour un problème statique sont :

- ▶ la modélisation mathématique du problème physique,
- ▶ la discrétisation spatiale du problème,
- ▶ la discrétisation fonctionnelle,
- ▶ la résolution numérique.

On ne s'intéresse qu'à l'erreur de **discrétisation spatiale** :  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ .

Deux méthodes ont été développées :

- ▶ les estimations d'erreur **a priori** :  
elles permettent la prédiction du **taux de convergence asymptotique** de l'erreur éléments finis à une constante près :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^\alpha \|\mathbf{u}\|$$

- ▶ les estimations d'erreur **a posteriori** : on estime l'erreur exacte  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$  à l'aide d'une quantité  $\eta(h, \mathbf{u}_h)$  calculable explicitement, dépendant de la solution approchée donnée et de certaines données.



# Estimations a posteriori

Une estimation d'erreur a posteriori doit vérifier :

- ▶ **Borne supérieure globale** garantie :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(\mathbf{u}_h)^2$$

- ▶ **Borne inférieure locale** de l'erreur

$$\eta_T(\mathbf{u}_h)^2 \leq C_T \sum_{T' \text{ proche de } T} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{T'}^2,$$

- ▶ **Robustesse** :

$C_T$  ne doit pas dépendre des données, du maillage ou de la solution

- ▶ **Exactitude asymptotique** :

$$\frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(\mathbf{u}_h)^2}{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2} \text{ tend vers } 1 \text{ avec la taille du maillage}$$

- surestimation lorsque l'indice est plus grand que 1,
- sous-estimation lorsque l'indice est plus petit que 1.

# Différents estimateurs

- ▶ Estimateurs d'erreur en **relation de comportement** : (Ladevèze en 1975)
  - construction d'un couple admissible déplacement-contrainte  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ .
  - erreur en relation de comportement :  $\eta_{RC} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})$ .

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Différents estimateurs

- ▶ Estimateurs d'erreur en **relation de comportement** : (Ladevèze en 1975)
  - construction d'un couple admissible déplacement-contrainte  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ .
  - erreur en relation de comportement :  $\eta_{RC} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})$ .
- ▶ Estimateurs en **résidus d'équilibre** : (Babuška-Rheinboldt en 1978)
  - construction des résidus d'équilibre :  $R_h''(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v})$ .
  - les résidus d'équilibre mesurent ainsi la non-vérification des équations d'équilibre intérieure et la non vérification des conditions d'équilibre sur le bord ainsi que la discontinuité du vecteur contrainte au travers de l'interface.

# Différents estimateurs

- ▶ Estimateurs d'erreur en **relation de comportement** :  
(Ladevèze en 1975)
  - construction d'un couple admissible déplacement-contrainte  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ .
  - erreur en relation de comportement :  $\eta_{RC} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})$ .
- ▶ Estimateurs en **résidus d'équilibre** :  
(Babuška-Rheinboldt en 1978)
  - construction des résidus d'équilibre :  $R_h''(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v})$ .
  - les résidus d'équilibre mesurent ainsi la non-vérification des équations d'équilibre intérieure et la non vérification des conditions d'équilibre sur le bord ainsi que la discontinuité du vecteur contrainte au travers de l'interface.
- ▶ Estimateurs d'erreur en **contrainte** :  
(Zienkiewicz-Zhu en 1987)
  - construction d'un champ de contraintes lissées  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h$  à partir de la solution éléments finis  $\boldsymbol{\sigma}_h$ .
  - substitution du champ exact au champ lissé dans la norme en énergie.
  - estimateur global :  $(\int_{\Omega} \text{tr}((\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \mathbf{A}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h - \boldsymbol{\sigma}_h)))^{1/2}$ .

Au niveau des estimations a posteriori pour la méthode des éléments finis étendus XFEM

- ▶ Bordas et Duflot en 2007 ont donné un estimateur par la méthode de recouvrement global XGR,
- ▶ puis par la méthode des moindres carrés mobiles étendue XMLS,
- ▶ Rodenas et al (2008) par la méthode SPR avec polynômes conjoints.
- ▶ Pas d'estimateur par résidu.

## 0 Présentation des estimations d'erreur

### 1 Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact

- ▶ Problème continu
- ▶ Problème discret
- ▶ Opérateur de quasi-interpolation
- ▶ Estimateurs d'erreurs
- ▶ Résultats numériques

# Problème continu

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► Problème discret

► Opérateur de  
quasi-interpolation

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

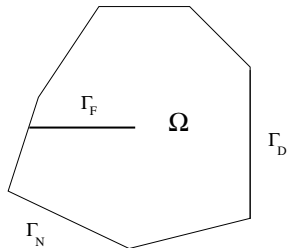
Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

Le problème d'élasticité est : pour  $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$  soit  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2$  le champ de déplacement solution variationnelle de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) & = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) & = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} & = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} & = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_N \cup \Gamma_F. \end{cases}$$

- $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement,
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})/2$  est le tenseur des déformations linéarisées,
- $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes,
- $\mathbf{A}$  est le tenseur de Hooke du quatrième ordre,
- $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$  représente la densité des forces volumiques,
- $\mathbf{n}$  est la normale unitaire sortante de  $\Omega$  sur  $\partial\Omega$ .



# Problème continu

Soit  $\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \}$ . On cherche l'unique solution  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  de

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

- **Existence** et **unicité** de la solution d'après le théorème de Lax-Milgram.

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► Problème discret

► Opérateur de  
quasi-interpolation

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Problème continu

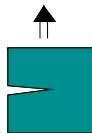
Soit  $\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \}$ . On cherche l'unique solution  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  de

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

- **Existence** et **unicité** de la solution d'après le théorème de Lax-Milgram.
- $\mathbf{u}$  s'écrit  $\mathbf{u}_S = K_I \mathbf{u}_I + K_{II} \mathbf{u}_{II}$  partie singulière et une partie régulière  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_S$  où

$$u_I = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (\delta - \cos \theta) \\ \sin \frac{\theta}{2} (\delta - \cos \theta) \end{pmatrix},$$

$$u_{II} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (\delta + 2 + \cos \theta) \\ \cos \frac{\theta}{2} (2 - \delta - \cos \theta) \end{pmatrix}.$$



Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► Problème discret

► Opérateur de  
quasi-interpolation

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact



# Problèmes de fissuration

Pour approcher un problème de fissuration, on peut utiliser :

- ▶ la **méthode classique des éléments finis** :

Inconvénients :

- le maillage doit respecter scrupuleusement la géométrie de la fissure,
- la pointe de fissure doit être maillée très finement à cause du fort gradient de contraintes,
- le maillage doit être réactualisé à chaque étape,
- la disparité de la géométrie des éléments finis sur l'interface peut poser problème pour l'application des lois de contact et de frottement.

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

▶ Problème continu

▶ **Problème discret**

▶ Opérateur de  
quasi-interpolation

▶ Estimateurs  
d'erreurs

▶ Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Problèmes de fissuration

Pour approcher un problème de fissuration, on peut utiliser :

- ▶ la **méthode classique des éléments finis** :

Inconvénients :

- le maillage doit respecter scrupuleusement la géométrie de la fissure,
- la pointe de fissure doit être maillée très finement à cause du fort gradient de contraintes,
- le maillage doit être réactualisé à chaque étape,
- la disparité de la géométrie des éléments finis sur l'interface peut poser problème pour l'application des lois de contact et de frottement.

- ▶ la **méthode meshless** :

Avantage : pas de remaillage.

Inconvénients :

- effort numérique plus important que les méthodes basées sur un maillage,
- imposition des conditions aux limites.

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

▶ Problème continu

▶ **Problème discret**

▶ Opérateur de  
quasi-interpolation

▶ Estimateurs  
d'erreurs

▶ Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Problèmes de fissuration

Pour approcher un problème de fissuration, on peut utiliser :

- ▶ la **méthode classique des éléments finis** :

Inconvénients :

- le maillage doit respecter scrupuleusement la géométrie de la fissure,
- la pointe de fissure doit être maillée très finement à cause du fort gradient de contraintes,
- le maillage doit être réactualisé à chaque étape,
- la disparité de la géométrie des éléments finis sur l'interface peut poser problème pour l'application des lois de contact et de frottement.

- ▶ la **méthode meshless** :

Avantage : pas de remaillage.

Inconvénients :

- effort numérique plus important que les méthodes basées sur un maillage,
- imposition des conditions aux limites.

- ▶ la **méthode des éléments finis étendus** :

méthode introduite par Moës, Dolbow et Belytschko en 1999.

Avantage : maillage indépendant de la géométrie de la fissure.

# Méthode des éléments finis étendus

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► **Problème discret**

► Opérateur de  
quasi-interpolation

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

On enrichit la base de la **méthode classique des éléments finis** de la manière suivante :

- Les nœuds dont le support de la fonction de base est traversé par la fissure sont enrichis par une **fonction de type Heaviside** :

$$H(x) = +1 \quad \text{si } (x - x^*) \cdot n \geq 0, \quad \text{et } -1 \quad \text{ailleurs,}$$

où  $x^*$  désigne la pointe de la fissure et  $n$  est une normale à la fissure.

# Méthode des éléments finis étendus

On enrichit la base de la **méthode classique des éléments finis** de la manière suivante :

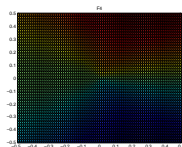
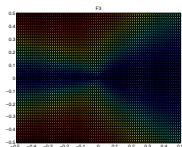
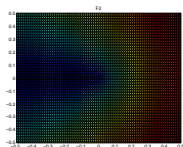
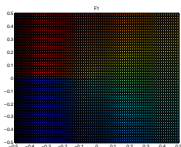
- Les nœuds dont le support de la fonction de base est traversé par la fissure sont enrichis par une **fonction de type Heaviside** :

$$H(x) = +1 \quad \text{si } (x - x^*) \cdot n \geq 0, \quad \text{et } -1 \quad \text{ailleurs,}$$

où  $x^*$  désigne la pointe de la fissure et  $n$  est une normale à la fissure.

- Les sommets du triangle contenant la pointe de la fissure sont enrichis par les **fonctions singulières** suivantes (en coordonnées polaires) :

$$\{F_j(x)\}_{1 \leq j \leq 4} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}.$$



Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► Problème discret

► Opérateur de  
quasi-interpolation

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Méthode XFEM avec fonction cut-off

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► Problème discret

► Opérateur de  
quasi-interpolation

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

Variante introduite par Chahine, Laborde, Renard.

Principe : utilisation d'une **fonction cut-off** pour enrichir par les fonctions singulières toute une zone contenant la pointe de fissure.

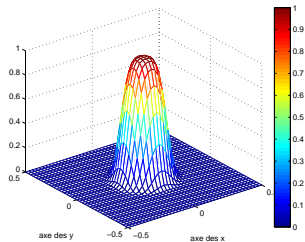
## Définition

$\chi \in C^2(\bar{\Omega})$  est une fonction cut-off telle que  $0 < r_0 < r_1$  et en notant  $r$  la distance jusqu'à la pointe de fissure, on ait :

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq r_0, \\ \chi(r) \in (0, 1) & \text{si } r_0 < r < r_1, \\ 0 & \text{si } r \geq r_1. \end{cases}$$

Avantages :

- réduit le coût de calcul,
- conserve la convergence optimale.



# Problème discret

- On approche le problème par une méthode d'éléments finis affines définies sur une famille régulière de triangulations  $(T_h)_h$  sur le domaine **non fissuré**.
- Notations :
  - $h_T$  : diamètre de  $T$  et  $h = \max_{T \in T_h} h_T$ .
  - patch autour de  $x$  :  $\omega_x = \cup_{T: x \in T} T$ .
  - $\omega_T$  : union de tous les éléments de  $T_h$  ayant une intersection non vide avec  $T$ .
  - $\omega_E$  : union de tous les éléments de  $T_h$  ayant une intersection non vide avec  $\bar{E}$ .
  - $\psi_x$  : fonction chapeau  $P_1$  au nœud  $x$ .
  - $a \lesssim b$  signifie qu'il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $a$ ,  $b$  et  $h$  telle que  $a \leq C b$ .
  - $\mathcal{N}_h$  ensemble des nœuds de la triangulation  $T_h$ .
  - $\mathcal{N}_h^D = \mathcal{N}_h \cap \bar{\Gamma}_D$ .
  - $\mathcal{N}_h^H \subset \mathcal{N}_h$  ensemble des nœuds enrichis.

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► **Problème discret**

► Opérateur de  
quasi-interpolation

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

Soit

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \chi \sum_{i=1}^4 c_i F_i \right. \\ \left. = \mathbf{v}_{h,r} + \chi \mathbf{v}_{h,s}, \quad a_x, b_x, c_i \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Le problème discret consiste à trouver  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  telle que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

- **existence** et **unicité** de la solution par le théorème de Lax-Milgram.



# Définition de l'opérateur

Présentation des estimations d'erreur

Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact

► Problème continu

► Problème discret

► **Opérateur de quasi-interpolation**

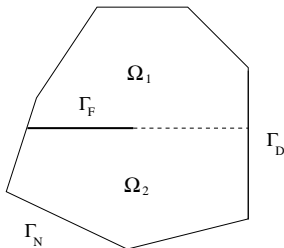
► Estimateurs d'erreurs

► Résultats numériques

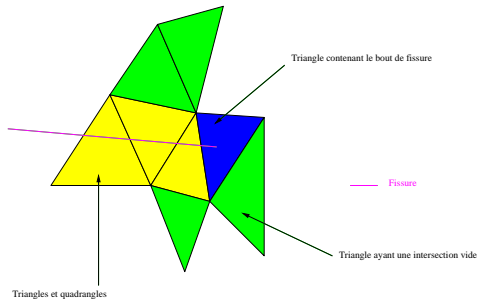
Estimations a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact

On divise  $\Omega$  en deux sous-ensembles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  suivant la fissure et le prolongement rectiligne de la fissure.



Définition de la famille d'éléments généralisés  $G_h$  :



# Définition de l'opérateur

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► Problème discret

► **Opérateur de  
quasi-interpolation**

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

## Definition

- Si  $x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^D$  est tel que  $\omega_x$  n'est pas complètement coupé par la fissure alors

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} v(y) dy.$$

- Si  $x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^D$ ,  $x \in \bar{\Omega}^\ell$  est tel que  $\omega_x$  est complètement coupé par la fissure alors on pose

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_\ell(y) dy.$$

- Si  $x \in \mathcal{N}_h^D$ , notons  $\Gamma_x = \omega_x \cap \Gamma_D$  et soit :

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\Gamma_x|} \int_{\Gamma_x} v(y) d\Gamma.$$

## Lemme 1

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et tout  $T \in \mathcal{T}_h$  on a :

- si aucun des nœuds de  $T$  n'est enrichi alors :

$$\|\pi_h v\|_T \lesssim \|v\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

- si les trois nœuds de  $T$  sont enrichis, alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :

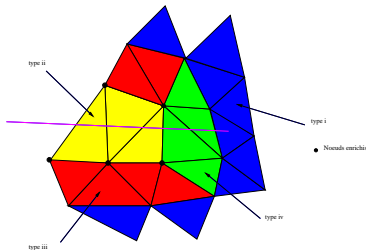
$$\|\pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

- si un ou deux nœuds de  $T$  sont enrichis et si  $\omega_T$  est coupé par la fissure on a :

$$\|\pi_h v\|_T \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

- si un ou deux nœuds de  $T$  sont enrichis et si  $\omega_T$  contient la pointe de la fissure alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :

$$\|\pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + \|v\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T}.$$



## Lemme 2

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et toute arête  $E$  de  $T_h$ , on obtient :

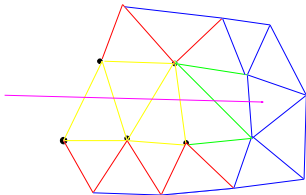
- Si les extrémités de  $E$  sont non enrichies :  

$$\|\pi_h v\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|v\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E},$$
- Si les points extrêmes de  $E$  sont enrichis alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :  

$$\|\pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$
- Si seulement un des deux points extrêmes de  $E$  est enrichi et si  $\omega_E$  est coupé par la fissure, on a :  

$$\|\pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$
- si seulement une des extrémités de  $E$  est enrichie et si  $\omega_E$  contient la pointe de la fissure alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :  

$$\|\pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{-1/2} \|v\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E}.$$



## Lemme 3

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et pour toute arête de la fissure  $F$  on obtient :

- Si  $F \subset T \in T_h$  où  $T$  est totalement enrichi, alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :

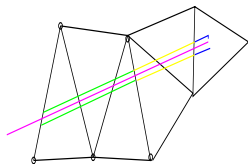
$$\|(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T}$$

- Si  $F \subset T \in T_h$  où  $T$  est partiellement enrichi, alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :

$$\|(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} h_T^{-1} \|v\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

- Si  $F \subset T \in T_h$  où le bout de la fissure se trouve dans  $T$ , on a :

$$\|\pi_h v\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|v\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_T}.$$



● Noeuds enrichis

— Aretes de type i

— Aretes de type ii

— Aretes de type iii

— Fissure

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

- ▶ Problème continu
- ▶ Problème discret
- ▶ Opérateur de  
quasi-interpolation
- ▶ **Estimateurs  
d'erreurs**
- ▶ Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

Chahine, Nicaise, Renard, soumis

Soient  $\mathbf{u}$  la solution du problème continu et  $\mathbf{u}_h$  solution du problème discret. Sous la régularité  $(H^2(\Omega))^2$  pour  $\mathbf{u} - \chi\mathbf{u}_s$ , on a :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \lesssim h \|\mathbf{u} - \chi\mathbf{u}_s\|_{2,\Omega}.$$

## Estimateur d'erreur résiduel pour le problème d'élasticité

Soit  $G \in \mathcal{G}_h$  et  $T \in \mathcal{T}_h$  un triangle contenant  $G$ . Les estimateurs résiduels locaux sont définis par :

$$\eta_{1G} = h_T C(h_T) \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G,$$

$$\eta_{2G} = h_T^{1/2} D(h_T) \left( \sum_{E \in E_G^{\text{int}} \cup E_G^N \cup E_G^F} \| [\![\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}]\!]_E \|_E^2 \right)^{1/2},$$

où  $C(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$  pour les éléments du cas (iv) du Lemme 1, sinon  $C(h_T) = 1$  et  $D(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$  pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2 ou du cas (ii) du Lemme 3, sinon  $D(h_T) = 1$ .

## Borne supérieure

Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  la solution du problème continu et soit  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  la solution du problème discret. Alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \lesssim \left( \sum_{G \in \mathcal{G}_h} \eta_{1G}^2 + \eta_{2G}^2 \right)^{1/2}.$$

# Mode I d'ouverture

## Raffinement uniforme

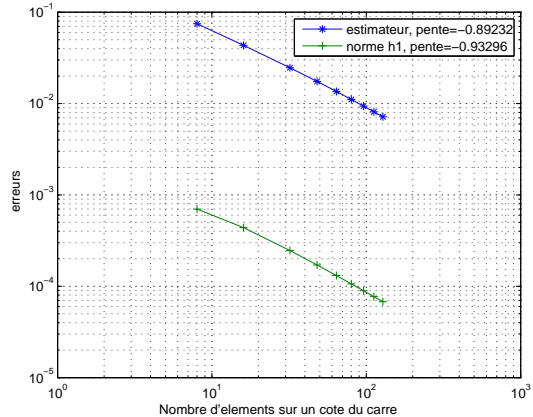


Fig.: Convergence de l'estimateur  $\eta$  et de la norme  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$

Présentation des estimations d'erreur

Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact

- Problème continu
- Problème discret
- Opérateur de quasi-interpolation
- Estimateurs d'erreurs
- Résultats numériques

Estimations a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact



# Mode I d'ouverture

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

- ▶ Problème continu
- ▶ Problème discret
- ▶ Opérateur de  
quasi-interpolation
- ▶ Estimateurs  
d'erreurs
- ▶ **Résultats  
numériques**

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

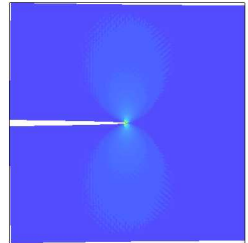
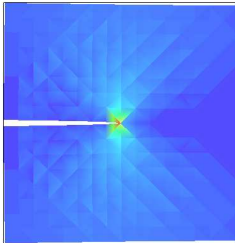


Fig.: Carte de l'estimateur d'erreur local  $\eta_G$

# Mode I d'ouverture

## Raffinement avec un seuil

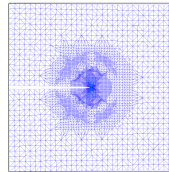
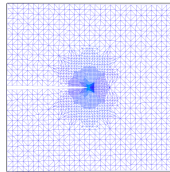


Fig.: Avec une fonction  $\chi$  exponentielle

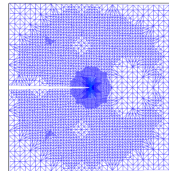
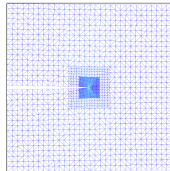


Fig.: Avec une fonction  $\chi$  polynômiale

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

- Problème continu
- Problème discret
- Opérateur de  
quasi-interpolation
- Estimateurs  
d'erreurs
- Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Mode II de cisaillement

## Raffinement uniforme

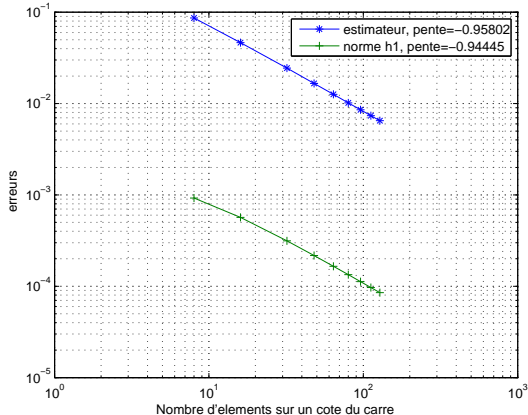


Fig.: Convergence de l'estimateur  $\eta$  et de la norme  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

► Problème continu

► Problème discret

► Opérateur de  
quasi-interpolation

► Estimateurs  
d'erreurs

► Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Mode II de cisaillement

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

- ▶ Problème continu
- ▶ Problème discret
- ▶ Opérateur de  
quasi-interpolation
- ▶ Estimateurs  
d'erreurs
- ▶ **Résultats  
numériques**

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

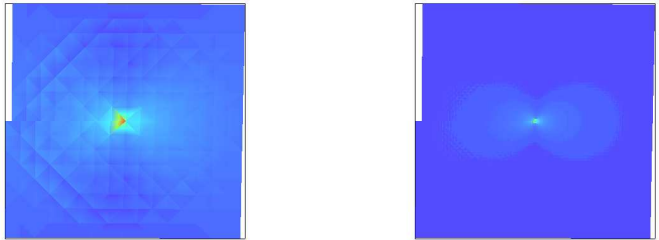


Fig.: Carte de l'estimateur d'erreur local  $\eta_G$

# Mode II de cisaillement

## Raffinement avec un seuil

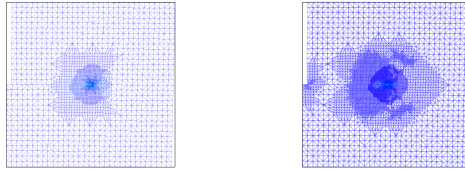


Fig.: Avec une fonction  $\chi$  exponentielle

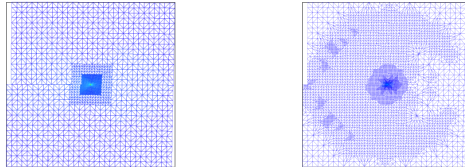


Fig.: Avec une fonction  $\chi$  polynômiale

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

- Problème continu
- Problème discret
- Opérateur de  
quasi-interpolation
- Estimateurs  
d'erreurs
- **Résultats  
numériques**

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Domaine en forme de L

## Raffinement uniforme

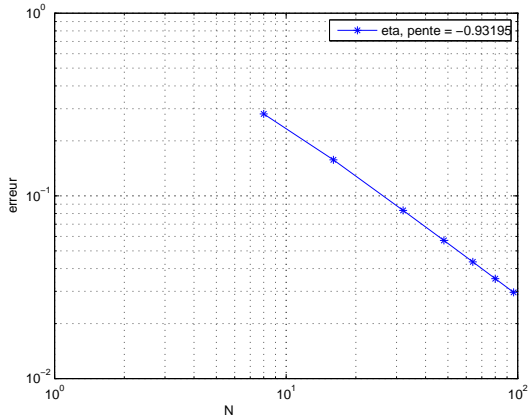


Fig.: Convergence de l'estimateur  $\eta$

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

- Problème continu
- Problème discret
- Opérateur de  
quasi-interpolation
- Estimateurs  
d'erreurs
- Résultats  
numériques

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Domaine en forme de L

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

- ▶ Problème continu
- ▶ Problème discret
- ▶ Opérateur de  
quasi-interpolation
- ▶ Estimateurs  
d'erreurs
- ▶ **Résultats  
numériques**

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

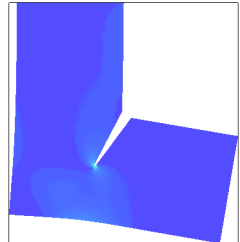
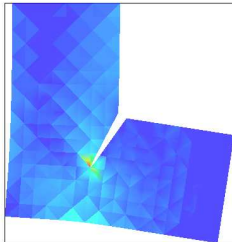


Fig.: Carte de l'estimateur d'erreur local  $\eta_G$

# Domaine en forme de L

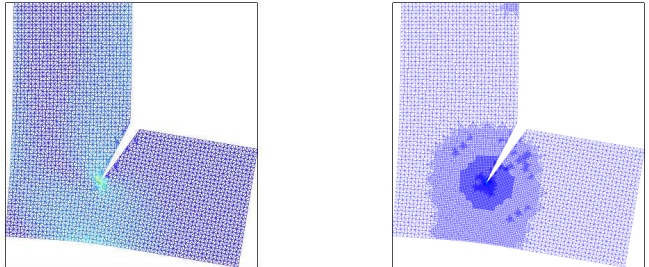


Fig.: Raffinement avec un seuil

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

- Problème continu
- Problème discret
- Opérateur de  
quasi-interpolation
- Estimateurs  
d'erreurs
- **Résultats  
numériques**

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact



- ▶ Pour le problème de Signorini, beaucoup d'estimateurs a posteriori ont été donnés.
- ▶ Pour le problème avec frottement de Coulomb, seuls des estimateurs en relation de comportement ont été obtenus par Coorevits, Hild, Hjjaj.
- ▶ Pas d'estimateur par résidu.

① Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact

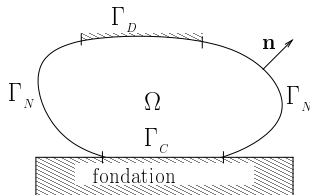
② Estimations a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

- ▶ Problème continu
- ▶ Un premier estimateur
- ▶ Un second estimateur
- ▶ Comparaison entre ces deux estimateurs
- ▶ Un estimateur par stabilisation

# Problème continu

Pour un problème d'élasticité sans contact ni frottement, le déplacement  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  du corps satisfait aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right.$$



Présentation des estimations d'erreur

Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact

Estimations a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

## ► Problème continu

► Un premier estimateur

► Un second estimateur

► Comparaison entre ces deux estimateurs

► Un estimateur par stabilisation

Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact

# Problème continu

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

## ► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

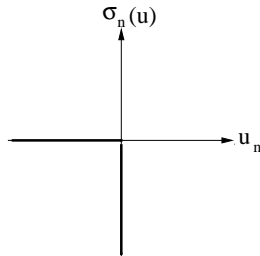
► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

- En 1933, Signorini étudie l'équilibre d'un corps élastique en contact sur une fondation rigide.
- En 1959, il formule les conditions de contact.
- Fichera, Duvaut, Lions... les utilisent.

La condition de contact unilatéral est exprimée par la relation de complémentarité suivante :

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) u_n = 0.$$



# Problème continu

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

## ► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

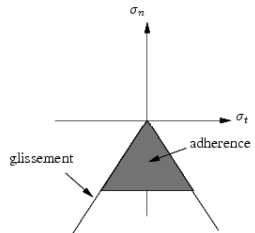
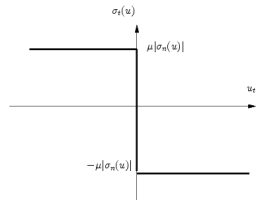
► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

- Premiers travaux sur le frottement réalisés par Leonard de Vinci au XVI<sup>ème</sup> siècle.
- Amontons (1699) et Coulomb (1785) reprennent et développent les études de Léonard de Vinci en énonçant les premières lois de frottement.

En notant  $\mu$  le coefficient de frottement qui dépend des matériaux en présence ( $\mu \geq 0$ ), la condition de frottement de Coulomb est :

$$\begin{aligned} \text{si } u_t = 0, & \quad |\sigma_t(\mathbf{u})| \leq -\sigma_n(\mathbf{u})\mu, \\ \text{si } u_t \neq 0, & \quad \sigma_t(\mathbf{u}) = \sigma_n(\mathbf{u})\mu \frac{u_t}{|u_t|}. \end{aligned}$$



# Formulation variationnelle

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

## ► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

La formulation mixte variationnelle du problème continu consiste à trouver  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{u}, \lambda_n, \lambda_t) \in \mathbf{V} \times M_n \times M_t(\mu\lambda_n) = \mathbf{V} \times \mathbf{M}(\mu\lambda_n)$  qui satisfont :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_C} \lambda_n \nu_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \lambda_t \nu_t \, d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \int_{\Gamma_C} (\nu_n - \lambda_n) u_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\nu_t - \lambda_t) u_t \, d\Gamma \leq 0, & \forall \nu = (\nu_n, \nu_t) \in \mathbf{M}(\mu\lambda_n), \end{cases}$$

où  $\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\}$  et  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega$ .

On pose  $M_n = \left\{ \nu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C), \nu \geq 0 \text{ sur } \Gamma_C \right\}$ , et, pour tout  $g \in M_n$   
 $M_t(g) = \left\{ \nu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C), -g \leq \nu \leq g \text{ sur } \Gamma_C \right\}$ .

# Résultats d'existence et d'unicité

- ▶ **Existence** et **unicité** pour le problème de contact sans frottement par le théorème de Stampacchia.
- ▶ **Existence** d'une solution si le coefficient de frottement est assez petit : Nečas, Haslinger, Jarušek en 1980, Eck, Jarušek l'ont amélioré ( $\mu \leq \sqrt{3 - 4\nu} / (2 - 2\nu)$  où  $0 \leq \nu < 1/2$  désigne le coefficient de Poisson).
- ▶ **Non unicité** de la solution si le coefficient de frottement est grand et les déplacements tangentiels ont un signe constant sur  $\Gamma_C$  (Hild en 2003).
- ▶ **Unicité** de la solution si le coefficient de frottement est suffisamment petit et une condition sur le déplacement tangentiel.

## Y. Renard, 2006

Soit  $(\mathbf{u}, \lambda)$  une solution du problème continu telle que  $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$ , avec  $\xi \in M$ ,  $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$  sur  $\Gamma_C$  et  $\mu < C_0 \|\xi\|_M^{-1}$  où  $C_0 > 0$  est indépendante de  $\xi$ . Alors  $(\mathbf{u}, \lambda)$  est l'unique solution du problème continu.

# Discrétisation par la FEM classique

Présentation des estimations d'erreur

Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact

Estimations a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

► Problème continu

► Un premier estimateur

► Un second estimateur

► Comparaison entre ces deux estimateurs

► Un estimateur par stabilisation

Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact

La formulation mixte discrète du problème est de trouver  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  et  $\lambda_h \in \mathbf{M}_h(\mu\lambda_{hn}) = M_{hn} \times M_{ht}(\mu\lambda_{hn})$  qui satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} \nu_{hn} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \lambda_{ht} \nu_{ht} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \int_{\Gamma_C} (\nu_{hn} - \lambda_{hn}) u_{hn} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\nu_{ht} - \lambda_{ht}) u_{ht} \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_h = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in \mathbf{M}_h(\mu\lambda_{hn}), \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))^2 : \forall T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in (\mathbb{P}_1(T))^2, \mathbf{v}_h|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \right\}$ ,

$W_h = \left\{ \nu_h : \nu_h \in \mathcal{C}(\overline{\Gamma_C}), \exists \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ tel que } \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = \nu_h \text{ sur } \Gamma_C \right\}$ ,

$M_{hn} = \left\{ \nu_h \in W_h : \int_{\Gamma_C} \nu_h \psi_h \, d\Gamma \geq 0, \forall \psi_h \in W_h, \psi_h \geq 0 \right\}$ ,

et pour  $g \in M_{ht}$  :

$M_{ht}(g) = \left\{ \nu_h \in W_h : \left| \int_{\Gamma_C} \nu_h \psi_h \, d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_C} g \psi_h \, d\Gamma, \forall \psi_h \in W_h, \psi_h \geq 0 \right\}$ .

- **Existence** d'une solution pour tout coefficient de frottement (Haslinger 1983).
- **Unicité** de la solution si le coefficient de frottement est assez petit de l'ordre de  $\sqrt{h}$  (Haslinger 1983).

## Un premier estimateur

L'estimateur résiduel global  $\eta$  et les contributions locales  $\eta_T$  sont définis par :

$$\eta = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_T = \left( \sum_{i=1}^8 \eta_{iT}^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \eta_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{\text{int}} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{3T} = h_T^{1/2} \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \quad \eta_{4T} = h_T^{1/2} \|\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} -\lambda_{hn+} u_{hn} \right)^{1/2}, \quad \eta_{6T} = \|\lambda_{hn-}\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{7T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+}) - |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{ht} u_{ht})_- \right)^{1/2},$$

$$\eta_{8T} = \|(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C},$$

où  $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$  désigne le saut de contrainte de  $\mathbf{u}_h$  dans la direction normale,  $\zeta_T$  et  $\zeta$  sont les termes local et global d'oscillation de données.



## Un premier estimateur

L'estimateur résiduel global  $\eta$  et les contributions locales  $\eta_T$  sont définis par :

$$\eta = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_T = \left( \sum_{i=1}^8 \eta_{iT}^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \eta_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{\text{int}} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{3T} = h_T^{1/2} \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \quad \eta_{4T} = h_T^{1/2} \|\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} -\lambda_{hn+} u_{hn} \right)^{1/2}, \quad \eta_{6T} = \|\lambda_{hn-}\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{7T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{ht} u_{ht})_- \right)^{1/2},$$

$$\eta_{8T} = \|(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C},$$

où  $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$  désigne le saut de contrainte de  $\mathbf{u}_h$  dans la direction normale,  $\zeta_T$  et  $\zeta$  sont les termes local et global d'oscillation de données.

## Un premier estimateur

L'estimateur résiduel global  $\eta$  et les contributions locales  $\eta_T$  sont définis par :

$$\eta = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_T = \left( \sum_{i=1}^8 \eta_{iT}^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \eta_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{\text{int}} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{3T} = h_T^{1/2} \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \quad \eta_{4T} = h_T^{1/2} \|\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} -\lambda_{hn+} u_{hn} \right)^{1/2}, \quad \eta_{6T} = \|\lambda_{hn-}\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{7T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{ht} u_{ht})_- \right)^{1/2},$$

$$\eta_{8T} = \|(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C},$$

où  $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$  désigne le saut de contrainte de  $\mathbf{u}_h$  dans la direction normale,  $\zeta_T$  et  $\zeta$  sont les termes local et global d'oscillation de données.

## Un premier estimateur

L'estimateur résiduel global  $\eta$  et les contributions locales  $\eta_T$  sont définis par :

$$\eta = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_T = \left( \sum_{i=1}^8 \eta_{iT}^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \eta_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{\text{int}} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{3T} = h_T^{1/2} \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \quad \eta_{4T} = h_T^{1/2} \|\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} -\lambda_{hn+} u_{hn} \right)^{1/2}, \quad \eta_{6T} = \|\lambda_{hn-}\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{7T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{ht} u_{ht})_- \right)^{1/2},$$

$$\eta_{8T} = \|(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C},$$

où  $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$  désigne le saut de contrainte de  $\mathbf{u}_h$  dans la direction normale,  $\zeta_T$  et  $\zeta$  sont les termes local et global d'oscillation de données.

## Borne supérieure

Soit  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  la solution du problème continu telle que  $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$ , avec  $\xi \in M$ ,  $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$  sur  $\Gamma_C$  et  $\mu \|\xi\|_M$  suffisamment petit. Soit  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$  une solution du problème discret. Alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \eta + \zeta.$$

## Borne inférieure

Soient  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$  une solution du problème discret et  $\eta = \eta(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$  l'estimateur correspondant. Soit  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  une solution du problème continu telle que  $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$ . Les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\eta_{1T} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad \eta_{2T} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T.$$

Pour tous les éléments  $T$  possédant un côté sur  $\Gamma_C$  (i.e.  $T \cap \Gamma_C = E$ ), les bornes locales inférieures sont obtenues :

$$\eta_{iT} \lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4,$$

$$\eta_{jT} \leq 2(1 + \mu) \left( \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E^{1/2} \|\mathbf{u}\|_E^{1/2} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda}\|_E^{1/2} \right), \quad j = 5, 7,$$

$$\eta_{lT} \leq (1 + \mu) \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E, \quad l = 6, 8.$$

# Problème discret

Présentation des estimations d'erreur

Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact

Estimations a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

► Problème continu

► Un premier estimateur

► Un second estimateur

► Comparaison entre ces deux estimateurs

► Un estimateur par stabilisation

Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact

La formulation mixte discrète du problème est de trouver  $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$  et  $\tilde{\lambda}_h \in \mathbf{K}_h(\mu \tilde{\lambda}_{hn}) = K_{hn} \times K_{ht}(\mu \tilde{\lambda}_{hn})$  qui satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{hn} v_{hn}) + I_h(\tilde{\lambda}_{ht} v_{ht})) d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_h d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \int_{\Gamma_C} (I_h((\nu_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn}) \tilde{u}_{hn}) + I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht}) \tilde{u}_{ht})) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_h = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in \mathbf{K}_h(\mu \tilde{\lambda}_{hn}). \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}))^2 : \forall T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in (\mathbb{P}_1(T))^2, \mathbf{v}_h|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \right\}$ ,

$W_h = \left\{ \mu_h : \mu_h \in \mathcal{C}(\overline{\Gamma_C}), \exists \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ tel que } \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = \mu_h \text{ sur } \Gamma_C \right\}$ ,

$K_{hn} = \left\{ \nu_h \in W_h : \nu_h \geq 0 \right\}$ ,

et pour  $g \in K_{hn} : K_{ht}(g) = \left\{ \nu_h \in W_h : |\nu_h| \leq g \right\}$ .

- **Existence** d'une solution pour tout coefficient de frottement.
- **Unicité** de la solution si le coefficient de frottement est assez petit de l'ordre de  $\sqrt{h}$ .

## Un second estimateur

L'estimateur global par résidu  $\tilde{\eta}$  et les contributions locales  $\tilde{\eta}_T$  sont définis par

$$\tilde{\eta} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tilde{\eta}_T^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_T = \left( \sum_{i=1}^6 \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \tilde{\eta}_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{\text{int}} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{3T} = h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \quad \tilde{\eta}_{4T} = h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\tilde{\eta}_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{6T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right)^{1/2},$$

où l'on rappelle que  $J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$  est le saut de contrainte de  $\tilde{\mathbf{u}}_h$  dans la direction normale et  $\zeta_T$  et  $\zeta$  sont les termes local et global d'oscillation des données.

## Un second estimateur

L'estimateur global par résidu  $\tilde{\eta}$  et les contributions locales  $\tilde{\eta}_T$  sont définis par

$$\tilde{\eta} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tilde{\eta}_T^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_T = \left( \sum_{i=1}^6 \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \tilde{\eta}_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{\text{int}} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{3T} = h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \quad \tilde{\eta}_{4T} = h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\tilde{\eta}_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{6T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right)^{1/2},$$

où l'on rappelle que  $J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$  est le saut de contrainte de  $\tilde{\mathbf{u}}_h$  dans la direction normale et  $\zeta_T$  et  $\zeta$  sont les termes local et global d'oscillation des données.

## Un second estimateur

L'estimateur global par résidu  $\tilde{\eta}$  et les contributions locales  $\tilde{\eta}_T$  sont définis par

$$\tilde{\eta} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tilde{\eta}_T^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_T = \left( \sum_{i=1}^6 \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \tilde{\eta}_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{\text{int}} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{3T} = h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \quad \tilde{\eta}_{4T} = h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\tilde{\eta}_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{6T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right)^{1/2},$$

où l'on rappelle que  $J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$  est le saut de contrainte de  $\tilde{\mathbf{u}}_h$  dans la direction normale et  $\zeta_T$  et  $\zeta$  sont les termes local et global d'oscillation des données.



## Un second estimateur

L'estimateur global par résidu  $\tilde{\eta}$  et les contributions locales  $\tilde{\eta}_T$  sont définis par

$$\tilde{\eta} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tilde{\eta}_T^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_T = \left( \sum_{i=1}^6 \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \tilde{\eta}_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{\text{int}} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{3T} = h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \quad \tilde{\eta}_{4T} = h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\tilde{\eta}_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{6T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right)^{1/2},$$

où l'on rappelle que  $J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$  est le saut de contrainte de  $\tilde{\mathbf{u}}_h$  dans la direction normale et  $\zeta_T$  et  $\zeta$  sont les termes local et global d'oscillation des données.

## Borne supérieure

Soit  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  la solution du problème continu telle que  $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$ , avec  $\xi \in M$ ,  $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$  sur  $\Gamma_C$  et  $\mu \|\xi\|_M$  est suffisamment petit. Soit  $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$  une solution du problème discret. Alors

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \tilde{\eta} + \zeta.$$

## Borne inférieure

Soit  $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$  une solution du problème discret et soit  $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$  l'estimateur correspondant. Soit  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  une solution du problème continu telle que  $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$ . Pour tout élément  $T$ , les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\tilde{\eta}_{1T} \lesssim \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad \tilde{\eta}_{2T} \lesssim \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T.$$

Pour tout élément  $T$  ayant une côté dans  $\Gamma_C$  (i.e.,  $T \cap \Gamma_C = E$ ), les estimations locales inférieures suivantes ont lieu :

$$\tilde{\eta}_{iT} \lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4,$$

$$\tilde{\eta}_{5T} \lesssim \tilde{\eta}_{3T}^{1/2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}^{1/2},$$

$$\tilde{\eta}_{6T} \lesssim (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T})^{1/2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}^{1/2}.$$

# Comparaison entre ces deux estimateurs

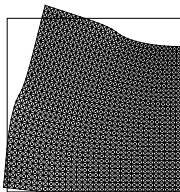


Fig.: Configurations initiale et déformée avec  $\mu = 0.5$  et  $N_C = 32$ .

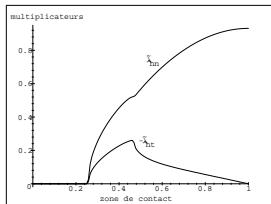
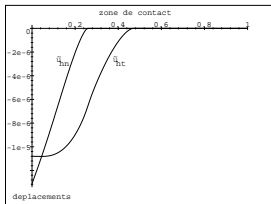


Fig.: Déplacements normal et tangentiel ( $\tilde{u}_{hn}$ ,  $\tilde{u}_{ht}$ ) sur  $\Gamma_C$  et multiplicateurs normal et tangentiel ( $\tilde{\lambda}_{hn}$ ,  $-\tilde{\lambda}_{ht}$ ) sur  $\Gamma_C$ .

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► **Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs**

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Comparaison entre ces deux estimateurs

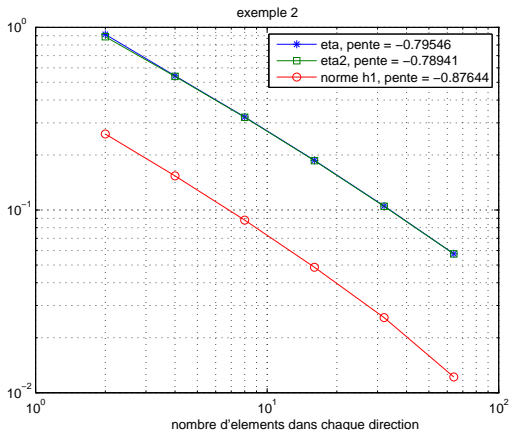


Fig.: Taux de convergence de  $\eta$ ,  $\tilde{\eta}$  et  $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ .

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► **Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs**

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Comparaison entre ces deux estimateurs

Présentation des estimations d'erreur

Estimations a posteriori pour la méthode XFEM sans contact

Estimations a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

► Problème continu

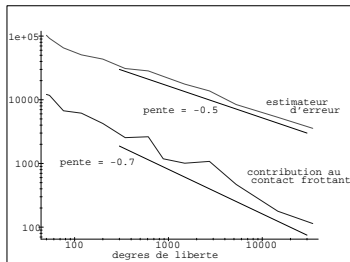
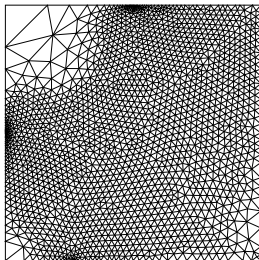
► Un premier estimateur

► Un second estimateur

► **Comparaison entre ces deux estimateurs**

► Un estimateur par stabilisation

Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact



# Méthode de stabilisation

- ▶ Beaucoup de méthodes par éléments finis (avec des multiplicateurs de Lagrange, lagrangien augmenté) requièrent la vérification de la **condition inf-sup** :

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{\lambda_h \in \mathbf{M}_h(\mu\lambda_{hn})} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\lambda_h, \mathbf{v}_h)}{\|\lambda_h\|_{-1/2, \Gamma_C} \|\mathbf{v}_h\|_{1, \Omega}} \geq \beta$$

où  $\mathbf{V}_h$  et  $\mathbf{M}_h(\mu\lambda_{hn})$  sont les espaces des champs de déplacement et de contrainte normale discrétisés et  $\beta$  est une constante strictement positive indépendante de la taille du maillage.

- ▶ On s'intéresse à une méthode par éléments finis mixtes qui ne requiert pas de condition inf-sup.
  - Premiers travaux en 1987 de Hughes et Brooks.
  - Hughes, Franca et Balestra l'ont développé pour le problème de Stokes.
  - Hughes et Franca ont généralisé cette méthode.
  - Barbosa et Hughes ont étudié les multiplicateurs de Lagrange sur le bord.
  - étendu aux problèmes de contact bilatéral par Hansbo et Heintz.
  - étendu aux problèmes de contact unilatéral en élasticité par Hild et Renard.

# Problème discret

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

On définit

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\overline{\Omega}))^2 : \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{v}_h|_T \in (\mathbb{P}_1(T))^2, \quad \mathbf{v}_h|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \right\}.$$

Soit  $x_0, \dots, x_N$  des points de  $\overline{\Gamma_C}$  formant la famille de maillages de  $\Gamma_C$  notée  $\mathcal{T}_H$  et  $H = \max_{0 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$ . Alors on définit

$$W_H = \left\{ \nu_H \in L^2(\Gamma_C) : \nu_H|_{]x_i, x_{i+1}[} \in P_0(]x_i, x_{i+1}[), \forall 0 \leq i \leq N-1 \right\},$$

$$M_{Hn} = \left\{ \nu_H \in W_H : \nu_H \geq 0 \right\},$$

et pour  $g \in M_{Hn}$  :

$$M_{Ht}(g) = \left\{ \nu_H \in W_H : |\nu_H| \leq g \right\}.$$

# Formulation discrète

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

Le problème discret est de trouver  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$  et  $\boldsymbol{\lambda}_H = (\lambda_{Hn}, \lambda_{Ht}) \in \mathbf{M}_H(\mu\lambda_{Hn})$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h)d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h)d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \\ b(\boldsymbol{\nu}_H - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Ht} - \lambda_{Ht})(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma \leq 0, \quad \forall (\nu_{Hn}, \nu_{Ht}) \in \mathbf{M}_H(\mu\lambda_{Hn}), \end{array} \right.$$

où  $\gamma$  est défini constant sur chaque élément  $T$  comme  $\gamma = \gamma_0 h_T$  où  $\gamma_0 > 0$  est indépendant de  $h$ .

- **Existence** d'une solution pour tout coefficient  $\mu$  positif et pour  $\gamma_0$  suffisamment petit.
- **Unicité** lorsque  $\mu$  et  $\gamma_0$  sont suffisamment petits.

► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact



# Un estimateur stabilisé

Les estimateurs résiduels locaux sont définis par :

$$\eta_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \eta_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{3T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{4T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn-} \right)^{1/2}, \quad \eta_{6T} = \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn-}\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{7T} = \left( \sum_{E \in E_T^C} \|u_{hn+}\|_{1,E}^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_{8T} = \|(|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{9T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{Ht} u_{ht})_- \right)^{1/2}.$$

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Un estimateur stabilisé

Les estimateurs résiduels locaux sont définis par :

$$\eta_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \eta_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{3T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{4T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn-} \right)^{1/2}, \quad \eta_{6T} = \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn-}\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{7T} = \left( \sum_{E \in E_T^C} \|u_{hn+}\|_{1,E}^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_{8T} = \|(|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{9T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{Ht} u_{ht})_- \right)^{1/2}.$$

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Un estimateur stabilisé

Les estimateurs résiduels locaux sont définis par :

$$\eta_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \eta_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{3T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{4T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn-} \right)^{1/2}, \quad \eta_{6T} = \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn-}\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{7T} = \left( \sum_{E \in E_T^C} \|u_{hn+}\|_{1,E}^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_{8T} = \|(|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{9T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{Ht} u_{ht})_- \right)^{1/2}.$$

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

# Un estimateur stabilisé

Les estimateurs résiduels locaux sont définis par :

$$\eta_{1T} = h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \quad \eta_{2T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{3T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{4T} = h_T^{1/2} \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{5T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn-} \right)^{1/2}, \quad \eta_{6T} = \left( \sum_{E \in E_T^C} \|\lambda_{Hn-}\|_E^2 \right)^{1/2},$$

$$\eta_{7T} = \left( \sum_{E \in E_T^C} \|u_{hn+}\|_{1,E}^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_{8T} = \|(|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C},$$

$$\eta_{9T} = \left( \int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{Ht}| - \mu \lambda_{Hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{Ht} u_{ht})_- \right)^{1/2}.$$

Présentation  
des  
estimations  
d'erreur

Estimations a  
posteriori  
pour la  
méthode  
XFEM sans  
contact

Estimations a  
posteriori  
pour le  
problème de  
Signorini avec  
frottement de  
Coulomb

► Problème continu

► Un premier  
estimateur

► Un second  
estimateur

► Comparaison  
entre ces deux  
estimateurs

► Un estimateur  
par stabilisation

Estimations a  
priori pour la  
méthode  
XFEM avec  
contact

## Borne supérieure

On suppose que la solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  du problème continu est telle que  $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$ , avec  $\xi \in M$ ,  $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$  sur  $\Gamma_C$  et  $\mu \|\xi\|_M$  suffisamment petit. Soit  $\gamma_0$  suffisamment petit. Alors une solution  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$  du problème discret satisfait :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_{-1/2,\Gamma_C} \lesssim \eta + \zeta.$$

## Borne inférieure

Soient  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$  une solution du problème discret et  $\eta = \eta(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$  l'estimateur correspondant. Soit  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  une solution du problème continu telle que  $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$ . Les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\eta_{1T} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad \eta_{2T} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T.$$

et pour tous les éléments  $T$  possédant un côté sur  $\Gamma_C$  (i.e.  $T \cap \Gamma_C = E$ ) :

$$\eta_{iT} \lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4,$$

$$\eta_{jT} \leq 2(1 + \mu) \left( \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E^{1/2} \|\mathbf{u}\|_E^{1/2} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda}\|_E^{1/2} \right), \quad j = 5, 8,$$

$$\eta_{lT} \leq (1 + \mu) \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E, \quad l = 6, 9,$$

$$\eta_{7T} \leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}\|_E.$$

Pour la méthode des éléments finis étendus (XFEM), deux principales méthodes sont employées pour formuler les problèmes de contact :

- l'approche par pénalisation : Owen, Peric (1982), Khoei (2006), Dolbow.
- la méthode des multiplicateurs de Lagrange : Gallego (1989), Géniaut (2007).
- On combine la formulation stabilisée avec la méthode XFEM et on utilise une méthode de domaine fictif.

### 3 Estimations a priori pour la méthode XFEM avec contact

- ▶ Problème continu
- ▶ Estimation a priori

# Problème continu

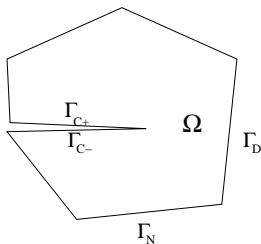


Fig.: La géométrie du domaine fissuré  $\Omega$

On reprend les équations de l'**élasticité**.

Les équations de **contact** sont alors remplacées par :

$$[u_n] \leq 0, \quad \sigma_n^+(\mathbf{u}) = \sigma_n^-(\mathbf{u}) = \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \cdot [u_n] = 0.$$

L'**absence des forces tangentielles de frottement** est donnée par :

$$\sigma_t^+(\mathbf{u}) = \sigma_t^-(\mathbf{u}) = 0.$$

On a défini  $n^+ = -n^-$  la normale sortante unitaire sur  $\Gamma_{C+}$ ,  $[u_n]$  désigne le saut du déplacement normal à travers la fissure  $\Gamma_C$  et  $\sigma_t^+(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})n^+ - \sigma_n^+(\mathbf{u})n^+$  et  $\sigma_t^-(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})n^- - \sigma_n^-(\mathbf{u})n^-$ .

## Opérateur utilisé

L'opérateur  $\Pi_h$  satisfait :

$$\Pi_h \mathbf{u} = I_h \mathbf{u}_r + \chi \mathbf{u}_s \quad \text{pour un triangle non enrichi par la fonction Heaviside } H$$

$$\Pi_h \mathbf{u} = I_h \tilde{\mathbf{u}}_{r1} + \chi \mathbf{u}_s \quad \text{pour un triangle totalement enrichi par } H \text{ sur } \Omega_1$$

$$\Pi_h \mathbf{u} = I_h \tilde{\mathbf{u}}_{r2} + \chi \mathbf{u}_s \quad \text{pour un triangle totalement enrichi par } H \text{ sur } \Omega_2$$

où  $I_h$  désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange classique associé à la méthode par éléments finis et  $\tilde{\mathbf{u}}_{ri}$  est l'extension de  $\mathbf{u}_r$  de  $\Omega_i$  à  $\bar{\Omega}$  pour  $i = 1, 2$  telle que  $\|\tilde{\mathbf{u}}_{ri}\|_{2,\bar{\Omega}} \lesssim \|\mathbf{u}_r|_{\Omega_i}\|_{2,\Omega_i}$ .

## Estimation a priori

On suppose que  $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_C)$  et  $\mathbf{u}_r \in H^2(\Omega)$ . Soit  $(\mathbf{u}, \lambda)$  la solution du problème continu. Soit  $\gamma_0$  suffisamment petit et soit  $(\mathbf{u}_h, \lambda_H)$  une solution de problème discret. Avec  $|||(\mathbf{v}, \nu)||| = \left( \|\mathbf{v}\|^2 + \|\gamma^{1/2} \nu\|_{\Gamma_C}^2 \right)^{1/2}$ , on a :

$$|||(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \lambda - \lambda_H)||| \lesssim h \|\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s\|_{2,\Omega} + h^{1/2} H^{1/2} \|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C} + H^{3/4-\eta/2} (\|\mathbf{u}\|_{3/2-\eta,\Omega} + \|\lambda\|_{1/2,\Gamma_C}).$$



Deuxième partie

Inéquations variationnelles

On rencontre des inéquations variationnelles pour :

- ▶ les problèmes d'obstacle,
- ▶ les fluides de Bingham en visco-plasticité,
- ▶ les problèmes de torsion en élasto-plasticité,
- ▶ les problèmes de contact, de frottement.

On rencontre des inéquations variationnelles pour :

- ▶ les problèmes d'obstacle,
- ▶ les fluides de Bingham en visco-plasticité,
- ▶ les problèmes de torsion en élasto-plasticité,
- ▶ les problèmes de contact, de frottement.

On va s'intéresser au comportement asymptotique des solutions d'inégalités variationnelles quasi-statiques par rapport au :

- ▶ coefficient de frottement,
- ▶ coefficient de compliance.

#### 4 Un modèle simplifié de frottement

- ▶ Expression du modèle en statique et en quasi-statique
- ▶ Comportement asymptotique des solutions

#### 5 Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

- ▶ Expression du modèle en statique et en quasi-statique
- ▶ Comportement asymptotique des solutions

# Un modèle simplifié de frottement

## Un modèle simplifié de frottement

► Expression du modèle en statique et en quasi-statique

► Comportement asymptotique des solutions

## Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on considère l'inégalité variationnelle avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné avec un bord régulier,  $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$  et  $V = H^1(\Omega)$  telle que  $\forall v \in V$  :

$$u_\varepsilon \in V : \int_{\Omega} \{u_\varepsilon(v - u_\varepsilon) + \nabla u_\varepsilon \cdot (\nabla v - \nabla u_\varepsilon)\} d\Omega + \varepsilon \int_{\partial\Omega} \{|v| - |u_\varepsilon|\} d\Gamma \\ \geq \int_{\Omega} \mathcal{F}(v - u_\varepsilon) d\Omega.$$

On le reformule ainsi : on cherche  $u_\varepsilon \in H$  tel que  $\forall v \in H$  :

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \varepsilon j(v) - \varepsilon j(u_\varepsilon) \geq (F, v - u_\varepsilon).$$

- Modèle introduit par Glowinski.
- Inégalité **bien posée** par le théorème de Lions-Stampacchia.
- **Comportement asymptotique** étudié par Bostan, Canon et Hild.

# Un modèle simplifié de frottement quasi-statique

## Un modèle simplifié de frottement

► Expression du modèle en statique et en quasi-statique

► Comportement asymptotique des solutions

## Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

Le problème est de trouver  $u_\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$  tel que  $\forall v \in V$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 \\ u_\varepsilon(t) \in V : \\ \int_\Omega \{u_\varepsilon(t)(v - \dot{u}_\varepsilon(t)) + \nabla u_\varepsilon(t) \cdot (\nabla v - \nabla \dot{u}_\varepsilon(t))\} d\Omega + \varepsilon \int_{\partial\Omega} \{|v| - |\dot{u}_\varepsilon|\} d\Gamma \\ \geq \int_\Omega \{F(t)(v - \dot{u}_\varepsilon(t)) + \nabla F(t) \cdot (\nabla v - \nabla \dot{u}_\varepsilon(t))\} d\Omega, \end{array} \right.$$

où  $F \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; V)$  pour  $p \in ]1, +\infty]$ .

On le reformule ainsi :

$$a(u_\varepsilon, v - \dot{u}_\varepsilon) + \varepsilon j(v) - \varepsilon j(\dot{u}_\varepsilon) \geq (F, v - \dot{u}_\varepsilon), \quad \forall v \in V.$$

- Inégalité **bien posée** par Andersson, Han, Sofonea, Klarbling, Mikelić, Shillor...
- **Existence** obtenue avec un schéma d'Euler implicite.
- Qu'en est-il de **l'unicité** et du **comportement asymptotique** des solutions ?

# Transformation en un problème d'évolution

Un modèle simplifié de frottement

► Expression du modèle en statique et en quasi-statique

► Comportement asymptotique des solutions

Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

En introduisant la notation  $y_\varepsilon(t) = \frac{u_\varepsilon(t) - u^0(t)}{\varepsilon}$ , on déduit que le problème quasi-statique peut être écrit :

$$\begin{cases} y_\varepsilon(0) = \frac{u_\varepsilon^0 - u_0^0}{\varepsilon} =: y_\varepsilon^0 \\ \varepsilon \frac{dy_\varepsilon}{dt} + \partial j^* A y_\varepsilon(t) \ni -\frac{du^0}{dt}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

► **Existence** et **unicité** données par des résultats concernant les opérateurs maximaux monotones de Brezis :

Pour tout  $F \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}_+; V)$ ,  $\varepsilon > 0$  et sous la condition initiale  $u_\varepsilon^0$  telle que  $\frac{u_\varepsilon^0 - F(0)}{\varepsilon} \in D_0$ , le problème simplifié de frottement a une unique solution  $u_\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}_+; V)$ , qui satisfait :

$$\int_0^T \|\dot{u}_\varepsilon(t)\|^2 dt \leq \int_0^T \|\dot{F}(t)\|^2 dt, \quad \forall T > 0$$

où  $D_0 = \{w \in V : \int_{\partial\Omega} |v| d\Gamma \geq \int_{\Omega} \{w v + \nabla w \cdot \nabla v\} d\Omega, \quad \forall v \in V\}$ .

# Comportement asymptotique des solutions

- ▶  $(u_\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$  converge vers  $F(t)$  dans  $V$  **uniformément en temps**.
- ▶  $((u_\varepsilon - F)/\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est **borné sur  $L^\infty(\mathbb{R}_+; V)$**  et  $(\frac{\sqrt{t}}{\varepsilon_k}(\dot{u}_{\varepsilon_k} - \dot{F}))_k$  est **borné sur  $L^2(\mathbb{R}_+; V)$** .

Supposons que  $F(t) = F_0 + tG$  avec  $F_0, G \in V$  et que  $(u_\varepsilon^0 - F_0)/\varepsilon \in D_0$ . Alors la suite  $(\varepsilon_k)_k$  converge vers 0 et il existe un élément  $y \in -\partial j(G)$  tel que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{\varepsilon_k} - F}{\varepsilon_k} = y$$

**faiblement**  $\star$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; V)$  et **fortement** dans  $L^2_{loc}([0, +\infty[; V)$ .

- ▶ En utilisant des résultats sur la stabilité des semi-groupes engendrés par les opérateurs maximaux monotones, on a :

Supposons que  $F(t) = F_0 + tG$ , avec  $F_0, G \in V$  et que la famille  $(\varepsilon^{-1}(u_\varepsilon^0 - F_0))_{\varepsilon>0} \subset D_0$  converge lorsque  $\varepsilon \searrow 0$  vers un élément  $z^0 \in \overline{D_0} = D_0$ . Si  $G \in D_0^\perp$  alors il existe  $y \in -\partial j(G)$  tel que :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{u_\varepsilon(t) - (F_0 + tG)}{\varepsilon} = y, \quad \text{uniformément pour } t \in [\delta, +\infty[, \forall \delta > 0.$$



4 Un modèle simplifié de frottement

5 Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

- ▶ Expression du modèle en statique et en quasi-statique
- ▶ Comportement asymptotique des solutions

# Problème de frottement avec compliance normale

Un modèle simplifié de frottement

Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

► Expression du modèle en statique et en quasi-statique

► Comportement asymptotique des solutions

Trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} & = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) & = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} & = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases}$$

Les conditions de compliance normale avec frottement sur  $\Gamma_C$  sont :

$$\begin{cases} \sigma_n(\mathbf{u}) = -c_N(u_n)_+^{m_N}, \\ \text{si } u_t = 0, & |\sigma_t(\mathbf{u})| \leq c_T(u_n)_+^{m_T}, \\ \text{si } u_t \neq 0, & \sigma_t(\mathbf{u}) = -c_T(u_n)_+^{m_T} \frac{u_t}{|u_t|}. \end{cases}$$

- $(u_n)_+$  représente la pénétration du corps dans la fondation,
  - Les constantes  $m_N \geq 1, m_T \geq 1$  ainsi que les coefficients de compliance positifs  $c_N, c_T$  dans  $L^\infty(\Gamma_C)$  désignent des paramètres d'interface caractérisant le comportement vis à vis du contact entre le corps et la fondation rigide.
- Lois initiées par Oden et Martins en 1985.

# Expression en statique

Un modèle simplifié de frottement

Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

► Expression du modèle en statique et en quasi-statique

► Comportement asymptotique des solutions

Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, on considère l'inégalité variationnelle avec  $\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n : \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \}$  et  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega$  :

$$\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{V} : a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon) + \varepsilon j_N(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon) + \varepsilon j_T(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) - \varepsilon j_T(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon),$$

- $j_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} c_N (u_n)_+^{m_N} v_n \, d\Gamma$  correspond au travail virtuel de la contrainte normale,
  - $j_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} c_T (u_n)_+^{m_T} |v_t| \, d\Gamma$  est la puissance virtuelle des forces de frottement,
  - $j_N$  et  $j_T$  sont bien définies pour  $1 \leq m_N, m_T$  si  $n = 2$ ,  
 $1 \leq m_N, m_T < 3$  si  $n = 3$ .
- Inégalité introduite par Klarbring, Mikelić et Shillor, **existence** de solutions.
- **Unicité** pour des coefficients  $\varepsilon_{c_N}, \varepsilon_{c_T}$  suffisamment petits prouvée par Hild.
- **Comportement asymptotique** étudié par Bostan, Canon et Hild.

# Expression en quasi-statique

Un modèle simplifié de frottement

Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

► Expression du modèle en statique et en quasi-statique

► Comportement asymptotique des solutions

Trouver  $\mathbf{u}_\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V})$  telle que  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_\varepsilon(0) = \mathbf{u}_\varepsilon^0 \\ \mathbf{u}_\varepsilon(t) \in \mathbf{V} : \\ a(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) + \varepsilon(j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \mathbf{v}) - \varepsilon(j_N + j_T)(\mathbf{u}_\varepsilon(t), \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)) \\ \geq (\mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\varepsilon(t)), \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{F} \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V})$  pour tout  $p \in ]1, +\infty]$ .

- Inégalité **bien posée** étudiée par Andersson.
- Qu'en est-il du **comportement asymptotique** ?

# Comportement asymptotique des solutions

Un modèle simplifié de frottement

Problème de frottement quasi-statique avec compliance normale

► Expression du modèle en statique et en quasi-statique

► Comportement asymptotique des solutions

- $(\mathbf{u}_\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$  converge vers  $\mathbf{u}_0$  dans  $C_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbf{V})$ .
- $((\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0)/\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est borné dans  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V})$  et  $(\dot{\mathbf{u}}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  est borné dans  $L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; \mathbf{V})$ .

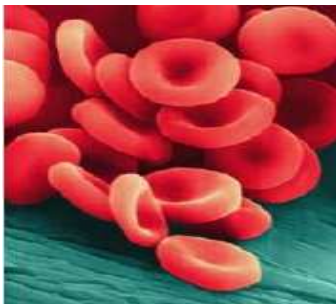
La limite faible  $\star \mathbf{w} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{u}_{\varepsilon_k} - \mathbf{u}_0}{\varepsilon_k}$  dans  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V})$  satisfait

$$A\mathbf{w}(t) + \partial_V(j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) \ni 0, \text{ pour presque tout } t > 0$$

où  $\partial_V(j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \cdot)$  désigne le sous-différentiel de la fonction convexe  $\mathbf{v} \rightarrow (j_N + j_T)(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{v})$ .

## Troisième partie

### Problèmes de contact en mécanique des fluides



## 6 Un peu de biologie

## 7 Modèle et algorithme

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ Discrétisation en temps et en espace
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ L'algorithme
- ▶ Contacts
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

## 8 Simulations numériques

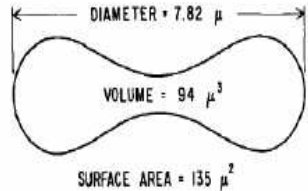
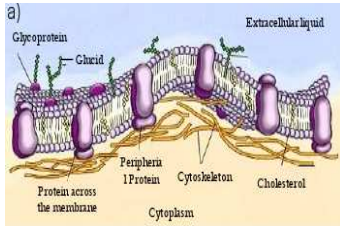
- ▶ Sous cisaillement
- ▶ Sous écoulement de Poiseuille

# Un peu de biologie

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

Simulations numériques



- Nombre total de globules rouges dans un organisme : 25 000 milliards soit 4 à 5 millions par  $mm^3$  de sang
- Durée de vie : 120 jours
- Fonction : délivrer l'oxygène.



## 6 Un peu de biologie

## 7 Modèle et algorithme

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ Discrétisation en temps et en espace
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ L'algorithme
- ▶ Contacts
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

## 8 Simulations numériques

Un peu de  
biologie

Modèle et  
algorithme

► **Position du  
problème**

► Formulation  
variationnelle

► Discrétisation en  
temps et en espace

► Approximation de  
l'énergie de courbure

► L'algorithme

► Contacts

► Préservation du  
volume et de la  
surface des globules  
rouges

► L'algorithme final

- Interaction Fluide/Structure.

Simulations  
numériques

Un peu de  
biologie

Modèle et  
algorithme

► **Position du  
problème**

► Formulation  
variationnelle

► Discrétisation en  
temps et en espace

► Approximation de  
l'énergie de courbure

► L'algorithme

► Contacts

► Préservation du  
volume et de la  
surface des globules  
rouges

► L'algorithme final

Simulations  
numériques

- Interaction Fluide/Structure.
- Conservation du volume des globules rouges.
- Conservation de la surface des globules rouges.

## Un peu de biologie

## Modèle et algorithme

### ► Position du problème

#### ► Formulation variationnelle

#### ► Discrétisation en temps et en espace

#### ► Approximation de l'énergie de courbure

#### ► L'algorithme

#### ► Contacts

#### ► Préservation du volume et de la surface des globules rouges

#### ► L'algorithme final

## Simulations numériques

- Interaction Fluide/Structure.
- Conservation du volume des globules rouges.
- Conservation de la surface des globules rouges.
- Gestion des contacts entre les globules et les parois des vaisseaux.

## Au niveau du fluide

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine et C.I. sur le fluide et la déformation initiale des globules

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

- $\mathbf{u} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la vitesse du fluide,

## Au niveau du fluide

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine et C.I. sur le fluide et la déformation initiale des globules

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

- $\mathbf{u} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la vitesse du fluide,
- $\mu$  est la viscosité du fluide,

## Au niveau du fluide

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine et C.I. sur le fluide et la déformation initiale des globules

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

- $\mathbf{u} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la vitesse du fluide,
- $\mu$  est la viscosité du fluide,
- $\mathbf{p} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression,

## Au niveau du fluide

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine et C.I. sur le fluide et la déformation initiale des globules

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

- $\mathbf{u} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la vitesse du fluide,
- $\mu$  est la viscosité du fluide,
- $\mathbf{p} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression,
- $\rho$  est la densité du fluide,



## Au niveau du fluide

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine et C.I. sur le fluide et la déformation initiale des globules

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

- $\mathbf{u} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la vitesse du fluide,
- $\mu$  est la viscosité du fluide,
- $\mathbf{p} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression,
- $\rho$  est la densité du fluide,
- $\varphi : ]0, T[ \times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspond à la déformation des globules,

## Au niveau du fluide

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine et C.I. sur le fluide et la déformation initiale des globules

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

- $\mathbf{u} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la vitesse du fluide,
- $\mu$  est la viscosité du fluide,
- $\mathbf{p} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression,
- $\rho$  est la densité du fluide,
- $\varphi : ]0, T[ \times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspond à la déformation des globules,
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})/2$  est le tenseur des déformations,

## Au niveau du fluide

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine et C.I. sur le fluide et la déformation initiale des globules

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

- $\mathbf{u} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la vitesse du fluide,
- $\mu$  est la viscosité du fluide,
- $\mathbf{p} : ]0, T[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression,
- $\rho$  est la densité du fluide,
- $\varphi : ]0, T[ \times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$  correspond à la déformation des globules,
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})/2$  est le tenseur des déformations,
- $\Sigma_0$  est la configuration de référence de la membrane.

## Au niveau de la membrane

Equilibre quasi-statique des forces :

$$J'(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\mathbf{p}_{inext} \boldsymbol{\tau}) = -[\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}].$$

Incompressibilité de la membrane :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \varphi(\Sigma_0).$$

- $J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k |H|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} W(\nabla \varphi) d\Sigma$  est l'énergie interne des globules rouges,

## Au niveau de la membrane

Equilibre quasi-statique des forces :

$$J'(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{p}_{inext} \tau) = -[\mu \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}].$$

Incompressibilité de la membrane :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \cdot \tau = 0 \text{ sur } \varphi(\Sigma_0).$$

- $J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k |H|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} W(\nabla \varphi) d\Sigma$  est l'énergie interne des globules rouges,
- $\mathbf{p}_{inext} : ]0, T[ \times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression inextensible,

## Au niveau de la membrane

Equilibre quasi-statique des forces :

$$J'(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\mathbf{p}_{inext} \boldsymbol{\tau}) = -[\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}].$$

Incompressibilité de la membrane :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \varphi(\Sigma_0).$$

- $J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k |\mathbf{H}|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} W(\nabla \varphi) d\Sigma$  est l'énergie interne des globules rouges,
- $\mathbf{p}_{inext} : ]0, T[ \times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression inextensible,
- $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant de la surface des globules,

## Au niveau de la membrane

Equilibre quasi-statique des forces :

$$J'(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} (\mathbf{p}_{inext} \boldsymbol{\tau}) = -[\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}].$$

Incompressibilité de la membrane :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \varphi(\Sigma_0).$$

- $J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k |H|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} W(\nabla \varphi) d\Sigma$  est l'énergie interne des globules rouges,
- $\mathbf{p}_{inext} : ]0, T[ \times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression inextensible,
- $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant de la surface des globules,
- $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur tangentiel unitaire,

## Au niveau de la membrane

Equilibre quasi-statique des forces :

$$J'(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} (\mathbf{p}_{inext} \boldsymbol{\tau}) = -[\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}].$$

Incompressibilité de la membrane :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \varphi(\Sigma_0).$$

- $J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k |H|^2 d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} W(\nabla \varphi) d\Sigma$  est l'énergie interne des globules rouges,
- $\mathbf{p}_{inext} : ]0, T[ \times \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est la pression inextensible,
- $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant de la surface des globules,
- $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur tangentiel unitaire,
- $[c] = c_{interieur} - c_{exterieur}$  correspond au saut à travers la surface des globules.



- **Fluide**

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega \setminus \varphi(\Sigma_0)$ .

- **Membrane**

Equilibre des forces :

$$J'(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\mathbf{p}_{inext} \boldsymbol{\tau}) = -[\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}].$$

Incompressibilité de la membrane :  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$  sur  $\varphi(\Sigma_0)$ .

- **Fluide**

Navier-Stokes Incompressible et C.L. sur le bord du domaine :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{p} - \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \varphi(\Sigma_0).$$

Incompressibilité du fluide :  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega \setminus \varphi(\Sigma_0)$ .

- **Membrane**

Equilibre des forces :

$$J'(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\mathbf{p}_{inext} \boldsymbol{\tau}) = -[\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}].$$

Incompressibilité de la membrane :  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$  sur  $\varphi(\Sigma_0)$ .

- **Couplage** Vitesse du fluide = Vitesse de la membrane

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{u} \circ \varphi.$$

# Formulation variationnelle

Déterminer la vitesse  $\mathbf{u}$ , la pression  $\mathbf{p}$ , la déformation  $\varphi$ , la pression membranaire  $\mathbf{p}_{inext}$  telles que pour toutes vitesse test  $\mathbf{v}$ , pression test  $\mathbf{q}$  et pression membranaire test  $\mathbf{q}_{inext}$ , on ait :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \mathbf{v} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{p} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \\ + \langle J'(\varphi), \mathbf{v} \circ \varphi \rangle + \int_{\Sigma} \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \mathbf{p}_{inext} \circ \varphi^{-1} d\Sigma = 0,$$

Incompressibilité de la membrane :

$$\int_{\Sigma} \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \mathbf{q}_{inext} \circ \varphi^{-1} d\Sigma = 0,$$

Incompressibilité du fluide :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{q} d\Omega = 0,$$

et couplage :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{u} \circ \varphi.$$

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

► Position du problème

► Formulation variationnelle

► Discrétisation en temps et en espace

► Approximation de l'énergie de courbure

► L'algorithme

► Contacts

► Préservation du volume et de la surface des globules rouges

► L'algorithme final

Simulations numériques

# Discrétisation en temps

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

- Position du problème
- Formulation variationnelle

► Discretisation en temps et en espace

- Approximation de l'énergie de courbure

► L'algorithme

► Contacts

- Préservation du volume et de la surface des globules rouges

► L'algorithme final

Simulations numériques

En définissant  $X^n : ] - \infty, \infty[ \times \Omega \rightarrow \Omega$  par :

$$\begin{cases} X^n(0, x) = x & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ \frac{\partial X^n}{\partial t}(t, x) = \mathbf{u}^n(X^n(t, x)) & \text{pour tout } (t, x) \in ] - \infty, \infty[ \times \Omega \end{cases}$$

notre schéma consiste alors à résoudre la suite de problèmes suivants :

Trouver  $\mathbf{u}^{n+1}$ ,  $\varphi^{n+1}$ ,  $\mathbf{p}^{n+1}$  et  $\mathbf{p}_{inext}^{n+1}$  telles que pour toutes fonctions test  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}_{inext}$  :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \circ X^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{p}^{n+1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega$$
$$+ \langle J'(\varphi^{n+1}), \mathbf{v} \circ \varphi^n \rangle + \int_{\Sigma} \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \cdot \mathbf{p}_{inext}^{n+1} \circ (\varphi^n)^{-1} d\Sigma = 0,$$

$$\int_{\Sigma} \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \cdot \mathbf{q}_{inext} \circ (\varphi^n)^{-1} d\Sigma = 0, \quad \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{q} d\Omega = 0,$$

avec, en discrétisant l'équation de couplage :  $\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}$ .

# Discrétisation en espace

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

- Position du problème
- Formulation variationnelle
- **Discrétisation en temps et en espace**
- Approximation de l'énergie de courbure
- L'algorithme
- Contacts
- Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- L'algorithme final

Simulations numériques

## Déformation

$\varphi_h^{n+1}$  = élément fini  $\mathbb{P}_1$  sur un maillage  $\mathcal{S}_h^0$

$p_{inext,h}^{n+1}$  = élément fini  $\mathbb{P}_0$

## Fluide

$u_h^{n+1}$  = élément fini  $\mathbb{P}_1$ -bulle sur un maillage  $\mathcal{T}_h^n$

$p_h^{n+1}$  = élément fini  $\mathbb{P}_1$  sur un maillage  $\mathcal{T}_h^n$

## Remaillage

À chaque itération, on remaille  $\Omega$  de sorte que le maillage  $\mathcal{S}_h^n = \varphi^n(\mathcal{S}_h^0)$  des membranes déformées soit un sous-maillage de  $\mathcal{T}_h^n$ .

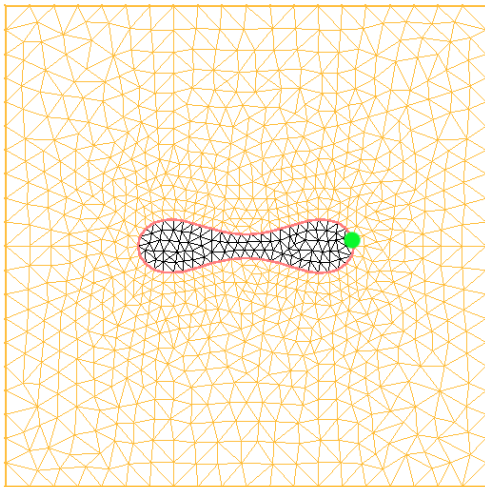
# Maillage conforme vésicule/domaine fluide

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ **Discretisation en temps et en espace**
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ L'algorithme
- ▶ Contacts
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

Simulations numériques



# Approximation de l'énergie de courbure

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

- Position du problème
- Formulation variationnelle
- Discrétisation en temps et en espace
- **Approximation de l'énergie de courbure**
- L'algorithme
- Contacts
- Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- L'algorithme final

Simulations numériques

Pour un élément fini  $\mathbb{P}_1$ , l'énergie de courbure

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} k \left| \frac{d^2\varphi}{ds^2} \right|^2 d\Sigma$$

est infinie. On approche le terme d'énergie de courbure à l'aide de splines cubiques par

$$J_h(\varphi_h) = \inf_{\substack{\Phi_h \in H^2(\Sigma_0; \mathbb{R}^2) \\ \Phi_h(x_i) = \varphi_h(x_i)}} J(\Phi_h),$$

où  $(x_i)_i$  décrit l'ensemble des sommets du maillage  $\mathcal{S}_h^0$  de  $\Sigma_0$ .

# Un Algorithme de base

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ Discrétisation en temps et en espace
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ **L'algorithme**
- ▶ Contacts
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

Simulations numériques

- Initialisation de la vitesse initiale  $\mathbf{u}^0$  du fluide et de la déformation  $\varphi^0$  des vésicules,
- On résout la formulation variationnelle afin de déterminer la vitesse  $\mathbf{u}_h^{n+1}$ ,
- On détermine la nouvelle position des vésicules

$$\varphi_h^{n+1} = \varphi_h^n + \Delta t \mathbf{u}_h^{n+1} \circ \varphi^n,$$

- On remaille le domaine  $\Omega$ .



## Un peu de biologie

## Modèle et algorithme

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ Discrétisation en temps et en espace
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ L'algorithme
- ▶ **Contacts**
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

## Simulations numériques

- Dans un fluide visqueux, Brenner (1961) puis Maude (1961) ont étudié le mouvement d'une sphère. Cox (1974) s'est intéressé au cas de deux solides lisses de forme quelconque.  
**Deux particules peuvent entrer en contact.**

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ Discrétisation en temps et en espace
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ L'algorithme
- ▶ **Contacts**
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

- Dans un fluide visqueux, Brenner (1961) puis Maude (1961) ont étudié le mouvement d'une sphère. Cox (1974) s'est intéressé au cas de deux solides lisses de forme quelconque.  
**Deux particules peuvent entrer en contact.**
- Pour les modèles simplifiés, **pas de collision en temps fini.** Vasquez et Zuazua (2006) l'ont montré pour un problème en dimension 1. Hillairet (2007) et Hesla (2005) l'ont étudié en dimension 2 lorsque la particule et le plan sont lisses et le fluide est de Navier-Stokes.

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ Discrétisation en temps et en espace
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ L'algorithme
- ▶ **Contacts**
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

- Dans un fluide visqueux, Brenner (1961) puis Maude (1961) ont étudié le mouvement d'une sphère. Cox (1974) s'est intéressé au cas de deux solides lisses de forme quelconque.  
**Deux particules peuvent entrer en contact.**
- Pour les modèles simplifiés, **pas de collision en temps fini.** Vasquez et Zuazua (2006) l'ont montré pour un problème en dimension 1. Hillairet (2007) et Hesla (2005) l'ont étudié en dimension 2 lorsque la particule et le plan sont lisses et le fluide est de Navier-Stokes.
- **Numériquement des contacts peuvent apparaître.**

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ Discrétisation en temps et en espace
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ L'algorithme
- ▶ **Contacts**
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

Numériquement des contacts peuvent apparaître.

Différentes méthodes ont été utilisées :

- raffinements locaux de maillage et du pas de temps.  
Inconvénient : coût de calcul important.
- introduction de forces répulsives lorsque les particules commencent à se chevaucher.  
Inconvénient : fortes contraintes sur le pas de temps utilisé, pas forcément en accord avec la physique.
- méthode de pénalisation et projection de la vitesse sur un espace de vitesses admissibles.  
Avantage : permet de traiter les cas denses.

- ▶ Position du problème
- ▶ Formulation variationnelle
- ▶ Discrétisation en temps et en espace
- ▶ Approximation de l'énergie de courbure
- ▶ L'algorithme
- ▶ **Contacts**
- ▶ Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- ▶ L'algorithme final

Pour la simulation numérique entre des solides déformables, on va ajouter une étape de projection afin d'éliminer les intersections. À cet effet, de nouvelles contraintes imposant une distance minimale  $\varepsilon$  entre les vésicules et/ou le bord du domaine sont ajoutées : on calcule la déformation  $\varphi^{n+1} \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon}$  telle que :

$$d(\varphi^{n+1}, \tilde{\varphi}^{n+1}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon}} d(\varphi, \tilde{\varphi}^{n+1})$$

où  $\tilde{\varphi}^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1} \circ \varphi^n$ ,  $\mathcal{A}_{h,\varepsilon}$  est l'ensemble des déformations admissibles.

On résout par un algorithme d'Uzawa une suite de problèmes convexes (méthode introduite par Pantz).

## Préservation du volume et de la surface des globules rouges

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

- Position du problème
- Formulation variationnelle
- Discrétisation en temps et en espace
- Approximation de l'énergie de courbure
- L'algorithme
- Contacts
- **Préservation du volume et de la surface des globules rouges**
- L'algorithme final

Simulations numériques

L'étape de projection est modifiée et l'on calcule la déformation  $\varphi^{n+1}$  en résolvant :

$$d(\varphi^{n+1}, \tilde{\varphi}^{n+1}) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_{h,\varepsilon} \cap \mathbf{V}_h^{ad}} d(\varphi, \tilde{\varphi}^{n+1})$$

où  $\mathbf{V}_h^{ad}$  est l'ensemble des déformations  $\mathbb{P}_1$  inextensibles avec volume prescrit.

On résout le problème de minimisation sous les contraintes d'incompressibilité de la membrane :

$$|\tilde{\varphi}^{n+1}(x_{i+1}) - \tilde{\varphi}^{n+1}(x_i)| = |x_{i+1} - x_i|$$

et sous la contrainte volumique :

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \tilde{\varphi}^{n+1} \wedge \frac{d\tilde{\varphi}^{n+1}}{d\tau} d\Sigma = V_0$$

où  $V_0$  est le volume initial.

# Nouvel Algorithme

Un peu de biologie

Modèle et algorithme

- Position du problème
- Formulation variationnelle
- Discrétisation en temps et en espace
- Approximation de l'énergie de courbure
- L'algorithme
- Contacts
- Préservation du volume et de la surface des globules rouges
- L'algorithme final

Simulations numériques

- Initialisation de la vitesse  $\mathbf{u}^0$  du fluide et de la déformation  $\varphi^0$  des vésicules,
- On résout la formulation variationnelle afin de déterminer la vitesse  $\mathbf{u}_h^{n+1}$ ,
- On détermine la position des vésicules avant projection

$$\tilde{\varphi}_h^{n+1} = \tilde{\varphi}_h^n + \Delta t \mathbf{u}_h^{n+1} \circ \tilde{\varphi}_h^n,$$

- On corrige la position des vésicules par l'étape de projection grâce à un algorithme d'Uzawa. Ainsi on vérifie les contraintes de non-contact, conservation du volume et de la surface (calcul de  $\varphi_h^{n+1}$ ),
- On remaille le domaine  $\Omega$  de sorte que  $\varphi_h^{n+1}(\Sigma_0)$  soit un sous maillage de  $\mathcal{T}_h^{n+1}$  (maillage du domaine recalculé).

6 Un peu de biologie

7 Modèle et algorithme

8 Simulations numériques

▶ Sous cisaillement

▶ Sous écoulement de Poiseuille



# Une vesicule seule (CL nulles pour le fluide)

Un peu de  
biologie

Modèle et  
algorithme

## Simulations numériques

- ▶ Sous cisaillement
- ▶ Sous écoulement  
de Poiseuille

# Mouvement stationnaire de chenille de char

Un peu de  
biologie

Modèle et  
algorithme

Simulations  
numériques

► Sous cisaillement

► Sous écoulement  
de Poiseuille

Au microscope :



Sur l'ordinateur :

# Mouvement de tumbling

Un peu de  
biologie

Modèle et  
algorithme

Simulations  
numériques

► Sous cisaillement

► Sous écoulement  
de Poiseuille

Au microscope :



Sur l'ordinateur :

# A travers des petits capillaires

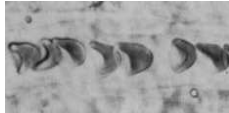
Un peu de  
biologie

Modèle et  
algorithme

Simulations  
numériques

- Sous cisaillement
- **Sous écoulement  
de Poiseuille**

Au microscope :



Sur l'ordinateur :

# A une intersection

Un peu de  
biologie

Modèle et  
algorithme

Simulations  
numériques

► Sous cisaillement

► **Sous écoulement  
de Poiseuille**

- ▶ Pour le contrôle de la qualité des calculs en mécanique des solides :
  - obtention, analyse et implémentation sous Getfem++ d'un estimateur d'erreur pour le problème de l'élasticité linéaire par la méthode XFEM,
  - obtention, analyse et implémentation sous Cast3m des estimateurs d'erreur a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb,
  - obtention et analyse de l'existence et de l'unicité du problème de Signorini avec frottement de Coulomb discrétisé par une méthode hybride de stabilisation ne nécessitant pas de condition inf-sup,
  - obtention et analyse des estimations d'erreur a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb discrétisé par une méthode hybride de stabilisation ne nécessitant pas de condition inf-sup,
  - formulation du contact pour le problème d'élasticité pour la méthode XFEM et obtention d'une estimation a priori.

- ▶ En mécanique des fluides :
  - analyse et simulation numérique sous Freefem++ des contacts pour les globules rouges en dimension 2 évoluant dans un fluide régi par les équations de Navier-Stokes.

- ▶ En mécanique des fluides :
  - analyse et simulation numérique sous Freefem++ des contacts pour les globules rouges en dimension 2 évoluant dans un fluide régi par les équations de Navier-Stokes.
- ▶ Pour la partie inéquations variationnelles :
  - étude du comportement asymptotique des solutions d'inégalités variationnelles d'évolution lorsque des paramètres physiques tels que le coefficient de frottement ou la compliance normale tendent vers 0.