Flot de Ricci et Géométrisation des variétés de dimension 3. (D'après R. Hamilton et G. Perelman.)

Sylvain Maillot

2 juin 2004 (version révisée le 20 juillet 2005)

1 Introduction

Ces notes informelles sont basées sur une série d'exposés donnés à Strasbourg, Orsay, Lille et Genève. Le premier exposé était une introduction à la conjecture de géométrisation et à l'approche par le flot de Ricci. Il est résumé ici assez sèchement aux sections 2 et 3. Les deux autres exposés sont présentés ici dans une version plus développée.

Le but était de donner une bonne idée de la structure générale de la preuve tout en restant le plus accessible possible aux non spécialistes. J'ai donc essayé de donner des énoncés précis, mais parfois plus faibles que ceux de Perelman. Des remarques expliquent à quoi ressemblent les "vrais énoncés" et pourquoi ils sont nécessaires.

Les preuves proprement dites ne sont pas abordées ici. On ne parle donc pas des fonctionnelles $\mathcal{F}, \mathcal{W}, \mathcal{L}$ etc.

Je suppose connues les notions de base de la géométrie riemannienne.

20/07/2005 : de nouveaux développements sont intervenus dans la validation des travaux de Perelman. Pour de plus amples renseignements, voir l'exposé de G. Besson au séminaire Bourbaki.

2 La conjecture de géométrisation

Dans ces notes on se place dans la catégorie $\mathcal{C}^\infty$.

Soit M une variété de dimension 3 connexe, compacte, orientable et sans bord. On dit que M est *irréductible* si toute 2-sphère plongée dans M borde une boule. On dit que M est *atoroïdale* si pour tout plongement $f : \mathbf{T}^2 \to M$ du 2-tore dans M, le morphisme induit $f_* : \pi_1(\mathbf{T}^2) \to \pi_1 M$ n'est pas injectif.

Une variété M comme ci-dessus est appelée *variété de Seifert* si elle admet un feuilletage par des cercles ; *sphérique (resp. euclidienne, resp. hyperbolique)* si elle admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à $+1$ (resp. 0, resp. -1) ; *graphée* si elle peut être obtenue en recollant des fibrés en cercles sur des surfaces le long de leur bord.

Les liens entre ces différentes notions sont les suivants : Les variétés sphériques et euclidiennes sont de Seifert. Les variétés de Seifert sont graphées. Toute variété graphée est une somme connexe de variétés graphées irréductibles. Une variété graphée irréductible et atoroïdale est de Seifert.

Voici un énoncé de la conjecture de géométrisation.

Conjecture de Géométrisation. *Soit M une variété de dimension 3 connexe, compacte, orientable et sans bord. Si M est irréductible et atoroïdale, alors M est de Seifert ou hyperbolique.*

Remarque. En fait, au lieu de l'hypothèse d'atoroïdalité, on pourrait supposer que $\pi_1 M$ n'admet pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. La conclusion attendue est alors que M est sphérique ou hyperbolique. Il semble que dans l'approche par le flot de Ricci, cela ne change pas grand chose.

A l'inverse on peut ne pas supposer que M est irréductible et atoroïdale. La conclusion attendue est alors que M admet une décomposition le long de sphères et de tores en morceaux qui sont de Seifert ou hyperboliques. Un tel résultat est conséquence de la conjecture de géométrisation telle que nous l'avons énoncée et de théorèmes classiques de la dimension 3.

Le fait de dissocier ces théorèmes de décomposition de la conjecture ci-dessus nous simplifiera la tâche. Cependant il est légitime d'étudier le flot de Ricci sur une variété admettant une décomposition non triviale. Il est utile pour cela de garder en tête que le flot doit faire apparaître d'une part des sphères, d'autre part des tores incompressibles découpant la variété en morceaux hyperboliques et en morceaux graphés (obtenus en recollant entre eux les morceaux de Seifert.)

3 Principe de l'approche par le flot de Ricci

Dans cette section on suppose que M est une variété de dimension 3 connexe, compacte, orientable et sans bord, irréductible et atoroïdale.

3.1 L'idée de Hamilton

Elle consiste à munir M d'une métrique riemannienne quelconque g_0 et considérer la famille à un paramètre de métriques riemanniennes $\{g(t)\}_{t\geq 0}$, ap-

pelée *flot de Ricci*, définie par la condition initiale $g(0) = g_0$ et l'équation

$$\frac{dg}{dt} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}, \tag{1}$$

où $\mathrm{Ric}_{g(t)}$ est le tenseur de Ricci de la métrique $g(t)$.

Hamilton a démontré que pour tout choix de g_0, il existe $\epsilon > 0$ tel que l'équation (1) admet une unique solution sur $[0, \epsilon[$. On peut donc considérer l'intervalle maximal $[0, T[$ sur lequel la solution est définie. Deux cas se présentent alors.

Premier cas : T est fini. On dit que le flot de Ricci admet une *singularité* au temps T, et on cherche à analyser cette singularité. Il faut traiter un certain nombre de sous-cas, dont voici deux exemples typiques :

Premièrement, il se peut que la variété toute entière se contracte sur un point, c'est-à-dire que quand t tend vers T, le diamètre de M tend vers 0. Il s'agit alors de montrer que M est sphérique.

Deuxièmement, il se peut que la courbure reste bornée sauf sur une sous-variété N difféomorphe à $S^2 \times I$, et sur laquelle la métrique est "étranglée", c'est-à-dire que $S^2 \times \{\frac{1}{2}\}$ se contracte sur un point. On veut alors retirer N et coller une boule à chaque composante de bord apparue. Comme M est irréductible, la nouvelle variété a deux composantes connexes, dont une difféomorphe à M. On doit alors munir celle-ci d'une nouvelle métrique et relancer le flot de Ricci. Cette opération sera appelée *chirurgie*.

Si l'on est très optimiste, on peut espérer qu'après un nombre fini de chirurgies, on se retrouve dans le...

Deuxième cas : T est infini. On étudie le comportement asymptotique de $g(t)$ quand t tend vers l'infini, ou plutôt d'une certaine normalisation $\lambda(t)g(t)$. On cherche à décomposer M en *partie fine* et *partie épaisse* selon le volume des boules d'un certain rayon dans la métrique normalisée.

Si la partie épaisse est égale à la variété toute entière, on doit montrer que $\lambda(t)g(t)$ converge en un certain sens vers une métrique hyperbolique. (C'est à ça que sert la normalisation.)

Si la partie fine est égale à la variété toute entière, on cherche à prouver que M est une variété graphée. Puisque nous supposons M atoroïdale, elle est donc de Seifert.

Pour finir la preuve, il faut exclure le cas où la partie fine et la partie épaisse sont toutes les deux non vides. Pour cela, on cherche à faire converger la partie épaisse vers une variété hyperbolique à cusps. On produit ainsi un tore, dont on doit démontrer l'incompressibilité, obtenant ainsi une contradiction.

Parmi les divers résultats de Hamilton liés à ce programme, nous en citerons simplement deux :

Théorème 3.1 (Hamilton [3]). *Soit M une variété de dimension 3 compacte et g_0 une métrique riemannienne sur M. Supposons que g_0 est à courbure de Ricci strictement positive. Alors le flot de Ricci admet une singularité, et quand t tend vers le temps T où la singularité apparaît, la métrique $g(t)$ converge (à normalisation et difféomorphisme près) vers une métrique sphérique.*

Théorème 3.2 (Hamilton [6]). *Soit M une variété de dimension 3 compacte et g_0 une métrique riemannienne sur M. Si $T = +\infty$ et la courbure sectionnelle normalisée de $g(t)$ reste bornée en valeur absolue, alors M satisfait la conjecture de géométrisation.*

3.2 Perelman

Il a modifié le programme de Hamilton pour autoriser une infinité de chirurgies. Il définit une notion que nous traduirons par *flot-avec-chirurgies*. C'est une famille à un paramètre de variétés riemanniennes $\{(M(t), g(t))\}_{t\in[0,+\infty[}$, et un ensemble *discret* (mais peut-être infini) de $[0, +\infty[$ en dehors duquel l'équation (1) est vérifiée.

La topologie de la variété peut changer, elle peut même devenir non-connexe, voire vide.[1]

Pour que cette construction soit utile, il faut contrôler d'une part la topologie — comme suggéré plus haut, les changements doivent correspondre à des décompositions en sommes connexes et à la disparition de variétés sphériques — et d'autre part la géométrie, afin de pouvoir adapter les arguments de [6] pour obtenir une décomposition en partie fine et partie épaisse quand t est assez grand.

4 Analyse des singularités

Fixons la terminologie et les notations.

Un *flot riemannien* est une famille à un paramètre de métriques riemanniennes. C'est un *flot de Ricci* s'il satisfait l'équation (1).

On note $B(x, t, r)$, $\kappa_{sect}(x, t)$, $\mathrm{Ric}(x, t)$, $s(x, t)$ respectivement la boule de centre x et de rayon r, les courbures sectionnelles, de Ricci, scalaires au

[1] Comme nous supposons M irréductible, nous pourrions ne garder à chaque fois qu'une seule composante connexe, décidant de ne pas nous intéresser aux composantes homéomorphes à S^3, mais nous verrons plus loin que ce serait une erreur stratégique.

point x, le tout pour la métrique $g(t)$. Si on a affaire à une seule variété riemannienne, on utilise la même notation sans le t.

4.1 Principe

C'est celui du zoom [5]. Soit T le temps où se produit la première singularité.

On regarde la variété de très près. On veut un moyen précis de dire qu'une certaine région de $(M, g(t))$ pour t proche de T est presque isométrique à un tube $\mathbf{S}^2 \times I$ fin et long. Pour cela, on considère une suite de temps t_k, et on montre que pour un choix approprié de $\lambda_k > 0$, il existe un ouvert $U_k \subset M$ tel que $(U_k, \lambda_k g(t_k))$ "converge" vers $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$.

Pour prouver l'existence de la limite, on a besoin de théorèmes de compacité. La notion naïve de convergence (celle des tenseurs) se prête mal à de tels résultats, à cause de l'action du groupe de difféomorphismes. Nous allons donc nous intéresser à d'autres notions de convergence.

4.2 Convergence(s) des variétés riemanniennes et des flots

Commençons par une notion très simple et naturelle : soit (X_1, g_1) et (X_2, g_2) deux variétés riemanniennes. On dit qu'elles sont ϵ-proches au sens Lipschitz s'il existe un homéomorphisme $f : X_1 \to X_2$ tel que les applications f et f^{-1} sont $(1+\epsilon)$-lipschitziennes. Si l'on suppose de plus que f est un $\mathcal{C}^N$-difféomorphisme dont on contrôle les N-jets, on dit que (X_1, g_1) et (X_2, g_2) sont ϵ-proches au sens $\mathcal{C}^N$.

Soit (X_k, g_k) une suite de variétés riemanniennes. On dit que cette suite *converge au sens Lipschitz* vers une variété riemannienne (X, g) s'il existe une suite ϵ_k tendant vers 0 telle que pour tout k, les variétés (X_k, g_k) et (X, g) sont ϵ_k-proches au sens Lipschitz. On définirait de même la convergence au sens $\mathcal{C}^N$.

Une fois introduite une notion de convergence, on veut un *théorème de compacité* qui doit permettre d'extraire une sous-suite convergente de toute suite de variétés satisfaisant à des bornes uniformes sur certaines quantités géométriques. L'énoncé suivant est dû à M. Gromov, et la preuve repose sur des idées de J. Cheeger.

Théorème 4.1 ([2]). *Soit (X_k, g_k) une suite de variétés riemanniennes compactes de même dimension. Supposons qu'il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ telles que pour tout k, les courbures sectionnelles en tout point de X_k sont majorées en valeur absolue par C_1, le volume de X_k est minoré par C_2 et son*

diamètre est majoré par C_3. Alors (X_k, g_k) admet une sous-suite convergente au sens Lipschitz.

Remarque. Cet énoncé laisse volontairement dans le vague le problème de régularité de la limite. On verra que dans le contexte du flot de Ricci, les difficultés principales ne sont pas là.

Dans notre cas, l'hypothèse sur le diamètre ne sera pas satisfaite, et la limite peut être non compacte. Ce problème se règle en introduisant la notion de convergence pointée.

Soit (X_k, g_k, x_k) une suite de variétés riemanniennes pointées. On dit que cette suite *converge au sens Lipschitz pointé* vers (X, g, x) si pour tout $R > 0$, $B(x_k, r)$ converge au sens Lipschitz vers $B(x, r)$.

Enfin, nous utiliserons la notion suivante de convergence pour les flots, dûe à R. Hamilton, qui est une version à un paramètre de la précédente, avec de plus un contrôle des dérivées.

Définition. Soit $]A, \Omega[$ un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Soit $(M_k, \{g_k(t)\}_{A<t<\Omega}, x_k)$ une suite de triplets où M_k est une variété, $\{g_k(t)\}$ un flot riemannien sur M_k et x_k un point-base dans M_k. On dit que cette suite converge vers un triplet $(M, \{g(t)\}, x)$ s'il existe une suite U_k d'ouverts de M contenant x, une suite V_k d'ouverts de M_k contenant x_k, une suite de $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes de U_k sur V_k tels que :

i. Tout compact de M est inclus dans U_k pour k suffisamment grand.

ii. La suite de métriques $f_k^*(g_k(t))$ tend vers $g(t)$ au sens $\mathcal{C}^\infty$ uniformément sur les compacts de $M \times]A, \Omega[$.

Bien sûr, cette définition ne servirait pas à grand chose sans le

Théorème 4.2 (Théorème de compacité de Hamilton [4]). *Soit $]A, \Omega[$ un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Soit $(M_k, \{g_k(t)\}_{A<t<\Omega}, x_k)$ une suite de triplets où M_k est une variété, $\{g_k(t)\}$ un flot riemannien sur M_k et $x_k \in M_k$. On fait les hypothèses suivantes :*

i. Pour tout k, $\{g_k(t)\}$ est un flot de Ricci.

ii. Pour t fixé, la courbure sectionnelle est uniformément bornée en x, k.

iii. Il existe $t_0 \in]A, \Omega[$ tel que le rayon d'injectivité en x_k au temps t_0 est uniformément minoré.

Alors il existe une sous-suite convergente et la limite satisfait les mêmes hypothèses.

4.3 Vérifier les hypothèses

Pour pouvoir appliquer le théorème précédent à l'étude des singularités du flot de Ricci, on a donc besoin de diverses inégalités permettant de contrôler la géométrie.

Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 2$, $\{g(t)\}$ un flot de Ricci défini sur l'intervalle maximal $[0, T[$.

On considère la variété $(M, g(t))$ au voisinage d'un point x, avec t proche du temps T où apparaît la singularité. On cherche à établir une dichotomie : soit la géométrie reste bornée, soit il se produit la chose suivante : la courbure sectionnelle tend vers $+\infty$, le rayon d'injectivité tend vers 0, mais on a un contrôle *relatif* des deux : si l'on multiplie par un scalaire pour avoir, par exemple, la courbure bornée, alors le rayon d'injectivité *après renormalisation* est minoré.

Evolution de la courbure scalaire. On a

$$\frac{ds}{dt} = \Delta_{g(t)} s + 2|\operatorname{Ric}(t)|^2, \tag{2}$$

où $\Delta_{g(t)}$ est le Laplacien de la métrique $g(t)$.[2]

Le principe du maximum donne :

Fait 1. $\min_{x \in M} s(x,t)$ est croissante.

Evolution de la courbure de Ricci.

$$\frac{d\operatorname{Ric}}{dt} = \Delta_{g(t)} \operatorname{Ric} + \tilde{Q} \tag{3}$$

où $\tilde{Q}$ est une certaine expression quadratique dépendant du tenseur de courbure de Riemann.

Supposons maintenant M de dimension 3. Alors $\tilde{Q}$ s'exprime en fonction de la courbure de Ricci. En appliquant le principe du maximum pour les tenseurs, dû à Hamilton, on obtient le résultat suivant, appelé "inégalité de Hamilton-Ivey".

Théorème 4.3 (Pincement de la courbure sectionnelle [6]). *Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci de dimension 3 compact. Il existe une constante $C > 0$ et une fonction $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dont la limite en $+\infty$ est nulle telles que :*

$$\inf \kappa_{sect}(x,t) \geq -C - \phi(s(x,t)) \cdot |s(x,t)|. \tag{4}$$

[2] La convention de signe utilisée pour le Laplacien est celle pour laquelle l'équation de la chaleur s'écrit $df/dt = \Delta f$.

Voici une conséquence importante de cette inégalité : supposons qu'il existe une constante C' telle que pour tout $x \in M$ et tout $t < T$, $s(x,t) < C'$. Alors d'après le fait 1, $s(x,t)$ est bornée. L'inégalité (4) dit que toutes les courbures sectionnelles sont minorées. Le fait que la courbure scalaire soit la somme de certaines courbures sectionnelles implique que ces dernières sont également majorées. Une version plus précise du théorème d'existence permet alors d'affirmer que la solution est définie sur un intervalle de la forme $[0, T+\epsilon[$.

Dans la suite, nous nous intéresserons au cas où l'intervalle de définition $[0,T[$ est maximal. Il résulte de la discussion précédente qu'il existe alors une suite de temps $t_k \to T$ et une suite de points $x_k \in M$ tels que $s(x_k, t_k) \to +\infty$.

Non-effondrement local en temps fini : l'inégalité de Perelman.

Définition (Non-effondrement à l'échelle de la courbure). Soit κ une constante postive. Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n et x un point de M. On dit que (M,g) est *κ-non-effondrée en x* si pour tout $r > 0$ l'affirmation suivante est vraie : si en tout point de la boule de centre x et de rayon r toutes les courbures sectionnelles sont majorées en valeur absolue par r^{-2}, le volume de cette boule est minoré par κr^n.

Il est utile de remarquer que le *volume normalisé* $\mathrm{Vol}(B(x,r))r^{-n}$ est invariant par changement d'échelle. Pour expliquer la définition ci-dessus, fixons $x \in M$. L'hypothèse que toutes les courbures sectionnelles sont majorées en valeur absolue par r^{-2} sur $B(x,r)$ est toujours vraie quand r est petit. Appelons *rayon de courbure* le supremum des nombres r satisfaisant cette hypothèse. Alors la condition de κ-non-effondrement donne une minoration du volume normalisé des boules de rayon inférieur ou égal au rayon de courbure.

Par exemple, une variété sphérique, ou le produit d'une variété sphérique et de $\mathbf{R}^n$ vérifient toujours cette condition. Par contre, un tore plat ne la satisait jamais, puisque son rayon de courbure est infini.

Théorème 4.4 ([8, thm. 4.1]). *Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci compact défini sur $[0,T[$. Il existe une constante $\kappa > 0$ telle que quels que soient $x \in M$ et $t < T$, $(M, g(t))$ est κ-non-effondrée en x.*

Nous allons donner un exemple typique d'application à l'étude des singularités du flot de Ricci. Pour cela, nous avons besoin d'une définition.

Définition. Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci défini sur $]A,\Omega[$. Soit $\lambda_k > 0$, $t_k \in]A,\Omega[$ des suites. On note $\tilde{g}_k(t)$ l'unique flot de Ricci tel que $\tilde{g}_k(0) = \lambda_k g(t_k)$. On appelle cette opération *renormalisation parabolique.*

Considérons un flot de Ricci de dimension 3 compact $(M, g(t))$ défini sur l'intervalle maximal $[0, T[$ avec $T < +\infty$. On a vu qu'il existe une suite $t_k \to T$ telle que le maximum de $s(x, t_k)$ pour $x \in M$ tend vers $+\infty$. Notons λ_k ce maximum et choisissons comme point-base un point x_k où ce maximum est atteint. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que pour tout $t \leq t_k$ et tout $x \in M$, on a $s(x, t) \leq \lambda$.

Soit $\tilde{g}_k(t)$ la suite de flots obtenus par renormalisation parabolique associée aux suites λ_k, t_k. Notons que $\tilde{g}_k(t)$ est obtenu à partir de $g(t)$ en faisant, d'une part, un changement d'origine et d'échelle en temps, et d'autre part un changement d'échelle en espace. En particulier, le domaine de définition de $\tilde{g}_k(t)$ contient un intervalle de la forme $[t_k, 0]$ avec $t'_k \to -\infty$.

D'autre part, $\tilde{g}_k(t)$ est par construction à courbure scalaire bornée, donc d'après l'inégalité (4), aussi à courbure sectionnelle bornée. La propriété de κ-non-effondrement étant invariante par changement d'échelle, elle est encore satisfaite par $\tilde{g}_k(t)$. Un théorème de Cheeger permet d'en déduire une minoration du rayon d'injectivité. On peut donc appliquer le théorème de compacité 4.2 à des intervalles de plus en plus grands $[t_k, 0]$. A la limite, on obtient un flot de Ricci défini sur $]-\infty, 0]$ (ce que Hamilton appelle *ancient solution*) satisfaisant les mêmes bornes sur la courbure et la même inégalité de κ-non-effondrement.

On a même mieux : en divisant chaque membre de (4) par λ_k, on déduit que pour tout k, toutes les courbures sectionnelles en un point x au temps t sont minorées par

$$\geq -\frac{C}{\lambda_k} - \frac{\phi(s(x,t)) \cdot |s(x,t)|}{\lambda_k},$$

qui tend vers 0 quand $k \to \infty$. La limite obtenue est donc à courbure sectionnelle positive.[3]

Les considérations qui précèdent motivent l'introduction d'une classe de flots de Ricci appelées *κ-solutions*. Dans la section suivante, nous allons les étudier et en donner les applications à l'analyse des singularités.

Remarque. Nous avons pris comme point-bases des points où la courbure scalaire est maximale. Le même argument est valable si la courbure scalaire est presque maximale (minorée par une constante fois le maximum.) Cependant, le programme de Perelman — en particulier la construction du flot-avec-chirurgies — demande une étude plus approfondie des singularités, dans laquelle on s'intéresse aussi aux suites de points où la courbure scalaire tend

[3]Pour rendre cette discussion rigoureuse, il faut dire quelque chose de plus sur la fonction ϕ, par exemple qu'elle est bornée sur l'ensemble des valeurs prises par la courbure scalaire (cf. [7].)

vers $+\infty$ sans être presque maximale. Cette difficulté oblige à considérer des limites non-complètes, et ne sera pas abordée dans ces notes.

5 κ-solutions et voisinages canoniques

5.1 κ-solutions

Définition. On appelle *κ-solution* une solution de l'équation de Ricci définie sur $]-\infty, 0]$ telle que pour tout temps t, les conditions suivantes sont satisfaites :

i. La courbure sectionnelle de $(M, g(t))$ est positive et bornée par une constante ne dépendant que de t.

ii. La métrique $g(t)$ est complète et n'est pas plate.

iii. Pour tout x, $(M, g(t))$ est κ-non-effondrée en x.

L'étude des κ-solutions est asymptotique. On étudie la variété pour des temps proches de $-\infty$ et on effectue un "zoom arrière."

Définition. On appelle *soliton contractant* un flot de Ricci $(M, g(t))$ défini sur $]-\infty, 0]$ tel que pour tout $t \leq 0$, $g(t) = \lambda(t)\phi_t^*(g(0))$ où $\lambda(t)$ est une constante strictement plus grande que 1 et ϕ_t un difféomorphisme de M. C'est un *soliton-gradient contractant* si le champ de vecteur obtenu en dérivant ϕ_t dérive d'un potentiel.

Proposition-Définition 5.1 ([8, Prop. 11.2]). *Soit $(M, g(t))$ une κ-solution. Il existe $t_k \to -\infty$ et $x_k \in M$ tel que la suite des renormalisations paraboliques de $(M, g(t))$ avec facteur $\lambda_k = (-t_k)^{-1}$ converge vers un soliton-gradient contractant. On appelle ce dernier un* soliton asymptotique *de $(M, g(t))$.*

Perelman donne une classification des solitons asymptotiques des κ-solutions de dimension 3 et en déduit une classification grossière de celles-ci. Voici un bref résumé de la discussion.

Théorème 5.2 ([10, Sec. 1]). *Soit $(M, \{g(t)\})$ une κ-solution de dimension trois et N son soliton asymptotique.*

- *Si N est compact, alors c'est une variété sphérique évoluant de façon standard, et la même chose est vraie pour M.*
- *Si N est non-compact, alors N (ou un revêtement double) est $S^2 \times \mathbf{R}$ évoluant de façon standard. Dans ce cas, M peut être compacte ou non, mais sa topologie est contrôlée.*

Perelman obtient ensuite un théorème de compacité pour les κ-solutions, dont la conséquence principale est un théorème de voisinages canoniques : si $(M, g(t))$ est une κ-solution, tout point $x \in M$, admet un voisinage dont la géométrie à $t = 0$ est contrôlée. Pour simplifier, nous n'énoncerons pas ce théorème, mais directement, à la section suivante, sa conséquence pour les singularités des flots de Ricci compacts.

Remarque. De nombreux aspects importants des κ-solutions sont laissés ici de côté, en particulier les contrôles volume-courbure et les inégalités de gradient pour la courbure scalaire.

5.2 Théorème des voisinages canoniques

Théorème 5.3 ([8, Thm. 12.1]). *Soit $(M, \{g(t)\})$ un flot de Ricci compact de dimension 3 défini sur l'intervalle $[0, T[$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x, t) \in M \times [0, T[$, si $s(x, t) \geq r^{-2}$, alors x admet un voisinage ϵ-proche (au sens $\mathcal{C}^N$ pour $N > \epsilon^{-1}$, à un facteur multiplicatif près) d'un des modèles suivants :*

i. Une variété sphérique (avec une métrique dont la courbure n'est pas nécessairement constante) ;

ii. Un produit $\mathbf{S}^2 \times I$ où le facteur $\mathbf{S}^2$ a une courbure constante égale à 1 et le facteur I une longueur $2\epsilon^{-1}$. On appelle cela un ϵ-neck.

iii. B^3 ou $\mathbf{R}P^3 - B^3$ avec une métrique à courbure sectionnelle strictement positive pour laquelle il existe un voisinage du bord contenue dans une réunion de ϵ-necks.

Remarque. Pour simplifier, j'ai changé la formulation du théorème de plusieurs manières. Premièrement, dans l'énoncé ci-dessus, la constante r dépend de la métrique $g(0)$. On peut toujours supposer que celle-ci est normalisée au sens où la courbure sectionnelle est majorée par 1 en valeur absolue et le rayon d'injectivité minoré par 1. Les constantes deviennent alors universelles. Cependant, on verra plus loin que dans le flot-avec-chirurgies cette normalisation n'est plus possible. Dans l'énoncé donné par Perelman, on ne suppose plus que la variété est compacte, mais on suppose qu'elle satisfait les inégalités de pincement de courbure et non-effondrement. La constante r dépend alors des constantes intervenant dans ces inégalités.

Deuxièmement, la conclusion de Perelman est plus forte que celle donnée ici : pour chaque point (x, t) où la courbure scalaire est grande, la géométrie est contrôlée non seulement sur un voisinage de x dans $(M, g(t))$, mais sur un *voisinage parabolique*, c'est-à-dire un sous-ensemble de l'espace-temps de

la forme $B(x,t,r) \times [t, t-\Delta t]$. Cet aspect n'est pas abordé dans ces notes par souci de simplicité ; il est toutefois essentiel, ainsi que les *inégalités de gradient* pour la courbure scalaire, qui empêchent la géométrie d'osciller rapidement dans l'espace et le temps.

Remarque. En examinant la liste des modèles pour les voisinages canoniques, on voit se profiler à l'horizon la procédure de chirurgie le long de sphères. Un des obstacles au programme de Hamilton est le *cigare*. Il s'agit du soliton Σ sur $\mathbf{R}^2$ donné en coordonnées polaires par $g = (1+r^2)^{-1}(dr^2 + r^2 d\theta^2)$. Cette solution ne satisfait la condition de κ-non-effondrement pour aucun $\kappa > 0$. Si l'on avait dû rajouter $S^1 \times \Sigma$ dans la liste des modèles, on aurait été conduit à faire des chirugies le long de tores, ce qui est difficile à contrôler. On voit ici l'importance de l'hypothèse de κ-non-effondrement.

6 Le flot-avec-chirurgies

6.1 Définition

Soit M une variété de dimension 3 qu'on cherche à géométriser. Le but de cette section est de construire une famille à un paramètre de variétés riemanniennes $\{(M(t), g(t))\}_{t\in[0,+\infty[}$ satisfaisant les conditions suivantes :

i. $M(0) = M$.

ii. Il existe un sous-ensemble *discret* $\mathcal{T}$ de $[0, +\infty[$ tel que l'équation de Ricci soit vérifiée en dehors de $\mathcal{T}$. (En particulier la topologie de la variété ne peut changer que pour $t \in \mathcal{T}$.)

iii. Si $t \in \mathcal{T}$, $M(t)$ est obtenue à partir de $M(t-\epsilon)$ par chirurgie le long de 2-sphères.

iv. Les conditions de κ-non-effondrement, monotonie du minimum de la courbure scalaire, et pincement de la courbure sectionnelle sont vérifiées, ainsi que la conclusion du théorème des voisinages canoniques.

On appellera ceci un *flot-avec-chirurgies*. Il est important de remarquer que la topologie peut changer, mais seulement de façon contrôlée. Si l'on préfère, on a une suite finie ou infinie de temps $t_1 = 0 < t_2 < \cdots < t_k (< \ldots)$ et de flots de Ricci $(M_k, g_k(t)$ définis sur $[t_k, t_{k+1}[$. (Par convention si la suite est finie, $t_{k+1} = +\infty$.) Les variétés M_k sont autorisées à devenir non-connexes. La condition topologique (ii) dit que chaque composante de M_k peut être reconstituée à partir d'un certain nombre de composantes de M_{k+1}

en faisant la somme connexe de ces composantes et d'un certain nombre de copies de $S^2 \times S^1$ et de variétés sphériques.

Par convention, on autorise M_k à être vide. Dans ce cas, $\mathcal{T}$ est fini, et la condition (ii) implique que M est une somme connexe d'un certain nombre de copies de $S^2 \times S^1$ et de variétés sphériques, donc satisfait la conjecture de géométrisation. Dans les autres cas, la conclusion viendra de l'étude asymptotique du flot-avec-chirurgies.

6.2 Principe de la construction

Soit $(M, g(t))$ un flot de Ricci défini sur l'intervalle maximal $[0, T[$ avec $T < +\infty$. Pour tout $\rho > 0$, on pose

$$\Omega_\rho := \{x \in M \mid s(x,t) \leq \rho^{-2} \text{ quand } t \to T\}.$$

(Rappelons que l'on note $s(x,t)$ la courbure scalaire au point x et au temps t.)

On note Ω la réunion des Ω_ρ. C'est donc l'ensemble des points où la courbure scalaire reste bornée quand on s'approche de la singularité. Selon Perelman, chaque Ω_ρ est une partie compacte de M n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes. De plus, Ω est un ouvert. Noter que l'on n'affirme pas que Ω a un nombre fini de composantes connexes.

Fixons un petit nombre $\epsilon > 0$ et soit r le nombre qui lui est associé par le théorème 5.3. Soir ρ un nombre strictement positif inférieur à r. Alors tout point de $\Omega - \Omega_\rho$ admet un voisinage canonique pour une suite de temps tendant vers T. En fait, cela est vrai pour tout t suffisamment proche de T à cause des inégalités de gradient auxquelles il est fait allusion plus haut. Il résulte de résultats classiques sur le flot de Ricci que sur Ω, la famille de métriques $\{g(t)\}$ admet une limite (au sens des tenseurs) quand t tend vers T. Notons $\bar{g}$ cette limite. Comme la convergence est suffisamment régulière, les points de $\Omega - \Omega_\rho$ admettent encore des voisinages canoniques pour $\bar{g}$.

Ceci permet de classifier les composantes connexes X de $(\Omega - \Omega_\rho, \bar{g})$ en cinq types, dont nous ne décrirons que trois pour simplifier : pour chaque type, X est difféomorphe à $S^2 \times \mathbf{R}$, donc a deux bouts. On dit que c'est un *tube* (resp. une *corne*, resp. une *corne double*) si la courbure scalaire est bornée sur X (resp. tend vers l'infini quand x tend vers un bout, et reste bornée quand x tend vers l'autre bout, resp. tend vers l'infini aux deux bouts).

Pour établir une telle classification, il faut choisir ϵ suffisamment petit pour que, par exemple, le recollement de deux voisinages canoniques de type $S^2 \times I$ ne puisse se faire que de façon topologiquement triviale (c'est-à-dire

"bout à bout"). Il faut aussi éviter que quand on tend vers un bout de X, la courbure scalaire puisse osciller entre l'infini et une valeur finie. Ce dernier point résulte à nouveau d'inégalités de gradient, lesquelles passent à la limite parce que la convergence est suffisamment régulière.

Nous allons maintenant décrire informellement la procédure de chirurgie. Il y a tout d'abord un cas facile où $\Omega = \emptyset$. Alors pour tout t suffisamment proche de T, $(M, g(t))$ est recouverte par des voisinages canoniques. Si l'un de ces voisinages est sans bord, cela signifie que M est sphérique. Sinon, pour ϵ suffisamment petit, les recollements des différents voisinages canoniques sont topologiquement triviaux, et M est difféomorphe à S^3, $\mathbf{R}P^3$, $S^2 \times S^1$ où $\mathbf{R}P^3 \# \mathbf{R}P^3$. Dans tous les cas, on peut simplement jeter M.

Sinon, on a vu que le nombre de composantes connexes de Ω_ρ est fini. Soit X l'une d'entre elles. Dans tout ce qui suit, on la munit de la métrique limite $\bar{g}$. Soit Y une composante connexe de ∂X. Alors Y est "adjacente" à une composante de $\Omega - \Omega_\rho$, qui peut être par exemple une corne, ou bien un tube la reliant à une autre composante de $\partial\Omega_\rho$. L'existence d'un voisinage canonique pour les points de Y permettent de trouver une partie compacte K_Y de $\Omega - \Omega_\rho$, proche de Y, de volume minoré par une constante ne dépendant que de ρ et ϵ. Ceci permet de montrer que le nombre de composantes de ∂X est fini.

L'opération de chirurgie consiste à tronquer chaque corne adjacente à X, et à y coller une boule munie d'une métrique qualifiée de "standard", c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty$-proche de la métrique à courbure sectionnelle 1 héritée par B^3 quand on la voit comme la moitié de S^3. Ainsi, les tubes restent intacts, et les composantes de Ω qui ne contiennent pas de composante de Ω_ρ sont jetés, ainsi que $M - \Omega$. Il est donc crucial de vérifier que la partie qu'on jette ne contient pas de topologie non triviale (de fausse boule, par exemple !). Cela doit résulter du théorème des voisinages canoniques appliqué à $(M, g(t))$ pour t suffisamment proche de T.

6.3 Des énoncés plus précis

On fixe une bonne fois pour toutes un nombre $\epsilon > 0$. Il doit être suffisamment petit pour que diverses conditions, dont certaines ont été évoquées au paragraphe précédent, soient satisfaites. Par exemple, la réunion de deux ϵ-necks dont l'un est centré sur le bord de l'autre doit être automatiquement homéomorphe à $S^2 \times I$.

Ensuite r est donné en fonction de ϵ par le théorème des voisinages canoniques.

Ensuite, pour tout $\delta > 0$ petit, on pose $\rho = \delta r$. On considère les ensembles Ω et Ω_ρ. Philosophiquement, r est l'échelle à laquelle on contrôle la

géométrie, et ρ l'échelle à laquelle on effectue la chirurgie. La réalité est plus complexe : il y a encore un autre paramètre h qui détermine l'endroit précis de la chirurgie. La valeur de h est déterminée en fonction de r et δ par un lemme crucial que nous n'énoncerons pas ici.

Il y a ensuite un théorème du type suivant :

Théorème 6.1 ([10, Sec. 5]). *Pour tout entier $k > 0$, il existe r_k, δ_k, h_k tel que le flot-avec-chirurgie associé est bien défini sur $[2^k, 2^{k+1}[$. Les constantes intervenant dans l'assertion (iv) de la définition d'un flot-avec-chirurgies ne dépendent que de k.*

Ce théorème est au cœur de [10] et sa preuve est techniquement difficile. Il s'agit de donner une construction qui permet de passer d'un flot défini sur $[2^k, t[$ à un flot défini sur $2^k, t + \epsilon[$. S'il n'y a pas de singularité en t, c'est simplement le flot de Ricci. S'il y en a une, on opère la chirurgie avec paramètre d'échelle h_k.

La difficulté consiste à déterminer *a priori* les constantes pour assurer que les propriétés de monotonie de la courbure scalaire, pincement de la courbure sectionnelle, κ-non-effondrement et voisinages canoniques restent vraies.

Un point important est de démontrer que les chirurgies ne peuvent s'accumuler. Cela doit provenir d'une borne *a priori* sur le nombre de chirurgies dans un intervalle donné. Une telle borne résulte de la tension entre :

- Une majoration de la dérivée logarithmique du volume, résultant lui-même de la minoration de la courbure scalaire.
- Une minoration du volume perdu à chaque chirurgie de paramètre h, dont l'ordre de grandeur est h^3.

La borne sur la densité des chirurgies dépend donc de h, donc de k. Il n'y a apparemment aucune borne inférieure sur la longueur de l'intervalle entre deux chirurgies consécutives.

Remarque. Implicitement, le théorème 6.1 affirme l'existence d'une constante κ_k telles que le flot-avec-chirurgies construit satisfait la condition de κ_k-non-effondrement sur $[2^k, 2^{k+1}[$. La dépendance en k est nécessaire, comme le montre l'exemple du produit de S^1 par une surface hyperbolique.

Par ailleurs, l'absence de bornes sur la courbure scalaire juste après la chirurgie — dûe à l'existence des tubes — rend cette condition plus difficile à vérifier. L'argument basé sur l'entropie ne s'applique apparamment pas. Il est nécessaire de localiser les arguments et d'utiliser le volume réduit.

7 Fin de la preuve

Le but de cette section est de donner un schéma de la "preuve" de la conjecture de géométrisation proposée par Perelman. Pour éviter certaines complications superflues, j'ai changé la présentation par rapport à Perelman. Supposons donc que M est irréductible et atoroïdale, et n'est pas homéomorphe à S^3.

On considère un flot-avec-chirurgies sur M. D'après la section précédente, on peut supposer ce flot défini sur $[0, +\infty[$. Les hypothèses faites plus haut impliquent que pour tout k, exactement une composante de M_k est homéomorphe à M, et que les autres sont homéomorphes à S^3. On peut voir abstraitement l'ensemble des composantes connexes des différents M_k comme un arbre orienté T dont la racine est M, et où les arêtes relient chaque variété avant chirurgie aux composantes correspondantes après chirurgie. Les feuilles de l'arbre correspondent aux composantes qui disparaissent après chirurgie.

Si un sommet X de T est à courbure scalaire positive, un argument classique basé sur le principe du maximum permet d'affirmer que le sous-arbre de ses chirurgies est fini. Dans notre cas, cela implique que X est sphérique. Par commodité, on "élague" l'arbre au niveau de T. On note encore T l'arbre de chirurgie élagué.

Si T est fini, M est sphérique. Supposons donc T infini.

Pour $t \geq 0$ et $x \in M(t)$, notons $\rho(x,t)$ le plus grand nombre ρ tel que la courbure sectionnelle est minorée par $-\rho^{-2}$ sur la boule $(B(x,t,\rho)$. Pour tout $w > 0$, on définit la partie w-épaisse $M^+(w,t)$ en posant :

$$M^+(w,t) := \{x \in M(t) \mid \operatorname{Vol} B(x,t,\rho(x,t)) \geq w\rho(x,t)^3\}.$$

On considère alors plusieurs cas. Pour simplifier, nous allons ignorer un cas "exceptionnel" où l'on montre que M est plate.

S'il existe $w > 0$ et une suite t_p tendant vers l'infini tel que $M^+(w,t_p)$ est non-vide, on doit montrer que pour tout choix de $x_p \in M^+(w,t_p)$, la suite $(M(t_p), t_p^{-1}g(t_p), x_p)$ converge au sens Lipschitz pointé vers une variété hyperbolique complète de volume fini. Une telle variété est appelée *limite hyperbolique* du flot-avec-chirurgies.

Parmi toutes les limites hyperboliques (a priori il peut y en avoir plusieurs à cause de la dépendance du point-base), on en choisit une, notée M_∞, ayant un nombre minimal de cusps.

Si M_∞ est fermée, la convergence Lipschitz pointée se réduit à la convergence Lipschitz ordinaire. En particulier un sommet de l'arbre T doit être homéomorphe à M_∞. On conclut que M est hyperbolique.

Si M_∞ n'est pas fermée, on doit utiliser un argument de Hamilton pour

obtenir une contradiction. Supposons pour simplifier que M_∞ a un seul cusp. Pour p assez grand, $M(t_p)$ contient une sous-variété $H(t_p)$ difféomorphe — et presque isométrique — à un compact $H_\infty \subset M_\infty$, dont le bord est une section du cusp.

Dans le cas où il n'y a pas de chirurgies, Hamilton [6] montre une propriété de *persistence*: pour tout temps $t > t_p$ — pas seulement une suite tendant vers l'infini — il existe $H(t) \subset M(t)$ vérifiant les mêmes propriétés. De plus, le bord $T(t)$ de $H(t)$, qui est un tore, varie de façon lisse avec le temps, et sa géométrie est contrôlée.

Comme M est atoroïdale, $T(t)$ est compressible. D'après le Lemme de Dehn, il existe pour tout t un disque plongé $D(t) \subset M(t)$ tel que $\partial D(t)$ est une courbe contenue dans $T(t)$ et non homotope à zéro dans celui-ci. Meeks et Yau ont prouvé que $D(t)$ peut-être choisi d'aire minimale parmi tous les disques ayant cette propriété. Hamilton majore la dérivée de cette aire par une constante strictement négative, ce qui donne la contradiction cherchée.

Cet argument s'adapte au flot-avec-chirurgies grâce au fait crucial suivant : si t_0 est un temps singulier, il existe une fonction $t \mapsto \chi(t)$ tendant vers 0 quand t tend vers t_0 telle que pour tout t, il existe une application de degré un entre $M(t)$ et $M(t_0)$, égale à l'identité sur la partie non concernée par la chirurgie, et qui est $(1 + \chi(t))$-Lipschitzienne. En réalité, cette propriété devrait être intégrée à la définition d'un flot-avec-chirurgies et vérifiée au moment de la construction.

Il reste à traiter le cas où pour tout $w > 0$, la partie w-épaisse est vide pour t grand. Dans ce cas, on dit que la variété s'effondre avec une borne inférieure locale pour la courbure sectionnelle. Perelman énonce (thm II.7.4) sans démonstration un théorème permettant de conclure dans ce cas que la variété est graphée.[4]

Remarque. Le lecteur qui se serait demandé pourquoi on ne jette pas les composantes de $M(t)$ homéomorphes à S^3 devrait maintenant avoir la réponse à sa question : le morceau presque hyperbolique $H(t)$, et donc son bord $T(t)$ peuvent très bien passer à l'occasion d'une chirurgie d'une composante homéomorphe à M à une composante homéomorphe à S^3. Or il faut attendre un certain temps avant que le calcul de Hamilton ne donne une contradiction.

Remarque. Dans son troisième papier [9], Perelman a suggéré un preuve plus courte de la partie elliptisation de la conjecture (celle qui concerne les variétés dont le groupe fondamental est fini, et qui implique la conjecture de

[4]Puisque nous l'avons supposée atoroïdale, elle serait en fait de Seifert.

Poincaré). Cette approche consiste à introduire dans ce cas particulier un invariant dont l'étude permet de prouver par l'absurde que le flot-avec-chirurgie meurt en temps fini (c'est-à-dire qu'il existe $T < +\infty$ tel que $M(t) = \emptyset$ pour tout $t \geq T$). T. Colding et W. Minicozzi [1] ont proposé un autre invariant (l'aire d'une sphère de min-max associée à un balayage) dont l'étude est techniquement plus simple, et qui conduit au même résultat. Cet argument repose lui aussi sur l'existence d'une famille d'applications de degré un entre $M(t)$ et $M(t_0)$ qui contractent presque les distances.

References

[1] T. H. Colding and W. P. M. II. Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of perelman. preprint, August 2003.

[2] M. Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981 French original [MR 85e:53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[3] R. S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2):255–306, 1982.

[4] R. S. Hamilton. A compactness property for solutions of the Ricci flow. *Amer. J. Math.*, 117(3):545–572, 1995.

[5] R. S. Hamilton. The formation of singularities in the Ricci flow. In *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993)*, pages 7–136. Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.

[6] R. S. Hamilton. Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 7(4):695–729, 1999.

[7] B. Kleiner and J. Lott. Notes on Perelman's paper. informal notes, june 2003.

[8] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow ans its geometric applications. preprint, november 2002.

[9] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. preprint, july 2003.

[10] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. preprint, march 2003.