Thèse

présentée en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Université Paul Sabatier

Spécialité : Mathématiques Pures

par

Sylvain Maillot

Quasi-isométries, groupes de surfaces et orbifolds fibrés de Seifert

Soutenue le mercredi 20 décembre 2000 devant le jury composé de :

Michel Boileau	Professeur, Université Toulouse III	Directeur
Brian Bowditch	Professeur, University of Southampton	Rapporteur
Thomas Delzant	Professeur, Université Strasbourg	Examinateur
Gilbert Levitt	Professeur, Université Toulouse III	Examinateur
Pierre Pansu	Professeur, Université Paris XI	Président

au vu des rapports de

Brian Bowditch, Professeur, University of Southampton
et **Daryl Cooper**, Professeur, University of California at Santa Barbara.

Laboratoire E. Picard
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4
maillot@borel.ups-tlse.fr

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma vive gratitude à Michel Boileau pour avoir su encadrer ce travail avec beaucoup de compétence et de gentillesse. Ce fut un réel plaisir de travailler sous sa direction.

Je remercie sincèrement Brian Bowditch et Daryl Cooper pour s'être intéressés à cette thèse et avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Je suis très reconnaissant à Pierre Pansu, Gilbert Levitt et Thomas Delzant de m'avoir fait l'honneur d'être membres du jury. Je voudrais remercier tout particulièrement Thomas Delzant à la générosité duquel le chapitre 3 doit beaucoup.

Je remercie également Christophe Pittet pour des discussions utiles à propos de ce travail, ainsi que tous ceux qui ont manifesté de l'intérêt pour ma recherche, en particulier Hamish Short, Bernhard Leeb, Marc Bourdon et Damien Gaboriau.

Je suis redevable à Geoffrey Mess dont les travaux ont été une source d'inspiration considérable.

Je voudrais aussi remercier le laboratoire Émile Picard, et plus particulièrement les participants du groupe de travail de Géométrie des Groupes. Merci à Yveline Panabière et Marie Brouard pour leur efficacité ainsi que les occupants de la salle 6 qui ont su créer une ambiance sympathique et chaleureuse.

Enfin, je remercie mes parents, ma famille et tous mes amis.

Table des matières

Introduction

Un problème important en topologie des variétés de dimension 3 est de savoir dans quelle mesure les propriétés géométriques d'une variété compacte de dimension 3 sont déterminées par ses propriétés homotopiques. Pour simplifier la discussion, nous nous intéressons aux variétés fermées (c'est-à-dire compactes et sans bord) et orientables.

Le premier invariant qu'on associe à une variété M est son groupe fondamental $\pi_1 M$. S'il est fini, on sait que le type d'homotopie de M ne suffit pas pour déterminer sa topologie, à cause de l'exemple des espaces lenticulaires (voir [26, 27].) Par ailleurs, la conjecture de Poincaré affirmant que si $\pi_1 M$ est trivial, M est homéomorphe à S^3 est toujours ouverte. Dans ce travail, on ne considère que des variétés dont le groupe fondamental est infini.

Un théorème de H. Kneser [35] affirme qu'étant donné une variété fermée M, il existe des variétés $M_1, \ldots, M_n$ telles que M est homéomorphe à la somme connexe $M_1 \# \cdots \# M_n$ et chaque M_i est soit homéomorphe à $S^1 \times S^2$, soit *irréductible*, c'est-à-dire que toute sphère plongée dans M_i borde une boule.

On s'intéresse donc aux variétés fermées, orientables, irréductibles, de groupe fondamental infini. Dans le cas où la variété contient une surface plongée orientable F *incompressible* (c'est-à-dire telle que le morphisme induit $\pi_1 F \to \pi_1 M$ est injectif), les travaux de F. Waldhausen [59, 58, 60], puis de W. Jaco et P. Shalen [30] ainsi que K. Johannson [31] montrent l'existence d'une famille plongée de tores incompressibles qui découpent la variété en morceaux de *Seifert* (c'est-à-dire possèdant une « fibration » dans laquelle on autorise des fibres exceptionnelles, voir section 4.2) ou atoroïdaux (c'est-à-dire dont le groupe fondamental ne contient pas d'autre sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^2$ que ceux provenant du bord).

Dans la suite, on appellera *variété de Haken* une variété fermée, orientable, irréductible qui contient une surface orientable incompressible et *variété petite* une qui n'en contient pas. Des exemples de variétés petites ont été construits par F. Waldhausen [59] et par W. Thurston [55]. Les exemples de Waldhausen sont des variétés de Seifert. Ceux de Thurston sont des *variétés* *hyperboliques*, c'est-à-dire admettant une métrique riemannienne à courbure constante strictement négative. Au milieu des années 1970, Thurston a conjecturé qu'il n'y avait pas d'autres exemples ; plus précisément, si M est fermée, orientable, petite et si $\pi_1 M$ est infini, alors si M est atoroïdale, elle est hyperbolique, sinon elle est de Seifert. C'est un cas particulier important de la conjecture de géométrisation [49].

Au début des années 1980, P. Scott [50] a prouvé que toute variété ayant le même groupe fondamental qu'une variété de Seifert est de Seifert. Il a également [48, 51] ramené le problème de géométrisation des variétés petites non atoroïdales à l'énoncé suivant, qui fut ensuite démontré indépendamment par D. Gabai [17] et A. Casson et D. Jungreis [9] en utilisant des travaux de G. Mess [41] et P. Tukia [57], ainsi que le théorème principal de [50].

Théorème 0.0.1. *Soit M une variété de dimension 3 fermée, orientable et petite. Si $\pi_1 M$ admet un sous-groupe infini cyclique normal, M est une variété de Seifert.*

Remarquons que le théorème 0.0.1 est également vrai si M est de Haken. Ce résultat est dû à Waldhausen [59] dans le cas où le sous-groupe cyclique est central et intervient dans la preuve du théorème 0.0.1. Pour le cas général, voir par exemple [27]. Signalons par ailleurs que le théorème 0.0.1 a été généralisé dans le cadre des groupes à dualité de Poincaré par B. Bowditch [7].

Dans son programme de géométrisation des variétés de dimension 3, Thurston [55] a introduit la notion d'orbifold, qui généralise celle de variété et permet entre autres choses d'étudier les actions de groupes discrets sur les variétés. Si $\mathcal{O}$ est un orbifold de dimension 3, on sait (voir chapitre 6) donner un sens à tous les termes intervenant dans l'énoncé du théorème 0.0.1. Il est donc naturel de se demander si l'analogue de ce théorème est encore vrai pour les orbifolds. C'est un des buts de cette thèse de donner une réponse affirmative en démontrant la généralisation suivante du théorème 0.0.1 :

Théorème 0.0.2. *Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 fermé, orientable et petit. Si $\pi_1 \mathcal{O}$ admet un sous-groupe infini cyclique normal, $\mathcal{O}$ est un orbifold de Seifert.*

Ce théorème peut se déduire du théorème 0.0.1 et du théorème des orbifolds de Thurston. Cependant, la preuve de ce dernier fait appel à des techniques compliquées et difficiles, et n'est pas encore publiée. De plus, le théorème des orbifolds seul n'implique pas le théorème 0.0.1.

Un des buts de ce travail est d'étendre les techniques de la preuve du théorème 0.0.1 pour englober le cas des orbifolds. Nous obtenons ainsi une preuve du théorème 0.0.2 qui n'utilise pas le théorème des orbifolds et nous retrouvons le théorème 0.0.1 comme corollaire. Notre preuve suit le même schéma général que la preuve originale du théorème 0.0.1. Une des difficultés majeures est que le revêtement universel de l'orbifold n'est pas *a priori* une variété. Ceci nous amène à redémontrer dans un cadre plus général toutes les étapes de cette preuve dûes à G. Mess [41].

Nous allons maintenant présenter plus en détail les résultats de cette thèse.

Quasi-isométries en dimension 2

Soit Γ un groupe de *type fini*, c'est-à-dire admettant une partie génératrice finie S. On munit Γ d'une métrique d_S, appelée *métrique des mots* associée à S, en définissant $d_S(\gamma_1, \gamma_2)$ comme le plus petit entier n tel que $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ s'écrit comme un produit de n éléments de $S \cup S^{-1}$. Comme cette définition dépend du choix de S, on introduit la notion suivante : on dit que deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont *quasi-isométriques* s'il existe des constantes $\lambda \geq 1$ et $C \geq 0$ et une application $f : X_1 \to X_2$ telles qu'on ait :

$$\lambda^{-1}\, d_1(x, x') - C \leq d_2(f(x), f(x')) \leq \lambda\, d_1(x, x') + C \qquad \forall x, x' \in X_1$$
$$\forall y \in X_2, \quad \exists x \in X_1, \quad d(f(x), y) \leq C.$$

On vérifie que cela définit une relation d'équivalence entre espaces métriques et que si S et S' sont deux parties génératrices finies d'un groupe Γ, les métriques des mots associées à S et S' sont quasi-isométriques. On peut donc étudier les groupes de type fini à quasi-isométrie près. Cette question a reçu beaucoup d'attention à la suite des travaux de M. Gromov [22, 24] (cf. aussi [18]).

Rappelons qu'un groupe a *virtuellement* une propriété P s'il admet un sous-groupe d'indice fini qui a la propriété P. Ainsi, nous appelerons *groupe de surface virtuel* tout groupe qui admet un sous-groupe d'indice fini isomorphe au π_1 d'une surface fermée orientable de genre ≥ 1.

La question abordée aux chapitres 2 et 3 est la suivante : étant donné une surface R planaire à l'infini, quels sont les groupes quasi-isométriques à une métrique riemannienne complète à bord géodésique sur R ? Le théorème suivant donne la réponse pour les surfaces simplement connexes :

Théorème 3.1.1 *Soit Γ un groupe de type fini. Alors Γ est quasi-isométrique à une surface riemannienne complète* 1*-connexe à bord vide ou géodésique si et seulement si Γ est virtuellement le groupe fondamental d'une surface compacte (éventuellement à bord). Plus précisément, on a :*

i. Γ est quasi-isométrique à un plan riemannien complet si et seulement si Γ est un groupe de surface virtuel.

ii. Γ *est quasi-isométrique à une surface riemannienne complète* 1*-connexe à bord géodésique non vide si et seulement si* Γ *est virtuellement libre.*

Pour la partie (i), nous utilisons le théorème des groupes de convergence dû à P. Tukia [57], D. Gabai [17] et A. Casson et D. Jungreis [9]. Modulo ce théorème, G. Mess [41] a donné une démonstration de cette partie (i) en utilisant la notion de marche aléatoire sur les groupes, et sous l'hypothèse supplémentaire que le plan riemannien est *quasi-homogène* (voir la section 1.4 pour la définition). Il affirme que le résultat reste vrai sans cette hypothèse.

Au chapitre 2, nous montrons que tout plan riemannien complet quasi-isométrique à un groupe est quasi-isométrique à un plan riemannien complet quasi-homogène. Nous utilisons pour cela des idées un peu différentes de celles suggérées dans [41], qui permettent en outre d'obtenir le même résultat pour les surfaces *planaires à l'infini* (c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini d'anses), ainsi que des résultats du même type pour des surfaces de topologie arbitraire.

Au chapitre 3, nous donnons une preuve du résultat de Mess sur les groupes quasi-isométriques à un plan quasi-homogène. Notre preuve est différente de la preuve originale, plus simple et ne fait pas appel aux marches aléatoires. Puis nous complétons la démonstration du théorème 3.1.1 en traitant le cas à bord (c'est-à-dire la partie (ii)).

Les résultats des chapitres 2 et 3 constituent l'essentiel de l'article [37] à paraître aux Commentarii Mathematici Helvetici.

Variétés ouvertes de dimension 3

Les variétés non compactes de dimension 3 sont beaucoup moins bien comprises que les variétés compactes. P. Scott et T. Tucker [52] ont donné des exemples de variétés *ouvertes*, orientables, irréductibles ayant le même groupe fondamental, mais non homéomorphes. Certains de ces exemples montrent en particulier que le théorème 0.0.1 n'est pas vrai pour les variétés ouvertes. Cependant, nous prouverons que si W est une variété de dimension 3 ouverte, orientable, irréductible, dont le π_1 admet un sous-groupe infini cyclique *central*, et qui possède une triangulation $\mathcal{T}$ vérifiant certaines propriétés d'uniformité, alors W est de Seifert. Les propriétés en question sont en particulier satisfaites si $\mathcal{T}$ est invariante par une action de groupe cocompacte.

Pour énoncer le résultat formellement, il nous faut donner quelques définitions. On dit que $\mathcal{T}$ est à *géométrie bornée* s'il existe une borne uniforme sur le nombre de simplexes contenant un sommet. Une application $f : P \to W$ d'un complexe simplicial dans W est dite *combinatoire* si chaque simplexe de P est envoyé homéomorphiquement sur un simplexe de W. La *longueur* (resp. *l'aire*) d'une telle application est le nombre de 1-simplexes (resp. 2-simplexes) de P.

On dit que $(W, \mathcal{T})$ a un *profil isopérimétrique fini* si toute application combinatoire $f : S^1 \to M$ homotope à zéro peut être prolongée en une application combinatoire $\tilde{f} : D^2 \to M$ telle que l'aire de $\tilde{f}$ est majorée par un nombre qui ne dépend que de la longueur de f.

Soit a un élément central de $\pi_1 W$. On dit que a est *uniformément représentable* s'il existe une constante $C_0 \geq 0$ telle que pour tout sommet x de $\mathcal{T}$, il existe un lacet combinatoire basé en x, représentant a et de longueur au plus C_0.

Enfin, on peut munir toute variété triangulée d'une « quasi-métrique » (voir la section 1.1), ce qui permet de parler de diamètre d'une partie et de quasi-isométries. Nous donnons maintenant l'énoncé du théorème principal du chapitre 5.

Théorème 5.1.1 *Soit W une variété de dimension 3 ouverte, orientable et irréductible. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation à géométrie bornée de W telle que $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini. Soit a un élément uniformément représentable d'ordre infini dans le centre de $\pi_1 W$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i. W admet une fibration de Seifert telle que a est une puissance de l'élément de $\pi_1 W$ représenté par la fibre ordinaire.

ii. Si le sous-groupe engendré par a est maximal parmi les sous-groupes infinis cycliques centraux, il existe une fibration de Seifert $p : W \to B$ et une métrique riemannienne complète quasi-homogène sur B telle que p est une quasi-isométrie.

Ce théorème généralise des résultats obtenus par G. Mess [41] dans le cas où W est un revêtement cyclique central d'une variété fermée. La preuve utilise entre autres des outils développés dans [41], notamment la notion d'homotopie cyclique bornée. Pour la partie (ii), nous construirons une décomposition de W par des tores et des anneaux plongés en morceaux de diamètre uniformément borné. Nous appelons une telle décomposition un *M-scindement*. Notre construction est inspirée par celle de [41], avec plusieurs différences notables dûes d'une part à l'absence d'action cocompacte de groupe et d'autre part à la plus grande complexité de la topologie. Noter en particulier que $\pi_1 M$ n'est même pas supposé de type fini.

Nous donnons également une version du théorème 5.1.1 pour les variétés **non nécessairement irréductibles**. Il s'agit du théorème 5.5.1, dont l'énoncé est assez technique. Nous en déduirons le théorème suivant, qui est un ingrédient crucial de la preuve du théorème 0.0.2.

Théorème 5.5.4 *Soit W une variété de dimension 3 ouverte (c.-à-d. non compacte et sans bord), orientable dont le groupe fondamental est infini cyclique. Soit Γ un groupe de type fini agissant proprement et cocompactement sur W. Alors Γ est un groupe de surface virtuel.*

Le théorème 3.1.1(i) intervient à la fin de la preuve du théorème 5.5.4, qui utilise donc tout le matériel des chapitres précédents.

Esquisse de la preuve du théorème 0.0.2

Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 fermé, orientable, petit. Soit Z un sous-groupe infini cyclique normal de $\pi_1\mathcal{O}$. Soit $\hat{\mathcal{O}}$ le revêtement dont le π_1 est Z. Supposons pour simplifier que ce revêtement est non compact.

Comme on ne sait pas *a priori* que $\hat{\mathcal{O}}$ est une vraie variété, on considère l'espace sous-jacent W de $\hat{\mathcal{O}}$. C'est une variété de dimension 3 orientable de π_1 infini cyclique, mais *a priori* pas nécessairement irréductible. D'après le théorème 5.5.4, Γ est un groupe de surface virtuel. On en déduit que $\pi_1\mathcal{O}$ admet un sous-groupe normal d'indice fini G sans torsion, qui est une extension de $\mathbf{Z}$ par un groupe de surface. On sait (voir par exemple [43] ou [7]) que G est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert. Jusqu'ici, on n'a pas besoin de supposer que $\mathcal{O}$ est petit, ni même irréductible.

Il s'agit alors de prouver (sans utiliser le théorème des orbifolds !) que $\mathcal{O}$ est de Seifert. C'est là que nous utiliserons l'hypothèse que $\mathcal{O}$ est petit. En fait, il suffit de supposer que $\mathcal{O}$ est irréductible et ne contient aucun *turnover* (orbifold dont l'espace sous-jacent est S^2 et ayant exactement trois points coniques) incompressible. Nous démontrons la proposition suivante :

Proposition 6.4.2 *Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 fermé, orientable, irréductible et ne contenant aucun turnover incompressible. Supposons que $\pi_1\mathcal{O}$ est infini et isomorphe au groupe fondamental d'un orbifold de Seifert compact, orientable, irréductible. Alors $\mathcal{O}$ est de Seifert.*

Cette partie du travail fera l'objet d'une discussion détaillée au chapitre 6.

Chapitre 1

Géométrie à grande échelle

1.1 Introduction

Soit X une variété PL de dimension n et $\mathcal{T}$ une triangulation de X. On cherche à associer à $\mathcal{T}$ une notion de distance qui permette d'utiliser la notion de quasi-isométrie. Il y a plusieurs façons de le faire, et chacune a des avantages et des inconvénients. Une première méthode consiste à prendre la métrique par chemins pour laquelle chaque n-simplexe est isométrique au n-simplexe euclidien de côté 1. Ce point de vue est utile pour les questions liées à la géométrie riemannienne. Il permet notamment de définir une notion combinatoire de courbure (cf. [22], [20] chapitre 12 et les articles de F. Paulin et M. Bridson dans [19]). Il a aussi plusieurs inconvénients : par exemple, il n'y a pas de description simple des boules métriques, et par ailleurs, il n'y a pas de généralisation claire aux décompositions cellulaires.

Ainsi, dans des contextes plus combinatoires, il est souvent plus simple de travailler avec la métrique par chemins dans le 1-squelette (voir par exemple [3, 7, 33]). On mesure alors la taille d'un sous-complexe par le diamètre de son intersection avec le 1-squelette. L'inconvénient de cette méthode est que nous étudierons plutôt des sous-variétés en position générale que des sous-complexes. Aussi est-il plus pratique d'avoir une distance définie sur tout X.

Nous utiliserons donc surtout la troisième méthode consistant à mesurer la distance entre deux points en comptant le nombre minimal de simplexes qu'il faut traverser pour passer d'un point à l'autre. Plus précisément, si α est un chemin reliant deux points $x, y \in X$, on note taille(α) le cardinal minimal d'un ensemble de n-simplexes recouvrant α. La distance $d(x, y)$ est définie comme le minimum des nombres taille(α) $- 1$ pour de tels chemins α. (Le terme -1 permet d'avoir $d(x, x) = 0$.)

Cette définition se généralise immédiatement à n'importe quel espace topologique connexe par arcs muni d'un recouvrement par des parties compactes. On l'appliquera dans des contextes plus généraux que les variétés triangulées, par exemple à des CW-complexes, ou encore à des variétés de dimension 3 recouvertes par les adhérences des composantes complémentaires d'un découpage par des surfaces plongées (cf. les notions de « potential » et de « variance » de [46]).

Le seul inconvénient de la troisième méthode est qu'elle ne définit pas une métrique, ni même une pseudo-métrique, mais une *quasi-métrique* [6], c'est-à-dire que l'inégalité triangulaire n'est satisfaite qu'à une constante additive près. Pour s'en rendre compte, prenons x et z dans l'intérieur de deux n-simplexes adjacents et y dans la face commune. Alors on a $d(x,z)=1$, mais $d(x,y)=d(y,z)=0$! Comme on travaille à quasi-isométrie près, cela ne pose aucun problème, mais justifie le degré de généralité du début de ce chapitre.

1.2 Espaces quasi-métriques

1.2.1 Définitions

Définition (cf. [6]). Soit C une constante positive et X un ensemble. On appelle C-*quasi-métrique* (ou simplement *quasi-métrique*) une application $d : X^2 \to [0,+\infty[$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

i. $d(x,x)=0$ pour tout $x \in X$;

ii. $d(x,y)=d(y,x)$ pour tous $x,y \in X$;

iii. $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)+C$ pour tous $x,y,z \in X$.

Le couple (X,d) est appelé *espace quasi-métrique*.

Une 0-quasi-métrique est ce qu'on appelle parfois une *pseudo-métrique*. Les espaces métriques sont donc des cas particuliers d'espaces pseudo-métriques, qui sont eux-mêmes des cas particuliers d'espaces quasi-métriques.

Introduisons tout de suite le vocabulaire et les notations de base. Soit (X,d) un espace quasi-métrique. Soit x un point de X et $R \geq 0$. La *boule* de centre x et de rayon R, notée $B_d(x,R)$, est l'ensemble des $y \in X$ tels que $d(x,y) \leq R$. Soit A une partie de X. Le R-*voisinage* de A est l'ensemble $N_d(A,R) = \bigcup_{x \in A} B_d(x,R)$. Si ce voisinage est égal à X tout entier, on dit que A est R-*quasidense* (dans X).

Le *diamètre* d'une partie A, noté $\operatorname{diam}_d A$ est la borne supérieure (dans $[0,+\infty]$) des nombres $d(x,y)$ pour $x,y \in A$. On dit que A est *bornée* si $\operatorname{diam}_d A < +\infty$. Dans toutes ces notations, les indices sont souvent omis quand il n'y a pas d'ambiguité possible. Si S est un ensemble et $f : S \to X$

une application, on note souvent $\operatorname{diam}(f)$ le diamètre de l'image de f. La même convention sera utilisée pour la taille dans la prochaine section. Cette notation est cohérente avec l'abus de langage courant consistant à identifier un chemin avec son image (cf. lemme 1.3.1).

Les notions d'isométrie et de géodésique ne sont pas pertinentes pour les espaces quasi-métriques (par exemple une application qui conserve les distances n'est pas forcément injective...) En revanche, les notions « à grande échelle » correspondantes sont fondamentales.

Définition. Soient $\lambda \geq 1$ et $C \geq 0$ des constantes. Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces quasi-métriques. Une application $f : X_1 \to X_2$ est dite (λ, C)-*quasi-isométrique* si pour tous $x, x' \in X_1$ on a :

$$\lambda^{-1}\, d_1(x, x') - C \leq d_2(f(x), f(x')) \leq \lambda\, d_1(x, x') + C.$$

Si de plus $f(X_1)$ est C-quasidense dans X_2, on dit que f est une (λ, C)-*quasi-isométrie* (ou simplement une *quasi-isométrie*). On dit que (X_1, d_1) est *quasi-isométrique à* (X_2, d_2) s'il existe une quasi-isométrie de X_1 vers X_2.

On montre que pour toute quasi-isométrie $f : X_1 \to X_2$, il existe une quasi-isométrie $\bar{f} : X_2 \to X_1$ telle que $f \circ \bar{f}$ (resp. $\bar{f} \circ f$) est à distance uniforme finie de l'identité de X_2 (resp. X_1). On dit que f et $\bar{f}$ sont *inverses à grande échelle*. Cela montre que la relation « (X_1, d_1) est quasi-isométrique à (X_2, d_2) » est symétrique. Comme elle est également réflexive et transitive, c'est une relation d'équivalence entre espaces quasi-métriques.

Les espaces métriques (X, d) dont on étudie les propriétés à quasi-isométrie près sont en général supposés *géodésiques* (deux points quelconques x, y sont toujours reliés par un *segment géodésique*, c'est-à-dire une application isométrique d'un intervalle compact de $\mathbf{R}$ dans X) et *propres* (les boules fermées sont compactes). Les espaces quasi-métriques que nous étudierons vérifieront des propriétés similaires.

Définition. Soit (X, d) un espace quasi-métrique. Une (λ, C)-*quasi-géodésique* de X est une application (λ, C)-quasi-isométrique d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans X. Si I est de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbf{R}$ (resp. $[a, +\infty[$, resp. $\mathbf{R}$) on parle de *segment quasi-géodésique* (resp. *rayon quasi-géodésique*, resp. *quasi-géodésique bi-infinie*).

S'il existe des constantes λ, C telles que pour tous $x, y \in X$, il existe un segment (λ, C)-quasi-géodésique reliant x et y, on dit que l'espace (X, d) est *quasi-géodésique.*

Il est clair qu'un espace métrique géodésique est $(1, 0)$-quasi-géodésique.

Pour définir la notion d'espace quasi-métrique propre, une petite difficulté se présente : il n'y a pas de bonne notion générale de topologie associée à une quasi-métrique. En effet, la topologie engendrée par les boules ouvertes n'est pas toujours séparée, et contrairement aux espaces pseudo-métriques, on ne peut pas la rendre séparée en identifiant les points à distance 0 (à cause de la constante additive dans l'inégalité triangulaire, le fait d'être à distance 0 n'est pas une relation d'équivalence !)

Heureusement, tous les espaces quasi-métriques que nous considérerons seront munis d'une bonne topologie indépendante de la quasi-métrique. Cela justifie la définition suivante :

Définition. Soit X un espace topologique. Une quasi-métrique sur X est dite *propre* (relativement à la topologie donnée) si les compacts de X sont exactement les fermés bornés.

Bien sûr, un espace métrique est dit propre s'il est propre relativement à la topologie induite par la métrique. On vérifie aisément que c'est équivalent à demander que les boules soient compactes. En effet, un compact d'un espace métrique est toujours fermé borné et toute partie bornée est incluse dans une boule.

1.2.2 Exemples classiques

Dans ces exemples, comme dans toute cette thèse, les variétés et les graphes sont supposés **connexes**.

Variétés riemanniennes Soit X une variété lisse et h une métrique riemannienne complète sur X. Alors (X, h) est un espace métrique géodésique propre.

Graphes On appelle *graphe* tout CW-complexe de dimension 1. La *métrique standard* sur un graphe (connexe) $\mathcal{G}$ est la métrique géodésique pour laquelle chaque arête est isométrique à un intervalle de $\mathbf{R}$ de longueur 1. Cette métrique est propre si et seulement si $\mathcal{G}$ est localement fini.

Groupes Soit Γ un groupe de type fini, S une partie génératrice de Γ et $\mathcal{G}$ le graphe de Cayley de Γ relativement à S. Alors la classe de quasi-isométrie de la métrique standard de $\mathcal{G}$ est indépendante de S. (Sa restriction à Γ est la métrique des mots définie dans l'introduction.) Tout groupe de type fini est donc muni d'une métrique quasi-géodésique propre bien définie à quasi-isométrie près. Si deux groupes sont *commensurables*, c'est-à-dire s'ils possèdent des sous-groupes d'indice fini isomorphes, alors ils sont quasi-isométriques. (En effet tout sous-groupe d'indice fini dans Γ est quasidense dans

Γ.) Par convention, à chaque fois qu'un groupe est mentionné dans un contexte métrique, il sera implicitement supposé de type fini. Cela concerne en fait presque tous les groupes considérés dans cette thèse, à l'exception notable des groupes fondamentaux de variétés non compactes.

1.2.3 Deux lemmes fondamentaux

Le premier lemme permet de relier la notion de quasi-isométrie à celle d'action de groupe. Il est habituellement énoncé pour les espaces métriques géodésiques propres (cf. par exemple [20], proposition 19 p. 60). Nous aurons besoin d'une version incluant certains espaces quasi-métriques. On rappelle qu'une action d'un groupe discret Γ sur un espace X est dite *propre* si pour tout compact $K \subset X$ l'ensemble des $g \in \Gamma$ tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est fini. Elle est *cocompacte* s'il existe un compact $K \subset X$ tel que l'ensemble des translatés de K recouvre X.

Lemme 1.2.1. *Soit X un espace topologique muni d'une quasi-métrique quasi-géodésique propre d. Soit Γ un groupe de type fini. Supposons que Γ agit proprement et cocompactement sur X par homéomorphismes préservant d. Alors Γ est quasi-isométrique à (X, d).*

Preuve. Soient $\lambda, C \geq 0$ des constantes telles que d soit une C-quasi-métrique (λ, C)-quasi-géodésique. Soit S une partie génératrice finie de Γ et d_S la métrique sur Γ associée à S. Comme l'action est cocompacte, il existe un compact $Y \subset X$ tel que pour tout $x \in X$ il existe $\gamma_x \in \Gamma$ tel que $\gamma_x^{-1}x \in Y$. Comme d est propre, Y a un diamètre fini D.

Fixons un point $x_0 \in Y$ et considérons l'application $\phi : \Gamma \to X$ définie par $\phi(\gamma) = \gamma x_0$. Nous allons voir que ϕ est une quasi-isométrie.

Montrons pour commencer que $\phi(\Gamma)$ est quasidense. On a l'inégalité $d(x_0, \gamma_x^{-1}x) \leq D$ pour tout $x \in X$. Par hypothèse, l'action de Γ préserve d, d'où $d(\gamma_x x_0, x) = d(x_0, \gamma_x^{-1}x) \leq D$. Ceci prouve que $\phi(\Gamma)$ est D-quasidense.

Soient $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Nous allons donner une majoration de $d(\gamma x_0, \gamma' x_0)$ en fonction de $d_S(\gamma, \gamma')$. Écrivons $\gamma^{-1}\gamma' = a_1 \cdots a_m$ où $m = d_S(\gamma, \gamma')$ et $a_i \in S \cup S^{-1}$ pour tout i. On a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
d(\gamma x_0, \gamma' x_0) &= d(x_0, \gamma^{-1}\gamma' x_0) \\
&\leq d(x_0, a_1 x_0) + d(a_1 x_0, a_1 a_2 x_0) + \cdots \\
&\qquad + d(a_1 \cdots a_{m-1} x_0, \gamma^{-1}\gamma' x_0) + (m-1)C \\
&\leq d(x_0, a_1 x_0) + d(x_0, a_2 x_0) + \cdots \\
&\qquad + d(x_0, a_m x_0) + (m-1)C \\
&\leq m(C + \max_{a \in S \cup S^{-1}} d(x_0, a x_0)).
\end{aligned}$$

Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, on va utiliser la quasi-géodésicité de d. Soit α une (λ, C)-quasi-géodésique reliant γx_0 et $\gamma' x_0$. En subdivisant α, on obtient une suite finie $y_0, \ldots, y_l$ avec $y_0 = \gamma x_0$, $y_l = \gamma' x_0$, $d(y_i, y_{i+1}) \leq \lambda + C$ pour tout i et $l \leq \lambda d(\gamma x_0, \gamma' x_0) + C$. Comme $\phi(\Gamma)$ est D-quasidense, on peut trouver pour chaque i un élément $\gamma_i \in \Gamma$ tel que $d(y_i, \gamma_i x_0) \leq D$. On peut supposer que $\gamma_0 = \gamma$ et $\gamma_l = \gamma'$. On a :

$$d_S(\gamma, \gamma') \leq d_S(\gamma, \gamma_1) + d_S(\gamma_1, \gamma_2) + \cdots + d_S(\gamma_{l-1}, \gamma'),$$

et pour tout i,

$$d(\gamma_i x_0, \gamma_{i+1} x_0) \leq d(\gamma_i x_0, y_i) + d(y_i, y_{i+1}) + d(y_{i+1}, \gamma_{i+1} x_0) + 2C \leq \lambda + 2D + 3C,$$

d'où $d(x_0, \gamma_i^{-1} \gamma_{i+1} x_0) \leq \lambda + 2D + 3C$.

Or Γ agit proprement et d est propre, donc l'ensemble F des éléments $\upsilon \in \Gamma$ tels que $\upsilon B(x_0, \lambda + 2D + 3C) \cap B(x_0, \lambda + 2D + 3C) \neq \emptyset$ est fini. On a vu que $\gamma_i^{-1} \gamma_{i+1}$ appartient à F. On a donc

$$\begin{aligned} d_S(\gamma, \gamma') &\leq l \max_{\upsilon \in F} l_S(\upsilon) \\ &\leq \max_{\upsilon \in F} l_S(\upsilon)(\lambda d(\gamma x_0, \gamma' x_0) + C). \end{aligned}$$

□

Soit N un ensemble et d, d' deux quasi-métriques sur N. On dit que d et d' sont *uniformément équivalentes* s'il existe deux fonctions strictement croissantes $\mu : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ et $\mu' : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telles que $d(x,y) \leq \mu(d'(x,y))$ et $d'(x,y) \leq \mu'(d(x,y))$ pour tous $x, y \in N$. Cette relation est apparemment plus faible que celle de quasi-isométrie, mais pour les espaces quasi-géodésiques les deux notions sont équivalentes. Le lemme suivant combine ce fait avec l'observation qu'une partie quasidense dans un espace est quasi-isométrique à cet espace.

Lemme 1.2.2 (cf. [24], p. 7). *Soit (X, d) un espace quasi-métrique quasi-géodésique, Y une partie quasidense de X, d' une quasi-métrique quasi-géodésique sur Y et N une partie quasidense de Y (à la fois pour d et pour d'). On suppose que d et d' sont uniformément équivalentes sur N. Alors (X, d) et (Y, d') sont quasi-isométriques.*

Preuve. Tout d'abord, en remarquant d'une part qu'une partie quasidense d'un espace quasi-métrique est quasi-isométrique à cet espace, et d'autre part que le fait d'être quasi-géodésique est invariant par quasi-isométrie, on se ramène au cas où $X = Y = N$.

On suppose donc que d et d' sont deux C-quasi-métriques (λ, C)-quasi-géodésiques uniformément équivalentes sur un ensemble X. Soient $x, y \in X$

et α une (λ, C)-quasi-géodésique pour la quasi-métrique d reliant x et y. En subdivisant α, on obtient une suite finie $x_0, \ldots, x_n$ avec $y_0 = x$, $x_n = y$, $d(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda + C$ pour tout i et $n \leq \lambda d(x, y) + C$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
d'(x,y) &\leq d'(x,x_1) + \cdots + d'(x_{n-1},y) + (n-1)C \\
&\leq \mu'(d(x,x_1)) + \cdots + \mu'(d(x_{n-1},y)) + (n-1)C \\
&\leq n(\mu'(\lambda + C) + C) \\
&\leq (\mu'(\lambda + C) + C)(\lambda d(x,y) + C).
\end{aligned}$$

On obtient de même

$$d(x,y) \leq (\mu(\lambda + C) + C)(\lambda d'(x,y) + C)$$

en considérant une quasi-géodésique pour d' reliant x et y. On a bien démontré que (X, d) et (X, d') sont quasi-isométriques. □

1.3 Recouvrements compacts

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition. Soit X un espace topologique connexe par arcs. On appelle *recouvrement compact* de X une famille $\mathcal{K}$ de parties compactes et connexes par arcs de X telle que $X = \bigcup \mathcal{K}$. On dit que $\mathcal{K}$ est *localement fini* si aucun compact A de X ne rencontre une infinité d'éléments de $\mathcal{K}$.

La *taille* d'une partie A de X, notée $\mathrm{taille}_{\mathcal{K}}(A)$, est le plus petit cardinal d'une sous-famille $\mathcal{K}'$ de $\mathcal{K}$ telle que $A \subset \bigcup \mathcal{K}'$. Si $\mathcal{K}$ est localement fini, une partie compacte a toujours une taille finie.

Soient x, y des points de X. Un *chemin minimisant* entre x et y est une application continue $\alpha : [0,1] \subset X$ telle que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$ et $\mathrm{taille}_{\mathcal{K}}(\alpha)$ est minimale. Si $\mathcal{K}$ est localement fini, un tel chemin existe toujours.

Dans la suite, on fixe un espace topologique connexe par arcs X et un recouvrement compact localement fini $\mathcal{K}$ de X.

Proposition-Définition. La *quasi-métrique canonique* sur X associée à $\mathcal{K}$ est l'application définie en posant $d_{\mathcal{K}}(x,y) = \mathrm{taille}_{\mathcal{K}}(\alpha) - 1$ où α est un chemin minimisant entre x et y. Le couple $(X, d_{\mathcal{K}})$ est un espace 1-quasi-métrique propre.

Preuve. On voit immédiatement que les conditions (i) et (ii) de la définition d'un espace quasi-métrique sont satisfaites. Pour vérifier (iii), considérons trois points quelconques $x, y, z \in X$. Soit α un chemin minimisant entre x et

y, et β un chemin minimisant entre y et z. Alors la concaténation $\alpha \cup \beta$ est un chemin entre x et z. On a

$$\text{taille}_{\mathcal{K}}(\alpha \cup \beta) \leq \text{taille}_{\mathcal{K}}(\alpha) + \text{taille}_{\mathcal{K}}(\beta),$$

d'où

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{K}}(x, z) &\leq \text{taille}_{\mathcal{K}}(\alpha \cup \beta) - 1 \\ &\leq d_{\mathcal{K}}(x, y) + d_{\mathcal{K}}(y, z) + 1 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $(X, d_{\mathcal{K}})$ est un espace 1-quasi-métrique. En utilisant le fait que $\mathcal{K}$ est localement fini, on voit facilement que $d_{\mathcal{K}}$ est propre. □

Exemple. Soit X un espace topologique connexe par arcs et $\mathcal{D}$ une décomposition cellulaire de X (c'est-à-dire un homéomorphisme d'un CW-complexe vers X). Supposons que $\mathcal{D}$ est localement finie. Notons $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ la collection des cellules de $\mathcal{D}$. Alors $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ est un recouvrement compact localement fini de X. On note $d_{\mathcal{D}}$ (plutôt que $d_{\mathcal{K}(\mathcal{D})}$) la quasi-métrique canonique associée à $\mathcal{K}(\mathcal{D})$. Si x est une 0-cellule et $r \in \mathbf{N}$, la boule de centre x et de rayon r est ce qu'on appelle habituellement la $(r+1)$-ième étoile itérée de x. Plus généralement, tout r-voisinage d'un sous-complexe est un sous-complexe.

On peut remarquer que si X est une variété de dimension n, on obtient la même quasi-métrique en considérant la collection des cellules de dimension n.

L'exemple précédent sera approfondi à la sous-section 1.3.2. Pour l'instant, revenons au cas général. Le lemme suivant donne une définition alternative utile de $d_{\mathcal{K}}$:

Lemme 1.3.1. *Soient x, y des points de X. Alors $d_{\mathcal{K}}(x, y)$ est le plus petit entier n tel qu'il existe une suite finie $K_0, \ldots, K_n$ d'élements de $\mathcal{K}$ telle que $x \in K_0$, $y \in K_n$ et $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$.*

Preuve. Soit $K_0, \ldots, K_n$ une suite finie vérifiant les propriétés ci-dessus avec n minimal. Soit $x_0, \ldots, x_{n+1}$ une suite finie de points de X telle que $x_0 = x$, $x_{n+1} = y$ et $x_i \in K_{i-1} \cap K_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Comme chaque K_i est connexe par arcs, il existe un chemin $\alpha_i \subset K_i$ joignant x_i à x_{i+1} pour tout $0 \leq i \leq n$. La concaténation $\alpha_0 \cup \cdots \cup \alpha_n$ est un chemin de taille au plus $n+1$ joignant x et y. Par conséquent, on a $d_{\mathcal{K}}(x, y) \leq n$.

Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, choisissons un chemin minimisant α entre x et y. Soient $L_0, \ldots, L_m$ des éléments de $\mathcal{K}$ tels que l'image de α est dans $L_0 \cup \cdots \cup L_m$, avec $m = d_{\mathcal{K}}(x, y) = \text{taille}(\alpha) - 1$. On peut supposer que $x \in L_0$ et $y \in L_m$. Considérons le graphe abstrait $\mathcal{G}$ à $m+1$ sommets numérotés de 0 à m défini en mettant une arête entre i et j si et seulement si $L_i \cap L_j \neq \emptyset$. Nous allons montrer que 0 et m sont dans la même composante connexe de $\mathcal{G}$. Cela entraîne l'existence d'une suite $K_0, \ldots, K_n$ comme ci-dessus avec $n \leq m$, ce qui termine la preuve du lemme 1.3.1.

Si 0 et m sont dans deux composantes différentes de $\mathcal{G}$, il existe une partition de $\{0, \ldots, m\}$ en deux sous-ensembles A, B avec $0 \in A$, $m \in B$ et pour tout $(i, j) \in A \times B$, i n'est pas relié à j, c'est-à-dire $L_i \cap L_j = \emptyset$. L'égalité

$$\alpha = (\alpha \cap \bigcup_{i \in A} L_i) \cup (\alpha \cap \bigcup_{j \in B} L_j).$$

est une partition de α en deux fermés non vides (puisque l'un contient x et l'autre y). Ceci contredit la connexité de α. □

Remarque. Ce lemme peut s'interpréter de la façon suivante : soit $\mathcal{G}$ le 1-nerf de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire le graphe dont l'ensemble des sommets est $\mathcal{K}$ et où on met une arête entre K et K' si et seulement si $K \cap K' \neq 0$. Il existe une application $f : \mathcal{G} \to X$ telle que l'image de tout sommet $K \in \mathcal{K}$ est un point de K et chaque arête est envoyée dans un ensemble de diamètre au plus 1. Cette application f est une $(1, 4)$-quasi-isométrie.

Corollaire 1.3.2. *L'espace quasi-métrique $(X, d_{\mathcal{K}})$ est quasi-géodésique.*

Définition. On dit que $\mathcal{K}$ est à *géométrie bornée* s'il existe une constante $\nu \in \mathbf{N}$, telle que tout $K \in \mathcal{K}$ rencontre au plus ν éléments de $\mathcal{K}$. La plus petite constante ν ayant cette propriété est appelée *complexité locale* de $\mathcal{K}$ et notée $\nu(\mathcal{K})$.

Exemple. Soit X un espace topologique connexe par arcs et $\mathcal{D}$ une décomposition cellulaire de X. On dit que $\mathcal{D}$ est à géométrie bornée si $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ l'est. Par exemple, si $\mathcal{D}$ est une triangulation, cela revient à dire qu'il y a une borne supérieure uniforme sur le nombre de simplexes dans l'étoile d'un sommet de $\mathcal{D}$.

Lemme 1.3.3. *Soit $A \subset X$ un sous-ensemble borné connexe par arcs. On a toujours* $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{taille}(A)$. *De plus, si $\mathcal{K}$ est à géométrie bornée, on a aussi* $\operatorname{taille}(A) \leq \nu(\mathcal{K})^{\operatorname{diam} A + 1}$.

Preuve. Soient x, y des points de A. Par hypothèse, il existe un chemin dans A reliant x et y. La taille de ce chemin est majorée par celle de A. On a donc $d_{\mathcal{K}}(x, y) \leq \operatorname{taille}(A)$ pour tous $x, y \in A$, d'où la première inégalité.

Pour la seconde, choisissons un point $x \in A$ et remarquons que $A \subset B(x, \operatorname{diam} A)$, d'où $\operatorname{taille}(A) \leq \operatorname{taille}(B(x, \operatorname{diam} A))$. Le problème est donc réduit à l'inégalité suivante

$$\operatorname{taille}(B(x, r)) \leq \nu(\mathcal{K})^{r+1} \qquad \forall (x, r) \in X \times \mathbf{N}, \tag{1.1}$$

que nous allons démontrer par récurrence sur r.

La boule de centre x et de rayon 0 est la réunion des $K \in \mathcal{K}$ contenant x, donc l'inégalité 1.1 pour $r = 0$ est une conséquence immédiate de la définition de $\nu(\mathcal{K})$. On obtient la boule de centre x et de rayon $r+1$ à partir de celle de rayon r en rajoutant au plus $r(\nu(\mathcal{K}) - 1)$ éléments de $\mathcal{K}$. On en déduit que $\text{taille}(B(x, r+1)) \leq \nu(\mathcal{K})\, \text{taille}(B(x,r))$ et l'inégalité 1.1 suit par récurrence. □

Définition. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Soient $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ des recouvrements compacts localement finis à géométrie bornée de X. On dit que $\mathcal{K}'$ est à *géométrie bornée par rapport à* $\mathcal{K}'$ s'il existe une constante $\nu(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ telle que tout $K \in \mathcal{K}'$ rencontre au plus $\nu(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ éléments de $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{K}'$ est à géométrie bornée par rapport à $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est à géométrie bornée par rapport à $\mathcal{K}'$, on dit que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont *équivalents*.

Le lemme suivant est évident, mais crucial.

Lemme 1.3.4. *Si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont équivalents, l'application identité de $(X, d_{\mathcal{K}})$ vers $(X, d_{\mathcal{K}'})$ est une quasi-isométrie.*

Voici un cas particulier important :

Exemple. Soit X un espace topologique connexe par arcs, $\mathcal{D}$ une décomposition cellulaire localement finie de X et $\mathcal{D}'$ une subdivision de $\mathcal{D}$. On dit que c'est une *subdivision uniforme* s'il existe une constante $C \in \mathbf{N}$ telle que toute cellule de $\mathcal{D}$ est subdivisée en au plus C cellules de $\mathcal{D}'$. Si $\mathcal{D}$ est à géométrie bornée et $\mathcal{D}'$ est une subdivision uniforme de $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}'$ est à géométrie bornée et les recouvrements compacts $\mathcal{K}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{D}')$ sont équivalents. Le lemme 1.3.4 montre donc qu'on ne change pas de classe de quasi-isométrie en effectuant une subdivision uniforme. Ce fait sera constamment utilisé dans la suite.

1.3.2 Le cas des décompositions cellulaires

On a vu qu'une décomposition cellulaire d'un espace est un cas particulier de recouvrement compact. Nous allons maintenant approfondir cette notion et distinguer certaines classes de décompositions cellulaires que nous utiliserons au chapitre 2.

Convention. Les décompositions cellulaires considérées dans cette thèse sont toutes **localement finies**.

Commençons par quelques rappels. Soit X un espace topologique connexe par arcs et $\mathcal{D}$ une décomposition cellulaire (localement finie) de X. On peut voir $\mathcal{D}$ comme une collection de n-cellules. Une n-cellule, ou cellule de dimension n, est un couple (n, f) où n est un entier naturel et f une application continue de B^n vers X. Par abus de langage, on appelle aussi n-cellule l'application f, ou encore son image. La réunion des n-cellules est appelée n-squelette et noté $\mathcal{D}^{(n)}$. La *dimension* de $\mathcal{D}$ est la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ des dimensions des cellules.

Pour qu'une telle collection soit une décomposition cellulaire, elle doit vérifier certaines conditions combinatoires. Un cas particulier important est celui des triangulations. Nous allons définir deux notions intermédiaires, celle de *pseudo-triangulation* et celle de *pseudo-triangulation non-dégénérée*.

Soit $f : B^n \to X$ une n-cellule. L'image du bord de B^n est une réunion de cellules de dimension $< n$. En considérant les préimages de ces cellules, on munit B^n d'une décomposition cellulaire à une seule n-cellule, de sorte que l'image de B^n par f est obtenu en identifiant certaines cellules du bord. On dit que f est un *pseudo-simplexe* si la décomposition cellulaire induite sur B^n est isomorphe à celle du simplexe standard. Un pseudo-simplexe f est appelé *non-dégénéré* (ou un *simplexe*) si c'est un plongement (c'est-à-dire s'il n'y a pas d'identifications au bord).

Définition. On appelle *pseudo-triangulation* une décomposition cellulaire de dimension finie dont toutes les cellules sont des pseudo-simplexes. Une pseudo-triangulation est dite *non-dégénérée* si tous ses pseudo-simplexes sont non-dégénérés.

Remarque. Un espace muni d'une pseudo-triangulation est donc la réalisation géométrique d'un complexe semi-simplicial (cf. [13, 42]). Une pseudo-triangulation non-dégénérée n'est pas forcément une triangulation. En effet, deux n-cellules sont autorisées à avoir plus d'une $(n-1)$-cellule en commun.

Définition. Soit $(X, \mathcal{D})$ un espace topologique connexe par arcs muni d'une pseudo-triangulation non-dégénérée. On appelle *métrique simpliciale régulière* associée à $\mathcal{D}$ la métrique par chemins sur X telle que chaque cellule $f : B^n \to X$ soit un plongement isométrique, B^n étant identifiée au n-simplexe standard régulier de côté 1.

Remarque. Cette métrique est géodésique (par définition) et propre (car $\mathcal{D}$ est localement finie).

Exemple. Soit $\mathcal{G}$ un graphe. La décomposition cellulaire naturelle est une pseudo-triangulation. Elle est non-dégénérée si et seulement si le graphe n'a pas de boucle. Dans ce cas, la métrique simpliciale régulière coïncide avec la métrique standard.

Pour les surfaces, la métrique simpliciale régulière est une métrique riemannienne à singularités coniques correspondant aux sommets où la somme des angles ne vaut pas 2π. Ce cas sera étudié en détail au chapitre 2.

Lemme 1.3.5. *Soit $(X, \mathcal{D})$ un espace topologique connexe par arcs muni d'une décomposition cellulaire. Supposons que le nombre de 1-cellules dans* *le bord d'une cellule de $\mathcal{D}$ est uniformément majoré. Alors $(X, d_{\mathcal{D}})$ est quasi-isométrique au 1-squelette de $\mathcal{D}$ muni de la métrique standard.*

Preuve. Notons Y le 1-squelette de $\mathcal{D}$ et d_Y la métrique standard sur Y. Soit N le 0-squelette de $\mathcal{D}$. Comme N est quasidense à la fois dans $(X, d_{\mathcal{D}})$ et dans (Y, d_Y), le lemme 1.2.2 réduit le problème à montrer que les deux quasi-métriques sont uniformément équivalentes sur N.

Soient $x, y \in N$ des points quelconques. Il est clair que $d_{\mathcal{D}}(x, y) \leq d_Y(x, y)$. Dans l'autre sens, le lemme 1.3.1 donne une suite finie $K_0, \ldots, K_n$ de cellules telles que $x \in K_0$, $y \in K_n$ et $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$. Or par hypothèse, il existe un entier $k \geq 0$ telle que toute cellule contient au plus k 1-cellules. Par conséquent, on a $d_Y(x, y) \leq k d_{\mathcal{D}}(x, y)$. □

Ce lemme s'applique en particulier si $\mathcal{D}$ est à géométrie bornée, ou si $\mathcal{D}$ est une pseudo-triangulation.

Lemme 1.3.6. *Soit $(X, \mathcal{D})$ un espace topologique connexe par arcs muni d'une pseudo-triangulation non-dégénérée de dimension 2. Soit (Y, d_Y) le 1-squelette de $\mathcal{D}$ muni de la métrique standard. Notons d la métrique simpliciale régulière associée à $\mathcal{D}$. Alors $(X, d_{\mathcal{D}})$, (X, d) et (Y, d_Y) sont quasi-isométriques.*

Preuve. D'après le lemme 1.3.5, $(X, d_{\mathcal{D}})$ et (Y, d_Y) sont quasi-isométriques. On va montrer que (X, d) et (Y, d_Y) sont quasi-isométriques. Le lemme 1.2.2 permet de se ramener à comparer les deux métriques sur le 0-squelette N.

Soient $x, y \in N$ des points quelconques. Il est clair que $d(x, y) \leq d_Y(x, y)$. Soit γ une d-géodésique reliant x à y. On cherche à approcher γ par un chemin restant dans Y. Pour cela, considérons un 2-simplexe σ qui rencontre γ. L'intersection de γ avec σ est un segment de droite d'extrémités b et c. Si γ rentre à l'intérieur de σ, les points b et c appartiennent à deux côtés distincts de σ. Soit a le sommet commun à ces deux côtés. On considère le triangle (abc). Comme l'angle en a vaut $\pi/3$, la formule des sinus donne

$$d(a, b) + d(b, c) \leq \frac{4}{\sqrt{3}}\, d(b, c).$$

On peut donc approcher γ par un chemin reliant x à y dans Y, de longueur au plus $4/\sqrt{3} \cdot d(x, y)$. □

On vient de prouver que les trois façons naturelles de mesurer les distances dans un complexe simplicial de dimension 2 sont équivalentes quand on travaille à quasi-isométrie près. Le lemme 1.3.6 semble vrai en toutes dimensions. (C'est en tout cas clair si $\mathcal{D}$ est à géométrie bornée.)

1.4 Notions générales de géométrie bornée

Nous avons introduit dans la section précédente la notion de géométrie bornée pour les recouvrements compacts. Cette notion est un analogue combinatoire de celle de variété riemannienne à courbure sectionnelle bornée et rayon d'injectivité minoré. Afin d'unifier ces deux points de vue, nous allons définir deux notions générales : une notion faible, celle d'espace uniforme à grande échelle, qui est invariante par quasi-isométrie, et une autre plus forte, celle d'espace quasi-homogène, qui n'est pas invariante par quasi-isométrie, mais distingue dans une classe de quasi-isométrie donnée certains espaces « localement plus homogènes que les autres ».

Définition. Un espace métrique X est *quasi-homogène* si pour tout $r \geq 0$, il existe une partie bornée $Y_r \subset X$ tel que pour tout $x \in X$, il existe un point $y \in Y_r$ tel que $B(x, r)$ est isométrique à $B(y, r)$.

Remarque. La terminologie est dûe à Mess [41]. Cette notion est beaucoup plus faible que celle de [34]. Par exemple, un espace quasi-homogène dans notre sens peut n'avoir aucune autre isométrie que l'identité. Par ailleurs, on ne suppose rien sur la topologie de Y_r. En particulier, il existe des espaces quasi-homogènes 1-connexes qui ne sont pas uniformément 1-connexes (cf. 1.5).

Exemple. Les espaces suivants sont quasi-homogènes :

i. Tout graphe (connexe, localement fini) muni de la métrique standard (en particulier le graphe de Cayley d'un groupe de type fini) ;

ii. Tout espace topologique muni de la métrique simpliciale régulière associée à une pseudo-triangulation non-dégénérée à géométrie bornée ;

iii. Tout espace métrique sur lequel un groupe agit proprement et cocompactement par isométries.

Soit (X, d) un espace quasi-métrique et C_1, C_2 des constantes positives. Un sous-ensemble A de X est dit C_1-*séparé* si deux boules de rayon C_1 centrées sur deux points distincts de A sont disjointes. On dit que A est *uniformément discret* s'il existe une fonction $n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{N}$ telle que pour tout $r \geq 0$ et pour tout $x \in X$ le cardinal de $A \cap B(x, r)$ est majoré par $n(r)$.

Définition. Un (C_1, C_2)-*réseau* dans X est un sous-ensemble N qui est C_1-séparé et C_2-quasidense. Un réseau est dit *uniforme* s'il est uniformément discret.

À ma connaissance, la notion suivante a été formulée pour la première fois par J. Block et S. Weinberger [4] sous le nom de « coarse bounded geometry ». (Cf. aussi [24], p. 12.)

Définition. Un espace quasi-métrique est dit *uniforme à grande échelle* s'il admet un réseau uniforme.

Soient X_1, X_2 des espaces métriques et $f : X_1 \to X_2$ une quasi-isométrie. Supposons que X_1 est uniforme à grande échelle. L'image d'un réseau uniforme $N \subset X_1$ est uniformément discrète et quasidense dans X_2. Par conséquent, n'importe quelle partie 1-séparée maximale de $f(N)$ est un réseau uniforme dans X_2. On a donc :

Proposition 1.4.1. *Le fait d'être uniforme à grande échelle est invariant par quasi-isométrie.*

La proposition suivante fait le lien entre la quasi-homogénéité et l'uniformité à grande échelle.

Proposition 1.4.2. *Tout espace métrique quasi-homogène propre est uniforme à grande échelle.*

Preuve. Soit X un espace métrique quasi-homogène propre. Par définition, pour tout $r \geq 0$, il existe une partie bornée $Y_r \subset X$ tel que pour tout $x \in X$, il existe un point $y \in Y_r$ tel que $B(x, r)$ est isométrique à $B(y, r)$.

Soit N une partie 1-séparée maximale de X. On a vu que N est un réseau. On va montrer qu'il est uniforme. Fixons $r \geq 0$. La quasi-homogénéité de X permet de se ramener à majorer le cardinal d'une partie 1-séparée de $N(Y_r, r)$. Or comme X est propre, $N(Y_r, r)$ est compacte. Il suffit donc pour conclure de prouver l'affirmation suivante :

Affirmation. Soit Y un espace métrique compact. Il existe un entier $N \geq 0$ tel que toute partie 1-séparée de Y a au plus N éléments.

Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe une suite finie $x_1^n, \ldots, x_n^n$ avec $d(x_i^n, x_j^n) \geq 1$ si $i \neq j$. Quitte à faire une extraction diagonale, on peut supposer que chaque suite $\{x_i^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un point x_i^∞. En passant à la limite dans les inégalités, on voit que pour tous $i \neq j$ on a $d(x_i^\infty, x_j^\infty) \geq 1$. L'ensemble des x_i^∞ est donc discret et infini, ce qui est absurde. □

Par conséquent, les exemples précédents d'espaces quasi-homogènes sont également des exemples d'espaces uniformes à grande échelle. On a en particulier :

Corollaire 1.4.3. *Tout espace quasi-métrique quasi-isométrique à un groupe est uniforme à grande échelle.*

Plus généralement, tout espace quasi-isométrique à un graphe à géométrie bornée est uniforme à grande échelle. Pour les espaces quasi-géodésiques, la réciproque est vraie :

Proposition 1.4.4 (cf. [32]).
Pour qu'un espace quasi-métrique quasi-géodésique soit uniforme à grande échelle, il faut et il suffit qu'il soit quasi-isométrique à un graphe à géométrie bornée.

Preuve. On a vu que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soient $\lambda, C \geq 0$ des constantes et (X, d) un espace C-quasi-métrique (λ, C)-quasi-géodésique. Soit $N \subset X$ un (C_1, C_2)-réseau uniforme. Soit $n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{N}$ une fonction telle que pour tout $r \geq 0$ et pour tout $x \in X$ le cardinal de $N \cap B(x, r)$ est majoré par $n(r)$. Posons $C_3 = \lambda + C + 2C_2$.

Construisons un graphe $\mathcal{G}$ dont l'ensemble des sommets est N en mettant une arête entre deux points $x, y \in N$ quand $x \neq y$ et $d(x, y) \leq C_3$. Comme N est uniforme, $\mathcal{G}$ est à géométrie bornée. Il n'est pas évident *a priori* que $\mathcal{G}$ soit connexe. Cependant, on peut définir une application $\delta : N^2 \to [0, +\infty]$ de la façon suivante : si x et y n'appartiennent pas à la même composante connexe de $\mathcal{G}$ on pose $\delta(x, y) = +\infty$. Sinon, $\delta(x, y)$ est égal à la distance standard dans $\mathcal{G}$ entre x et y.

On a clairement $d(x, y) \leq (C_3 + C)\delta(x, y)$ pour tous $x, y \in N$. Soit α une (λ, C)-quasi-géodésique reliant x à y. Soit N_α l'ensemble des points $z \in N$ tels que $B(z, C_2) \cap \alpha \neq \emptyset$. On a alors $\alpha \subset \bigcup_{z \in N_\alpha} B(z, C_2)$, et il est facile de voir (par l'argument de subdivision habituel) que $\delta(x, y) \leq \# N_\alpha \leq n(\lambda^2 d(x, y) + C(\lambda + 1) + C_2 + C)$. Ceci prouve que $\mathcal{G}$ est connexe, et $(\mathcal{G}, \delta)$ est quasi-isométrique à (X, d) par le lemme 1.2.2. □

La proposition 1.4.4 ne sera pas utilisée dans la suite. Son intérêt est surtout théorique : elle permet de dire que pour les espaces quasi-géodésiques propres, les propriétés « quasi-homogène » et « uniforme à grande échelle » sont *équivalentes à quasi-isométrie près*, c'est-à-dire que d'une part, tout espace quasi-homogène est uniforme à grande échelle ; d'autre part, tout espace X uniforme à grande échelle est quasi-isométrique à un espace Y quasi-homogène. En pratique, il est intéressant d'avoir des résultats plus précis. Par exemple, si X est une variété riemannienne, peut-on demander que Y soit une variété riemannienne difféomorphe à X ? Cette question sera résolue par l'affirmative pour les surfaces planaires au chapitre 2.

Pour terminer, relions les notions de cette section avec les notions habituelles de géométrie bornée en géométrie riemannienne.

Exemple. Toute variété riemannienne complète dont la courbure de Ricci est bornée inférieurement est uniforme à grande échelle. C'est une conséquence de l'inégalité de Bishop-Gromov.

Par ailleurs, toute variété riemannienne complète quasi-homogène a une courbure sectionnelle bornée (donc une courbure de Ricci minorée) et un rayon d'injectivité minoré.

1.5 Notions d'uniforme connexité

Dans cette section, nous partons du problème suivant : dans quelle mesure les invariants topologiques « à l'infini » sont-ils des invariants de quasi-isométrie. En guise d'introduction, voici la réponse pour l'invariant le plus simple, le nombre de bouts. Rappelons que le nombre de bouts d'un espace topologique X localement compact est la borne supérieure $\mathrm{b}(X) \in [0, +\infty]$ de l'ensemble des entiers $n \in \mathbf{N}$ pour lesquels il existe un compact $K \subset X$ tel que $X - \mathrm{Int}\, K$ a au moins n composantes non compactes.

Proposition 1.5.1. *Le nombre de bouts est un invariant de quasi-isométrie pour les espaces métriques géodésiques propres.*

Preuve. Soient X et Y des espaces métriques géodésiques propres (donc en particulier localement compacts). On notera d la distance à la fois dans X et dans Y.

Soient $f : X \subset Y$ et $\bar{f} : Y \to X$ deux (λ, C)-quasi-isométries inverses à grande échelle, c'est-à-dire telles que pour tout $x \in X$ on a $d(\bar{f}(f(x)), x) \leq C$ et pour tout $y \in Y$ on a $d(f(\bar{f}(y)), y) \leq C$. Posons $\delta = \lambda^2 + 2C\lambda + \lambda + C + 1$.

Par symétrie, il suffit de montrer que $\mathrm{b}(X) \leq \mathrm{b}(Y)$. Soit $n \leq \mathrm{b}(X)$. Par définition, il existe un compact $K \subset X$ tel que $X - \mathrm{Int}\, K$ a au moins n composantes non compactes (c'est-à-dire non bornées, puisque X est propre).

Comme Y est propre, le δ-voisinage K' de l'adhérence de $f(K)$ est compact. Soient $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) l'ensemble des composantes non bornées du complémentaire de K (resp. K'). Nous allons construire une application ψ surjective de $\mathcal{C}'$ sur $\mathcal{C}$, ce qui prouvera que $n \leq \mathrm{b}(Y)$.

On commence par démontrer un lemme.

Lemme 1.5.2. *Soit $K \subset X$ un compact et $r > 0$. Soit V une composante non bornée de $X - K$. Alors V contient au moins une composante non bornée de $X - N(K, r)$.*

Preuve. Si ce n'était pas le cas, $V \cap (X - N(K, r))$ aurait une infinité de composantes bornées, de diamètres non uniformément bornés. On en déduit que $N(K, r+2) - N(K, r+1)$ rencontre encore une infinité de ces composantes. Soit $\{x_n\}$ une suite de points de $N(K, r+2) - N(K, r+1)$ telle que pour $n \neq m$, x_n et x_m sont dans deux composantes distinctes de $X - N(K, r)$. Comme X est propre, une certaine sous-suite de $\{x_n\}$ converge vers un point x tel que $r + 1 \leq d(x, K) \leq r + 2$ et la boule de centre x et de rayon $1/10$ rencontre une infinité de composantes de $X - N(K, r)$. Ceci contredit le fait que X est géodésique. □

Soient $U \in \mathcal{C}'$ et $y \in U$. On a

$$\begin{aligned} d(\bar{f}(y), K) &\geq \lambda^{-1} d(f(\bar{f}(y)), f(K)) - C \\ &\geq \lambda^{-1} d(x, f(K)) - C(1 + \lambda^{-1}) \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

En particulier, $\bar{f}(y)$ appartient au complémentaire de K. Soit y' un autre point de U. On va montrer que $\bar{f}(y)$ et $\bar{f}(y')$ sont dans la même composante de $X - K$. Pour cela, considérons un segment géodésique α reliant x et y. On peut recouvrir α par les boules centrées sur α et de rayon 1, en extraire un recouvrement fini par compacité, puis appliquer le principe du lemme 1.3.1 pour obtenir une suite de points $y = y_0, y_1, \ldots , y_n = y'$ de α tels que $d(y_i, y_{i+1}) \leq 1$ et $d(y_i, f(K)) \geq \delta - 1$ pour tout i. Par un calcul analogue au précédent, on a pour tout i

$$d(\bar{f}(y_i), K) \geq \lambda + C + 1.$$

Par ailleurs, on a $d(\bar{f}(y_i), \bar{f}(y_{i+1})) \leq \lambda + C$. Comme X est géodésique, on peut relier $\bar{f}(y)$ à $\bar{f}(y')$ par une géodésique brisée β passant par les points $\bar{f}(y_i)$. Il résulte des calculs précédents que β évite K.

On peut définir $\psi(U)$ comme la composante de $\bar{f}(y)$. D'après le paragraphe précédent, $\psi(U)$ ne dépend pas du choix de y et est bien non bornée. Il reste à prouver que ψ est surjective. Soit V une composante non bornée de $X - K$. D'après le lemme 1.5.2, V contient au moins une composante non bornée V' de $X - N(K, \delta + C + 1)$. L'argument précédent utilisant cette fois-ci la géodésicité de Y montre que si x et x' sont deux points quelconques de V', leurs images par f appartiennent à la même composante U de $Y - K'$ et que celle-ci est non bornée. Comme $d(\bar{f}(f(x)), x) \leq C$, on a nécessairement $\bar{f}(f(x)) \in V$, d'où $V = \psi(U)$. Ceci prouve la surjectivité de U et termine la preuve de la proposition 1.5.1. □

Un des points-clés de l'argumentation a consisté à utiliser l'existence de segments géodésiques pour approcher par un chemin continu une suite de points telle que deux points consécutifs sont proches. Ce principe, appelé en anglais « connect the dots », fonctionne aussi pour la connexité de rang supérieur. Nous allons l'utiliser dans des contextes variés. Comme une étude extensive des notions qui en découlent (en particulier l'uniforme k-connexité et l'uniforme asphéricité) serait trop longue, nous nous contenterons de donner des définitions générales et quelques lemmes concernant surtout les variétés de petite dimension. Le lecteur désireux d'en savoir plus peut consulter par exemple [7, 14, 33, 45].

1.5.1 Uniforme k-connexité

Définition ([24]1D, p. 26). Soit X un espace topologique, k un entier naturel et d une quasi-métrique sur X. On dit que (X, d) est *uniformément k-connexe* s'il existe une application $\alpha : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $k' \leq k$, toute application continue $f : S^{k'} \to X$ se prolonge en une fonction $\tilde{f} : B^{k'+1} \to X$ telle que $\mathrm{diam}(\tilde{f}) \leq \alpha(\mathrm{diam}(f))$.

Lemme 1.5.3. *Soit F une surface 1-connexe non compacte et h une métrique riemannienne complète sur F. Alors (F, h) est uniformément 1-connexe si et seulement s'il existe une fonction $\alpha' : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que tout disque plongé D vérifie* $\mathrm{diam}(D) \leq \alpha'(\mathrm{diam}(\partial D))$.

Preuve. Supposons que (F, h) est uniformément 1-connexe. Soit $D \subset F$ un disque plongé. Alors il existe une application continue $f : D^2 \to F$ de diamètre au plus $\alpha(\mathrm{diam}(\partial D))$ dont la restriction à S^1 a pour image ∂D. Comme F n'est pas compacte, F privée d'un point n'est jamais 1-connexe. Ceci prouve que $D \subset f(D^2)$, d'où $\mathrm{diam}\, D \leq \alpha(\mathrm{diam}(\partial D))$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction $\alpha' : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que tout disque plongé D vérifie $\mathrm{diam}(D) \leq \alpha'(\mathrm{diam}(\partial D))$. Soit $f : S^1 \to F$ un lacet. Alors f est homotope à une immersion générique g qui reste dans le 1-voisinage de l'image de f. L'image de g est un graphe. Chaque circuit dans ce graphe borde par hypothèse un disque plongé de diamètre majoré en fonction du diamètre de f. Par conséquent, (R, h) est uniformément 1-connexe. □

1.5.2 Uniforme asphéricité

Le reste de ce chapitre ne sera pas utilisé avant le chapitre 5. Pour les résultats concernant les variétés de dimension 3, on utilisera le théorème de la sphère, qui est rappelé au chapitre 4.

Définition. Soit X un espace topologique et d une quasi-métrique sur X. On dit que (X, d) est *uniformément asphérique* s'il existe une fonction $\alpha : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, toute application continue $f : S^{k'} \to X$ se prolonge en une fonction $\tilde{f} : B^{k'+1} \to X$ telle que $\mathrm{diam}(\tilde{f}) \leq \alpha(\mathrm{diam}(f))$.

Soit M une variété de dimension n et $\mathcal{T}$ une triangulation de W. Soit $1 \leq i \leq n$ et P un complexe simplicial de dimension i. Rappelons qu'une application $f : P \to W$ est dite *combinatoire* si $f(P) \subset \mathcal{T}^{(i)}$ et si la restriction de f à tout i-simplexe de P est un plongement dont l'image est un i-simplexe de $\mathcal{T}$. Ainsi, on peut voir le nombre de i-simplexes de P comme le nombre de i-simplexes de $f(P)$ « compté avec multiplicités ». On appelle ce nombre le

i-volume de f, noté $\mathrm{Vol}_i(f)$. Dans ce contexte, on utilisera les mots *longueur* et *aire* comme synonymes de respectivement 1-volume et 2-volume.

Le lemme suivant relie le i-volume d'une application à son diamètre pour la quasi-métrique canonique $d_{\mathcal{T}}$.

Lemme 1.5.4. *Soit $(M, \mathcal{T})$ une variété triangulée de dimension n. Soit $1 \leq i \leq n$ et P un complexe simplicial connexe de dimension i. Soit $f : P \to W$ une application combinatoire. Alors* $\mathrm{diam}(f) \leq \mathrm{Vol}_i(f)$.

Preuve. Le i-volume de f est minoré par le nombre de i-simplexes de $f(P)$. Comme chaque i-simplexe est contenu dans un n-simplexe, ce nombre est minoré par la taille de $f(P)$, qui à son tour est minorée par $\mathrm{diam}(f(P))$ d'après le lemme 1.3.3, puisque $f(P)$ est connexe par arcs. □

On se spécialise maintenant à la dimension 3.

Proposition 1.5.5. *Soit M une variété de dimension 3 orientable et non compacte. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation à géométrie bornée de M. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. *$(M, d_{\mathcal{T}})$ est uniformément asphérique ;*

ii. *Il existe une fonction $\alpha' : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que tout compact $K \subset M$ est contenu dans une sous-variété asphérique $L \subset M$ avec $\mathrm{diam}\, L \leq \alpha'(\mathrm{diam}\, K)$;*

iii. *Il existe une fonction $C_2 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que toute application combinatoire $f : S^2 \to X$ s'étend en une application combinatoire $\tilde{f} : B^3 \to X$ avec $\mathrm{Vol}_3(\tilde{f}) \leq C_2(\mathrm{Vol}_2(f))$;*

iv. *Il existe une fonction $C_2' : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que toute application continue $f : S^2 \to X$ s'étend en une application continue $\tilde{f} : B^3 \to X$ avec $\mathrm{diam}(\tilde{f}) \leq C_2'(\mathrm{diam}(f))$.*

Preuve. Il est clair que (ii) implique (i) et que (i) implique (iv). Montrons que (iv) implique (iii). Soit $f : S^2 \to M$ une application combinatoire d'aire A. D'après le lemme 1.5.4, $\mathrm{diam}\, f \leq A$. Soit α la fonction d'uniforme asphéricité. On peut supposer que α est croissante. Par conséquent, f est contractile dans le $\alpha(A)$-voisinage V de l'image de f.

Comme $\mathcal{T}$ est à géométrie bornée, la taille de V est bornée en fonction de A. Cela signifie que V appartient à un nombre fini de types combinatoires. Dans chacun de ces types, il y a un nombre fini d'applications combinatoires de S^2 d'aire A, et pour chacune de ces applications on peut choisir un prolongement à B^3. Le problème est donc résolu en définissant $C_2(A)$ comme le maximum des 3-volumes de ces prolongements.

Il reste à montrer que (iii) implique (ii). L'assertion (iii) entraîne que $\pi_2 M$ est trivial. Un argument classique basé sur le théorème de Hurewicz (cf. la preuve du corollaire 4.1.2) montre que M est asphérique. De même, toute sous-variété de M dont le π_2 est trivial est asphérique.

Soit K un compact de M. Soit Y un voisinage régulier de $N(K, 0)$ obtenu en prenant l'étoile dans la deuxième subdivision barycentrique de $\mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ est à géométrie bornée, il n'y a qu'un nombre fini de types combinatoires possibles pour Y, dépendant seulement de $\operatorname{diam} K$. En particulier, le nombre de composantes de ∂Y est majoré par une fonction de $\operatorname{diam} K$.

Si Y est asphérique, on peut prendre $L = Y$. Sinon, il existe d'après le théorème de la sphère une 2-sphère plongée S qui ne borde pas de boule d'homotopie dans Y. Comme M est asphérique, il existe une boule d'homotopie $B \subset M$ avec $\partial B = S$. Cette boule d'homotopie est unique car par hypothèse, M n'est pas une sphère d'homotopie. Au moins une composante U de $M - \operatorname{Int} Y$ est contenue dans B. Nous allons maintenant majorer $\operatorname{diam} U$ en fonction de $\operatorname{diam} K$.

À chaque 2-sphère plongée S non homotope à zéro dans Y, on associe une 2-sphère singulière combinatoire qui lui est homotope en poussant S dans le 2-squelette de $\mathcal{T}$. Choisissons $f : S^2 \to Y$ d'aire (combinatoire) minimale parmi toutes ces 2-sphères. Alors il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour f à homéomorphisme combinatoire près, donc $\operatorname{Vol}_2(f)$ est majoré par une fonction de $\operatorname{diam} K$. Par hypothèse, f s'étend en une application combinatoire $\tilde{f} : B^3 \to M$ de volume contrôlé, donc également de diamètre contrôlé (d'après le lemme 1.5.4). Or on a $U \subset \tilde{f}(B^3)$. En effet, pour tout $x \in U$, la 2-sphère plongée S n'est pas homotope à zéro dans $M - \{x\}$, donc f non plus, ce qui montre que $x \in \tilde{f}(S^3)$. On a bien démontré que $\operatorname{diam} U$ est contrôlé par $\operatorname{diam} K$.

Posons $Y_1 = Y \cup U$. Si $\pi_2 Y_1 \neq 0$, on répète la même construction. Au bout d'un temps fini et majoré par le nombre de composantes de ∂Y, on obtient une sous-variété asphérique de diamètre contrôlé par $\operatorname{diam} K$. □

Corollaire 1.5.6. *Soit M une variété de dimension 3 orientable asphérique. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de M invariante par une action de groupe cocompacte. Alors $(M, d_{\mathcal{T}})$ est uniformément asphérique.*

1.5.3 Uniforme représentabilité et profil isopérimétrique

Si la variété M n'est pas 1-connexe, elle ne peut être uniformément 1-connexe. En revanche, on peut affaiblir la définition en demandant que tout lacet homotope à zéro l'est avec un contrôle sur le diamètre. Pour des raisons techniques, nous utiliserons des inégalités isopérimétriques plutôt qu'isodiamétriques.

Définition. Soit $(M, \mathcal{T})$ une variété triangulée. On dit que $(M, \mathcal{T})$ a un *profil isopérimétrique fini* s'il existe une fonction $C_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que toute application combinatoire $f : S^1 \to M$ homotope à zéro peut être prolongée en une application combinatoire $\tilde{f} : D^2 \to M$ telle que $\mathrm{Vol}_2(\tilde{f}) \leq C_1(\mathrm{Vol}_1(f))$.

Enfin, on peut exercer un contrôle sur la longueur des lacets non homotopes à zéro.

Définition. Soit $(M, \mathcal{T})$ une variété triangulée et a un élément de $\pi_1 M$. On dit que a est *uniformément représentable* s'il existe une constante $C_0 \geq 0$ telle que pour tout sommet x de $\mathcal{T}$, il existe un lacet combinatoire α basé en x, de longueur au plus C_0 et représentant un conjugué de a.

Remarque. Le cas particulier qui nous intéresse est celui d'un élément central $a \in \pi_1 M$. Dans ce cas, la classe de conjugaison de a est réduite à $\{a\}$, et le lacet α représente a. En d'autres termes, le fait de dire qu'un lacet représente a a un sens indépendamment du point de base choisi pour définir $\pi_1 M$.

Lemme 1.5.7. *Soit M une variété de dimension 3 asphérique et non compacte, $\mathcal{T}$ une triangulation à géométrie bornée de M et a un élément de $\pi_1 M$. Si a est uniformément représentable dans $(M, \mathcal{T})$, alors $(M, d_{\mathcal{T}})$ est uniformément asphérique.*

Preuve. Soit $C_0 \geq 0$ une constante associée à l'uniforme représentabilité de a. On va démontrer l'assertion (ii) de la proposition 1.5.5, qui est équivalente à l'asphéricité uniforme. Le début est le même que dans la preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (ii) de cette proposition. Soit K un compact de M. Soit Y un voisinage régulier de $N(K, 0)$ inclus dans $N(K, 1)$. Si Y est asphérique, on a fini. Sinon le théorème de la sphère donne une 2-sphère plongée S qui ne borde pas de boule d'homotopie dans Y. Comme M est asphérique, il existe une boule d'homotopie $B \subset M$ dont le bord est S.

Au moins une composante U de $W - \mathrm{Int}\, Y$ est contenue dans B. Or ∂U est C_0-quasidense dans U, car sinon il existerait un point x de U tel que tout lacet passant par x de longueur majorée par C_0 est contenu dans U, donc dans la boule d'homotopie B, ce qui contredirait l'uniforme représentabilité de a. On en déduit une majoration en fonction de $\mathrm{diam}\, K$ du diamètre de la réunion de Y et de toutes les composantes de $W - \mathrm{Int}\, Y$ qui sont contenues dans des boules d'homotopie. Appelons L cette réunion. D'après le théorème de la sphère, L est asphérique. □

Proposition 1.5.8. *Soit W une variété de dimension 3 ouverte, orientable, dont le groupe fondamental est infini cyclique engendré par un élément a. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation à géométrie bornée de W. Supposons qu'un groupe Γ agit proprement, cocompactement et simplicialement sur $(W, \mathcal{T})$. Alors W*

est asphérique, a est uniformément représentable et $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini.

Preuve. Montrons d'abord que a est uniformément représentable. Par cocompacité, il existe un sous-complexe fini Y de W tel que pour tout $x \in W$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma^{-1}x \in Y$. Pour chaque sommet x de Y, on choisit un lacet combinatoire basé en x représentant a. Soit C_0 le maximum des longueurs de ces lacets. Alors pour tout $x \in \mathcal{T}^{(0)}$, on peut construire un lacet basé en x représentant a de longueur au plus C_0 en prenant l'image par l'action d'un élément de Γ d'un lacet passant par un sommet de Y. Ceci prouve que a est uniformément représentable.

Prouvons par l'absurde que W est asphérique. D'après le théorème de la sphère, si $\pi_2 W \neq 0$, alors il existe une 2-sphère plongée $S \subset W$ représentant un élément non trivial de $\pi_2 W$.

Si S sépare, appelons W_1, W_2 les composantes de W découpé le long de S. Pour tout i, si W_i est non compact, alors par représentabilité uniforme, $\operatorname{Int} W_i$ contient un lacet représentant $a \in \pi_1 W$. Or le théorème de van Kampen assure que $\pi_1 W \cong \pi_1 W_1 * \pi_1 W_2$. Comme au moins un des W_i, disons W_1, est non compact, on en déduit que $\pi_1 W_2 = 0$, donc que W_2 est une boule d'homotopie. Cela contredit le fait que S représente un élément non trivial de $\pi_2 W$.

Si S ne sépare pas, soit W' la variété obtenue en découpant W le long de S. D'après le théorème de van Kampen, $\pi_1 W \cong \pi_1 W' * \mathbf{Z}$. À nouveau par représentabilité uniforme, W' contient un lacet représentant $a \in \pi_1 W$. On a encore obtenu une contradiction, donc on a prouvé que $\pi_2 W = 0$, et finalement W est asphérique.

Enfin, le fait que $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini découle de la cocompacité et du lemme 1.5.4 par l'argument de finitude habituel. $\square$

Chapitre 2

Quasi-isométries des surfaces

Dans ce chapitre, on étudie l'équivalence à quasi-isométrie près de diverses notions de géométrie bornée pour les surfaces. La motivation principale pour la suite est le corollaire 2.1.2, qui sera utilisé au chapitre 3.

2.1 Énoncés des résultats principaux

Soit R une surface, c'est-à-dire une variété de dimension 2 connexe. On dit que R est *planaire* si elle n'admet pas de courbe plongée non-séparante. On dit que R est *planaire à l'infini* s'il existe une sous-surface compacte $K \subset R$ telle que chaque composante de $R - K$ est planaire.

Théorème 2.1.1. *Soit R une surface ouverte planaire à l'infini et h une métrique riemannienne complète uniforme à grande échelle sur R. Alors R admet une métrique riemannienne complète quasi-homogène quasi-isométrique à h.*

Grâce au corollaire 1.4.3, on peut appliquer ce théorème aux surfaces planaires quasi-isométriques à des groupes, obtenant le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.2. *Soit Γ un groupe de type fini. Supposons qu'il existe une surface ouverte planaire R et une métrique riemannienne complète sur R quasi-isométrique à Γ. Alors R admet une métrique riemannienne complète quasi-homogène quasi-isométrique à Γ.*

Les méthodes utilisées pour démontrer le théorème 2.1.1 permettent aussi d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 2.1.3. *Soit R une surface ouverte et h une métrique riemannienne complète à courbure minorée. Alors R admet une métrique riemannienne complète quasi-homogène quasi-isométrique à h.*

Remarquons que dans le théorème 2.1.3, on n'a besoin d'aucune hypothèse sur le rayon d'injectivité (contrairement, par exemple, à O. Attie [1] dans un contexte analogue).

2.2 Préliminaires

2.2.1 Métriques riemanniennes et arcs h-minimaux

Soit F une surface riemannienne complète à bord strictement convexe. Par convention, tous les arcs $f : I \to F$ sont supposés *propres*, c'est-à-dire tels que $f^{-1}(\partial F) = \partial I$. Il en est de même de leurs homotopies.

Un *arc essentiel* dans F est une immersion (propre) qui n'est pas (proprement) homotope à un arc dans ∂F. Un tel arc est dit *h-minimal* s'il minimise la longueur dans sa classe d'homotopie (propre).

On dit que deux arcs $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2$ sont *homotopiquement disjoints* s'il existe des arcs $\mathsf{a}'_1, \mathsf{a}'_2$ homotopes respectivement à a_1 et a_2 et vérifiant $\mathsf{a}'_1 \cap \mathsf{a}'_2 = \emptyset$.

Proposition 2.2.1 (Freedman-Hass-Scott [15]).
Soit F une surface riemannienne complète à bord strictement convexe.

i. Tout arc h-minimal homotope à un arc plongé est plongé.

ii. Deux arcs h-minimaux homotopiquement disjoints sont disjoints ou égaux.

iii. Soient $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2$ deux arcs h-minimaux plongés contenus dans un disque (non proprement) plongé D. Alors a_1 et a_2 ont au plus un point d'intersection.

On notera $\eta_1 \cup_w \eta_2$, ou simplement $\eta_1 \cup \eta_2$ la concaténation de deux arcs (non propres) $\eta_1, \eta_2 \subset F$ ayant une extrémité commune w.

Soit Y un fermé de F. On note d_Y la distance sur Y associée à la structure de longueur induite par l'inclusion. On appelle cette distance la *métrique intrinsèque* induite par h. Quand Y n'est pas convexe, elle ne coïncide pas avec la restriction à $Y \times Y$ de la fonction distance associée à h. On appelle *diamètre intrinsèque* de Y le nombre $\operatorname{diam}_{d_Y} Y$.

2.2.2 Pseudo-triangulations des surfaces

Soit R une surface et $\mathcal{D}$ une décomposition cellulaire de R. Une 0-cellule est simplement un point. Une 1-cellule est soit un arc plongé, soit une courbe fermée simple. Dans ce dernier cas, on dit que la 1-cellule est une *boucle*. La *longueur combinatoire* d'une suite finie de 1-cellules est son cardinal. Si f est une 2-cellule, on peut voir son bord comme une telle suite, d'où la notion de *périmètre combinatoire.* Remarquons que les 1-cellules du bord de f doivent être comptées « avec multiplicités ». On dit que f est un *n-gone* quand son périmètre combinatoire vaut n. On dit que $\mathcal{D}$ est *réduite* si elle n'admet ni 1-gone, ni 2-gone.

Les pseudo-simplexes de $\mathcal{D}$ sont les 3-gones. Par conséquent, $\mathcal{D}$ est une pseudo-triangulation si et seulement si toutes les 2-cellules sont des 3-gones. Il y a quatre types de 3-gones dégénérés, représentés sur la figure 2.1 : (1) deux sommets, une boucle et deux arcs ; (2) deux sommets, une boucle et un arc double ; (3) un sommet, trois boucles ; (4) un sommet, une boucle simple, une boucle double.

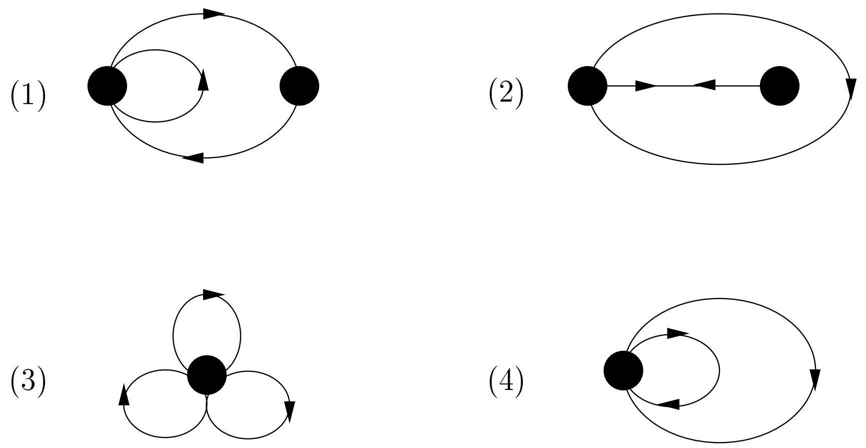


FIG. 2.1: Les quatre types de 3-gones dégénérés

Supposons maintenant que la surface R est munie d'une métrique d. Le *module* $|\mathcal{D}|$ d'une décomposition cellulaire $\mathcal{D}$ (par rapport à d) est défini par $|\mathcal{D}| = \sup(\text{longueurs des 1-cellules})$. On dit que $\mathcal{D}$ est *uniformément localement finie* s'il existe une fonction $n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{N}$ telle que pour tout $r \geq 0$, toute boule de rayon r rencontre au plus $n(r)$ cellules.

Définition. Soit $\mathcal{D}$ une pseudo-triangulation d'une surface R munie d'une métrique d. On dit que $\mathcal{D}$ est *uniforme* (par rapport à d) si elle satisfait les conditions suivantes :

i. $\mathcal{D}^{(0)}$ est un réseau ;

ii. $\mathcal{D}$ a un module fini ;

iii. $\mathcal{D}$ est uniformément localement finie.

Remarque. Par (i) et (iii), $\mathcal{D}^{(0)}$ est un réseau uniforme. Cependant, (iii) est en général plus forte que de demander l'uniformité de $\mathcal{D}^{(0)}$ (cf. la proposition 2.3.2 et le contre-exemple correspondant).

Remarque. Soient C_1, C_2 des constantes telles que $\mathcal{D}^{(0)}$ soit un (C_1, C_2)-réseau. Alors les diamètres intrinsèques des 1-cellules qui ne sont pas des boucles sont minorés par $2C_1$, puisqu'elles contiennent deux points distincts de N. Par ailleurs, la condition (ii) donne une borne supérieure uniforme sur les diamètres intrinsèques des 2-cellules ; en effet, la somme des longueurs des 1-cellules du bord d'une 2-cellule donnée est toujours majorée par $3|\mathcal{D}|$, donc le diamètre intrinsèque d'une 2-cellule est toujours majoré par $3|\mathcal{D}| + 2C_2$. En particulier, toute 1-cellule ou 2-cellule qui rencontre un compact K est contenue dans le $(3|\mathcal{D}| + 2C_2)$-voisinage de K.

Lemme 2.2.2. *Soit R une surface ouverte, d une métrique sur R et $\mathcal{D}$ une pseudo-triangulation uniforme sur (R, d). Alors $\mathcal{D}$ est à géométrie bornée.*

Preuve. Pour montrer qu'une pseudo-triangulation est à géométrie bornée, il suffit de vérifier que son 1-squelette est à géométrie bornée, c'est-à-dire qu'il y a une borne supérieure uniforme sur la valence de ses sommets. L'existence d'une telle borne est garantie par la condition (iii). □

Lemme 2.2.3. *Soit R une surface ouverte, d une métrique géodésique sur R et $\mathcal{D}$ une pseudo-triangulation uniforme sur (R, d). Soit (X, d_X) le 1-squelette de $\mathcal{D}$ muni de la métrique intrinsèque. Alors (X, d_X) est quasi-isométrique à (R, d).*

Preuve. Soit N le 0-squelette de $\mathcal{D}$. Par hypothèse, N est quasidense à la fois dans (R, d) et dans (X, d_X). Par le lemme 1.2.2, il suffit de majorer uniformément $d(x, y)$ en fonction de $d_X(x, y)$ et réciproquement pour tous $x, y \in N$.

On a clairement $d(x, y) \leq d_X(x, y)$. Dans l'autre sens, soit ξ une géodésique dans R reliant deux points x, y. Notons $D_1, \ldots, D_k$ les 2-cellules qui rencontrent ξ. Vu que $\mathcal{D}$ est uniformément localement finie, le nombre k est majoré par une fonction de $d(x, y)$. Décomposons ξ en arcs $\xi_1 \cup \cdots \cup \xi_n$ où chaque ξ_i est contenu dans une 2-cellule $D_{j(i)}$. On peut remplacer chaque ξ_i par un chemin contenu dans $\partial D_{j(i)}$ sans changer les extrémités. En recollant tous ces chemins et en faisant des courts-circuits pour éliminer les points doubles, on obtient un arc reliant x à y dans X de longueur majorée par $3k|\mathcal{D}|$. □

Lemme 2.2.4. *Soit R une surface et $\mathcal{D}$ une pseudo-triangulation non-dégénérée à géométrie bornée. Alors R admet une métrique riemanniene complète quasi-homogène h telle que l'identité entre $(R, d_{\mathcal{D}})$ et (R, h) est une quasi-isométrie.*

Preuve. Soit d la métrique simpliciale régulière sur $(R, \mathcal{D})$. La métrique d est donnée par une métrique riemannienne lisse g dans le complémentaire de

$\mathcal{D}^{(0)}$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de boules de rayon $1/10$ centrées sur $\mathcal{D}^{(0)}$ à isométrie près, on peut définir une métrique riemannienne complète quasi-homogène h qui coïncide avec g en dehors de $N(\mathcal{D}^{(0)}, 1/10)$ en lissant de façon cohérente les singularités coniques.

Grâce au lemme 1.3.6, il suffit de prouver que (R, h) est quasi-isométrique à (R, d). Remarquons que $\mathcal{D}$ est uniforme par rapport à chacune de ces deux métriques. En appliquant le lemme 2.2.3 à chacune des deux métriques, on se ramène à comparer sur $\mathcal{D}^{(1)}$ les métriques intrinsèques induites par respectivement h et d, lesquelles sont quasi-isométriques par construction. □

Lemme 2.2.5. *Soit X une surface et $\mathcal{D}$ une décomposition cellulaire à géométrie bornée de X. Il existe une subdivision uniforme de $\mathcal{D}$ qui est une pseudo-triangulation non-dégénérée à géométrie bornée.*

Preuve. Tout d'abord on se débarrasse des 1-gones et des 2-gones de la façon suivante : on ajoute une 0-cellule dans le bord de chaque 1-gone (de sorte que les 1-gones deviennent des 2-gones), puis on transforme chaque 2-gone en 3-gone en ajoutant une 0-cellule dans son bord. La décomposition cellulaire obtenue est une subdivision uniforme de $\mathcal{D}$ et toutes ses 2-cellules sont des n-gones avec $3 \leq n \leq C$ pour une certaine constante C.

Ensuite on subdivise chaque n-gone c en 3-gones en choisissant une 0-cellule $v \in \partial c$ et en ajoutant une 1-cellule entre v et chaque 0-cellule dans ∂c différente de v et non adjacente à v. Chaque n-gone est ainsi divisé en $(n-2)$ 3-gones, donc la pseudo-triangulation obtenue est encore une subdivision uniforme de $\mathcal{D}$.

La dernière étape permet de passer à une pseudo-triangulation non-dégénérée. On commence par ajouter une 0-cellule au milieu de chaque boucle (1-cellule dégénérée). Soit A un 3-gone dégénéré. Si A est du type (1) ou (2), on relie par une 1-cellule la nouvelle 0-cellule à la 0-cellule opposée à la boucle. Si A est du type (3), on relie les trois nouvelles 0-cellules deux par deux. Si A est du type (4), on fait la même chose que pour le type (3) ; l'une des nouvelles 0-cellules est double, donc l'une des trois nouvelles 1-cellules est en fait une boucle l. Cette boucle appartient à deux nouveaux 3-gones dégénérés A_1, A_2 de type (1). Subdivisons l en ajoutant une 0-cellule x au milieu et relions x aux 0-cellules opposées à l dans A_1 et A_2. On a réussi à subdiviser A en six 3-gones non-dégénérés en rajoutant quatre 0-cellules et six 1-cellules. En effectuant cette opération pour chaque 2-cellule dégénérée, on obtient une pseudo-triangulation non-dégénérée qui est une subdivision uniforme de $\mathcal{D}$. □

Remarque. Quitte à subdiviser un peu plus, on pourrait même obtenir une vraie triangulation, mais cela ne sera pas utile dans la suite.

En combinant les lemmes 2.2.4 et 2.2.5, on obtient le résultat suivant, qui sera utilisé au chapitre 5.

Proposition 2.2.6. *Soit X une surface. Soit $\mathcal{D}$ une décomposition cellulaire à géométrie bornée de X. Alors X admet une métrique riemannienne complète quasi-homogène h telle que l'identité entre $(X, d_{\mathcal{D}})$ et (X, h) est une quasi-isométrie.*

2.3 Résultats sur les pseudo-triangulations

Théorème 2.3.1. *Soit (R, h) une surface riemannienne complète ouverte. Soit N un réseau dans (R, h). Il existe toujours une pseudo-triangulation $\mathcal{D}$ de R de module fini par rapport à h et dont le 0-squelette est égal à N.*

La preuve de ce théorème est technique et sera donnée dans la section 2.4. Quand le réseau N est uniforme, on s'attend à ce que la pseudo-triangulation $\mathcal{D}$ soit uniforme. La proposition suivante montre que c'est bien le cas sous certaines hypothèses topologiques ou géométriques.

Proposition 2.3.2. *Soit (R, h) une surface riemannienne complète ouverte. Supposons que R est planaire à l'infini ou que la courbure de h est minorée. Soit $\mathcal{D}$ une pseudo-triangulation quelconque de R. Si $\mathcal{D}$ est de module fini et si $\mathcal{D}^{(0)}$ est un réseau uniforme, alors $\mathcal{D}$ est uniformément localement finie, donc uniforme.*

Contre-exemple. Choisissons une infinité de disques D_i deux à deux disjoints de rayon 1 dans $\mathbf{E}^2$. Soit L_m une surface riemannienne complète obtenue en remplaçant chaque D_i par une surface de genre i et de diamètre au plus 10. Alors aucune pseudo-triangulation de X ne peut être uniformément localement finie. Cela illustre la nécessité des hypothèses de la proposition 2.3.2. Topologiquement, L_m est un « monstre du Loch Ness » infini, la surface non planaire à l'infini la plus simple.

Passons à la preuve de la proposition 2.3.2. Voici pour commencer un lemme général qui nous servira aussi dans la section 2.4.

Lemme 2.3.3. *Soit (F, h) une surface riemannienne complète (éventuellement à bord). Notons d la distance associée. Soient C un réel positif et $Y \subset F$ une partie fermée C-quasidense. Soit $\xi \subset F$ une courbe plongée qui évite Y et sépare F en deux sous-surfaces fermées F_1, F_2. Alors on a les deux propriétés suivantes :*

i. Pour $i \in \{1, 2\}$ fixé, si $F_i \cap Y = \emptyset$ alors ξ est C-quasidense dans F_i.

ii. Si $F_1 \cap Y \neq \emptyset$ et $F_2 \cap Y \neq \emptyset$, il existe $x_1 \in F_1 \cap Y$ et $x_2 \in F_2 \cap Y$ tels que $d(x_1, x_2) \leq 2C$.

Preuve. L'assertion (i) est une conséquence immédiate de la quasi-densité de Y. Pour démontrer l'assertion (ii), remarquons que la compacité de ξ entraîne que la distance entre $F_1 \cap Y$ et $F_2 \cap Y$ est réalisée par un couple $(x_1, x_2) \subset (F_1 \cap Y) \times (F_2 \cap Y)$. Si l'on avait $d(x_1, x_2) > 2C$, le milieu d'une géodésique minimisante reliant x_1 et x_2 serait à distance $> C$ de F, ce qui contredit nos hypothèses. □

Preuve de la proposition 2.3.2. Soit N le 0-squelette de $\mathcal{D}$ et λ son module. Commençons par le cas où R est planaire à l'infini. Sans perte de généralité, on suppose que R est planaire. Il faut majorer le nombre de cellules qui peuvent rencontrer une boule métrique en fonction du rayon de cette boule. Pour les 0-cellules, l'hypothèse que N est uniformément discret donne le résultat demandé. Si l'on trouve une majoration uniforme pour les 1-cellules, on a gagné puisque toute 1-cellule rencontre au plus deux 2-cellules distinctes.

Vu qu'une 1-cellule qui rencontre une boule $B(x, r)$ est contenue dans $B(x, r + \lambda)$, on a réduit le problème à l'affirmation suivante :

Affirmation. Il existe une fonction $C : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{N}$ telle que pour tout $r \geq 0$ et pour tout $x \in R$, le nombre de 1-cellules contenues dans $B(x, r)$ est majoré par $C(r)$.

Pour démontrer l'affirmation, considérons une boule $B(x, r)$. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des 0-cellules de $\mathcal{D}$ contenues dans $B(x, r)$. Par hypothèse, le cardinal de $\mathcal{L}$ est borné indépendamment de x. Génériquement, $B(x, r)$ est une surface planaire compacte. En rajoutant chaque composante de $R - B(x, r)$ qui est un disque topologique ne contenant aucun point de N, on obtient une sous-surface Z. D'après le lemme 2.3.3, Z est contenue dans $B(x, r + C_2)$, où C_2 est une constante telle que N est C_2-quasidense.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications $\alpha : I \to Z$ vérifiant :

i. La restriction de α à $]0, 1[$ est un plongement ;
ii. $\mathrm{lg}(\alpha) \leq \lambda$;
iii. $\alpha(I) \cap N = \alpha(\{0, 1\})$.

Deux éléments de $\mathcal{C}$ sont dits *proprement homotopes* s'ils sont homotopes à travers des éléments de $\mathcal{C}$. Il y a au plus une 1-cellule de $\mathcal{D}$ dans chaque classe d'homotopie propre (sinon $\mathcal{D}$ contiendrait un 2-gone). On est donc ramené à majorer le nombre de classes d'homotopie propres d'éléments de $\mathcal{C}$.

Pour cela, il suffit de majorer le nombre de composantes de bord de la surface planaire Z. Le lemme 2.3.3 nous dit que chaque composante de $R - Z$ contient un point $y \in N$ tel que $d(x, y) \leq r + 2C_2$. Puisque N est uniforme, le nombre de tels points y est uniformément majoré. Cela démontre l'affirmation, et donc la proposition 2.3.2 dans le cas où R est planaire à l'infini.

Pour traiter le cas où (R, h) est à courbure minorée, on observe que l'argument ci-dessus marche à condition de donner en outre une majoration uniforme du genre de la surface Z. Une telle majoration est donnée par la formule de Gauss-Bonnet à partir de la minoration de la courbure et de la majoration du diamètre de Z. □

Avant de prouver le théorème 2.3.1, montrons comment en déduire les résultats annoncés dans l'introduction de ce chapitre.

Preuve des théorèmes 2.1.1 et 2.1.3.
Commençons par prouver le théorème 2.1.1. Soit donc R une surface ouverte planaire à l'infini et h une métrique riemannienne complète uniforme à grande échelle sur R. Par définition de l'uniformité à grande échelle, (R, h) admet un réseau uniforme N.

Le théorème 2.3.1 implique que (R, h) admet une pseudo-triangulation $\mathcal{D}$ de module fini dont le 0-squelette est N. D'après la proposition 2.3.2, $\mathcal{D}$ est uniforme. En particulier, d'après le lemme 2.2.2, $\mathcal{D}$ est à géométrie bornée.

Le lemme 2.2.3 dit que (R, h) est quasi-isométrique au 1-squelette de $\mathcal{D}$, lequel est lui-même quasi-isométrique à $(R, d_{\mathcal{D}})$ d'après le lemme 1.3.5. La proposition 2.2.6 permet de conclure que h est quasi-isométrique à une métrique riemannienne complète quasi-homogène.

Pour prouver le théorème 2.1.3, il suffit de se rappeler que la borne inférieure sur la courbure implique l'existence d'un réseau uniforme. Le reste de la preuve est inchangé. □

2.4 Existence de la pseudo-triangulation

2.4.1 La surface trouée $R(N)$

Dans toute cette section, (R, h) est une surface riemannienne ouverte complète munie d'un (C_1, C_2)-réseau N. On cherche à construire un graphe plongé dans R, dont l'ensemble des sommets est N, et qui sera le 1-squelette de la pseudo-triangulation.

Pour des raisons techniques, on commence par remplacer chaque point $x \in N$ par un petit disque topologique et on travaille dans le complémentaire de la réunion des intérieurs de ces disques. Pour assurer l'existence de géodésiques dans la surface trouée, il faut perturber la métrique pour la rendre strictement convexe.

Précisément, choisissons pour chaque $x \in N$ un triplet de nombres réels $(r_1(x), r_2(x), r_3(x))$ tel que $0 < r_1(x) < r_2(x) < r_3(x) < \min(C_1/2, \mathrm{inj}(x))$, où $\mathrm{inj}(x)$ est le rayon d'injectivité de h en x. Posons $D_x = B(x, r_2(x))$, $C_x = \partial D_x$ et $A_x = B(x, r_3(x)) - \mathrm{Int}\, B(x, r_1(x))$. Perturbons h en la multipliant par une fonction plateau à support dans A_x de sorte que C_x est strictement convexe dans $R - \operatorname{Int} D_x$ et appelons h_N la métrique perturbée.

Posons $R(N) = R - \bigcup_{x\in N} \operatorname{Int}(D_x)$. Le bord de $R(N)$ est la réunion disjointe des cercles C_x, donc $R(N)$ a un bord strictement convexe pour h_N. On peut choisir r_2 suffisamment petit pour qu'il y ait une borne supérieure uniforme C_3 sur les h_N-longueurs des cercles C_x.

Notons d la fonction distance sur $R(N)$ induite par h_N. Il existe des constantes $C_1', C_2' \geq 0$ telles que $d(C_x, C_y) \geq C_1'$ pour tous $x \neq y$ et $\partial R(N)$ est C_2'-quasidense dans $R(N)$. À partir de maintenant, nous allons travailler dans l'espace métrique géodésique $(R(N), d)$.

2.4.2 Première étape

Définition. Un *graphe géodésique* est une collection E d'arcs h-minimaux dans $(R(N), h_N)$ appelés *arêtes*. On dit que E est *plongé* si chaque arête est plongée et deux arêtes distinctes sont disjointes. On dit qu'il est *réduit* si deux arêtes distinctes ne sont jamais homotopes. Le *module* de E, noté $|E|$, est la borne supérieure des longueurs de ses arêtes. Les *E-composantes* sont les composantes connexes de $R(N) - \bigcup E$.

Comme pour les décompositions cellulaires, il y a une notion de périmètre combinatoire d'une E-composante (qui peut être infini). On appelle n-gone une E-composante 1-connexe dont le périmètre combinatoire vaut n.

Si E, E' sont deux graphes géodésiques, on dit que E' est une *extension* de E si $E \subset E'$.

Proposition 2.4.1. *Posons $C_4 = 2C_2'$. Il existe un graphe géodésique plongé réduit E_0 dans $R(N)$ tel que $|E_0| \leq C_4$ et chaque E_0-composante est 1-connexe.*

Preuve. L'idée de la preuve est très simple : soit $\mathcal{L}$ une liste de toutes les classes d'homotopie libre non triviales dans $R(N)$ qui admettent un représentant plongé. On dit qu'un arc a *tue* une classe $[\xi] \in \mathcal{L}$ si a n'est pas homotopiquement disjoint de ξ.

On pourrait croire qu'en prenant les éléments de $\mathcal{L}$ dans un ordre arbitraire et en les tuant un par un en ajoutant des arcs h-minimaux, on obtient un graphe géodésique plongé de module fini. Cependant il semble difficile de prouver que le graphe obtenu est bien plongé ; aussi notre approche est-elle un peu différente.

On dit qu'un arc essentiel a *annihile* $[\xi]$ si son nombre d'intersection (algébrique) modulo 2 avec ξ est 1 (cette propriété est indépendante du choix de ξ dans sa classe d'homotopie). Si a annihile $[\xi]$, alors a tue $[\xi]$. Soit $\mathcal{L}' = [\xi_1], [\xi_2] \ldots$ une liste de tous les éléments de $\mathcal{L}$ qui peuvent être annihilés.

Nous allons construire un graphe géodésique plongé réduit E_0 tel que chaque élément de $\mathcal{L}'$ est annihilé par une arête de E_0. Nous montrerons ensuite qu'en fait tous les éléments de $\mathcal{L}$ sont tués.

Le graphe E_0 est construit par récurrence. Considérons l'ensemble de tous les arcs qui annihilent $[\xi_1]$. Par un argument de compacité standard basé sur le théorème d'Ascoli et le fait que tous ces arcs rencontrent ξ_1, cet ensemble contient un arc a_1 de longueur minimale. Il est clair que a_1 est h-minimal.

Supprimons de la liste $\mathcal{L}'$ toutes les classes qui sont annihilées par a_1. Prenons la première classe $[\xi_{n_2}]$ sur la liste qui n'est *pas* annihilée par a_1. Choisissons un arc a_2 de longueur minimale parmi tous les arcs qui annihilent $[\xi_{n_2}]$ et continuons la construction par récurrence. On obtient une suite $\{\mathsf{a}_n\}$ d'arcs h-minimaux, ce qui définit un graphe géodésique E_0. Remarquons que si deux arcs a_n et a_m sont homotopes, ils annihilent les mêmes classes. Par conséquent, E_0 est nécessairement réduit.

Supposons qu'il existe une classe $[\xi] \in \mathcal{L}$ qui n'est tuée par aucune arête de E_0. Alors ξ sépare $R(N)$, car sinon il existerait un lacet rencontrant ξ en exactement un point, à partir duquel on construit facilement un arc qui annihile ξ. Soient U, V les composantes de $R(N)$ découpé le long de ξ. Si U et V contenaient chacun une composante de $R(N)$, un arc reliant ces composantes annihilerait $[\xi]$. On peut donc supposer par exemple que U ne rencontre pas $\partial R(N)$. En particulier, U est compact d'après le lemme 2.3.3.

Comme U ne peut pas être un disque, U a au moins une anse (orientable ou non-orientable). Soit $\xi' \subset U$ une courbe non-séparante. Alors $[\xi']$ apparait sur la liste $\mathcal{L}'$, donc il existe une arête a de E_0 qui annihile $[\xi']$. Par hypothèse, a ne tue pas ξ, ce qui entraîne que V contient un arc homotope à a. Cela contredit le fait que a tue ξ'.

Pour terminer la preuve de la proposition 2.4.1, on doit encore montrer que les arêtes de E_0 sont plongées, deux à deux disjointes et de longueur au plus C_4.

S'il existe n tel que a_n n'est pas plongé, on écrit $\mathsf{a}_n = \eta_1 \cup_x \eta_2 \cup_x \eta_3$ où x est un point multiple arbitraire. Par construction, il existe une classe $[\xi_p]$ telle que a_n est de longueur minimale parmi les arcs qui annihilent $[\xi_p]$. Choisissons le représentant ξ_p en position générale par rapport à a_n. Par hypothèse, $\#(\xi_p \cap \mathsf{a}_n)$ est impair. Si $\#(\xi_p \cap \eta_2)$ était pair, $\#(\xi_p \cap (\eta_1 \cup \eta_3))$ serait impair, donc en lissant $\eta_1 \cup \eta_3$ on obtiendrait un arc plus court que a_n et tuant $[\xi_p]$. C'est une contradiction, donc en fait $\#(\xi_p \cap \eta_2)$ est impair. Par symétrie, on peut supposer que $\lg(\eta_1) \leq \lg(\eta_3)$. En lissant $\eta_1 \cup \eta_2 \cup \eta_1^{-1}$, on obtient un arc plus court que a_n et qui annihile $[\xi_p]$, d'où à nouveau une contradiction.

Si deux arêtes $\mathsf{a}_n, \mathsf{a}_m$ se coupent en un point w, l'intersection doit être transverse, puisque ce sont des géodésiques (au sens riemannien). Écrivons

$\mathsf{a}_n = \eta_1 \cup_w \eta_2$ et $\mathsf{a}_m = \eta_3 \cup_w \eta_4$. Quitte à changer les indices, on peut supposer que η_3 n'est pas plus long que les autres η_i, d'où en particulier $\lg(\eta_3) \leq \lg(\eta_1)$ et $\lg(\eta_3) \leq \lg(\eta_2)$. Soit $[\xi_p]$ une classe telle que a_n est de longueur minimale parmi les arcs qui annihilent $[\xi_p]$. Supposons par position générale que ξ_p est self-transverse et évite w. Alors en comptant les points d'intersection de ξ_p avec η_1 et η_2, on voit qu'exactement un des arcs $\eta_3 \cup \eta_1$ et $\eta_3 \cup \eta_2$ annihile $[\xi_p]$. On obtient donc une contradiction en lissant l'arc adéquat. Nous avons démontré que le graphe E_0 est plongé. Remarquons que le même argument prouve le lemme suivant.

Lemme 2.4.2. *Soit a_n une arête de E_0. Alors l'inégalité*

$$\min(\lg(\eta_1), \lg(\eta_2)) \leq \min_{z \in N} d(C_z, w)$$

est vraie pour toute décomposition $\mathsf{a}_n = \eta_1 \cup_w \eta_2$.

Remarque. En particulier, pour tout $w \in \mathsf{a}_n$, un des deux sous-arcs η_1, η_2 minimise la distance entre ses extrémités.

Il reste à prouver que $|E_0| \leq C_4$. Soit a_n une arête de E_0. Écrivons $\mathsf{a}_n = \eta_1 \cup_w \eta_2$, où w est le milieu de a_n. Comme $\partial R(N)$ est C_2'-quasidense, w doit être C_2'-proche d'une composante C_z de $\partial R(N)$. Par conséquent, le lemme ci-dessus implique que w est C_2'-proche d'une des extrémités de a_n. Comme w est le milieu de a_n, on en déduit $\lg(\mathsf{a}_n) \leq 2C_2' = C_4$. Cela termine la preuve de la proposition 2.4.1. □

2.4.3 Deuxième étape

Le but de cette étape est d'ajouter suffisamment d'arêtes au graphe E_0 pour que les composantes du complémentaire soient topologiquement des disques ouverts et aient un diamètre uniformément borné. Comme le fait d'ajouter des arêtes dans une composante 1-connexe la découpe en composantes 1-connexes, nous allons nous restreindre dans la suite aux graphes E tels que toutes les E-composantes sont 1-connexes. Cette restriction n'est pas essentielle, mais simplifie certains énoncés.

Soit E un tel graphe géodésique. Soit X une E-composante. Il est possible que l'adhérence $\bar{X}$ de cette composante ne soit pas 1-connexe, car elle peut contenir des lacets à un côté ou des lacets à deux côtés dont chaque côté appartient à $\bar{X}$. Pour éviter ce problème, on considère l'image réciproque de X dans le revêtement universel de $R(N)$: comme X est simplement connexe, cette image réciproque est la réunion d'une infinité d'exemplaires de X. Soit $\tilde{X}$ une composante de cette image réciproque et $\hat{X}$ l'adhérence de $\tilde{X}$.

Si $\hat{X}$ est compacte, $\partial\hat{X}$ est topologiquement un cercle, consistant en une réunion d'arcs $\mathsf{a}_0 \cup \mathsf{c}_0 \cup \mathsf{a}_1 \cup \mathsf{c}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{a}_n \cup \mathsf{c}_n$ recollés à leurs extrémités, où les arcs

a_i se projettent sur des arêtes de E et les arcs c_i sur des sous-arcs de $\partial R(N)$. On appelle les a_i *arcs-frontières* et les c_i *arcs de bord*. Topologiquement, $\hat{X}$ est un disque. Si $\hat{X}$ est non compacte, c'est un disque privé d'un nombre fini ou infini d'arcs du bord. Chaque composante de $\partial\hat{X}$ est dans ce cas homéomorphe à $\mathbf{R}$ et possède une décomposition similaire $\ldots \cup \mathsf{a}_{-1} \cup \mathsf{c}_{-1} \cup \mathsf{a}_0 \cup \mathsf{c}_0 \cup \mathsf{a}_1 \cup \ldots$ en arcs-frontières et arcs de bord.

Dans toute la suite, on munit $\hat{X}$ de la métrique intrinsèque venant du relevé de h_N.

Lemme 2.4.3. *Soit E un graphe géodésique plongé réduit et X une E-composante 1-connexe. Alors $\partial\hat{X}$ est C_2'-quasidense dans $\hat{X}$.*

Preuve. Tout point $x \in \operatorname{Int}\hat{X}$ se projette sur un point $y \in X$. Il existe un chemin $\xi \subset R(N)$ de longueur au plus C_2' reliant y à $\partial R(N)$. Soit $\tilde{\xi}$ le relevé de ξ partant de x. Si ξ coupe une arête $\mathsf{a} \in E$, $\tilde{\xi}$ coupe un relevé de cette arête, qui est inclus dans $\partial\hat{X}$, donc $d(x, \partial\hat{X}) \leq C_2'$. Sinon, ξ reste dans X et la même conclusion est vraie. □

Lemme 2.4.4. *Soit E un graphe géodésique plongé réduit tel que toutes les E-composantes sont 1-connexes. Soit a un arc proprement plongé dans $R(N)$ qui ne rencontre aucune arête de E. Soit X la E-composante qui contient a. Supposons que a n'est pas parallèle rel $\partial R(N)$ dans $\bar{X}$ à un arc dans $\partial R(N)$. Alors :*

- *i. L'arc a est essentiel.*
- *ii. Soit $\tilde{\mathsf{a}}$ un arc h-minimal homotope à a. Si a n'est pas parallèle rel $\partial R(N)$ dans $\bar{X}$ à une arête de E, $\tilde{\mathsf{a}}$ est contenu dans X et en l'ajoutant à E, on obtient un graphe géodésique plongé réduit.*

Preuve. Pour démontrer l'assertion (i), observons que comme a n'est pas parallèle rel $\partial R(N)$ dans $\bar{X}$ à un arc dans $\partial R(N)$, a n'est pas parallèle à un arc dans $\partial R(N)$, car si c'était le cas, la région produit ne pourrait pas contenir d'arête de E (puisque chaque arête de E est essentielle).

Prouvons maintenant l'assertion (ii) : d'après la proposition 2.2.1, $\tilde{\mathsf{a}}$ est plongé et ne coupe aucune arête de E. Si $\tilde{\mathsf{a}}$ n'était pas contenu dans $\bar{X}$, il serait disjoint de a, et lui serait donc parallèle. En examinant la région produit, on voit comme au paragraphe précédent que a serait homotope à une arête de E, contredisant nos hypothèses. Par conséquent, $\tilde{\mathsf{a}}$ est bien contenu dans $\bar{X}$. Encore par le même argument, il ne peut être homotope à une arête de E. Cela suffit pour conclure qu'en ajoutant $\tilde{\mathsf{a}}$ à E, on obtient un graphe géodésique plongé réduit. □

Proposition 2.4.5. *Il existe des constantes $C_5, C_6 \geq 0$ et un graphe géodésique plongé réduit E' tel que $|E'| \leq C_5$ et pour chaque E'-composante X, $\hat{X}$ est homéomorphe à un disque et son diamètre intrinsèque vaut au plus C_6.*

Preuve. Commençons par une esquisse de la preuve : le point de départ est le graphe E_0 donné par la proposition 2.4.1. On construit par récurrence transfinie une famille croissante de graphes E_λ. À chaque étape, on choisit une composante X et on décompose $\partial\hat{X}$ en arcs-frontières a_n et arcs de bord c_n comme expliqué ci-dessus. On trouve deux arcs de bord $\mathsf{c}_{n_1}, \mathsf{c}_{n_2}$ tels que $n_1 - n_2 > 1$ et il existe un arc γ de longueur contrôlée les reliant dans $\tilde{X}$. Cependant, la borne sur $\lg(\gamma)$ dépend *a priori* des longueurs des arcs-frontières voisins. Comme on veut itérer la construction, il faut distinguer soigneusement les arêtes de E_0 des nouvelles arêtes. La stratégie consiste à choisir un arc-frontière, disons a_0, que nous appelerons « l'arc rouge », et à trouver une collection d'*arcs de coupure* $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ suffisamment éloignés de a_0 et qui découpent $\hat{X}$ en $p+1$ composantes dont l'une a un diamètre contrôlé et de façon à ce que les autres aient seulement un arc de coupure dans leur bord. Quand à une étape ultérieure de la récurrence on cherche à découper l'une de ces composantes, on choisit comme arc rouge cet arc de coupure.

Posons $C_5 = 2C_2' + 2C_4$ et $C_6 = 3C_5 + 2C_3 + C_2' + 1$. Tous les graphes E_λ que nous allons construire auront les propriétés suivantes : si $\mu < \lambda$, E_λ est une extension de E_μ ; le module de E_λ vaut au plus C_5 et pour toute E_λ-composante X, soit le diamètre intrinsèque de X est majoré par C_6, soit X admet au plus un arc-frontière qui n'est pas déjà une arête de E_0 (l'arc rouge).

Il est clair que E_0 a toutes ces propriétés. Si λ est un ordinal limite, on pose $E_\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} E_\mu$. Il nous reste à expliquer comment on construit $E_{\lambda+1}$ à partir de E_λ.

Prenons une E_λ-composante X qui soit n'est pas compacte, soit a un diamètre intrinsèque plus grand que C_6. Par hypothèse de récurrence, il y a au plus un arc rouge, et s'il y en a un, on numérote $\partial\hat{X}$ de façon à ce que ce soit a_0. Notons U l'arc $\mathsf{c}_{-1} \cup \mathsf{a}_0 \cup \mathsf{c}_0$ et x, y ses extrémités. Considérons le voisinage métrique $Y = N(U, C_5) \subset \hat{X}$ pour la métrique intrinsèque sur $\hat{X}$. Par hypothèse, $Y \neq \hat{X}$. Soit F un petit voisinage de Y dans $\hat{X}$ inclus dans $N(U, C_5+1)$ et qui est une surface planaire compacte connexe. Soit γ la composante de ∂F qui rencontre $\partial\hat{X}$. Il est clair que γ contient U. De plus, γ ne remplit pas $\partial\hat{X}$, car alors on aurait $\mathrm{diam}(X) \leq C_5 + C_2' + 1$ d'après le lemme 2.4.3.

On peut décomposer $(\gamma - U) \cup \{x, y\}$ en $\gamma_1 \cup \xi_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \xi_{p-1} \cup \gamma_p$, où $\gamma_i \subset \partial\hat{X}$ et $\xi_i \subset \hat{X} - N(U, C_5)$. Or d'après le lemme 2.4.3, tout point de la réunion des ξ_i est C_2'-proche de $\partial\hat{X}$. Soient $Z_1, \dots, Z_q$ les composantes de l'adhérence de $\partial\hat{X} \cap N(\gamma, C_2') - U$. Chaque γ_i est contenu dans un certain $Z_{j(i)}$.

Considérons le graphe (abstrait) $\mathcal{G}$ dont les sommets sont les Z_j et où il y a une arête entre Z_j et Z_k si et seulement si $N(Z_j, C_2') \cap N(Z_k, C_2')$ n'est pas inclus dans $N(U, C_5)$. On a le lemme suivant :

Lemme 2.4.6. *Pour tout i, $Z_{j(i)}$ et $Z_{j(i+1)}$ sont dans la même composante connexe de $\mathcal{G}$.*

Preuve. La preuve est la même que celle du lemme 1.3.1 en utilisant le fait que ξ_i est connexe et disjoint de $N(U, C_5)$. □

Appelons W la réunion de tous les a_n et c_n qui ne sont pas contenus dans U et rencontrent la réunion des $N(Z_j, C_2')$. Notons $W_1, \ldots, W_t$ les composantes de W. Chaque Z_j est contenu dans un certain $W_{k(j)}$.

Lemme 2.4.7. *Étant donnés des indices j, j' tels qu'il y a une arête de $\mathcal{G}$ entre Z_j et $Z_{j'}$, soit on a $k(j) = k(j')$, soit il existe des arcs de bord $\mathsf{c}_n \subset W_{k(j)}$ et $\mathsf{c}_m \subset W_{k(j')}$ tels que $|n - m| \geq 2$ et un arc h-minimal de longueur $\leq C_5$ reliant c_n à c_m dans $\hat{X}$.*

Preuve. Par hypothèse, il existe un point $z \in \hat{X}$ tel que $d(z, Z_j) \leq C_2'$, $d(z, Z_{j'}) \leq C_2'$ et $d(z, U) > C_5$. Supposons que $k(j) \neq k(j')$. Alors il existe un arc b de longueur $\leq 2C_2'$ reliant Z_j à $Z_{j'}$. Les extrémités de b se trouvent soit sur des arcs-frontières, soit sur des arcs de bord. En étendant b le long du bord si nécessaire, on obtient un arc b' de longueur au plus $2C_2' + 2C_4 = C_5$ reliant un certain $\mathsf{c}_n \subset W_{k(j)}$ à un certain $\mathsf{c}_m \subset W_{k(j')}$ avec $n \neq m$. Si $|n - m| < 2$, l'arc recherché est a_n. Sinon il suffit d'appliquer le lemme 2.4.4. □

En combinant les deux lemmes précédents, on arrive à la conclusion suivante : quitte à réindexer les W_k, il existe une suite finie $\mathsf{b}_1', \ldots, \mathsf{b}_r'$ avec les propriétés suivantes :

i. Chaque b_i' est un arc h-minimal de longueur majorée par C_5 ;
ii. W_1 contient x, W_r contient y et pour tout i, b_i' relie des arcs de bord $\mathsf{c}_{n(i)} \subset W_i$ et $\mathsf{c}_{m(i)} \subset W_{i+1}$.

Il reste l'éventualité que certains b_i' se coupent. Ce problème est résolu par le lemme suivant.

Lemme 2.4.8. *Quitte à réindexer à nouveau les W_k, il existe une suite $\mathsf{b}_1'', \ldots, \mathsf{b}_s''$ satisfaisant les deux propriétés ci-dessus, et telle que de plus les b_i'' soient deux à deux disjoints.*

Preuve. Soit $\mathsf{b}_1'', \ldots, \mathsf{b}_s''$ une suite finie satisfaisant les deux propriétés ci-dessus. On définit une notion de complexité en considérant le couple (s, η), ordonné lexicographiquement, où s est le cardinal de la suite et η la somme des longueurs de ses termes.

Soit $\mathsf{b}''_1, \dots, \mathsf{b}''_s$ une suite de complexité minimale. Nous allons montrer par l'absurde que les b''_i sont deux à deux disjoints.

Supposons donc qu'il existe $i < j$ tels que $\mathsf{b}''_i \cap \mathsf{b}''_j \neq \emptyset$. Alors d'après la proposition 2.2.1(iii), b''_i et b''_j se coupent en un seul point w, et de façon transverse. Soient $\mathsf{d}_1, \mathsf{d}_2, \mathsf{d}_3, \mathsf{d}_4$ les arcs reliant w à respectivement $\mathsf{c}_{n(i)}$, $\mathsf{c}_{m(i)}$, $\mathsf{c}_{n(j)}$ et $\mathsf{c}_{m(j)}$. Si $j - i > 1$, on peut trouver une suite de cardinal $< s$ en remplaçant b''_j par un arc h-minimal homotope à $\mathsf{d}_1 \cup \mathsf{d}_4$ (reliant $\mathsf{c}_{(n_i)}$ à $\mathsf{c}_{(m_j)}$) et en supprimant chaque b''_k pour $i < k < j$. On en déduit que $j = i + 1$ et $q(i) = p(j)$.

Si $\lg(\mathsf{d}_2) \geq \lg(\mathsf{d}_3)$, remplaçons b''_i par un arc h-minimal homotope à $\mathsf{d}_1 \cup \mathsf{d}_3$. Sinon, remplaçons b''_j par un arc h-minimal homotope à $\mathsf{d}_2 \cup \mathsf{d}_4$. Dans chaque cas, la suite d'arcs obtenue a le même cardinal et un η plus petit, contredisant l'hypothèse de minimalité. □

Comme $\operatorname{diam} X > C_6$, il y a au moins un arc de coupure parmi les b''_i. En projetant ces arcs de coupure dans X, on obtient des arcs h-minimaux, et d'après le lemme 2.4.4, le graphe géodésique $E_{\lambda+1}$ obtenu en rajoutant ces arcs à E_λ est plongé et réduit. Il a donc toutes les propriétés requises.

La construction doit s'arrêter pour un certain ordinal dénombrable λ_0. Le graphe E_{λ_0} a la propriété supplémentaire que toutes les E_{λ_0}-composantes ont un diamètre intrinsèque majoré par C_6. On peut donc poser $E' = E_{\lambda_0}$ et la preuve de la proposition 2.4.5 est terminée. □

Remarque. On peut représenter cette construction par un arbre T avec un sommet distingué, dont les arêtes sont étiquetées par des ordinaux, de façon à ce que la propriété suivante soit satisfaite : quels que soient les sommets x, y de T, la suite finie d'ordinaux obtenue en lisant les étiquettes sur la géodésique reliant x à y est soit strictement croissante, soit strictement décroissante, soit d'abord strictement décroissante, puis strictement croissante, le minimum étant atteint exactement deux fois. Cet arbre est le 1-nerf du recouvrement de $\hat{X}$ par les adhérences des E'-composantes. (cf. la remarque suivant le lemme 1.3.1).

On peut en déduire que $\hat{X}$ muni de la métrique intrinsèque associée à d est quasi-isométrique à T. En effet, soient x, y des points de $\hat{X} - \bigcup E'$, et γ une géodésique reliant x et y. Soit n le nombre de points d'intersection de γ avec E'. L'argument d'échange habituel montre que γ minimise ce nombre parmi les arcs reliant x et y, ce qui signifie que n est la distance dans T des points associés à x, y. Comme toutes les E'-composantes ont un diamètre intrinsèque majoré par C_6, on a $\lg(\gamma) \leq C_6 n$. Pour avoir une inégalité dans l'autre sens, on remarque que la distance entre deux arcs de E' est minorée par une constante strictement positive, sauf si les ordinaux associés sont identiques. D'après le paragraphe précédent, cela se produit au plus une fois sur le chemin entre x et y.

Cette remarque est inutile pour la preuve du théorème 2.3.1, mais sera cruciale dans la section 3.4 du chapitre 3.

2.4.4 Fin de la preuve

Proposition 2.4.9. *Il existe un graphe géodésique plongé réduit E'' tel que $|E''| \leq C_6$ et toutes les E''-composantes sont des 3-gones.*

Preuve. Le graphe E' donné par la proposition 2.4.5 est réduit, ce qui implique qu'aucune E'-composante n'est un 1-gone ou un 2-gone.

Soit X une E_2-composante de périmètre combinatoire strictement supérieur à 3. On écrit comme précédemment $\partial\hat{X} = \mathsf{a}_0 \cup \mathsf{c}_0 \cup \mathsf{a}_1 \cup \mathsf{c}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{a}_{n-1} \cup \mathsf{c}_{n-1}$. Choisissons une suite finie d'arcs deux à deux disjoints $\mathsf{b}_2, \ldots, \mathsf{b}_{n-2}$ telle que pour tout i, b_i relie c_0 à c_i. Projetons ces arcs dans X et choisissons un arc h-minimal $\tilde{\mathsf{b}}_i$ dans la classe d'homotopie du projeté pour chaque i. D'après la proposition 2.2.1, les arcs $\tilde{\mathsf{b}}_i$ sont plongés et deux à deux disjoints. Par ailleurs, leurs diamètres sont majorés par le diamètre intrinsèque de X, donc par C_6. Les $\tilde{\mathsf{b}}_i$ découpent X en 3-gones. En effectuant la même opération pour chaque E_2-composante, on obtient un graphe E'' vérifiant les propriétés demandées. □

Pour obtenir une pseudo-triangulation de R, il suffit de relier chaque extrémité de chaque arête de E'' au centre du D_x correspondant. Le module de cette pseudo-triangulation est fini, en fait majoré par $C_6 + 2C_1$. Ceci achève la démonstration du théorème 2.3.1.

2.5 Conclusion

En rassemblant divers résultats de ce chapitre, on peut donner une réponse assez complète à la question de l'équivalence à quasi-isométrie près des différentes notions de géométrie bornée pour les surfaces.

Soit (R, h) une surface riemannienne ouverte complète. On considère les propriétés suivantes :

(R) R admet une métrique riemannienne complète quasi-homogène quasi-isométrique à h.

(C) R admet une métrique riemannienne complète à courbure minorée quasi-isométrique à h.

(D) R admet une décomposition cellulaire à géométrie bornée $\mathcal{D}$ telle que $(R, d_{\mathcal{D}})$ est quasi-isométrique à h.

(T) R admet une pseudo-triangulation non-dégénérée à géométrie bornée $\mathcal{D}$ telle que $(R, d_{\mathcal{D}})$ est quasi-isométrique à h.

(U) (R, h) est uniforme à grande échelle.

Théorème 2.5.1. *Les propriétés* (R), (C), (D) *et* (T) *sont équivalentes et impliquent* (U). *Si R est planaire à l'infini,* (U) *implique les autres propriétés.*

Preuve. On a déjà vu au chapitre 1 que (R) implique (C) et que (C) implique (U). D'autre part l'implication (T) $\Longrightarrow$ (D) est triviale et la réciproque est donnée par le lemme 2.2.5. Le théorème 2.1.3 dit que (C) implique (R) et le théorème 2.1.1 que (U) implique (H) si R est planaire à l'infini.

Pour conclure, on remarque que dans la preuve du théorème 2.1.3, on passe par (T) pour montrer que (C) implique (H). On a donc en fait montré que (C) implique (T) et que (T) implique (H). □

Terminons par quelques commentaires. Le fait que (C) est équivalent à (T) permet de traduire des problèmes de quasi-isométries de surfaces depuis le cadre riemannien vers le cadre combinatoire et vice-versa. Cela nous sera très utile au prochain chapitre.

La question de savoir si (U) implique encore (H) quand R a du genre à l'infini n'est pas simple, car il y a plusieurs façons de la poser. Par exemple la surface L_m du contre-exemple suivant la proposition 2.3.2 est quasi-isométrique à $\mathbf{E}^2$, donc au « monstre du Loch Ness infini régulier » L_r défini de façon analogue, mais en remplaçant cette fois chaque disque D_i par un tore à un trou avec une métrique fixée. On voit donc que L_m et L_r sont d'une part difféomorphes, d'autre part quasi-isométriques, mais il n'existe aucun difféomorphisme qui soit en même temps une quasi-isométrie ! En fait la surface la plus simple dans cette classe de quasi-isométrie est encore $\mathbf{E}^2$, donc la question n'a peut-être aucun intérêt. (Par exemple, tout groupe à un bout est quasi-isométrique à une métrique complète quasi-homogène sur le monstre du Loch Ness infini.)

Il serait intéressant de généraliser le fait que (C) implique (R) en dimension supérieure. On peut formuler de nombreuses conditions analogues à (C) en imposant des bornes sur la courbure sectionnelle, la courbure de Ricci, le rayon d'injectivité... et il n'est pas clair du tout qu'elles soient équivalentes à quasi-isométrie près.

Chapitre 3

Groupes et surfaces

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se pose la question suivante : étant donné une surface non compacte R, quels groupes de type fini sont quasi-isométriques à une métrique riemannienne complète sur R ? La question n'est intéressante que si R a une topologie simple. Nous obtenons une réponse complète dans le cas des surfaces 1-connexes :

Théorème 3.1.1. *Soit Γ un groupe de type fini. Alors Γ est quasi-isométrique à une surface riemannienne complète 1-connexe à bord vide ou géodésique si et seulement si Γ est virtuellement le groupe fondamental d'une surface compacte (éventuellement à bord). Plus précisément, on a :*

i. Γ est quasi-isométrique à un plan riemannien complet si et seulement si Γ est un groupe de surface virtuel.

ii. Γ est quasi-isométrique à une surface riemannienne complète 1-connexe à bord géodésique non vide si et seulement si Γ est virtuellement libre.

La partie (i) de ce théorème est la caractérisation des groupes de surface virtuels qui sera utilisée au chapitre 5. B. Bowditch a obtenu une preuve totalement différente de ce résultat [7].

Les groupes qui sont virtuellement le π_1 d'une surface compacte se répartissent en cinq classes de quasi-isométrie : groupes finis, groupes virtuellement $\mathbf{Z}^2$, groupes virtuellement le π_1 d'une surface fermée hyperbolique, groupes virtuellement $\mathbf{Z}$, groupes virtuellement libres de rang ≥ 2. Chacun de ces groupes est quasi-isométrique à une surface riemannienne complète, 1-connexe sans bord ou à bord géodésique. Ceci découle du fait que deux groupes commensurables sont quasi-isométriques et du lemme 1.2.1 appliqué à l'action du groupe sur le revêtement universel de la surface muni d'une métrique invariante.

La partie difficile de la preuve du théorème 3.1.1 consiste donc à prouver qu'un groupe quasi-isométrique à une surface 1-connexe (R, h) est virtuellement un groupe de surface. D'après le chapitre 2, on peut supposer (R, h) à géométrie bornée. Le but de ce chapitre est de démontrer les deux propositions suivantes :

Proposition 3.1.2. *Soit Γ un groupe de type fini quasi-isométrique à un plan riemannien complet quasi-homogène. Alors Γ est virtuellement $\mathbf{Z}^2$ ou R est quasi-isométrique à $\mathbf{H}^2$.*

Cette proposition est originellement dûe à G. Mess [41]. La preuve que nous allons en donner à la section 3.3 est entièrement différente et plus simple.

Proposition 3.1.3. *Soit R une surface non-compacte 1-connexe à bord non vide. Soit $\mathcal{D}$ une pseudo-triangulation non-dégénérée de R. Alors tout groupe de type fini quasi-isométrique à $(R, d_{\mathcal{D}})$ est virtuellement libre.*

Cette proposition sera démontrée à la section 3.4. Pour terminer cette introduction, nous prouvons le théorème 3.1.1 en admettant les propositions 3.1.2 et 3.1.3.

On a déjà vu que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, considérons un groupe Γ quasi-isométrique à une surface riemannienne complète 1-connexe (R, h) à bord vide ou géodésique. Si R est compacte, Γ est fini, c'est-à-dire virtuellement $\pi_1(S^2)$, donc le résultat est vrai. Supposons donc R non-compacte.

Si $\partial R = \emptyset$, R est un plan. D'après le corollaire 2.1.2, on peut supposer que (R, h) est quasi-homogène. On applique alors la proposition 3.1.2. Si Γ est quasi-isométrique à $\mathbf{H}^2$, Γ est hyperbolique au sens de Gromov et son bord est homéomorphe à S^1. Le groupe Γ admet donc une action de convergence uniforme sur S^1. Le théorème des groupes de convergence [57, 17, 9] dit que Γ est virtuellement le groupe fondamental d'une surface fermée hyperbolique.

Si $\partial R \neq \emptyset$, la preuve du théorème 2.3.1 prouve que h est quasi-isométrique à une pseudo-triangulation non-dégénérée sur R. On applique alors la proposition 3.1.3 pour conclure.

Remarque. Dans le théorème 3.1.1, l'hypothèse que la métrique est à bord géodésique n'est pas essentielle. On peut se contenter de conditions beaucoup plus faibles, pourvu qu'on puisse appliquer les méthodes du chapitre 2 pour se ramener à une pseudo-triangulation non-dégénérée.

3.2 Préliminaires

3.2.1 Groupes à croissance polynomiale

Soit Γ un groupe de type fini et S une partie génératrice finie de Γ. La *fonction croissance* de Γ (relativement à S), notée V_Γ, est la fonction qui à tout entier naturel n associe le cardinal de la boule de centre l'élément neutre et de rayon n pour la métrique des mots associée à S. On dit que Γ est à croissance *superpolynomiale* si pour tout $D > 0$ il existe $C_D > 0$ tel que $V_\Gamma(n) \geq C_D n^D$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On dit que Γ est à croissance *polynomiale d'exposant* $D \in \mathbf{N}$ s'il existe $C > 0$ tel que $C^{-1}n^D \leq V_\Gamma(n) \leq Cn^D$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ces propriétés sont indépendantes du choix de la partie génératrice S et invariantes par passage à un sous-groupe d'indice fini.

Posons $\Gamma_1 = \Gamma$ et pour tout $i \geq 1$, $\Gamma_{i+1} = [\Gamma, \Gamma_i]$. On rappelle que Γ est *nilpotent* si la suite Γ_i est stationnaire. Pour les deux résultats qui suivent, une référence utile est [56].

Théorème 3.2.1 (M. Gromov [21]). *Soit Γ un groupe de type fini. Alors soit Γ est à croissance superpolynomiale, soit Γ est virtuellement nilpotent.*

Addendum 3.2.2 (H. Bass [2]). *Tout groupe nilpotent Γ est à croissance polynomiale d'exposant $D = \sum_{i=1}^{\infty} ir_i$, où r_i est le rang de Γ_i/Γ_{i+1}.*

3.2.2 Dimension isopérimétrique

On va définir la notion de dimension isopérimétrique pour les groupes et pour les variétés riemanniennes. Afin d'unifier les définitions, on utilise les notations suivantes :

Si (R, h) est une variété riemannienne et $\Omega \subset R$ un domaine borné dont le bord est suffisamment lisse, on note $|\Omega|$ son aire et $|\partial\Omega|$ son périmètre.

Si Γ est un groupe de type fini et Ω est une partie finie de Γ, on note $|\Omega|$ le cardinal de Ω et on pose

$$\partial\Omega = \{g \in \Omega \mid \exists g' \in \Gamma - \Omega,\ d_S(g, g') = 1\}.$$

Cette définition dépend du choix de S, mais pas la notion suivante :

Définition. La *dimension isopérimétrique* d'un groupe Γ (resp. d'une variété riemannienne (R, h)) est la borne supérieure de l'ensemble des $D \geq 0$ pour lesquels il existe $C_D > 0$ tel que l'inégalité

$$|\Omega|^{(D-1)/D} \leq C_D |\partial\Omega|$$

est vraie pour toute partie finie de Γ (resp. tout domaine borné à bord suffisamment lisse de R).

Lemme 3.2.3 (Cas particulier du « lemme d'Ahlfors » [25], 6.9). *Soit (R, h) une variété riemannienne complète de dimension n conformément équivalente à $\mathbf{E}^n$. Alors la dimension isopérimétrique de (R, h) est inférieure ou égale à n.*

Proposition 3.2.4. *Soient $D \geq 2$ un entier, Γ un groupe et (R, h) une variété riemannienne complète quasi-homogène quasi-isométrique à Γ. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $V_\Gamma(n) \geq Cn^D$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors la dimension isopérimétrique de (R, h) est supérieure ou égale à D.*

Preuve. D'après le théorème 1 de [10], Γ a une dimension isopérimétrique supérieure ou égale à D. Il résulte des lemmes 4.2 et 4.5 de [32] que la dimension isopérimétrique de (R, h) est égale à celle de Γ. □

3.2.3 Lemme du demi-minimum et principe de Bloch

Lemme 3.2.5 (Lemme du demi-minimum, cf. [23], p. 256). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $h : X \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction telle que $x \mapsto 1/h(x)$ est localement majorée. Soit x un point de X tel que $0 < h(x) < \frac{1}{2}$. Alors il existe un point $x' \in X$ tel que $d(x, x') \leq 2$, $h(x') \leq h(x)$ et pour tout $y \in X$, si $d(y, x') \leq \frac{1}{2}\sqrt{h(x')}$ alors $h(y) \geq \frac{1}{2}h(x')$. Un point vérifiant cette dernière propriété est appelé un* demi-minimum.

Preuve. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il n'existe aucun point x' ayant toutes ces propriétés. En particulier, x lui-même n'est pas un demi-minimum. Il existe alors $x_1 \in X$ tel que $d(x_1, x) \leq \frac{1}{2}\sqrt{h(x)}$ et $h(x_1) < \frac{1}{2}h(x)$. Le point x_1 n'étant pas non plus un demi-minimum, il existe x_2 tel que $d(x_2, x_1) \leq \frac{1}{2}\sqrt{h(x_1)}$ et $h(x_2) < \frac{1}{2}(x_1)$. On en déduit $d(x, x_2) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \leq 2$ et $h(x_2) \leq \frac{1}{4}h(x)$.

On obtient ainsi par récurrence une suite de Cauchy $\{x_n\}$ vérifiant les inégalités $d(x, x_n) \leq 2$ et $h(x_n) \leq \frac{1}{2^n}h(x)$. Comme X est complet, $\{x_n\}$ converge vers un point au voisinage duquel la fonction h prend des valeurs arbitrairement proches de zéro, ce qui est contraire aux hypothèses. □

Lemme 3.2.6 (cf. [23], p. 255). *Soient (X, g_X) et (V, g_V) des surfaces riemanniennes complètes. Supposons que X est quasi-homogène et que* $\mathrm{Isom}(V)$ *est cocompact. Soit $c : X \to V$ une application conforme. Définissons une fonction $\mu : X \to \mathbf{R}_+^*$ en posant $g_X = \mu^2 c^* g_V$. S'il existe une suite de points $x_n \in X$ telle que $\mu(x_n) \to 0$, il existe une application conforme $f : \mathbf{E}^2 \to V$.*

Preuve. Appliquons le lemme du demi-minimum à la fonction μ pour chaque x_n. On obtient une suite y_n vérifiant

$$\lim \mu(y_n) = 0$$
$$\forall y \in X \qquad d_X(y, y_n) \leq \frac{1}{2}\sqrt{\mu(y_n)} \implies \mu(y) \geq \frac{1}{2}\mu(y_n).$$

Comme X est quasi-homogène, il existe des constantes r, λ et pour tout n une carte conforme $\phi_n : B(0,r) \to X$ tels qu'on ait $\phi_n(0) = y_n$, $\|D\phi_n(0)\| = 1$ et $\sup_{a \in B(0,r)} \|D\phi_n(a)\| = 1/2\lambda$.

Posons $B_n = B(0, \lambda/\sqrt{\mu(y_n)}) \subset \mathbf{E}^2$. Alors pour tout n suffisamment grand pour qu'on ait $2\sqrt{\mu(y_n)} \leq r$, on peut définir une application $z_n : B_n \to B(0,r)$ en posant $z_n(a) = \mu(y_n)a$. On utilise ensuite la cocompacité de $\mathrm{Isom}(V)$: en postcomposant c avec des isométries de V, on obtient des applications conformes $c_n : X \to V$ telles que pour tout n, $c_n(y_n)$ appartient à un compact fixe $K \subset V$. Finalement on pose $f_n = c_n \circ \phi_n \circ z_n$.

On a besoin d'une majoration de $\sup \|Df_n\|$. On va l'obtenir en majorant indépendamment $\|Dc_n\|$, $\|D\phi_n\|$ et $\|Dz_n\|$.

D'abord on voit que $\|Dz_n(a)\| = \mu(y_n)$ et $\|D\phi_n(z_n(a))\| \leq 1/2\lambda$ pour tout $a \in B_n$. Ainsi, si $a \in B_n$, on a $\phi_n(z_n(a)) \in B(y_n, \frac{1}{2}\sqrt{\mu(y_n)})$ et la propriété de demi-minimum dit que $\mu(\phi_n(z_n(a))) \geq \frac{1}{2}\mu(y_n)$. Or c_n est la composée d'une isométrie de V avec c, cette dernière étant conforme de dilatation $1/\mu$, d'où $\|Dc_n(\phi_n(z_n(a)))\| \leq 2/\mu(y_n)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \|Df_n(a)\| &\leq \|Dc_n(\phi_n(z_n(a)))\| \cdot \|D\phi_n(z_n(a))\| \cdot \|Dz_n(a)\| \\ &\leq \frac{2}{\mu(y_n)} \cdot \frac{1}{2\lambda} \cdot \mu(y_n) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour n fixé, la suite $\{\tilde{f}_p\}_{p \geq n}$ obtenue en restreignant chaque f_p à B_n est équicontinue sur B_n et pour tout p on a $\tilde{f}_p(0) \in K$ et $\|D\tilde{f}_n(0)\| = 1$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli, qui dit que $\{\tilde{f}_p\}_{p \geq n}$ admet une sous-suite convergente. Par extraction diagonale, on construit une suite d'applications conformes $g_n : B_n \to V$ qui converge uniformément sur les compacts vers une application $g : \mathbf{E}^2 \to V$. Il est bien connu que g doit être conforme ou constante, mais la dernière possibilité est éliminée par le fait que $\|Dg(0)\| = \lim \|Dg_n(0)\| = 1$. ☐

3.2.4 Un dernier lemme utile

Lemme 3.2.7. *Soit V une variété riemannienne complète quasi-homogène. Pour tout $A > 0$ il existe $\tau(A) > 0$ tel que pour tout $x \in V$, le volume de*

$B(x, \tau(A))$ est strictement supérieur à A.

Preuve. Soit $a > 0$ une borne inférieure sur les volumes des boules de rayon 1 et $n(A) \in \mathbf{N}$ tel que $A \leq n(A)a$. Il n'y a qu'à choisir $\tau(A)$ assez grand pour que toute boule de rayon $\tau(A)$ contienne au moins $n(A)+1$ boules disjointes de rayon 1. Par exemple, $\tau(A) = 3n(A) + 1$ fait l'affaire. □

3.3 Le cas sans bord

Passons à la preuve de la proposition 3.1.2. Soit Γ un groupe et (R, h) un plan riemannien complet quasi-homogène quasi-isométrique à Γ. D'après le théorème d'uniformisation de Riemann, (R, h) est conformément équivalent soit à $\mathbf{E}^2$, soit à $\mathbf{H}^2$.

Supposons que (R, h) est conformément équivalent à $\mathbf{E}^2$. Alors d'après le lemme 3.2.3, la dimension isopérimétrique de (R, h) est inférieure ou égale à 2. Elle n'est donc pas supérieure ou égale à 3, ce qui implique (par la contraposée de la proposition 3.2.4 pour $D = 3$) qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $V_\Gamma(n) \geq Cn^3$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Le groupe Γ n'est donc pas à croissance superpolynomiale. D'après le théorème 3.2.1, Γ est virtuellement nilpotent, donc à croissance polynomiale d'un certain exposant $D \leq 2$. D'après l'addendum 3.2.2, Γ est virtuellement $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^2$ ou le groupe trivial. D'après la proposition 1.5.1, Γ a un bout. Par conséquent, Γ est virtuellement $\mathbf{Z}^2$.

Dans toute la suite, on suppose que (R, h) est conformément équivalent à $\mathbf{H}^2$ et que Γ n'est pas virtuellement $\mathbf{Z}^2$. Pour simplifier les notations, notons ds^2 la métrique hyperbolique sur $\mathbf{H}^2$ et considérons une métrique riemannienne quasi-homogène conforme $h = \mu^2 ds^2$ telle que $(\mathbf{H}^2, h)$ est quasi-isométrique à Γ. Notons d la distance hyperbolique et d_h la distance induite par h. Le but est de montrer que $(\mathbf{H}^2, d)$ et $(\mathbf{H}^2, d_h)$ sont quasi-isométriques.

On commence par appliquer le lemme 3.2.6 en posant

$$(X, g_X) = (\mathbf{H}^2, h)$$
$$(V, g_V) = (\mathbf{H}^2, ds^2)$$
$$c = \mathrm{Id}_{\mathbf{H}^2}.$$

Comme le théorème de Liouville interdit l'existence d'une application conforme $f : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{H}^2$, on en conclut que μ est minorée par une constante strictement positive. Cela donne une majoration de d en fonction de d_h. Pour avoir une inégalité dans l'autre sens, on va à nouveau utiliser le lemme du demi-minimum.

Étant donnés $x \in \mathbf{H}^2$, $\rho \geq 0$, on note $D(x,\rho)$ le disque hyperbolique de centre x et de rayon ρ, $A(x,\rho)$ l'aire de ce disque pour la métrique h, $C(x,\rho)$ son bord, $l(\rho)$ (resp. $L(x,\rho)$) son périmètre pour ds^2 (resp. pour h). (Comme ds^2 est homogène, $l(\rho)$ est indépendant de x, mais $L(x,\rho)$ peut-être pas.)

À part l'homogénéité, la seule propriété de la métrique hyperbolique dont nous aurons besoin est le fait suivant.

Fait. Il existe une constante positive R_0 telle que $\rho \leq R_0$ implique $l(\rho) \leq 20\rho$.

Étant donnés $x \in \mathbf{H}^2$ et $A \geq 0$, on note $r(x,A)$ la borne inférieure des nombres $\rho > 0$ tels que $A(x,\rho) \geq A$. Pour $A > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto r(x,A)$ vérifie l'hypothèse demandée dans le lemme du demi-minimum, à savoir que $x \mapsto 1/r(x,A)$ est localement majorée.

Lemme 3.3.1. *Fixons $A \geq 0$. Si $0 < r \leq R_0$ et $A(x,r) \leq A$, il existe $\rho \in [r/2, r]$ tel que $L(x,\rho) \leq 10\sqrt{A}$.*

Preuve. On raisonne par l'absurde. Si le lemme n'est pas vrai, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait ci-dessus prouvent que pour tout $\rho \in [r/2, r]$, on a :

$$\begin{aligned} 100A &\leq \left(\int_{C(x,\rho)} \mu \, ds\right)^2 \leq l(\rho) \cdot \int_{C(x,\rho)} \mu^2 \, ds \\ &\leq 20\rho \cdot \int_{C(x,\rho)} \mu^2 \, ds. \end{aligned}$$

En divisant par ρ et en intégrant le résultat entre $r/2$ et r, on obtient :

$$\begin{aligned} 100A \int_{r/2}^{r} \frac{d\rho}{\rho} &\leq 20A(x,r) \leq 20A \\ 5 \ln 2 &\leq 1. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.2. *Fixons $A > 0$. Si $\inf\{r(x,A) \mid x \in \mathbf{H}^2\} = 0$, il existe une courbe fermée de longueur $\leq 800\sqrt{A}$ bordant un domaine d'aire $\geq A$.*

Preuve. Appliquons le lemme du demi-minimum à la fonction $x \mapsto r(x,A)$. On trouve x_A tel que $r_A = r(x_A, A) < R_0$ et pour tout x, $d(x, x_A) \leq \frac{1}{2}\sqrt{r_A}$ implique $r(x,A) \geq \frac{1}{2} r_A$. Choisissons x_A de sorte que $r_A < \frac{1}{4}\sqrt{r_A}$. Alors pour tout $x \in D(x_A, 2r_A)$ et tout $r \leq r_A$, on a $A(x,r) \leq A$.

D'après le lemme 3.3.1, on peut à chaque point x tel que $d(x, x_A) = r_A$ associer un nombre $\rho(x) \in [r_A/4, r_A/2]$ vérifiant $L(x, \rho(x)) \leq 10\sqrt{A}$. Soit x_1 un point de $C(x_A, r_A)$. Alors $C(x_1, \rho(x_1))$ et $C(x_A, r_A)$ se coupent en deux points (voir figure 3.1). Soit x_2 un de ces deux points d'intersection.

Alors $C(x_1, \rho(x_1))$ ne peut pas être extérieur à $C(x_2, \rho(x_2))$. S'il lui était interieur, on aurait $\rho(x_1) < \rho(x_2)/2$, ce qui est impossible. Ces deux cercles sont donc sécants. On peut poursuivre la construction, obtenant des points x_3, x_4 etc. jusqu'à ce que $C(x_n, \rho(x_n))$ recoupe $C(x_1, \rho(x_1))$. On a

$$\frac{nr_A}{4} \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i) \leq l(r_A) \leq 20r_A,$$

d'où l'on déduit $n < 80$. En recollant les arcs extérieurs des $C(x_i, \rho(x_i))$, on obtient une courbe de longueur au plus $800\sqrt{A}$ qui borde un domaine d'aire au moins A. □

Lemme 3.3.3. *Il existe une constante $A_0 > 0$ telle que* $\inf\{r(x, A_0) \mid x \in \mathbf{H}^2\} > 0$.

Preuve. Dans le but d'obtenir une contradiction, prenons une suite $A_i \to +\infty$ telle que $\inf\{r(x, A_i) \mid x \in \mathbf{H}^2\} = 0$. Le lemme 3.3.2 nous donne une suite de domaines Ω_i avec $\frac{|\partial\Omega_i|^2}{|\Omega_i|}$ borné et $|\Omega_i| \to +\infty$. (Ici toutes les longueurs et les aires sont mesurées à l'aide de la métrique h).

Supposons qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|\Omega|^{2/3} \leq C\,|\partial\Omega|$$

pour tous les domaines bornés. Alors il existe une constante $C' \geq 0$ telle que

$$|\Omega_i|^{2/3} \leq C\,|\partial\Omega_i| \leq C'\,|\Omega_i|^{1/2},$$

ce qui contredit le fait que $|\Omega_i| \to +\infty$.

L'inégalité isopérimetrique du paragraphe précédent n'est donc pas vraie. La proposition 3.2.4 dit alors que Γ n'est pas à croissance au moins cubique. Comme expliqué dans le cas euclidien, il en résulte que Γ est virtuellement $\mathbf{Z}^2$, ce qui contredit l'hypothèse faite plus haut. □

Fin de la preuve de la proposition 3.1.2.
Posons $r_0 = \min(R_0, \inf\{r(x, A_0) \mid x \in \mathbf{H}^2\})$. En utilisant le lemme 3.3.1, on définit une fonction $\rho : R \to [r_0/2, r_0]$ telle que $A(x, \rho(x)) \leq A_0$ et $L(x, \rho(x)) \leq 10\sqrt{A_0}$ pour tout $x \in \mathbf{H}^2$. Notons pour simplifier $C(x) = C(x, \rho(x))$.

Soient x, y des points quelconques de $\mathbf{H}^2$ et γ une géodésique hyperbolique passant par x et y. On va construire une suite finie $x_1, \ldots, x_n$ de points de γ telle que $x_1 = x$, $x_n = y$ et deux $C(x_i)$ consécutifs sont sécants. Pour cela, on pose $x_1 = x$, et pour $i > 1$, x_i sera l'un des deux points d'intersection entre γ et $C(x_{i-1})$ (voir fig. 3.2). Si l'on regarde γ de façon à ce que x soit à gauche de y, on peut décrire le choix fait à chaque étape en disant qu'on prend le point « de gauche » ou « de droite ».

Si $C(x)$ et $C(y)$ sont sécants, il n'y a rien à faire. S'ils sont extérieurs, on choisit toujours le point de droite. Pour un certain m, $C(x_{m-1})$ est extérieur à $C(y)$ et pas $C(x_m)$. La condition sur les rayons assure que $C(y)$ et $C(x_m)$ sont sécants. Si $C(x)$ et $C(y)$ sont disjoints, mais pas extérieurs, on choisit d'abord le point de gauche jusqu'à ce que $C(x_m)$ soit extérieur à $C(y)$, puis le point de droite jusqu'à obtenir un cercle qui coupe $C(y)$. Dans tous les cas, le nombre de points nécessaires est borné en fonction de $d(x, y)$.

On peut maintenant relier x et y par un chemin $\alpha \cup \beta \cup \delta$ où α (resp. δ) est une h-géodésique minimisant la longueur parmi les arcs reliant x à un point de $C(x)$ (resp. y à un point de $C(y)$) et $\beta \subset \bigcup C(x_i)$. Chaque $C(x_i)$ a une longueur inférieure à $10\sqrt{A_0}$. La h-longueur de β est donc majorée par une fonction de $d(x, y)$.

On est donc ramené au problème suivant : étant donné un point $x \in \mathbf{H}^2$, trouver un majorant de la h-distance entre x et $C(x, \rho(x))$ qui ne dépende pas de x. J'affirme que le lemme 3.2.7 résoud ce problème.

En effet, soit $\tau_0 = \tau(A_0)$ la constante donnée par ce lemme. Supposons par l'absurde que tous les points de $C(x, \rho(x))$ sont distants de x de plus de τ_0. Soit z un point de la h-boule de centre x et de rayon τ_0. Si $z \notin D(x, \rho(x))$, un argument de connexité montre qu'il existe une h-géodésique minimisante entre x et z qui coupe $C(x, \rho(x))$. Soit u un point d'intersection. Alors on a $d_h(x, u) \leq \tau_0$, ce qui est absurde.

Nous venons de prouver que la h-boule de centre x et de rayon τ_0 est contenue dans $D(x, \rho(x))$, mais l'aire de ce dernier est inférieure à A_0. Cette contradiction termine la preuve de la proposition 3.1.2. $\square$

3.4 Le cas à bord

La preuve de la proposition 3.1.3 est basée sur le lemme suivant.

Lemme 3.4.1. *Soit R une surface non-compacte 1-connexe à bord non vide. Soit $\mathcal{D}$ une pseudo-triangulation non-dégénérée de R et d la métrique simpliciale régulière associée. Supposons que (R, d) est quasi-isométrique à un groupe. Alors ∂R est quasidense dans (R, d).*

Comme la démonstration de ce lemme est assez technique, nous allons d'abord montrer qu'il implique la proposition 3.1.3. Pour cela, considérons un groupe Γ quasi-isométrique à (R, d). D'après le lemme 1.3.6, Γ est également quasi-isométrique à $(R, d_{\mathcal{D}})$. Notons N l'ensemble des 0-cellules de $\mathcal{D}$ appartenant à ∂R. Le lemme 3.4.1 implique que N est quasidense. Perturbons la métrique de façon à la rendre lisse à l'intérieur de R et que chaque point $x \in N$ soit remplacé par un arc de bord convexe. Nous sommes à présent dans la situation de la section 2.4. La proposition 2.4.5 appliquée à R vue comme une unique composante 1-connexe donne un graphe géodésique plongé qui découpe R en morceaux de taille uniformément bornée. D'après la remarque suivant cette proposition, (R, d) est quasi-isométrique à un arbre. Par conséquent, Γ est quasi-isométrique à cet arbre, donc un groupe hyperbolique dont le bord est de dimension 0. Il est bien connu qu'un tel groupe est nécessairement virtuellement libre [20].

Passons à la preuve du lemme 3.4.1. On note encore d la distance dans Γ. Par hypothèse, il existe des constantes $\lambda', C' \geq 0$ et des (λ', C')-quasi-isométries $f : \Gamma \to R$, $\bar{f} : R \to \Gamma$ inverses à grande échelle, c'est-à-dire telles que pour tout $g \in \Gamma$ on a $d(f(\bar{f}(g)), g) \leq C'$ et pour tout $x \in R$ on a $d(\bar{f}(f(x)), x) \leq C'$.

Lemme 3.4.2. *Il existe des constantes $\lambda, C \geq 0$ telles que :*

i. Quels que soient $x, y \in R$, il existe une (λ, C)-quasi-isométrie $f_{x,y} : R \to R$ telle que $f_{x,y}(x)$ est C-proche de y.

ii. Quel que soit $x \in R$, il existe une (λ, C)-quasi-géodésique α_x telle que x est dans le C-voisinage de α_x.

Preuve. L'idée est que (i) et (ii) sont des versions à grande échelle de certaines propriétés que Γ vérifie parce que c'est un groupe, à savoir : Γ agit transitivement sur lui-même par isométries et pour tout $g \in \Gamma$ il existe une géodésique dans le graphe de Cayley de Γ qui passe par g. Ainsi, les propriétés à grande échelle correspondantes sont satisfaites dans n'importe quel espace métrique quasi-isométrique à Γ.

Par exemple, pour montrer (i), on voit que si x, y sont deux points de R et $h : \Gamma \to \Gamma$ une isométrie qui envoie $\bar{f}(x)$ sur $\bar{f}(y)$, alors $f \circ h \circ \bar{f}$ est une quasi-isométrie qui envoie x près de y. Un calcul facile montre que les différentes constantes ne dépendent que de λ' et C'. La preuve de (ii) est similaire. □

L'idée du lemme suivant est dûe à B. Bowditch (cf. [7]).

Lemme 3.4.3. *(R, d) est uniformément 1-connexe.*

Preuve. On doit trouver une fonction $\rho : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que tout lacet $\gamma \subset R$ borde un disque singulier de diamètre au plus $\rho(\operatorname{diam} \gamma)$. Le lemme 1.5.3 montre qu'il suffit de travailler avec des lacets *plongés.* Nous allons montrer que la fonction

$$\rho(r) = \lambda^2(r + 1) + C(\lambda + 1)$$

fait l'affaire.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors il existe un nombre $r \geq 0$ et un disque plongé Ω tel que $\operatorname{diam} \partial\Omega = r$ et $\operatorname{diam} \Omega > \rho(r)$.

Soit x un point de Ω tel que $d(x, \partial\Omega) > \rho(r)/2$. D'après le lemme 3.4.2(ii), il existe une (λ, C)-quasi-géodésique α_x qui rencontre $B(x, C)$. On peut supposer que α_x est continue. Elle doit donc rencontrer $\partial\Omega$ en au moins deux points $x_1 = \alpha_x(t_1)$ et $x_2 = \alpha_x(t_2)$, où t_1 et t_2 sont tels qu'il existe $t_0 \in [t_1, t_2]$ vérifiant $d(\alpha_x(t_0), x) \leq C$. Or α_x est une quasi-géodésique, donc

$$t_2 - t_1 = (t_2 - t_0) + (t_0 - t_1) \geq \frac{2(\rho(r) - C)}{\lambda}.$$

On en déduit que

$$d(x_2, x_1) \geq \frac{2(\rho(r) - C) - C\lambda}{\lambda^2} > r,$$

ce qui contredit le fait que $\operatorname{diam} \partial\Omega = r$. □

Lemme 3.4.4. *À toute (μ, D)-quasi-isométrie $h : R \to R$ on peut associer une $(\mu, D')-$quasi-isométrie continue $h' : R \to R$ telle que $h(x)$ et $h'(x)$ soient D'-proches pour tout $x \in R$, où la constante D' ne depend que de μ, D et de la fonction ρ.*

Preuve. On construit h' par extensions successives sur les i-squelettes de la pseudo-triangulation. On peut poser $h' = h$ sur le 0-squelette. Puis on définit h' sur le 1-squelette en envoyant chaque 1-cellule sur un arc géodésique. Enfin on utilise le lemme 3.4.3 pour définir h' sur le 2-squelette. Un calcul facile montre que la constante $D' = 2(\mu+1)\rho(2\mu+2D)+2\mu+D+2$ convient. □

Lemme 3.4.5. *Il existe une fonction $\epsilon : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $D \geq 0$, toute application continue $h : S^1 \times \{0,1\} \to R$ telle que $h(t,0)$ et $h(t,1)$ sont D-proches pour tout $t \in S^1$ admet une extension continue $h : S^1 \times I \to R$ satisfaisant $\operatorname{diam} h(t \times I) \leq \epsilon(D)$ pour tout $t \in S^1$.*

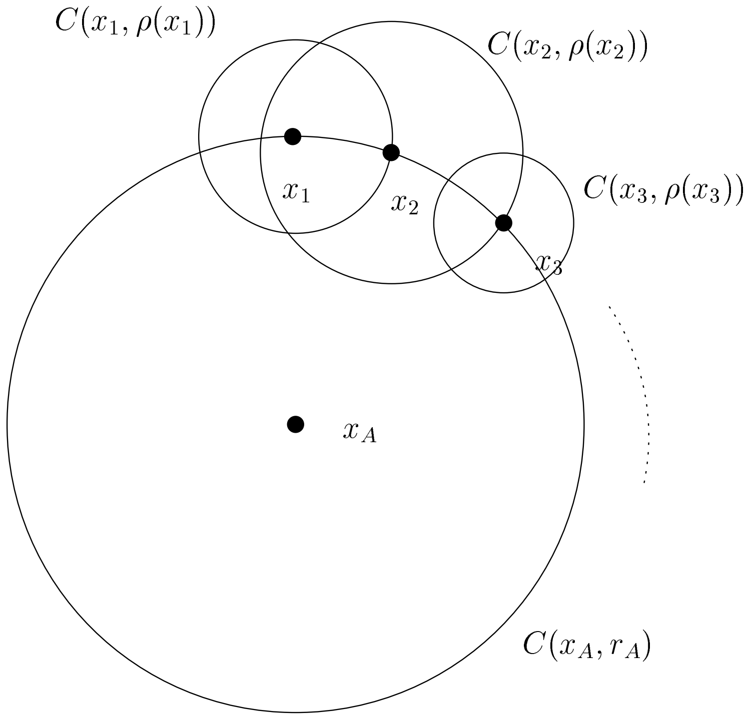
Preuve. Similaire à celle du lemme 3.4.4 en utilisant une triangulation de $S^1 \times I$. □

Preuve du lemme 3.4.1. Supposons par contradiction qu'il existe un point $x \in R$ tel que $d(x, \partial R) > \delta$, où δ est à déterminer. Soit y un point quelconque de ∂R. D'après le lemme 3.4.2(i), il existe une (λ, C)-quasi-isométrie $f_{x,y}$ qui envoie x dans $B(y, C)$. Soit $\bar{f}_{x,y}$ un inverse à grande échelle de $f_{x,y}$. Quitte à augmenter les constantes, on peut supposer que $f_{x,y}$ et $\bar{f}_{x,y}$ sont continues (grâce au lemme 3.4.4).

Soit U un disque topologique contenant $B(f_{x,y}(x), \lambda(C+1)+C)$ et tel que $\operatorname{diam} U \leq \rho(2\lambda(C+1)+2C)$. Comme $d(y, f_{x,y}(x)) \leq C$, le disque U rencontre ∂R. Cela entraîne que chaque composante de $R - U$ est 1-connexe.

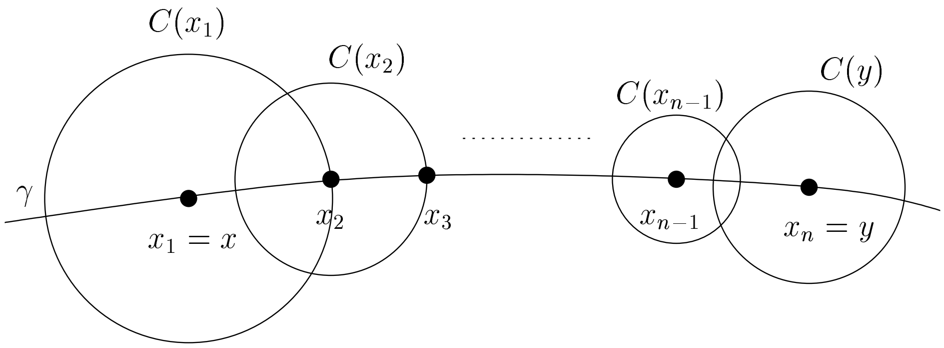
Soit Ω un grand disque tel qu'on ait $x \in \Omega$ et $d(x, \partial\Omega) > \delta$. Choisissons δ assez grand pour que $(\delta - C)/\lambda > \operatorname{diam} U$. Alors le lacet $f_{x,y}(\partial\Omega)$ évite U. Du fait que chaque composante de $R - U$ est 1-connexe, $f_{x,y}(\partial\Omega)$ borde un disque singulier V disjoint de U. Pour tout $z \in V$ on a $d(f_{x,y}(x), z) \geq \lambda(C+1) + C$, d'où $d(\bar{f}_{x,y}(z), x) \geq 1$. Cela prouve que $\bar{f}_{x,y}(f_{x,y}(\partial\Omega))$ est homotope à zéro dans $R - \{x\}$.

Définissons $h : S^1 \times \{0, 1\} \to R$ par $h_0 = \partial\Omega$ et $h_1 = \bar{f}_{x,y}(f_{x,y}(\partial\Omega))$. Le lemme 3.4.5 fournit une homotopie entre $\partial\Omega$ et $\bar{f}_{x,y}(f_{x,y}(\partial\Omega))$ telle que le diamètre de $h(t \times I)$ est majoré par $\epsilon(C)$ pour tout $t \in S^1$. Si on choisit δ plus grand que $\epsilon(C)$, cette homotopie évite nécessairement x, et on obtient la contradiction recherchée. $\square$



$C(x_1, \rho(x_1))$
$C(x_2, \rho(x_2))$
$C(x_3, \rho(x_3))$
x_1
x_2
x_3
x_A
$C(x_A, r_A)$

FIG. 3.1:



$C(x_1)$
$C(x_2)$
$C(x_{n-1})$
$C(y)$
γ
$x_1 = x$
x_2
x_3
x_{n-1}
$x_n = y$

FIG. 3.2:

Chapitre 4

Rappels sur les variétés de dimension 3

4.1 Généralités

Sauf mention explicite du contraire, toutes les surfaces et variétés de dimension 3 sont supposées lisses et connexes. Les applications $f : F \to M$ et leurs homotopies sont supposées propres, c'est-à-dire vérifiant $f^{-1}(\partial M) = \partial F$. Dans certains énoncés, nous nous limiterons aux variétés orientables pour simplifier. Nous utiliserons le terme *surface singulière* pour désigner une application (propre) d'une surface vers une variété de dimension 3. Une *sous-variété* est une sous-variété à bord de codimension 0.

Pour cette section et la suivante, la référence générale est [27].

Définition. Soit M une variété de dimension 3. On dit que M est *irréductible* si toute sphère plongée dans M borde une boule.

Soit M une variété de dimension 3 orientable et $f : F \to M$ une surface singulière orientable. Supposons que F n'est pas une sphère. On dit que f est *incompressible* si $f_* : \pi_1 F \to \pi_1 M$ est injective ; sinon elle est *compressible*. De même, f est *∂-incompressible* si $f_* : \pi_1(F, \partial F) \to \pi_1(M, \partial M)$ est injective et *∂-compressible* sinon. Il résulte du théorème du lacet que si F est plongée dans M, F est compressible si et seulement s'il existe un disque plongé D dans M tel que $D \cap F = \partial D$ et ∂D n'est pas homotope à zéro dans F. De même, F est ∂-compressible si et seulement s'il existe un arc $\alpha \subset F$, un arc $\beta \subset \partial M$ et un disque $D \subset M$ tels que $\partial D = \alpha \cup \beta$, $D \cap M = \alpha$ et α n'est pas homotope dans F à un arc de ∂F. Une sous-variété $V \subset M$ est dite *incompressible* si chaque composante de ∂V est incompressible dans M. Par le théorème de van Kampen, cela implique que $\pi_1 V \to \pi_1 M$ est injective.

Définition. On appelle *variété de Haken* toute variété de dimension 3 compacte, orientable et irréductible qui contient une surface plongée compacte, orientable, incompressible.

Remarquons qu'avec les définitions ci-dessus, tout disque proprement plongé dans une variété M est incompressible. Ainsi, toute variété M compacte, orientable, irréductible dont le bord n'est pas vide est de Haken. En particulier, c'est le cas de B^3.

Théorème 4.1.1 (Théorème de la sphère [44, 61]). *Soit M une variété de dimension 3 orientable telle que $\pi_2 M$ est non trivial. Alors M contient une sphère plongée non homotope à zéro.*

Corollaire 4.1.2. *Soit M une variété de dimension 3 orientable. Supposons que M est non-compacte, ou à bord non vide, ou de π_1 infini. Alors si M est irréductible, M est asphérique.*

Preuve. Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M. Comme M est irréductible, le théorème de la sphère implique que $\pi_2 M = 0$, d'où $\pi_2 \tilde{M} = 0$. Les hypothèses impliquent que $\tilde{M}$ est non compacte ou à bord non vide, d'où $H_i(\tilde{M}) = 0$ pour tout $i \geq 3$. Par conséquent, le théorème de Hurewicz permet d'affirmer que $\tilde{M}$, et donc M, sont asphériques. □

La réciproque du corollaire 4.1.2 est impliquée par la conjecture de Poincaré. Comme cette conjecture est toujours ouverte, on appelle *sphère d'homotopie* une variété de dimension 3 fermée dont le π_1 est trivial. Le théorème de décomposition en somme connexe a la conséquence suivante :

Lemme 4.1.3. *Soit M une variété de dimension 3 compacte, orientable, asphérique. Alors il existe une sphère d'homotopie S et une variété compacte, orientable, irréductible N telles que $M = S \# N$.*

Cette différence potentielle entre variétés asphériques et variétés irréductibles rend non trivial le résultat suivant :

Théorème 4.1.4 (Théorème de la sphère équivariante). *Soit M une variété de dimension 3 orientable irréductible. Alors tout revêtement de M est irréductible.*

Le théorème de la sphère équivariante a d'abord été prouvé par W. Meeks, L. Simon et S.-T. Yau [40] en utilisant des surfaces minimales. Puis M. Dunwoody [11] et W. Jaco et H. Rubinstein [29] en ont donné des preuves combinatoires. Enfin les deux derniers auteurs [28] ont simplifié leur approche en utilisant la notion de surface PL minimale. Au chapitre 6, en généralisant cette notion au cadre des orbifolds, nous obtiendrons une version pour les orbifolds du théorème de la sphère équivariante, dont la version pour les variétés est un corollaire. Les surfaces PL minimales jouent également un grand rôle au chapitre 5.

Pour conclure cette section, nous énonçons le théorème du cœur compact, que nous utiliserons dans la suite du présent travail.

Théorème 4.1.5 ([47]). *Toute variété M de dimension 3 dont le groupe fondamental est de type fini admet un cœur compact M_0, c'est-à-dire une sous-variété compacte telle que l'application $\pi_1 M_0 \to \pi_1 M$ induite par l'inclusion est un isomorphisme. Si M est irréductible, on peut choisir M_0 irréductible. L'inclusion de M_0 dans M est alors une équivalence d'homotopie.*

4.2 Variétés de Seifert

Si (α, β) est un couple d'entiers premiers entre eux, $0 \leq \beta < \alpha$, on définit le *tore solide fibré* $T(\alpha, \beta)$ comme le quotient du cylindre $D^2 \times I$ par l'identification de $D^2 \times \{0\}$ avec $D^2 \times \{1\}$ via l'homéomorphisme $z \mapsto e^{2i\pi\beta/\alpha} z$, muni du feuilletage en cercles par les images des intervalles $\{z\} \times I$. Les feuilles de ce feuilletage sont traditionnellement appelées *fibres*.

Une variété de Seifert est une variété de dimension 3 munie d'un feuilletage en cercles où chaque feuille a un voisinage isomorphe à un tore solide fibré. Plus précisément,

Définition. Soit M une variété de dimension 3 orientable. On dit que M est une *variété de Seifert*, ou admet une *fibration de Seifert* si M est une réunion de cercles disjoints appelés *fibres*, tels que chaque fibre possède un voisinage saturé homéomorphe à un tore solide fibré de type $T(\alpha, \beta)$ par un homéomorphisme envoyant fibre sur fibre.

Soit M une variété de Seifert et f une fibre. Si on peut choisir $\alpha = 1$ dans la définition ci-dessus, on dit que f est *ordinaire*. C'est toujours le cas si $f \subset \partial M$. Sinon, on dit que f est *exceptionnelle* ; le nombre α est alors bien défini et appelé *ordre* de f.

On appelle *base* d'une fibration de Seifert l'espace des feuilles. Munie de la topologie induite par la projection canonique, c'est une surface. On peut même lui donner une structure d'orbifold [55, 49] pour laquelle l'image d'une fibre exceptionnelle d'ordre α est un point conique d'ordre α, mais ce point de vue ne jouera pas un grand rôle dans la suite.

Le théorème suivant est dû à F. Waldhausen [60] dans le cas Haken et à P. Scott [50] dans le cas petit.

Théorème 4.2.1. *Soient M et N des variétés de dimension 3 fermées, orientables, irréductibles. Si N est de Seifert et $\pi_1 M$ est isomorphe à $\pi_1 N$, alors M est homéomorphe à N. En particulier, M est de Seifert.*

Nous utiliserons aussi les trois résultats suivants, dûs à F. Waldhausen. Le premier est une version du théorème 0.0.1 pour les variétés de Haken. Il s'applique en particulier aux variétés dont le bord est non vide.

Théorème 4.2.2 ([59], cf. aussi [27]). *Soit M une variété de Haken. Si $\pi_1 M$ admet un sous-groupe infini cyclique central Z, M admet une fibration de Seifert telle que Z est engendré par une puissance de l'élément de $\pi_1 M$ représenté par la fibre ordinaire.*

Une surface plongée dans une variété de Seifert est dite *verticale* si elle est homotope à une surface plongée qui est une réunion de fibres.

Théorème 4.2.3 ([58]). *Soit M une variété de Seifert compacte et irréductible dont le bord n'est pas vide. Alors toute surface orientable incompressible fermée dans M est un tore vertical.*

Dans l'énoncé suivant, on note $K^2 \tilde{\times} I$ le I-fibré tordu (orientable) sur la bouteille de Klein K^2.

Théorème 4.2.4 ([58]). *Soit M une variété de dimension 3 compacte, orientable, à bord non vide. Supposons que M n'est pas homéomorphe à $S^1 \times D^2$, $T^2 \times I$ ou $K^2 \tilde{\times} I$. Alors M admet au plus une fibration de Seifert à isotopie près.*

Notons une conséquence utile du théorème 4.2.3.

Lemme 4.2.5. *Soit M une variété de Seifert compacte et irréductible dont le bord n'est pas vide. Alors tout élément non nul de $H_2(M)$ peut être représenté par une famille de tores plongés incompressibles deux à deux disjoints.*

Preuve. Comme $\partial M = \emptyset$, M est une variété de Haken. Tout élément non nul de $H_2(M)$ peut donc être représenté par une famille de surfaces fermées incompressibles. D'après le théorème 4.2.3, ces surfaces doivent être des tores verticaux. Par des homotopies, on peut s'arranger pour que les seules intersections soient des courbes fermées verticales. Par chirurgie le long de ces courbes, on obtient une famille de tores plongés deux à deux disjoints représentant la même classe d'homologie. □

Enfin, nous aurons besoin du théorème du tore homotopique. Ce théorème est une conséquence de la théorie de la « sous-variété caractéristique », dûe indépendamment à d'une part W. Jaco et P. Shalen [30], d'autre part K. Johannson [31].

Théorème 4.2.6 (Théorème du tore homotopique [30], [31]). *Soit M une variété de Haken. Soit $f : T^2 \to M$ un tore singulier incompressible. Alors il existe une sous-variété incompressible $V \subset M$ fibrée de Seifert et un tore singulier $g : T^2 \to M$ homotope à f tel que $g(T^2) \subset V$.*

4.3 Surfaces PL minimales

4.3.1 Théorie générale

Comme tous les résultats de cette section sont essentiellement « biens connus des spécialistes » (à l'exception, semble-t-il, du lemme 4.3.1), nous nous contenterons de rappels succints en nous servant de l'article [28] comme référence. Nous donnerons plus de détails au chapitre 6 où nous généraliserons certains résultats aux orbifolds.

Soit $(M, \mathcal{T})$ une variété triangulée de dimension 3 et F une surface plongée dans M en position générale par rapport à $\mathcal{T}$. On dit que F est *normale* si pour chaque 3-simplexe σ de $\mathcal{T}$, $\sigma \cap F$ est une réunion de disques intersectant chaque arête de σ en au plus un point et intersectant au moins une arête de σ. On définit de façon similaire une *application normale* d'une surface F vers M [28]. Deux applications normales $f, f' : F \to M$ sont *normalement homotopes* s'il existe une homotopie $H : F \times I \to M$ entre f et f' telle que chaque application intermédiaire H_t soit normale. L'ensemble des applications normalement homotopes à f est appelé *classe d'homotopie normale* de f et noté $\mathcal{N}(f)$.

On appelle *métrique de Jaco-Rubinstein* sur $(M, \mathcal{T})$ une métrique riemannienne sur $\mathcal{T}^{(2)} - \mathcal{T}^{(0)}$ telle que chaque 2-simplexe est isométrique à un triangle idéal dans $\mathbf{H}^2$. Une telle métrique est déterminée par les applications de recollement le long des arêtes de $\mathcal{T}$. Dans [28], ces applications étaient choisies de façon arbitraire. Nous aurons besoin d'une notion plus précise. Fixons donc un triangle idéal $\Delta \subset \mathbf{H}^2$ (par exemple dans le modèle du disque de Poincaré, soit Δ le triangle dont les sommets idéaux sont les racines cubiques de l'unité). On définit un homéomorphisme de chaque 2-simplexe σ (privé de ses sommets) sur Δ en utilisant les coordonnées barycentriques et on met sur σ la métrique induite, de sorte que les applications de recollement sont bien définies (elles appartiennent au groupe d'isométries de Δ). On appelle cette métrique la métrique de Jaco-Rubinstein *régulière* sur $(\mathcal{O}, \mathcal{T})$.

Soit F une surface compacte et $f : F \to M$ une application en position générale. On appelle *poids* de f, noté $\mathrm{pd}(f)$, le cardinal de l'ensemble fini $f^{-1}(\mathcal{T}^{(1)})$ et *longueur* de f, notée $\lg(f)$ la somme sur toutes les composantes e de $f^{-1}(\mathcal{T}^{(2)} - \mathcal{T}^{(1)})$ de la longueur de $f(e)$ pour la métrique de Jaco-Rubinstein régulière.

On appelle *aire PL* de f le couple $\|f\| = (\mathrm{pd}(f), \lg(f)) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}_+$. On met sur l'ensemble de ces couples l'ordre lexicographique.

Lemme 4.3.1. *Soit F une surface compacte et $f : F \to M$ une application normale. Alors* $\mathrm{taille}(f) \leq \mathrm{pd}(f)^2$.

Preuve. Pour tout $1 \leq i \leq 3$, notons $\mathcal{X}^i$ l'ensemble des i-simplexes de $\mathcal{T}$ qui rencontrent $f(F)$ et n_i le cardinal de cet ensemble. Comme f est normale, chaque 3-simplexe qui rencontre $f(F)$ a une arête qui rencontre $f(F)$. Il existe donc une application $\phi : \mathcal{X}^3 \to \mathcal{X}^1$ telle que $f(\sigma) \subset \sigma$ pour tout $\sigma \in \mathcal{X}^3$. J'affirme que l'image réciproque d'un singleton a au plus $\mathrm{pd}(f)$ éléments. En effet, comme f est normale, pour tout $e \in \mathcal{X}^1$, le nombre de 3-simplexes contenant e est majoré par n_1, donc par $\mathrm{pd}(f)$. On obtient :

$$\mathrm{taille}(f) = n_3 \leq \mathrm{pd}(f) \cdot n_1 \leq \mathrm{pd}(f)^2.$$

□

Nous rassemblons dans la proposition 4.3.2 quelques résultats généraux sur les surfaces PL minimales. Ces résultats sont essentiellement dûs à Jaco et Rubinstein [28], à ceci près que nous ne supposons pas que M est un revêtement d'une variété compacte.

Proposition 4.3.2. *Soit $(M, \mathcal{T})$ une variété triangulée de dimension 3 orientable et asphérique. Soit F une surface orientable qui n'est ni S^2, ni D^2 et $f : F \to M$ une surface singulière incompressible et ∂-incompressible. Alors :*

i. Il existe une surface normale d'aire PL minimale dans la classe d'homotopie de f.

ii. Si f est un plongement, toute surface d'aire PL minimale dans la classe d'homotopie de f est un plongement ou un revêtement double d'une surface non-orientable.

iii. Deux surfaces plongées homotopiquement disjointes d'aire PL minimale dans leurs classes d'homotopie respectives sont égales ou disjointes.

Preuve. L'assertion (i) se prouve comme dans [28] à ceci près que si M n'est pas compacte, il y a une infinité de classes d'homotopie normale de surfaces de poids donné. Heureusement, le lemme 4.3.1 prouve qu'il n'y en a qu'un nombre fini à homéomorphisme combinatoire près, ce qui est suffisant.

Les assertions (ii) et (iii) se déduisent de (i) comme pour les théorèmes 6 et 7 de [28], c'est-à-dire en fait comme les théorèmes 5.1 et 6.2 de [16]. □

4.3.2 Le cas des anneaux dans les variétés à centre

Soit M une variété orientable, asphérique, à bord non vide incompressible. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation sur M. On suppose que $\pi_1 M$ admet un sous-groupe infini cyclique central Z. On appelle *anneau vertical* une application $A : S^1 \times I \to M$ qui induit au niveau des groupes fondamentaux un morphisme injectif d'image Z. Un anneau vertical est *essentiel* s'il n'est pas homotope dans ∂M. Par conséquent, tout anneau vertical plongé essentiel est incompressible et ∂-incompressible.

Définition. On appelle anneau *h-minimal* tout anneau vertical plongé essentiel normal qui minimise l'aire PL dans sa classe d'homotopie.

Deux anneaux verticaux plongés A, A' sont dits *transverses* si $A \cap A'$ est une réunion disjointe finie (éventuellement vide) de courbes et d'arcs transverses à $\mathcal{T}^{(2)}$, le long desquels A et A' s'intersectent transversalement. De nombreux résultats sur les surfaces minimales se démontrent en faisant une chirurgie le long de courbes transverses d'intersection et en « arrondissant les coins » pour obtenir une contradiction.

Si A et A' sont h-minimaux, ils sont transverses sauf si $A \cap A'$ admet un point selle généralisé ou un arc contenu dans $\mathcal{T}^{(2)}$. Dans ces cas embêtants, il existe pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit un anneau A_ϵ normalement homotope à A tel que $\lg(A_\epsilon) \leq \lg(A) + \epsilon$, A_ϵ est transverse à A', et dans toute opération consistant à échanger deux sous-surfaces de A_ϵ et A' et à lisser les courbes ou arcs venant de l'échange, le lissage peut-être effectué de façon à gagner une longueur de plus de ϵ. Cela permet souvent de réduire le cas général au cas transverse dans une argumentation de ce type. Suivant [28], nous appelerons ce principe « l'astuce de Meeks-Yau ».

Remarque. Si A et A' sont deux anneaux verticaux essentiels, une courbe d'intersection (resp. un arc d'intersection) est essentiel(le) sur A si et seulement si elle (il) l'est sur A'. On peut donc parler d'arc (courbe) d'intersection essentiel(le).

Proposition 4.3.3. *Soient A, A' des anneaux h-minimaux.*

i. Si A et A' sont transverses, $A \cap A'$ est vide ou ne contient que des courbes essentielles.

ii. Sinon, pour ϵ suffisamment petit, il existe un anneau A_ϵ normalement homotope à A et transverse à A' tel que $A_\epsilon \cap A'$ est vide ou ne contient que des courbes essentielles.

Preuve. Commençons par le cas où A et A' sont transverses. Si $A \cap A'$ a une composante fermée inessentielle c, on peut en choisir une « innermost » sur A, c'est-à-dire que c borde un disque $D \subset A$ dont l'intérieur évite A'. Or c borde également un disque $D' \subset A'$. Ainsi, $D \cup D'$ est une sphère plongée dans M. Comme M est asphérique, cette sphère est homotope à zéro. Cela entraîne qu'en échangeant D et D' et en lissant les anneaux obtenus vers l'extérieur au voisinage de c, on obtient un anneau A'' homotope à A et un anneau A''' homotope à A' avec $\|A''\| + \|A'''\| < \|A\| + \|A'\|$, ce qui contredit la h-minimalité de A, A'.

Supposons maintenant que $A \cap A'$ ne comprend pas de courbe fermée inessentielle, mais un arc inessentiel α. Choisissons α innermost au sens où l'intérieur du disque $D \subset A$ qu'il coborde avec un arc $\beta \subset \partial A$ évite A'.

Comme α est aussi inessentiel sur A', il coborde un disque $D' \subset A'$ avec un arc $\beta' \subset \partial A'$. Alors $\beta \cup \beta'$ est une courbe fermée qui borde le disque $D \cup D'$. Or ∂M est incompressible, donc $\beta \cup \beta'$ borde un disque $D'' \subset \partial M$. La réunion de ces trois disques est une sphère qui doit être homotope à zéro et on obtient une contradiction comme ci-dessus.

Supposons finalement que $A \cap A'$ n'a aucune composante inessentielle, mais au moins un arc essentiel. Alors $A \cap A'$ est une réunion disjointe d'arcs essentiels. Soit F une composante de ∂M qui rencontre A (et donc A'). Choisissons des courbes c, c' de respectivement A et A' telles que c et c' se trouvent sur F. Alors c et c' s'intersectent transversement en un nombre fini de points. Comme ∂M est incompressible, c et c' représentent un même élément central de $\pi_1 F$. Elles se coupent donc en un nombre pair de points, et en particulier en au moins deux points. Soient α_1 et α_2 deux arcs de $A \cap A'$ tels qu'il existe des arcs $\beta_1, \beta_2 \subset \partial A$ tels que le disque $D \subset A$ bordé par $\alpha_1 \cup \beta_1 \cup \alpha_2 \cup \beta_2$ ne rencontre A' qu'en $\alpha_1 \cup \alpha_2$. Il existe des arcs $\beta_1', \beta_2' \subset A'$ tels que $\beta_1 \cup \beta_1'$ (resp. $\beta_2 \cup \beta_2'$) cobordent un disque $D_1 \subset \partial M$ tel que $D_1 \cap D = \beta_1$ (resp. un disque $D_2 \subset \partial M$ tel que $D_2 \cap D = \beta_2$) et $\alpha_1 \cup \beta_1' \cup \alpha_2 \cup \beta_2'$ borde un disque $D' \subset A'$ tel que $D \cup D' \cup D_1 \cup D_2$ est une sphère plongée. À nouveau, l'asphéricité de M donne une contradiction.

Si A et A' ne sont pas transverses, on utilise l'astuce de Meeks-Yau. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour qu'il existe un anneau A_ϵ normalement homotope à A et transverse à A' et vérifiant la condition décrite précédemment. La preuve du cas transverse montre que dans chacune des trois situations à éviter (courbe inessentielle, arc inessentiel ou arc essentiel), il existe des anneaux A'', A''' homotopes respectivement à A et A' tels que

$$\mathrm{pd}(A'') + \mathrm{pd}(A''') = \mathrm{pd}(A) + \mathrm{pd}(A')$$

et

$$\lg(A'') + \lg(A''') < \lg(A_\epsilon) + \lg(A') - \epsilon \leq \lg(A) + \lg(A').$$

On a donc $|A''| < |A|$ ou $|A'''| < |A'|$, ce qui contredit la h-minimalité de A, A'. □

Chapitre 5

Variétés ouvertes de dimension 3

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème suivant.

Théorème 5.1.1. *Soit W une variété de dimension 3 ouverte, orientable et irréductible. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation à géométrie bornée de W telle que $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini. Soit a un élément uniformément représentable d'ordre infini dans le centre de $\pi_1 W$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i. W admet une fibration de Seifert telle que a est une puissance de l'élément de $\pi_1 W$ représenté par la fibre ordinaire.

ii. Si le sous-groupe engendré par a est maximal parmi les sous-groupes infinis cycliques centraux, il existe une fibration de Seifert $p : W \to B$ et une métrique riemannienne complète quasi-homogène sur B telle que p est une quasi-isométrie.

Cette preuve occupe les sections 5.2 à 5.4. Dans la section 5.5, nous prouvons une version du théorème 5.1.1 pour les variétés non nécessairement irréductibles, et nous en déduisons le théorème 5.5.4 annoncé dans l'introduction.

L'exemple M_2 de [52] est une variété de dimension 3 ouverte, orientable, irréductible dont le π_1 est infini cyclique et qui n'est pas homéomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}^2$. Il est facile de voir que M_2 n'admet pas de fibration de Seifert. Cet exemple montre que le théorème 5.1.1 n'est plus vrai si l'on omet l'une des hypothèses « uniformément représentable » ou « profil isopérimétrique fini ». Par ailleurs, M_2 admet une exhaustion par des tores solides, ce qui montre que pour prouver 5.1.1(i), même en supposant $\pi_1 M$ de type fini, il ne suffirait pas de construire une exhaustion de M par des cœurs compacts (cf. la discussion sur ce sujet dans [8]).

Dans tout ce chapitre, on travaille avec une variété W de dimension 3 munie d'une triangulation et d'un élément d'ordre infini du centre de $\pi_1 W$. Par commodité, nous donnons un nom à un tel objet.

Définition. On appelle *VTC* (comme « Variété Triangulée avec un élément Central ») tout triplet $(W, \mathcal{T}, a)$ où W est une variété de dimension 3, $\mathcal{T}$ une triangulation à géométrie bornée de W et a un élément central d'ordre infini de $\pi_1 W$. Une VTC est *maximale* si le sous-groupe engendré par a est maximal parmi les sous-groupes infinis cycliques centraux.

Une VTC est dite orientable, irréductible, etc. quand la variété W a cette propriété. À chaque fois qu'on parle d'une partie bornée de W, ou du diamètre d'une telle partie, ou de quasi-isométries, la quasi-métrique $d_{\mathcal{T}}$ est sous-entendue.

Définition. Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte et orientable. Soit V une sous-variété de W. On appelle *fibration de Seifert compatible* sur V toute fibration de Seifert sur V à base orientable telle que a est une puissance de l'élément de $\pi_1 W$ représenté par la fibre ordinaire.

Définition. Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte, orientable, maximale. On appelle *M-scindement* de $(W, \mathcal{T}, a)$ une famille $\mathcal{M}$ de tores et d'anneaux plongés combinatoires tels que :

i. Pour tout anneau $A \in \mathcal{M}$, il existe deux tores $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$ (peut-être égaux) tels que $\partial A \subset T_1 \cup T_2$;
ii. Tous les éléments de $\mathcal{M}$ sont disjoints sauf dans les situations prévues par le (i) ;
iii. Pour tout anneau $A \in \mathcal{M}$, l'application $\pi_1 A \to \pi_1 W$ est injective et son image est le sous-groupe engendré par a ;
iv. Soit V l'adhérence d'une composante de $W - \bigcup \mathcal{M}$. Alors V est une sous-variété compacte asphérique et $H_2(\operatorname{Int} V) = 0$;
v. Les composantes de $W - \bigcup \mathcal{M}$ ont des diamètres uniformément bornés.

La preuve du théorème 5.1.1 se scinde en trois propositions :

Proposition 5.1.2. *Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte, orientable, irréductible. Si a est uniformément représentable et si $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini, W admet une fibration de Seifert compatible.*

Proposition 5.1.3. *Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte, orientable, irréductible, maximale. Si a est uniformément représentable et $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini, il existe une subdivision uniforme $\mathcal{T}_2$ de $\mathcal{T}$ telle que $(W, \mathcal{T}_2, a)$ admet un M-scindement.*

Proposition 5.1.4. *Soit $(W, \mathcal{T}_2, a)$ une VTC ouverte, orientable, irréductible, maximale. Si cette VTC admet un M-scindement, il existe une fibration de Seifert $p : W \to B$ et une métrique riemannienne complète quasi-homogène sur B telle que p est une quasi-isométrie.*

Comme le fait de remplacer $\mathcal{T}$ par la subdivision uniforme $\mathcal{T}_2$ ne change pas sa classe de quasi-isométrie, il est clair que ces trois propositions impliquent ensemble le théorème 5.1.1.

5.2 L'homotopie cyclique et ses applications

5.2.1 Notion d'homotopie cyclique

Un point de base dans S^1, noté 0, est fixé définitivement.

Définition. On appelle *homotopie cyclique* sur une VTC $(W, \mathcal{T}, a)$ toute application $H : W \times S^1 \to W$ vérifiant les conditions suivantes :

i. $H(\cdot, 0)$ est l'identité de W ;

ii. Pour tout $x \in W$, le lacet $H(x, \cdot)$ représente a.

On appellera ce lacet $H(x, \cdot)$ la *trajectoire* de x dans H. Le *diamètre* de H, noté $\operatorname{diam} H$, est le nombre $\sup_{x \in W} \operatorname{diam}(H(x, \cdot)) \in [0, +\infty]$. On dit que H est *bornée* si son diamètre est fini.

Proposition 5.2.1. *Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte, orientable, asphérique. Si $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini et a est uniformément représentable, $(W, \mathcal{T}, a)$ admet une homotopie cyclique bornée.*

Preuve. La construction de cette homotopie cyclique bornée H va se faire par extensions successives sur les i-squelettes. À chaque étape, on peut considérer le problème de l'extension de H du i-squelette au $(i+1)$-squelette comme un problème de remplissage dont la solution est donnée par l'une des hypothèses.

On commence par utiliser la représentabilité uniforme pour construire H sur le 0-squelette. Grâce au lemme 1.5.4, on a $\operatorname{diam} H \leq C_0$. Ensuite, pour chaque arête e reliant deux sommets v, v', on considére le lacet combinatoire α_e basé en v défini de la façon suivante : d'abord on suit la trajectoire $H(v, \cdot)$, puis on passe par e, puis on suit la trajectoire $H(v', \cdot)$ dans le sens inverse, et enfin on rejoint v en passant par e. Par construction, α_e est homotope à zéro et sa longueur est au plus $2C_0 + 2$. Comme $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini, on peut remplir α_e par un disque combinatoire d'aire au plus $C_1(2C_0 + 2)$. Cela permet de prolonger H en une homotopie cyclique de diamètre au plus $C_1(2C_0 + 2)$ sur le 1-squelette.

D'après le lemme 1.5.7, $(W, \mathcal{T})$ est uniformément asphérique. Pour chaque 2-simplexe c, on peut voir la restriction de H à ∂c comme une application combinatoire d'un anneau vers W. On peut prolonger cette application en une application combinatoire $f : S^2 \to W$ en ajoutant deux exemplaires de c. Or d'après le lemme 1.5.4, on a $\operatorname{diam}(f) \leq \operatorname{Vol}_2(f) \leq 3C_1(2C_0+2)+2$, donc le lemme 1.5.5 nous permet de remplir l'application f par une application combinatoire de B^3 vers W dont le diamètre est majoré par $C_2(3C_1(2C_0+2)+2)$.

L'extension de H au 3-squelette est analogue au paragraphe précédent et utilise aussi l'asphéricité uniforme via le lemme 1.5.5. On obtient finalement une homotopie cyclique H définie sur W tout entier et telle que $\operatorname{diam} H \leq C_2(4C_2(3C_1(2C_0+2)+2)+2)$. □

5.2.2 Sous-variétés remarquables de W

Dans cette sous-section, $(W, \mathcal{T}, a)$ est une VTC ouverte, orientable, *irréductible* telle que a est uniformément représentable et $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini. On note d la quasi-métrique canonique associée à $\mathcal{T}$. D'après la proposition 5.2.1, $(W, \mathcal{T}, a)$ admet une homotopie cyclique bornée H.

Nous allons introduire quelques propriétés qu'une sous-variété de W peut avoir ou non. Pour chacune de ces propriétés, notre but est de montrer que W admet une exhaustion par des sous-variétés ayant cette propriété, et si possible de manière uniforme, c'est-à-dire que tout compact K est contenu dans une sous-variété compacte L ayant la propriété en question et dont la taille est bornée en fonction de celle de K.

Sous-variétés régulières

Définition. Soit $V \subset W$ une variété compacte. On dit que V est *régulière* si elle est irréductible et contient un lacet représentant $a \in \pi_1 W$.

Notons qu'une sous-variété régulière n'est jamais contenue dans une boule, ce qui entraîne que chaque composante de son complémentaire est irréductible. Voici un lemme plus général.

Lemme 5.2.2. *Soit Q une sous-variété connexe irréductible (non nécessairement compacte) de W. Soient $K_1, \ldots, K_n$ des sous-variétés régulières deux à deux disjointes de* $\operatorname{Int} Q$. *Alors $Q - \bigcup_i \operatorname{Int} K_i$ est irréductible.*

Preuve. Soit X une composante de $Q - \bigcup_i \operatorname{Int} K_i$. Soit S une 2-sphère plongée dans X. Comme Q est irréductible, S borde une boule $B \subset Q$. Si B n'était pas incluse dans X, elle contiendrait au moins un K_i. Cela contredit le fait que K_i contient un lacet représentant $a \in \pi_1 W$. Par conséquent, X est irréductible. □

Lemme 5.2.3. *Il existe une fonction* $r_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *telle que pour tout compact* $K \subset W$*, il existe une sous-variété régulière* $L \subset W$ *telle que* $K \subset \operatorname{Int} L$ *et* $\operatorname{diam} L \leq r_1(\operatorname{diam} K)$.

Preuve. C'est une conséquence facile de la représentabilité uniforme de a et du lemme 1.5.7 : posons $r_1(t) = C_3(t+C_0+3)$. Soit $K \subset W$ un compact. Soit Y le 0-voisinage de K. Choisissons un lacet combinatoire α de diamètre $\leq C_0$ basé en un sommet de Y. D'après le lemme 1.5.7 et la proposition 1.5.5, $Y \cup \alpha$ est contenu dans l'intérieur d'une certaine sous-variété asphérique $L \subset W$ de diamètre au plus $r_1(\operatorname{diam} K)$. Comme W est irréductible, L est également irréductible, donc régulière. □

Sous-variétés épaisses et sous-variétés S-régulières

Posons dans la suite $C_4 = r_1(0) + \operatorname{diam} H + 5$.

Définition. Soit $V \subset W$ une sous-variété régulière. On dit que V est *épaisse* si V contient une boule de rayon C_4.

Lemme 5.2.4. *Soit* $V \subset W$ *une sous-variété épaisse. Alors* V *contient une sous-variété régulière dont la distance à* ∂V *est au moins* $\operatorname{diam} H + 1$.

Preuve. C'est évident vu le lemme 5.2.3 et la définition de C_4. □

Lemme 5.2.5. *Soit* $K \subset W$ *une sous-variété épaisse. Alors il existe une sous-variété épaisse* $L \subset W$ *telle que* L *est la réunion de* K *et de certaines composantes de* $W - K$, $\operatorname{diam} L \leq \operatorname{diam} K + 2C_4 + 10$ *et chaque composante compacte de* $W - \operatorname{Int} L$ *est épaisse.*

Preuve. Soit L la réunion de K et de toutes les composantes compactes de $W - \operatorname{Int} K$ de diamètre au plus $C_4 + 1$. Comme K est épaisse, L contient une boule de rayon C_4. Par ailleurs, $\operatorname{diam} L \leq \operatorname{diam} K + 2C_4 + 10$, et chaque composante compacte de $W - \operatorname{Int} L$ contient une boule de rayon C_4.

Démontrons par l'absurde que L est irréductible : si L est réductible, il existe une boule $B \subset W$ telle que $\partial B \subset L$ et B n'est pas contenue dans L. Il existe donc une composante X de $W - \operatorname{Int} L$ qui est incluse dans B. Nécessairement, X est compacte, donc contient une boule de rayon C_4, et par conséquent une trajectoire de H. Cette contradiction prouve que L est irréductible. Le lemme 5.2.2 montre que toutes les composantes compactes de $W - \operatorname{Int} L$ sont irréductibles, donc épaisses. □

Définition. Soit $V \subset W$ une sous-variété compacte. On dit que V est *S-régulière* si elle est régulière et admet une fibration de Seifert compatible. Une sous-variété S-régulière est dite *tendue* si elle est homéomorphe à $S^1 \times D^2$ ou incompressible dans W.

Lemme 5.2.6. *Soit $V \subset W$ une sous-variété S-régulière.*

i. Si V n'est pas un tore solide, il n'y a qu'une seule fibration de Seifert compatible sur V à isotopie près.

ii. La réunion de V et de toutes les composantes de $W - \operatorname{Int} V$ qui sont des tores solides est une sous-variété S-régulière tendue.

Preuve. Preuve de (i) : d'après le théorème 4.2.4, les seuls fibrés de Seifert à base orientable pour lesquels il n'y a pas unicité à isotopie près de la fibration de Seifert sont $S^1 \times D^2$, $T^2 \times I$ et $K^2 \tilde{\times} I$ (le I-fibré tordu sur la bouteille de Klein). Dans les deux derniers cas, il n'y a qu'une seule fibration *compatible.*

Preuve de (ii) : la réunion de V et de toutes les composantes de $W - \operatorname{Int} V$ qui sont des tores solides est S-régulière. En effet, la fibre de la fibration compatible sur V n'est pas homotope à zéro dans W, donc cette fibration s'étend aux tores solides complémentaires. Pour terminer la preuve, il suffit de démontrer l'affirmation suivante.

Affirmation. Si une sous-variété S-régulière U n'est pas tendue, au moins une composante de $W - \operatorname{Int} U$ est un tore solide.

Écrivons $\partial U = T_1 \cup \cdots \cup T_n \cup T_{n+1} \cup \cdots \cup T_{n+m}$, où $T_1, \ldots, T_n$ sont compressibles dans W et $T_{n+1}, \ldots, T_{n+m}$ sont incompressibles. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, choisissons un disque de compression D_i pour T_i. Par chirurgie le long de D_i, on obtient une 2-sphère S_i qui borde une boule B_i. Comme T_i est une réunion de fibres dans une fibration de Seifert compatible, T_i n'est pas contenu dans une boule, donc borde un tore solide V_i obtenu en recollant les deux copies de D_i dans B_i. Or par hypothèse, U n'est pas un tore solide, donc il existe i tel que T_i est une composante de $W - \operatorname{Int} U$. ☐

Lemme 5.2.7. *Soient $V_1, \ldots, V_n$ des tores solides épais S-réguliers deux à deux disjoints. Soit Q une sous-variété S-régulière tendue telle que chaque V_i se trouve dans l'intérieur de Q. Posons $X = Q - \bigcup_i \operatorname{Int} V_i$. Si X contient une boule de rayon C_4, X est une sous-variété S-régulière épaisse.*

Preuve. Commençons par remarquer que d'après le lemme 5.2.2, X est irréductible, donc une sous-variété régulière épaisse. D'après le lemme 5.2.4, il existe pour tout i une sous-variété régulière $K_i \subset V_i$ telle que $d(K_i, \partial V_i) >$ diam H. Posons $Y = W - \bigcup_i \operatorname{Int} K_i$. D'après le lemme 5.2.2, Y est irréductible.

Soient $i : X \to W$ et $j : X \to Y$ les applications canoniques. On voit aisément que toutes les composantes de ∂X sont incompressibles dans Y. Ceci implique que le morphisme induit $j_* : \pi_1 X \to \pi_1 Y$ est injectif.

Pour pouvoir appliquer le théorème 4.2.2, on cherche un élément central $A \in \pi_1 X$ tel que $i_* A = a$. Par hypothèse, on peut choisir un point de base $x_0 \in X$ tel que la trajectoire α de x_0 dans H reste dans X. Soit $A \in \pi_1 X$ la classe d'homotopie de α. Par hypothèse, on a $H(X \times S^1) \subset Y$. On en déduit les égalités suivantes entre sous-groupes de $\pi_1 Y$:

$$\begin{aligned} H_*(\pi_1(X \times S^1)) &= H_*(\pi_1(X \times \{0\})) \cdot H_*(\pi_1(\{x_0\} \times S^1)) \\ &= H_*(\pi_1(X \times \{0\})) \\ &= j_* \pi_1 X. \end{aligned}$$

Or $j_* A$ est central dans $H_*(\pi_1(X \times S^1)) \subset \pi_1 Y$. Comme j_* est injectif, on peut conclure que A est central dans $\pi_1 X$. De plus, on a $i_* A = a$ puisque A est la classe d'homotopie d'une trajectoire de H. D'après le théorème 4.2.2, X admet une fibration de Seifert compatible. □

Lemme 5.2.8. *Soit $V \subset W$ une sous-variété épaisse. Si chaque composante de ∂V est un tore et si chaque composante compacte de $W - \operatorname{Int} V$ est épaisse, alors V est S-régulière.*

Preuve. Si V est un tore solide, la régularité de V implique que l'élément central a est une puissance de l'âme de V, donc V admet certainement une fibration de Seifert compatible.

Si V est incompressible, le morphisme induit $\pi_1 V \to \pi_1 W$ est injectif, donc le théorème 4.2.2 fournit une fibration de Seifert compatible sur V.

Supposons donc que V n'est ni un tore solide ni une sous-variété incompressible. Soient $T_1, \dots, T_n$ les composantes de ∂V qui sont compressibles. J'affirme que chaque T_i borde un (unique) tore solide V_i qui soit contient V, soit intersecte V en T_i.

En effet, soit Y_i la composante de $W - \operatorname{Int} V$ qui contient T_i. Alors Y_i est soit non compacte soit épaisse, donc elle n'est contenue dans aucune boule. La compressibilité de T_i implique que T_i sépare W en deux sous-variétés W_1, W_2, dont l'une contient V et l'autre Y_i. Exactement une sous-variété parmi W_1, W_2 est compacte. Comme aucune ne peut être incluse dans une boule, celle qui est compacte est un tore solide V_i.

Convenons de dire que le tore T_i est *extérieur* si $V \subset V_i$ et *intérieur* sinon. Remarquons qu'il y a au plus un tore extérieur parmi les T_i.

S'il existe i_0 tel que T_{i_0} est extérieur, on applique le lemme 5.2.7 à $Q = V_{i_0}$ avec les tores solides correspondant aux tores intérieurs. Si tous les T_i sont intérieurs, on applique le même lemme avec $Q = V \cup \bigcup_i V_i$. □

Existence de sous-variétés épaisses et S-régulières

Notre but est maintenant de démontrer le résultat d'existence suivant :

Proposition 5.2.9. *Il existe une fonction $r_3 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que pour tout compact $K \subset W$, il existe une sous-variété épaisse et S-régulière $V \subset W$ contenant K dans son intérieur, vérifiant $\operatorname{diam} V \leq r_3(\operatorname{diam} K)$ et telle que toutes les composantes compactes de $W - \operatorname{Int} V$ sont épaisses.*

On a besoin d'un lemme.

Lemme 5.2.10. *Il existe une fonction $r_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que pour tout compact $K \in W$, il existe une sous-variété épaisse $U \subset W$ contenant K dans son intérieur, de diamètre au plus $r_2(\operatorname{diam} K)$, et dont le bord est une réunion de tores.*

Preuve. Soit x un point de K. D'après le lemme 5.2.3, $K \cup B(x, C_4)$ est contenu dans l'intérieur d'une certaine sous-variété régulière K' de diamètre au plus $r_1(\operatorname{diam} K + 2C_4 + 3)$. En particulier, K' est épaisse. En appliquant le lemme 5.2.3 encore deux fois, on obtient des sous-variétés régulières K'', K''' de W vérifiant les conditions suivantes : $K' \subset \operatorname{Int} K''$, $K'' \subset K'''$, les distances $d(\partial K', \partial K'')$ et $d(\partial K'', \partial K''')$ sont strictement supérieures au diamètre de H et $\operatorname{diam} K'''$ est majoré en fonction de $\operatorname{diam} K$.

Soient $X_1, \ldots, X_p$ les composantes de $K''' - \operatorname{Int} K'$. Chaque X_i est irréductible d'après le lemme 5.2.2. Pour tout $1 \leq i \leq p$, notons $F_{i,1}, \ldots, F_{i,n_i}$ les composantes de $\partial K''$ contenues dans X_i. On définit une classe $\omega_i \in H_2(X_i)$ en posant $\omega_i = \sum_j [F_{i,j}]$.

Affirmation. Pour tout i, il existe une collection finie (éventuellement vide) de tores plongés deux à deux disjoints $T_{i,1}, \ldots, T_{i,m_i}$, dont aucun n'est homologue à zéro dans X_i, et vérifiant la formule suivante dans $H_2(X_i)$:

$$\omega_i = \sum_k [T_{i,k}].$$

Supposons pour le moment que l'affirmation est vraie. Considérons la collection de tous les tores $T_{i,k}$ pour tout i et tout k et oublions ceux qui sont homologues à zéro dans K'''. La collection de ceux qui restent borde une sous-variété compacte $U \subset K'''$ contenant K'. Par conséquent, K est inclus dans l'intérieur de U et $\operatorname{diam} U$ est majoré en fonction de $\operatorname{diam} K$. Montrons que U est irréductible. Si U est réductible, il existe une boule $B \subset K'''$ telle que $\partial B \subset U$ et B n'est pas contenue dans U. On en déduit que B contient une composante T de ∂U. Cela contredit le fait que T n'est pas homologue à zéro dans K'''. Nous venons de prouver que U est irréductible, donc épaisse. Cela termine la preuve du lemme 5.2.10 modulo l'affirmation.

Prouvons maintenant l'affirmation. Fixons i et supposons que $\omega_i \neq 0$.

Lemme 5.2.11. *Pour tout j, il existe une collection finie de tores* singuliers $T'_{j,1}, \ldots, T'_{j,p_j}$ *tels que la formule suivante est vraie dans $H_2(X_i)$:*

$$F_{i,j} = \sum_l [T'_{j,l}].$$

Preuve. Pour simplifier les notations, posons $F = F_{i,j}$. Rappelons que F est une composante de $\partial K''$. La condition $d(\partial K'', \partial X) > \operatorname{diam} H$ entraîne donc que l'image de $F \times S^1$ par H est contenue dans X_i. On peut par conséquent considérer la restriction $H : F \times S^1 \to X_i$. Soit $x_0 \in F$ un point de base et $G = H_*(\pi_1(F \times S^1, (x_0, 0))) \subset \pi_1(X_i, x_0)$. Soit α la trajectoire de x_0. La classe d'homotopie de α dans $\pi_1(W, x_0)$ est a, donc la classe d'homotopie de α dans $\pi_1(X_i, x_0)$ est un élément non trivial a' de G. En fait, a' est central dans G vu que $\pi_1(S^1)$ est central dans $\pi_1(F \times S^1)$. Nous venons de prouver que le centre de G n'est pas trivial.

Soit X' le revêtement de X_i tel que $\pi_1 X' = G$. Comme X_i est irréductible, X_i et X' sont tous les deux asphériques, donc on a $H_2(X') = H_2(G)$. De plus, X' est irréductible par le théorème de la sphère équivariante 4.1.4. Considérons l'inclusion $j : F \to X$. Comme G contient $j_*(\pi_1 F)$, j se factorise à travers une application $j' : F \to X'$. Or la classe d'homologie $[F] \in H_2(X)$ n'est pas triviale. En prenant l'image par j'_* de cette classe d'homologie, on obtient un élément non trivial ω de $H_2(G)$.

Le théorème du cœur compact 4.1.5 donne une sous-variété $X'_0 \subset X'$ telle que $\pi_1 X'_0 = G$. Comme G a un centre non trivial, le théorème 4.2.2 permet d'affirmer que X'_0 est un fibré de Seifert. Il en résulte que G est le groupe fondamental d'un fibré de Seifert compact à bord non vide. Par conséquent, d'après le lemme 4.2.5, la classe $\omega \in H_2(G)$ peut être représentée par des sous-groupes isomorphes à $\mathbf{Z}^2$. On obtient ainsi les tores singuliers désirés. (Noter l'importance de l'asphéricité de X_i.) □

Le théorème du tore homotopique 4.2.6 produit une sous-variété fibrée de Seifert (non nécessairement connexe) $V \subset X$ qui contient des tores singuliers homotopes aux $T'_{j,l}$. Considérons la collection de tous ces tores singuliers pour tout j et tout l, et notons cette collection $T''_1, \ldots, T''_q$. Soit ω' la somme de leurs classes d'homologie dans $H_2(\Sigma)$. En appliquant à nouveau le lemme 4.2.5, on obtient une famille $T_{i,1}, \ldots, T_{i,m_i}$ de tores plongés deux à deux disjoints incompressibles dans V vérifiant $\omega' = \sum_k [T_{i,k}] \in H_2(V)$.

Or la somme des classes d'homologie de $T''_1, \ldots, T''_q$ dans $H_2(X)$ est ω_i, d'où $\omega_i = \sum_k [T_{i,k}]$. Ceci prouve l'affirmation et termine la preuve du lemme 5.2.10. □

Preuve de la proposition 5.2.9. Posons $r_3(t) = r_2(t) + 2C_4 + 10$. Soit K un compact de W. D'après le lemme 5.2.10, il existe une sous-variété épaisse

$U \subset W$ contenant K dans son intérieur, de diamètre au plus $r_2(\operatorname{diam} K)$, et dont le bord est une réunion de tores. D'après le lemme 5.2.5, en ajoutant à U certaines composantes de $W - U$, on obtient une sous-variété épaisse V de diamètre au plus $r_3(\operatorname{diam} K)$, dont le bord est une réunion de tores et telle que toutes les composantes compactes de $W - \operatorname{Int} V$ sont épaisses. D'après le lemme 5.2.8, V est S-régulière. □

5.2.3 Preuve de la proposition 5.1.2

Proposition 5.1.2 *Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte, orientable, uniformément irréductible et uniformément représentable. Alors W admet une fibration de Seifert compatible.*

Preuve. D'après le lemme 5.2.9, W admet une exhaustion par des sous-variétés épaisses et S-régulières. En rajoutant des tores solides complémentaires comme dans le lemme 5.2.6, on obtient une exhaustion $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset \cdots$ où chaque V_n est une sous-variété S-régulière épaisse et tendue. On peut supposer sans perte de généralité que pour tout n, la sous-variété $X_n = V_n - \operatorname{Int} V_0$ est épaisse.

S'il existe n tel que V_n contient un tore incompressible, V_n est incompressible. D'après le lemme 5.2.6, V_n admet une unique fibration de Seifert compatible à isotopie près. La même chose est vraie pour V_{n+1}. Comme toutes les composantes de ∂V_n sont des tores incompressibles, on peut choisir la fibration de V_{n+1} de façon à ce que ce soit une extension de celle sur V_n. En continuant par récurrence, on construit une fibration de Seifert compatible sur W toute entière.

Il nous reste à traiter le cas difficile où chaque V_n est un tore solide. Comme V_0 et tous les X_n sont épaisses, on peut appliquer le lemme 5.2.7 à X_n pour chaque n. On obtient une fibration de Seifert compatible sur chaque X_n. Pour tout $n \geq 1$, le tore ∂V_n est incompressible dans V_{n+1}, donc l'argument de récurrence du paragraphe précédent permet de construire une fibration de Seifert compatible sur $W - \operatorname{Int} V_0$. Cette fibration s'étend au tore solide V_0 puisque la fibre n'est pas homotope à zéro dans W. On a donc construit une fibration de Seifert compatible sur W toute entière. □

5.3 Le M-scindement

À partir de maintenant, nous supposons que notre VTC $(W, \mathcal{T}, a)$ est *maximale*. Notre but est de montrer que $(W, \mathcal{T}, a)$ admet un M-scindement.

5.3.1 Premières conséquences de la maximalité

Pour simplifier, on utilise la proposition 5.1.2 et on fixe une fibration de Seifert compatible $p : W \to B$.

Définition. Soit M une sous-variété de W. Une fibration de Seifert sur M est dite *fortement compatible* si l'élément de $\pi_1 W$ représenté par la fibre ordinaire est exactement a.

Notons que p est automatiquement fortement compatible, puisque a est maximal. Un exemple de fibration de Seifert compatible qui n'est pas fortement compatible est donné par une fibration en cercles triviale d'un tore solide dont l'âme est une fibre exceptionnelle de p.

Lemme 5.3.1. *Soit M une sous-variété connexe de W. Si au moins une composante de ∂M est incompressible dans W, toute fibration de Seifert compatible sur M est fortement compatible.*

Preuve. Soit p_M une fibration de Seifert compatible sur M et T un tore incompressible qui est une composante de ∂M. La fibration de Seifert p_M induit une fibration en cercles de T. Comme T est incompressible dans W, on peut isotoper p de sorte que T soit saturé. On obtient donc deux fibrations sur T. Comme T est π_1-injectif, les éléments de $\pi_1 T$ représentés par les fibres de ces deux fibrations sont une puissance l'une de l'autre. Ceci implique que ces deux fibrations sont homotopes sur T. On en déduit que p_M est fortement compatible. □

Lemme 5.3.2. *Soit $V \subset W$ une sous-variété épaisse S-régulière. Si chaque composante compacte de $W - \operatorname{Int} V$ est épaisse, V admet une fibration de Seifert fortement compatible. De plus, une telle fibration est unique à isotopie près.*

Preuve. Rappelons que dans une variété de Seifert, toute racine de la fibre ordinaire est une puissance d'une fibre exceptionnelle. Par conséquent, si p n'a pas de fibre exceptionnelle, n'importe quelle fibration de Seifert compatible sur V est fortement compatible. On peut donc supposer que W n'est pas $S^1 \times \mathbf{R}^2$. Cela implique que W admet une exhaustion par des sous-variétés S-régulières incompressibles.

Si ∂V a une composante incompressible dans W, l'existence d'une fibration fortement compatible est garantie par le lemme 5.3.1. On suppose donc que ce n'est pas le cas. Cela signifie qu'il existe des tores solides $V_1, \ldots, V_n$ tels que pour tout i, $V_i \cap V$ est une composante de ∂V, et $U = V \cup \bigcup_i V_i$ est un tore solide.

Soit Q une sous-variété S-régulière incompressible telle que $U \subset \operatorname{Int} Q$. D'après le lemme 5.2.7, $X = Q - \bigcup_i \operatorname{Int} V_i$ admet une fibration de Seifert compatible. D'après le lemme 5.3.1, cette fibration est fortement compatible. Or V est incompressible dans X, donc on peut isotoper la fibration de façon à ce que V soit saturée. Par conséquent, V admet une fibration de Seifert fortement compatible.

L'unicité à isotopie près de la fibration fortement compatible est claire si V est un tore solide et se déduit du lemme 5.2.6(i) dans les autres cas. □

On peut remarquer que le lemme 5.3.2 est faux si on omet de supposer V épaisse. Par exemple, on peut mettre la fibration en cercles triviale sur un voisinage régulier d'une fibre exceptionnelle et retirer des fibres.

5.3.2 Les tores

Proposition 5.3.3. *Il existe des constantes $C_5, C_6, C_7 \geq 0$, une fonction $r_4 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, une subdivision uniforme $\mathcal{T}_1$ de $\mathcal{T}$ et une sous-variété Σ, chaque composante M de $W - \operatorname{Int}\Sigma$ étant munie d'une fibration de Seifert fortement compatible p_M, de façon à ce que les propriétés suivantes soient vérifiées, toutes les distances et les longueurs étant mesurées relativement à $\mathcal{T}_1$:*

i. Chaque composante de Σ est combinatoire (relativement à $\mathcal{T}_1$), épaisse, S-régulière, et son diamètre est inférieur ou égal à C_5.

ii. Chaque composante M de $W - \operatorname{Int}\Sigma$ a un bord C_6-quasidense. De plus, pour tout compact $K \subset M$, il existe une sous-variété S-régulière $L \subset M$ telle que $K \subset \operatorname{Int} L$, $\operatorname{diam} L \leq r_4(\operatorname{diam} K)$, et M admet une fibration de Seifert fortement compatible isotope à p_M telle que L est saturée dans cette fibration.

iii. Sur chaque tore T de $\partial\Sigma$, il existe une courbe c_T qui est une fibre de la fibration p_M concernée, combinatoire et de longueur au plus C_7.

Preuve. Posons $C_5' = r_3(0)$, $C_6' = \sup\{C_5', 3\operatorname{diam} H + 10\}$ et $r_4'(t) = r_3(t + 2C_6' + C_5' + 10)$.

Soit $N \subset W$ une partie C_6'-séparée maximale. Comme on l'a déjà vu, N est $(2C_6' + 1)$-quasidense. Appliquons la proposition 5.2.9 pour chaque point $x \in N$ en prenant $K = \{x\}$. On obtient pour chaque x une sous-variété S-régulière épaisse V_x de diamètre au plus C_5' et telle que $x \in \operatorname{Int} V_x$. Soit α_x un lacet combinatoire de longueur inférieure ou égale à C_0 passant par x et représentant a.

Posons $\Sigma = \bigcup_{x \in N} V_x$. Comme $C_5' \leq C_6'$, $V_x \cap V_y = \emptyset$ pour $x \neq y$, donc chaque V_x est une composante de Σ. Comme $\mathcal{T}$ est à géométrie bornée, il n'y a qu'un nombre fini de couples $(B(x, C_6'), \alpha_x)$ à homéomorphisme combinatoire près. On peut donc supposer que $\partial\Sigma$ est en position générale par rapport à $\mathcal{T}$ et qu'il y a un nombre fini de composantes de Σ à homéomorphisme combinatoire près.

Pour continuer, nous avons besoin d'une version « relative » de la proposition 5.2.9. On dit qu'une sous-variété V de W est *compatible avec* Σ si pour tout $x \in N$, on a soit $V_x \subset \operatorname{Int} V$, soit $V_x \cap V = \emptyset$.

Lemme 5.3.4. *Pour tout compact $K \subset W$, il existe une sous-variété épaisse S-régulière V compatible avec Σ, de diamètre au plus $r_4'(\operatorname{diam} K)$, contenant K dans son intérieur et telle que chaque composante compacte de $W - \operatorname{Int} V$ est épaisse.*

Preuve. Soit K un compact de W. Soit K_1 la réunion de K et de toutes les composantes de Σ dont la distance à K vaut au plus $2C_6'$. Les constantes ont été choisies de façon à ce que pour tout x on ait soit $V_x \subset K_1$, soit $d(V_x, K_1) \geq 2C_6'$. D'après le lemme 5.2.10, il existe une sous-variété épaisse U contenant K_1 et dont le bord est une réunion de tores, telle que $\operatorname{diam} U \leq r_2(K_1)$. Observons que U est contenue dans la sous-variété K''' de ce lemme, qui est obtenue à partir de K_1 en répétant trois fois l'opération consistant à prendre le $(\operatorname{diam} H)$-voisinage et à ajouter des composantes complémentaires compactes incluses dans des boules. Or chaque composante de Σ est régulière, donc ne peut être incluse dans une boule. Il en résulte que le $2C_4$-voisinage de U est disjoint des composantes de Σ qui ne sont pas contenues dans K_1.

On construit V à partir de U en rajoutant de petites composantes du complémentaire comme dans la preuve du lemme 5.2.5, de sorte que chaque composante compacte de $W - \operatorname{Int} V$ est épaisse. Comme dans la preuve de la proposition 5.2.9, on conclut en utilisant le lemme 5.2.8 que V est une sous-variété épaisse S-régulière ; par construction, on a $\operatorname{diam} V \leq r_4'(\operatorname{diam} K)$, donc V a toutes les propriétés demandées. □

Soit M une composante de $W - \operatorname{Int} \Sigma$. Grâce au lemme 5.3.4, on obtient une exhaustion $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset W$ telle que chaque V_i est une sous-variété épaisse, S-régulière, tendue, compatible avec Σ. Les lemmes 5.2.7 et 5.3.2 assurent que pour tout i, $V_i \cap M$ admet une fibration de Seifert fortement compatible. Ces fibrations se recollent pour donner une fibration globale p_M sur M. Remarquons que pour chaque tore $T \subset \partial M$, la fibre de p_M et celle de la fibration fortement compatible sur Σ sont homotopes dans T.

Il en résulte que pour tous $x, x' \in N$, si les couples $(B(x, C_6'), \alpha_x)$ et $(B(x', C_6'), \alpha_{x'})$ sont homéomorphes, alors il existe un homéomorphisme ϕ entre eux tel que $V_{x'} = \phi(V_x)$ et pour toute composante T de ∂V_x, si l'on note M (resp. M') la composante de $W - \operatorname{Int} \Sigma$ qui contient T (resp. $\phi(T)$), alors l'image par ϕ d'une fibre de p_M contenue dans T est homotope dans $\phi(T)$ à la fibre de $p_{M'}$.

Ce fait entraîne l'existence d'une subdivision uniforme $\mathcal{T}_1$ de $\mathcal{T}$ telle que Σ est combinatoire par rapport à $\mathcal{T}_1$ et d'une constante $C_7 \geq 0$ et d'une famille de courbes c_T telles que la propriété (iii) est vérifiée. Comme $d_{\mathcal{T}}$ et $d_{\mathcal{T}_1}$ sont quasi-isométriques, il existe des constantes $C_5, C_6 \geq 0$ et une fonction r_4 telles que les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées. □

5.3.3 Le graphe d'anneaux : définitions

On fixe dans toute la suite une triangulation $\mathcal{T}_1$ et une sous-variété Σ vérifiant la conclusion de la proposition 5.3.3. On choisit une composante M de $W - \operatorname{Int}\Sigma$. On note encore $\mathcal{T}_1$ la triangulation sur M obtenue en restreignant $\mathcal{T}_1$. Comme $\mathcal{T}$ est à géométrie bornée et $\mathcal{T}_1$ est une subdivision uniforme de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$ est également à géométrie bornée. On fixe une métrique de Jaco-Rubinstein régulière sur $\mathcal{T}_1^{(2)}$.

Par abus de notation, on note encore a l'élément de $\pi_1 M$ représenté par la fibre ordinaire de p_M (bien que le morphisme $\pi_1 M \to \pi_1 W$ ne soit pas en général injectif). On sait que M est irréductible. Le bord de M est incompressible sauf si M est un tore solide, mais dans ce cas son diamètre ne peut excéder $C_5 + C_6$. Comme notre but est de découper M en morceaux de taille uniformément bornée, on supposera dans la suite que M n'est pas un tore solide. Les résultats de la section 4.3.2 s'appliquent donc.

Un *graphe d'anneaux* E est un ensemble d'anneaux h-minimaux (c'est-à-dire verticaux, essentiels et d'aire PL minimale dans leur classe d'homotopie) appelés *arêtes*. Un graphe d'anneaux est *plongé* si chaque arête est plongée et deux arêtes distinctes ne se coupent jamais. Il est *réduit* si deux arêtes distinctes ne sont jamais homotopes. On appelle E-composantes les composantes de $M - \bigcup E$.

On va démontrer la chose suivante :

Proposition 5.3.5. *Il existe un graphe d'anneaux plongé réduit (éventuellement vide) $E(M)$ dans M vérifiant les propriétés suivantes :*

i. Chaque $E(M)$-composante a un H_2 trivial ;

ii. Les $E(M)$-composantes ont un diamètre uniformément borné ;

iii. Les arêtes de $E(M)$ ont un poids uniformément borné.

De plus, les bornes dans (ii) et (iii) ne dépendent que de W (et pas de M).

5.3.4 Construction du graphe d'anneaux

Première étape

Proposition 5.3.6. *Il existe une constante $C_8 \geq 0$ et un graphe d'anneaux plongé réduit E_0 tel que chaque arête de E_0 a un poids inférieur ou égal à C_8 et chaque E_0-composante a un H_2 trivial.*

Preuve. Commençons par une définition. Soit T un tore incompressible. Si α est un arc (propre) dans M, on dit que α *annihile* T si le nombre d'intersection de α et T est impair. Soit A un anneau essentiel dans M. Choisissons une fibration de Seifert compatible sur X telle que A et T sont saturés et notons η, ξ leurs projetés sur la base de la fibration. On dit que A *annihile* T si le nombre d'intersection de η et ξ est impair. Observons que si T_1 et T_2 sont homologues, A annihile T_1 si et seulement si A annihile T_2. On peut donc dire que A annihile une classe d'homologie donnée.

Lemme 5.3.7. *Pour tout tore incompressible T tel que $[T] \neq 0 \in H_2(M)$, il existe un anneau d'aire PL minimale parmi tous les anneaux verticaux essentiels annihilant T, et un tel anneau est automatiquement plongé. De plus, il existe une constante C_8 telle que tout tore comme ci-dessus est annihilé par un anneau vertical essentiel de poids au plus C_8.*

Preuve. Soit T un tore incompressible tel que $[T] \neq 0 \in H_2(M)$. On verra plus loin qu'il existe toujours un anneau vertical essentiel A' qui annihile T. Admettons ce résultat pour l'instant et montrons qu'il en existe un d'aire PL minimale. D'après le lemme 4.3.1, tout anneau de poids au plus $\mathrm{pd}(A')$ est dans le $\mathrm{pd}(A')^2$-voisinage de T, donc l'existence d'un anneau d'aire minimale annihilant T se montre comme dans 4.3.2(i). Pour voir qu'un tel anneau est plongé, on applique 4.3.2(ii) en remarquant qu'un anneau qui annihile un tore ne peut pas être le double d'un ruban de Möbius.

Posons $C_8' = 12C_6 + 13$ et $C_8'' = r_4(C_8')$.

Soit T un tore incompressible tel que $[T] \neq 0 \in H_2(M)$. Soit T ne sépare pas, soit T sépare et chaque composante de M découpée le long de T rencontre ∂M. Dans les deux cas, T est annihilé par un arc α. Supposons que α est combinatoire de longueur minimale l. Notons x, y les extrémités de α. Soit z un point de $\alpha \cap \mathcal{T}_1^{(0)}$ tel que les longueurs des sous-arcs $[xz]$ et $[zy]$ sont minorées par $(l-1)/2$. Comme ∂M est C_6-quasidense, il existe nécessairement $w \in \partial M \cap \mathcal{T}_1^{(0)}$ et un arc combinatoire β reliant z et w de longueur au plus $6(C_6+1)$. Au moins un des deux arcs $[xz] \cup \beta$ et $[yz] \cup \beta$ annihile T, donc par minimalité, on a $l \leq C_8'$.

En particulier, α a un diamètre inférieur ou égal à C_8'. Grâce à la proposition 5.3.3(ii), on obtient une sous-variété S-régulière $L \subset M$ de diamètre au plus $r_4(C_8')$, contenant α dans son intérieur et telle qu'il existe une fibration de Seifert fortement compatible $p : M \to B$ telle que $L = p^{-1}(p(L))$.

Posons $\eta = p(\alpha)$ et $\xi = p(T)$. Mettons η et T en position générale tout en laissant η dans $p(L)$. Si η est plongé, posons $A = p^{-1}(\eta)$. Sinon écrivons $\eta = \eta_1 \cup_w \eta_2 \cup_w \eta_3$ où w est un point double de η. Si $\#\eta_2 \cap \xi$ est pair, remplaçons η par $\eta_1 \cup \eta_3$. Si $\#\eta_2 \cap \xi$ est impair, remplaçons η par $\eta_1 \cup \eta_2 \cup \eta_1^{-1}$ (où l'on a noté η_1^{-1} l'arc η_1 avec l'orientation opposée). Après perturbation, on obtient un arc qui a moins de points doubles que η et qui rencontre toujours ξ en un nombre impair de points. Au bout d'un nombre fini de telles opérations, on obtient un arc plongé. L'image réciproque de cet arc est un anneau essentiel de diamètre au plus C_8'' annihilant T.

Nous allons maintenant donner une borne uniforme sur le poids minimal d'un tel anneau. On met d'abord T en position normale. Nous venons de montrer qu'il existe un anneau essentiel A de diamètre au plus C_8'' annihilant T. Soit T' une composante de ∂M contenant au moins une composante de ∂A. Comme $\operatorname{diam} T' \leq C_5$, la géométrie bornée de $\mathcal{T}_1$ donne une borne sur la taille de $N(T', C_8'')$. Par conséquent, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le 5-uplet $(N(T', C_8''), T', M \cap N(T', C_8''), T \cap N(T', C_8''), c_{T'})$ à homéomorphisme combinatoire près. Dans chaque situation, il existe un anneau $A \subset M \cap N(T', C_8'')$ en position normale tel qu'une composante de ∂A se trouve sur T', est librement homotope à $c_{T'}$ et le nombre de composantes de $A \cap T$ qui sont des courbes essentielles est impair. Sélectionnons pour chaque situation un anneau possédant toutes ces propriétés et notons $\mathcal{A}$ la collection de ces anneaux. Soit C_8 le maximum de leurs poids.

Pour tout T, il existe un anneau A de diamètre au plus C_8'' annihilant T. Le C_8''-voisinage de T' correspond à une certaine situation modèle possédant un anneau $A' \in \mathcal{A}$. Alors en ramenant A' dans W par un homéomorphisme combinatoire, on obtient un anneau de poids au plus C_8 annihilant T. Cet anneau doit être vertical à cause de la condition sur $c_{T'}$ et essentiel du fait qu'aucun anneau parallèle au bord ne peut annihiler T. □

Soit $\mathcal{L} = \{[T_1], [T_2], \dots\}$ une liste de toutes les classes d'homologie représentées par des tores incompressibles plongés dans M. Le graphe E_0 est construit par récurrence selon le même principe qu'au lemme 2.4.1. À chaque étape, on prend le premier élément $[T]$ restant sur la liste. Le lemme 5.3.7 fournit un anneau vertical essentiel h-minimal de poids au plus C_8 qui annihile $[T]$. On supprime de la liste toutes les classes annihilées par cet anneau et on recommence. On obtient ainsi un graphe d'anneaux E_0.

On montre comme au lemme 2.4.1 que ce graphe est plongé et réduit, en utilisant la proposition 4.3.3 pour adapter les arguments d'intersections de géodésiques. Pour voir que chaque E_0-composante a un H_2 trivial, on suppose que ce n'est pas le cas. Soit donc X une E_0-composante telle que $H_2(X) \neq 0$. On sait que X est une variété de Seifert, donc d'après le lemme 4.2.5, X contient un tore incompressible T représentant une classe non nulle de $H_2(X)$. Or T doit être homologue à zéro dans M, sinon sa classe dans $H_2(M)$ apparaîtrait sur la liste $\mathcal{L}$ et ainsi T serait annihilé par une arête de E_0. Par conséquent, T borde une sous-variété compacte $Y \subset \operatorname{Int} M$. Mais alors aucune arête de E_0 ne peut rencontrer Y, donc $Y \subset X$. Cette contradiction termine la preuve de la proposition 5.3.6. □

Seconde étape

Soit E_0 le graphe d'anneaux construit dans la proposition 5.3.6. Nous allons ajouter des anneaux à E_0 pour découper les E_0-composantes en morceaux plus petits de diamètre uniformément borné.

Soit X une E_0-composante. On a par hypothèse $H_2(X) = 0$, mais $H_2(\bar{X})$ peut être non trivial s'il existe une arête A de E_0 dont les deux côtés donnent sur X. Pour éviter cette difficulté, on travaille dans la variété $\hat{X}$ construite de la façon suivante : remplaçons chaque arête de E_0 par deux copies parallèles de cette arête, obtenant un graphe (non réduit) E'. Alors les E'-composantes qui ne sont pas bordées par deux arêtes parallèles sont en bijection avec les E_0-composantes. Si X est une E_0-composante, on définit $\hat{X}$ comme l'adhérence de la E'-composante correspondante, munie de la structure combinatoire induite par la triangulation $\mathcal{T}_1$ et les arêtes de E'.

On identifie X au sous-ensemble évident de $\hat{X}$ et on munit $\hat{X}$ de la quasi-métrique induite par le recouvrement de $\hat{X}$ par ses intersections avec les 3-simplexes de $\mathcal{T}_1$. Le *diamètre intrinsèque* de X est le diamètre de X (ou $\hat{X}$) pour cette quasi-métrique. Remarquons que X et $\hat{X}$ sont homotopiquement équivalents ; en particulier, $H_2(\hat{X}) = 0$.

Le bord de $\hat{X}$ admet une décomposition $\partial\hat{X} = \partial_0\hat{X} \cup \partial_1\hat{X}$ où $\partial_0\hat{X} = \Sigma \cap \partial\hat{X}$ et $\partial_1\hat{X}$ est la réunion des anneaux correspondant aux arêtes de E'. On appelle les composantes de $\partial_0\hat{X}$ *anneaux de bord* et les composantes de $\partial_1\hat{X}$ *anneaux-frontières.*

Un anneau (ou un arc) proprement plongé dans $\hat{X}$ est dit *bien plongé* si son bord est contenu dans $\partial_0\hat{X}$. Un arc ou un anneau bien plongé est *essentiel* si ses deux composantes de bord se trouvent sur deux anneaux de bord différents qui ne sont pas reliés par un anneau-frontière. On appelle *anneau de coupure* un anneau bien plongé essentiel. Un anneau de coupure est *c-minimal* s'il est d'aire PL minimale parmi tous les anneaux de coupure reliant les mêmes anneaux de bord.

La proposition suivante est une reformulation de la proposition 5.3.5.

Proposition 5.3.8. *Il existe des constantes $C_9, C_{10} \geq 0$ et un graphe d'anneaux plongé réduit E tel que chaque E-composante X a un H_2 trivial et un diamètre intrinsèque inférieur ou égal à C_{10}, et chaque arête a un poids inférieur ou égal à C_9.*

Lemme 5.3.9. *Il existe une fonction $r_5 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que si $\alpha \subset \hat{X}$ est un arc bien plongé reliant deux anneaux de bord distincts T et T', alors soit T et T' sont reliés par un anneau-frontière, soit il existe un anneau de coupure c-minimal $A \subset X$ de poids au plus $r_5(\mathrm{taille}(\alpha))$ reliant T et T'.*

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 5.3.7. L'anneau A est construit comme réunion de fibres dans une fibration de Seifert fortement compatible définie sur une sous-variété S-régulière. Pour assurer que A se trouve dans la bonne composante, il suffit de choisir la fibration de Seifert de sorte que son intersection avec le graphe d'anneaux soit saturée, ce qui est toujours possible puique les arêtes sont des anneaux verticaux. □

Lemme 5.3.10. *Soient A, A' des anneaux c-minimaux. Supposons que A relie des anneaux de bord T, U et que A' relie des anneaux de bord T', U'. Alors :*

i. Soit A et A' sont disjoints, soit éventuellement après perturbation comme dans la proposition 4.3.3, l'intersection est réduite à une *courbe essentielle.*

ii. Si $T = T'$, A et A' sont disjoints.

Preuve. Preuve de (i) : Supposons que A et A' sont transverses (le cas général en découle en utilisant l'astuce de Meeks-Yau). D'après la proposition 4.3.3, $A \cap A'$ est une réunion disjointe de courbes fermées essentielles. Supposons qu'il y a au moins deux courbes $c_1, c_2 \subset A \cap A'$. On les choisit de façon à ce que les anneaux $A_1 \subset A$ et $A'_1 \subset A'$ bordés par $c_1 \cup c_2$ ne se rencontrent pas en dehors de $c_1 \cup c_2$. En échangeant A_1 et A'_1 et en arrondissant les coins, on obtient deux anneaux A'', A''' tels que A'' relie T et U, A''' relie T' et U', et $|A''| + |A'''| < |A| + |A'|$. Cela contredit la c-minimalité de A et A'.

La preuve de (ii) est similaire : si A et A' ne sont pas disjoints, on obtient en perturbant A si nécessaire une courbe essentielle transverse d'intersection. On procède alors à un échange pour obtenir une contradiction. □

Preuve de la proposition 5.3.8. Le raisonnement est similaire à celui de la proposition 2.4.5. Définissons les constantes suivantes :

$$l = 2C_6 + 2\nu(\mathcal{T}_1)C_8 + 3$$
$$C_9 = \sup(r_5(\nu(\mathcal{T}_1)^{l+1}), C_8)$$
$$s = C_9^2 + 1$$
$$C_{10} = 7s + 3C_5 + 50.$$

On va construire une suite transfinie de graphes d'anneaux E_λ vérifiant les propriétés suivantes : E_λ est une extension de chaque graphe E_μ pour $\mu < \lambda$; chaque arête de E_λ a un poids majoré par C_9 (et donc un diamètre majoré par $s - 1$ d'après les lemmes 1.3.3 et 4.3.1) ; pour chaque E_λ-composante X, soit le diamètre intrinsèque de X est inférieur ou égal à C_{10}, soit X admet au plus un anneau-frontière qui n'est pas déjà dans E_0 (appelé « l'anneau rouge »).

Il est clair que E_0 a toutes ces propriétés. Si λ est un ordinal limite, on pose $E_\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} E_\mu$. Nous devons maintenant expliquer comment on construit $E_{\lambda+1}$ connaissant E_λ. Supposons donc que pour l'ordinal λ, il existe une composante X de E_λ qui est non compacte ou a un diamètre intrinsèque strictement plus grand que C_{10}.

Soit $A_0 \subset \partial_1 \hat{X}$ l'anneau rouge. Soit U la réunion de A_0 et des deux anneaux de bord adjacents. Soit Y une sous-variété telle que $N(U,s) \subset Y \subset N(U,s+1)$. Soient $F_0, \ldots, F_m$ les composantes de ∂Y. Comme $H_2(\hat{X}) = 0$, chaque F_i borde une sous-variété Y_i. On dit que F_i est *extérieure* si $Y \subset Y_i$. Il y a exactement une composante extérieure, mettons F_0. Alors F_0 contient U. De plus, F_0 ne remplit pas $\partial \hat{X}$, car $F_0 = \partial \hat{X}$ impliquerait $\mathrm{diam}(X) \leq 2s + 2C_6 + 3 < C_{10}$.

Affirmation. $F_0 - U$ est connexe.

En effet, U se rétracte sur une courbe essentielle $c \subset F_0$. Cherchant une contradiction, supposons que c est séparante. Soit F une composante de F_0 découpé le long de c. Alors F est une surface orientable dont le bord est une courbe essentielle dans M. Comme F ne peut être ni un disque ni un anneau, F doit être compressible. Après un nombre fini de compressions, on arrive à une contradiction. Ceci prouve l'affirmation.

Soient x, y deux points tels que x appartient à l'un des anneaux adjacents à A_0 et y appartient à l'autre. L'affirmation implique qu'il existe un arc γ dans $F_0 - U$ reliant x à y. On peut décomposer γ en $\gamma_1 \cup \xi_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \xi_{p-1} \cup \gamma_p$ avec $\gamma_i \subset \partial \hat{X}$ et $\xi_i \subset \hat{X} - N(U, C_7')$. Soient $Z_1, \ldots, Z_q$ les composantes de l'adhérence de $\partial \hat{X} \cap N(F_0, C_6) - U$. Comme $\partial \hat{X}$ est C_6-quasidense, chaque γ_i se trouve dans un certain $Z_{j(i)}$. Considérons le graphe abstrait $\mathcal{G}$ dont les sommets sont les Z_j et où on met une arête entre Z_j et Z_k si et seulement si $N(Z_j, C_6) \cap N(Z_k, C_6)$ n'est pas contenu dans $N(U, s)$.

Lemme 5.3.11. *Pour tout i, $Z_{j(i)}$ et $Z_{j(i+1)}$ sont dans la même composante connexe de $\mathcal{G}$.*

Preuve. Identique à celle du lemme correspondant dans la preuve de la proposition 2.4.5. □

Notons W la réunion de tous les anneaux de bord et de tous les anneaux-frontières qui ne sont pas contenus entièrement dans U et rencontrent le C_6-voisinage d'au moins un Z_j. Soient $W_1, \ldots, W_t$ les composantes de W. Chaque Z_j est contenu dans un certain $W_{k(j)}$.

Lemme 5.3.12. *Soient j, j' des indices tels qu'il existe une arête de $\mathcal{G}$ entre Z_j et $Z_{j'}$. Alors soit $k(j) = k(j')$, soit il existe des anneaux de bord $T \subset W_{k(j)}$ et $T' \subset W_{k(j')}$ tels que soit T et T' sont reliés par un anneau frontière, soit il existe un anneau de coupure c-minimal de poids au plus C_9 reliant T et T'.*

Preuve. Par hypothèse, il existe un point $z \in \hat{X}$ tel que $d(z, Z_j) \leq C_6$, $d(z, Z_{j'}) \leq C_6$ et $d(z, U) > s$. Supposons que $k(j) \neq k(j')$. Alors il existe un arc α de taille $\leq 2C_6 + 1$ reliant Z_j à $Z_{j'}$. Si une extrémité (ou les deux) de α se trouve sur un anneau-frontière, on peut prolonger α le long du bord pour obtenir un arc α' de diamètre au plus $2C_6 + 2\nu(\mathcal{T}_1)C_8 + 3 = l$ reliant des anneaux de bord $T \subset W_{k(j)}$ et $T' \subset W_{k(j')}$.

D'après le lemme 1.3.3, on a taille$(\alpha') \leq \nu(\mathcal{T}_1)^{l+1}$, donc le lemme 5.3.9 implique que soit T et T' sont reliés par un anneau-frontière, soit il existe un anneau de coupure c-minimal de poids au plus C_9 reliant T et T'. □

En combinant les deux lemmes ci-dessus, on arrive à la conclusion suivante : quitte à réindexer les W_k, il existe une suite finie $A'_1, \ldots, A'_r$ telle que :

i. Chaque A'_i est un anneau h-minimal de poids au plus C_9. (Soit un anneau-frontière, soit un anneau de coupure.)

ii. W_1 contient x, W_r contient y et pour tout i, A'_i relie des anneaux de bord $T_i \subset W_i$ et $T'_i \subset W_{i+1}$.

Lemme 5.3.13. *Quitte à réindexer encore les W_k, il existe une suite finie $A''_1, \ldots, A''_u$ possédant les propriétés ci-dessus, et de plus les A''_i's sont disjoints deux à deux.*

Preuve. C'est la même démonstration que pour le lemme correspondant dans la proposition 2.4.5 en remplaçant la notion de longueur par celle d'aire PL et en utilisant le lemme 5.3.10 à la place de 2.2.1(iii). □

D'après le lemme 4.3.1, chaque A''_i a un diamètre inférieur ou égal à s. Il y a au moins un anneau de coupure parmi eux, car sinon tous les points de $\partial\hat{X}$ seraient dans $N(U, 3s + C_5 + C_6 + 15)$, donc $\hat{X}$ serait contenu dans $N(U, 3s + C_5 + 2C_6 + 20)$ et $\hat{X}$ aurait un diamètre strictement inférieur à C_{10}, contrairement aux hypothèses.

On définit $E_{\lambda+1}$ en ajoutant les anneaux A''_i à E_λ. Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de classes d'homotopie d'anneaux bien plongés essentiels, la construction s'arrête à un certain ordinal dénombrable λ. Le graphe E_λ correspondant a la propriété supplémentaire que chaque E_λ-composante a un diamètre intrinsèque majoré par C_{10}. □

5.3.5 Preuve de la proposition 5.1.3

Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte, orientable, irréductible, maximale telle que a est uniformément représentable et $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini. D'après la proposition 5.3.3, il existe une subdivision uniforme $\mathcal{T}_1$ de $\mathcal{T}$ et une sous-variété combinatoire Σ dont les composantes sont des sous-variétés

S-régulières épaisses de diamètre uniformément borné. D'après la proposition 5.3.5, chaque composante M de $W - \operatorname{Int}\Sigma$ admet un graphe d'anneaux plongé réduit $E(M)$ tel que les arêtes de $E(M)$ ont un poids uniformément borné et les $E(M)$-composantes ont un H_2 trivial et un diamètre uniformément borné, les bornes dépendant de W mais pas de M.

Soit $\mathcal{M}'$ la collection de toutes les composantes de $\partial\Sigma$ et toutes les arêtes de tous les graphes $E(M)$. Il s'agit d'une collection de tores et d'anneaux satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii) de la définition d'un M-scindement.

Un premier problème vient du fait que les anneaux de $\mathcal{M}'$ ne sont pas combinatoires dans $\mathcal{T}_1$. Il nous faut donc prouver l'existence d'une subdivision uniforme qui rende $\mathcal{M}'$ combinatoire. Comme les tores sont déjà combinatoires, on est ramené au lemme suivant :

Lemme 5.3.14. *Il n'y a qu'un nombre fini de types combinatoires pour l'intersection de la réunion des anneaux de $\mathcal{M}'$ avec un simplexe de $\mathcal{T}_1$.*

Preuve. Tous les anneaux de $\mathcal{M}'$ sont normaux. Soit σ un simplexe de $\mathcal{T}_1$ La borne uniforme sur les poids des anneaux de $\mathcal{M}'$ donne une borne sur le nombre de composantes de l'intersection avec σ d'un anneau donné. Le lemme 4.3.1 montre qu'il y a aussi une borne uniforme sur les tailles des anneaux de $\mathcal{M}'$. Comme chaque graphe $E(M)$ est réduit, cette borne sur les tailles donne une borne sur le nombre d'anneaux qui rencontrent σ. □

Il reste à résoudre un deuxième problème : certaines composantes de Σ peuvent avoir un H_2 non trivial. Cependant, comme il n'y en a qu'un nombre fini à homéomorphisme combinatoire près, il suffit de rajouter un nombre uniformément fini d'anneaux verticaux dans chaque composante de Σ et de passer à nouveau à une subdivision uniforme pour les rendre combinatoires. Finalement, on obtient une subdivision uniforme $\mathcal{T}_2$ de $\mathcal{T}$ et un M-scindement pour $(W, \mathcal{T}_2, a)$.

5.4 Fin de la preuve

Dans cette section, nous achevons la preuve du théorème 5.1.1 en démontrant la proposition 5.1.4. Soit $(W, \mathcal{T}_2, a)$ une VTC ouverte, orientable, irréductible, maximale admettant un M-scindement $\mathcal{M}$. Commençons par deux remarques.

Remarque. Chaque tore de $\mathcal{M}$ rencontre au moins un anneau. (Sinon il existerait une composante de complémentaire avec un H_2 non trivial.)

Remarque. L'identité entre $(W, d_{\mathcal{T}_2})$ et $(W, d_{\mathcal{M}})$ est une quasi-isométrie. (Car les recouvrements compacts correspondants sont équivalents.)

Passons à la preuve de la proposition 5.1.4. La première étape consiste à construire une fibration de Seifert sur $(W, \mathcal{T}_2, a)$ qui respecte $\mathcal{M}$, c'est-à-dire telle que chaque élément de $\mathcal{M}$ est saturé.

On commence par munir chaque anneau d'une fibration triviale en cercles. La condition (iii) de la définition d'un M-scindement et la première remarque préliminaire montrent qu'on peut étendre (d'une façon unique à isotopie près) ces fibrations aux tores. Pour simplifier, épaississons chaque anneau de $\mathcal{M}$ et étendons la fibration à l'épaississement. Alors chaque adhérence $\bar{V}$ d'une composante de complémentaire V a un H_2 trivial. Par conséquent, ∂V est constitué d'un seul tore. Par hypothèse, V est asphérique, mais comme W est irréductible, V est en fait irréductible. Si V est un tore solide, la fibration sur ∂V s'étend automatiquement en une fibration de Seifert compatible sur V. Sinon, V est incompressible et le théorème 4.2.2 donne une fibration de Seifert compatible sur V. Comme V est incompressible et a maximal, cette fibration de Seifert est fortement compatible (cf. lemme 5.3.1). On peut donc l'isotoper de manière à ce qu'elle étende la fibration de ∂V construite précédemment.

Soit $p : W \to B$ la projection sur la base. L'image de $\mathcal{M}$ par p est le 1-squelette d'une décomposition cellulaire $\mathcal{D}$ de B. Comme $\mathcal{T}_2$ est à géométrie bornée et les composantes du complémentaire de $\mathcal{M}$ ont un diamètre uniformément borné, $\mathcal{D}$ est à géométrie bornée.

Par construction de $\mathcal{D}$, $p : (W, d_{\mathcal{M}}) \to (B, d_{\mathcal{D}})$ est une quasi-isométrie. Par la deuxième remarque préliminaire, c'est aussi une quasi-isométrie entre $(W, d_{\mathcal{T}_2})$ et $(B, d_{\mathcal{D}})$. La proposition 2.2.6 permet de conclure.

5.5 Le cas asphérique non-irréductible

Dans cette section, nous montrons comment adapter nos arguments pour traiter le cas où on ne suppose plus W irréductible, mais seulement asphérique. Bien sûr, on ne peut pas s'attendre à démontrer que W elle-même est une variété de Seifert (étant donné que la conjecture de Poincaré est toujours ouverte), mais nous montrerons que W est homotopiquement équivalente à une variété de Seifert.

Pour énoncer précisément le résultat, on donne d'abord une définition.

Définition. Soient $(W, \mathcal{T}, a)$ et $(W', \mathcal{T}', a')$ deux VTC. On appelle *équivalence d'homotopie uniformément propre* entre $(W, \mathcal{T}, a)$ et $(W', \mathcal{T}', a')$ une application $f : W \to W'$ telle qu'on ait les propriétés suivantes :

i. f est une équivalence d'homotopie propre ;

ii. f est une quasi-isométrie entre $(W, d_{\mathcal{T}})$ et $(W', d_{\mathcal{T}'})$;

iii. $f_*(a) = a'$.

Pour simplifier la terminologie, on dit que $(W, \mathcal{T}, a)$ et $(W', \mathcal{T}', a')$ sont *équivalentes* s'il existe une équivalence d'homotopie uniformément propre entre elles.

Théorème 5.5.1. *Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte, orientable, asphérique et maximale. Supposons que a est uniformément représentable et que $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini. Alors il existe une équivalence d'homotopie uniformément propre de $(W, \mathcal{T}, a)$ vers une VTC ouverte, orientable, irréductible $(W', \mathcal{T}', a')$ admettant une fibration de Seifert compatible. De plus, il existe une métrique riemannienne complète quasi-homogène sur la base de cette fibration telle que la projection soit une quasi-isométrie.*

La preuve du théorème 5.5.1 se scinde en deux propositions.

Proposition 5.5.2. *Sous les hypothèses du théorème 5.5.1, il existe une équivalence d'homotopie uniformément propre de $(W, \mathcal{T}, a)$ vers une VTC ouverte, orientable, asphérique, maximale $(W_2, \mathcal{T}_2, a_2)$ qui admet un M-scindement.*

Proposition 5.5.3. *Soit $(W_2, \mathcal{T}_2, a_2)$ une VTC ouverte, orientable, asphérique, maximale qui admet un M-scindement. Alors il existe une équivalence d'homotopie uniformément propre de $(W_2, \mathcal{T}_2, a_2)$ vers une VTC ouverte, orientable, irréductible $(W', \mathcal{T}', a')$ admettant une fibration de Seifert compatible. De plus, il existe une métrique riemannienne complète quasi-homogène sur la base de cette fibration telle que la projection soit une quasi-isométrie.*

Soit $(W, \mathcal{T}, a)$ une VTC ouverte, orientable, asphérique. Soit V une sous-variété non nécessairement connexe de W dont chaque composante est asphérique et compacte. On appelle 0-*chirurgie de Poincaré dans* V la transformation suivante : pour chaque composante réductible U de V, on choisit une 2-sphère plongée $S_U \subset U$ bordant une fausse boule $B_U \subset U$ telle que $U - B_U$ ne contient aucune fausse boule. On subdivise $\mathcal{T}$ uniformément pour rendre S_U combinatoire. Ensuite on retire chaque B_U et on colle à sa place une vraie boule convenablement triangulée. Notons $(W', \mathcal{T}')$ la variété triangulée obtenue. Il existe une équivalence d'homotopie naturelle $\phi : W \to W'$. Posons $a' = \phi_*(a)$. Alors $(W', \mathcal{T}', a')$ est une VTC ouverte, orientable, asphérique, appelée *transformé de Poincaré* de $(W, \mathcal{T}, a)$ *relativement à* V. L'image de V par l'équivalence d'homotopie est appelée *transformé irréductible* de V.

Fait. Avec les notations ci-dessus, s'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle chaque composante de V est de taille au plus C, alors l'équivalence d'homotopie ϕ est uniformément propre.

Cette construction permet de déduire la proposition 5.5.3 de la proposition correspondante dans le cas irréductible. En effet, soit $\mathcal{M}$ un M-scindement de $(W_2, \mathcal{T}_2, a_2)$. Pour chaque composante Y de $W_2 - \bigcup \mathcal{M}$, soit

Z_Y une sous-variété de Y obtenue en retirant un voisinage régulier de ∂Y. Soit V la réunion de ces sous-variétés Z_Y sur toutes les composantes de $W_2 - \bigcup \mathcal{M}$. Les composantes de V sont compactes, asphériques et de taille uniformément bornée. Par conséquent, le transformé de Poincaré $(W', \mathcal{T}', a')$ de $(W_2, \mathcal{T}_2, a_2)$ relativement à V est équivalent à $(W_2, \mathcal{T}_2, a_2)$.

Observons que $(W', \mathcal{T}', a')$ admet un M-scindement naturel $\mathcal{M}'$ et que par construction, toutes les composantes de $W' - \bigcup \mathcal{M}'$ sont irréductibles. On peut donc appliquer le début de la preuve de la proposition 5.1.4 pour construire une fibration de Seifert fortement compatible sur W' respectant $\mathcal{M}'$. En particulier, W' est irréductible, et la fin de la preuve de la proposition 5.1.4 donne la conclusion souhaitée.

Preuve de la proposition 5.5.2. Il nous faut parcourir les sections 5.2 et 5.3 pour voir où l'irréductibilité est utilisée et adapter les définitions et les lemmes concernés.

Il y a un principe de base que le lecteur doit garder présent à l'esprit : à chaque fois qu'on essaie d'établir l'existence d'une surface incompressible F incluse dans une certaine sous-variété $V \subset W$ et possédant une propriété donnée, on procède comme suit : on effectue une 0-chirurgie de Poincaré dans V, obtenant une variété W' ayant le même type d'homotopie propre que W et une sous-variété irréductible $V' \subset W'$ telle que V est homéomorphe à la somme connexe de V' et d'une sphère d'homotopie ; puis on construit une surface F' dans V' avec les propriétés désirées en utilisant l'irréductibilité de V' ; enfin, on isotope la surface F' de façon à la rendre disjointe de la boule provenant de la chirurgie, de sorte que sa préimage par l'équivalence d'homotopie est une surface $F \subset V$ avec les propriétés désirées.

Considérons la section 5.2. L'irréductibilité apparait pour la première fois pour définir les sous-variétés régulières. À partir de cet endroit, il faut partout remplacer le mot « irréductible » par « asphérique ». Ainsi, la définition d'une sous-variété régulière devient :

Définition'. Soit $V \subset W$ une variété compacte. On dit que V est *régulière* si elle est asphérique et contient un lacet représentant $a \in \pi_1 W$.

Avec cette nouvelle définition, les lemmes 5.2.2 et 5.2.3 restent vrais tels quels. Il suffit de remplacer dans les preuves « boule » par « boule d'homotopie ».

La définition d'une sous-variété épaisse n'a pas besoin de changement, ni les lemmes 5.2.4 et 5.2.5. La partie de la preuve faisant intervenir des fibrations de Seifert est plus compliquée à adapter. Convenons d'appeler *tore solide d'homotopie* une variété de dimension 3 homéomorphe à la somme connexe de $S^1 \times D^2$ et d'une sphère d'homotopie.

Définition'. Soit $V \subset W$ une sous-variété compacte. On dit que V est *S-régulière* si elle est régulière et si un transformé irréductible de V admet une fibration de Seifert compatible. Une sous-variété S-régulière est dite *tendue* si elle est incompressible dans W ou un tore solide d'homotopie.

Avec cette définition modifiée, le lemme 5.2.6(ii) reste vrai, ainsi que le lemme 5.2.7. Pour ce dernier, le début de la preuve est inchangé, sauf qu'on sait seulement que X et Y sont asphériques plutôt qu'irréductibles. L'argument utilisé dans le cas irréductible prouve que $\pi_1 X$ a un centre non trivial. En appliquant le théorème 4.2.2 à un transformé de Poincaré, on montre que X est S-régulière pour la nouvelle définition.

Avec des modifications similaires, la preuve du lemme 5.2.8 reste valable. En ce qui concerne la proposition 5.2.9, l'irréductibilité est utilisée deux fois, dans la partie de sa preuve correspondant au lemme 5.2.11. La première fois, nous appliquions le théorème 4.2.2 à une variété X_0' pour étudier un groupe G isomorphe à $\pi_1(X_0')$. Dans la nouvelle situation, on arrive seulement à montrer que X_0' est une somme connexe d'une variété de Seifert à bord non vide et d'une sphère d'homotopie, mais cette différence ne concerne pas le groupe G. La deuxième fois, nous appliquions le théorème du tore homotopique 4.2.6. Pour adapter la preuve, on utilise le principe décrit plus haut : on applique le théorème du tore homotopique dans un transformé de Poincaré pour obtenir les tores, puis on remarque qu'ils existent déjà dans l'ancienne sous-variété.

On pourrait utiliser ces résultats pour prouver un analogue faible de la proposition 5.1.2 en considérant une exhaustion de W par des sous-variétés S-régulières tendues. Le résultat est que W est une somme connexe d'une variété de Seifert avec un nombre fini ou dénombrable de sphères d'homotopie. Toutefois, ce fait n'est pas très utile.

Il nous faut ensuite adapter les arguments du début de la section 5.3. Une difficulté provient de l'absence de fibration de Seifert globale sur W. Le lemme 5.3.1 devient :

Lemme 5.3.1' *Soit M une sous-variété connexe de W telle qu'au moins une composante T de ∂M est incompressible dans W. Soit W' un transformé de Poincaré de W relativement à M. Toute fibration de Seifert compatible sur le transformé irréductible $M' \subset W'$ de M est fortement compatible.*

Dans la preuve, on se place dans une sous-variété S-régulière tendue $V' \subset W'$ contenant M'. Comme V' est tendue et contient un tore incompressible (l'image T' de T), V' est incompressible. Comme M' est de Seifert, elle est irréductible. On peut donc effectuer une 0-chirurgie de Poincaré dans $V' - \operatorname{Int} M'$ de façon à ce que que l'image V'' de V' soit irréductible. D'après la maximalité de a et le théorème 4.2.2, V'' admet une fibration de Seifert fortement compatible. Comme on a fait la chirurgie loin de T', on obtient une fibration sur T', que l'on peut comparer à la restriction de $p_{M'}$, et le reste de l'argument est inchangé.

Lemme 5.3.2' *Soit $V \subset W$ une sous-variété épaisse S-régulière telle que chaque composante compacte de $W - \operatorname{Int} V$ est épaisse. Soit W' un transformé de Poincaré de W relativement à V. Alors le transformé irréductible $V' \subset W'$ de V admet une fibration de Seifert fortement compatible. De plus, une telle fibration est unique à isotopie près.*

Dans la preuve du cas irréductible, le cas où $W \cong S^1 \times \mathbf{R}^2$ est traité séparément. Ici, on dit que si W n'admet pas d'exhaustion par des sous-variétés incompressibles S-régulières, elle admet une exhaustion par des tores solides d'homotopie qui sont des cœurs compacts de W'. Dans ce cas, $\pi_1 W'$ est cyclique engendré par a, ce qui suffit pour conclure que la fibration compatible sur V' est fortement compatible. Le cas où la variété admet une exhaustion par des sous-variétés incompressibles S-régulières n'a pas besoin de modification supplémentaire.

En utilisant ces deux lemmes et ce qui précède, on obtient la version faible suivante de la proposition 5.3.3 :

Proposition 5.3.3' *Il existe des constantes $C_5, C_6, C_7 \geq 0$, une fonction $r_4 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, une VTC ouverte, orientable, asphérique, maximale $(W_1, \mathcal{T}_1, a_1)$ équivalente à $(W, \mathcal{T}, a)$ et une sous-variété $\Sigma \subset W_1$, chaque composante T de $\partial\Sigma$ étant munie d'une courbe fermée plongée $c_T \subset T$ telle qu'on ait les propriétés suivantes :*

i. Chaque composante de Σ est combinatoire pour $\mathcal{T}_1$, a un diamètre majoré par C_5 et admet une fibration de Seifert fortement compatible.

ii. Chaque composante M de $W_1 - \operatorname{Int}\Sigma$ a un bord C_6-quasidense. De plus, pour tout compact $K \subset M$, il existe une sous-variété S-régulière $L \subset M$ telle que $K \subset \operatorname{Int} L$, $\operatorname{diam} L \leq r_4(\operatorname{diam} K)$ et, éventuellement après 0-chirurgie dans L, il existe une fibration de Seifert fortement compatible sur L telle que toutes les courbes c_T qui rencontrent L sont des fibres.

iii. Chaque courbe c_T est une fibre de la fibration de Seifert fortement compatible de Σ ; de plus, elle est combinatoire et sa longueur est inférieure ou égale à C_7.

La différence principale est qu'on ne peut espérer construire des fibrations de Seifert sur les composantes du complémentaire de Σ, ce qui alourdit l'énoncé de la propriété (ii). La preuve est similaire, mais techniquement plus compliquée que celle de la proposition 5.3.3. Pour commencer, on utilise la forme affaiblie de la proposition 5.2.9 pour construire une collection de sous-variétés S-régulières suffisamment éloignées les unes des autres et telles que chaque composante du complémentaire a un bord quasidense. Quitte à rajouter des tores solides d'homotopie, on peut supposer que chacune de ces sous-variétés est épaisse et n'a que des composantes complémentaires épaisses. On prend alors le transformé de Poincaré relativement à la réunion de ces sous-variétés. Cela donne la VTC $(W_1, \mathcal{T}_1, a_1)$ et la sous-variété fibrée Σ.

Les propriétés (i) et (iii) sont faciles à vérifier. Pour (ii), la seule différence réside dans l'absence de la fibration p_M. On voudrait faire la chose suivante : prendre une sous-variété S-régulière $V \subset W_1$ avec les propriétés suivantes : V contient K ; elle est épaisse ; chaque composante de $W - \operatorname{Int} V$ est épaisse ; V contient chaque composante de Σ qu'elle rencontre ; chaque composante de $V - \Sigma \cap V$ est épaisse. On voudrait alors conclure que (éventuellement après 0-chirurgie de Poincaré) V admet une fibration de Seifert fortement compatible prolongeant celle de $V \cap \Sigma$, de sorte qu'on peut prendre $L = V \cap M$. En réalité, on ne peut pas parler de sous-variétés épaisses dans W_1 parce qu'on ne sait pas quelle constante choisir. Il faut donc ramener K dans W par l'équivalence d'homotopie propre, faire la construction décrite plus haut dans W, et prendre son image dans W_1.

Passons à la deuxième partie du programme, à savoir la construction du graphe d'anneaux. Comme on ne dispose plus des fibrations p_M, on dit qu'un anneau $A \subset M$ est vertical quand une courbe fermée plongée essentielle sur A est librement homotope à une courbe c_T où T est une composante de ∂M. On observe que l'assertion (ii) de la proposition 5.3.3' implique que toutes les courbes $c_T \subset \partial M$ sont librement homotopes dans M et déterminent un élément central de $\pi_1 M$. On peut donc appliquer les résultats sur les anneaux PL minimaux.

La seule autre différence est que dans le lemme 5.3.7, on ne dispose pas d'une fibration de Seifert sur la sous-variété L elle-même. Il faut donc utiliser l'astuce habituelle : faire une 0-chirurgie de Poincaré pour obtenir la fibration de Seifert, construire l'anneau, et renvoyer dans la variété de départ. Pour voir qu'il y a une borne uniforme sur les poids des anneaux, on observe que si taille(L) est fixée, on peut choisir un nombre fini de façons de faire la 0-chirurgie de Poincaré, de sorte que la sous-variété irréductible obtenue appartient à un nombre fini de types combinatoires. Le reste de la preuve de la proposition 5.5.2 est inchangé. □

Nous déduisons à présent du théorème 5.5.1 le résultat suivant annoncé dans l'introduction.

Théorème 5.5.4. *Soit W une variété de dimension 3 ouverte, orientable dont le groupe fondamental est infini cyclique. Soit Γ un groupe de type fini agissant proprement et cocompactement sur W. Alors Γ est un groupe de surface virtuel.*

Preuve. Puisque l'action de Γ est propre et cocompacte, W admet une triangulation Γ-équivariante $\mathcal{T}$ à géométrie bornée. Soit a un générateur de $\pi_1 W$. Alors $(W, \mathcal{T}, a)$ est une VTC ouverte, orientable, maximale. D'après le lemme 1.5.8, W est asphérique, $(W, \mathcal{T})$ a un profil isopérimétrique fini et a est uniformément représentable.

Les hypothèses du théorème 5.5.1 sont donc satisfaites. D'après ce théorème, il existe une VTC ouverte, orientable, irréductible $(W', \mathcal{T}', a')$ telle que $\pi_1 W' \cong \mathbf{Z}$, $(W, d_{\mathcal{T}})$ est quasi-isométrique à $(W', d_{\mathcal{T}'})$ et il existe une fibration de Seifert compatible sur W' telle que $(W', d_{\mathcal{T}'})$ est quasi-isométrique à une métrique riemannienne complète h sur la base B de cette fibration.

Comme $\pi_1 W'$ est cyclique, B doit être difféomorphe à $\mathbf{R}^2$. D'après le lemme 1.2.1, Γ est quasi-isométrique à $(W, d_{\mathcal{T}})$, donc à $(W', d_{\mathcal{T}'})$, donc à (B, h). D'après le théorème 3.1.1, Γ est un groupe de surface virtuel. $\square$

Chapitre 6

Application aux orbifolds

Le but de ce chapitre est de terminer la preuve du théorème 0.0.2 dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 0.0.2 *Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 fermé, orientable et petit. Si $\pi_1\mathcal{O}$ admet un sous-groupe infini cyclique normal, $\mathcal{O}$ est un orbifold de Seifert.*

Le théorème 5.5.4 permet de réduire la preuve à montrer qu'un orbifold dont le groupe fondamental est une extension de $\mathbf{Z}$ par un groupe de surface virtuel est de Seifert. Nous démontrons dans ce but des théorèmes équivariants.

6.1 Quelques rappels

Un *orbifold* de dimension n est un espace topologique métrisable localement modelé sur des quotients de $\mathbf{R}^n$ par des sous-groupes finis de $O(n)$. Par exemple, le quotient d'une variété par une action propre d'un groupe discret possède une structure naturelle d'orbifold pour lequel la projection est un revêtement (au sens des orbifolds). Un orbifold obtenu de cette façon est dit *bon*. Pour les définitions non rappelées ici, le lecteur est renvoyé à [55], chapitre XIII ou [5]. On note $|X|$ l'espace sous-jacent d'un orbifold X et Σ_X son lieu singulier.

Convention. Tous les orbifolds de dimension 3 considérés sont connexes, **orientables et sans bord**. Tous les sous-orbifolds sont connexes. Pour les 2-sous-orbifolds orientables des orbifolds de dimension 3, le terme « point singulier » sera utilisé comme synonyme de « point conique ».

Un orbifold de dimension 2 est discal si et seulement si c'est un disque avec au plus un point singulier. Les orbifolds fermés de dimension 2 se répartissent en quatre classes : mauvais, sphériques, euclidiens et hyperboliques. Un orbifold de dimension 2 fermé a une caractéristique d'Euler strictement positive si et seulement s'il est mauvais ou sphérique.

On appelle *goutte d'eau* (resp. *fuseau*, resp. *turnover*) une sphère avec un point conique (resp. deux, resp. trois). Une goutte d'eau est toujours un mauvais orbifold ; un fuseau peut être sphérique ou mauvais ; un turnover peut être sphérique, euclidien ou hyperbolique.

Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 et $F \subset \mathcal{O}$ un 2-sous-orbifold orientable. On dit que F est *compressible* si soit

i. F est sphérique et borde un 3-sous-orbifold (discal) isomorphe au cône sur F, soit

ii. La caractéristique d'Euler de F est négative ou nulle et il existe un 2-sous-orbifold discal D qui intersecte F transversement en ∂D et tel que ∂D ne borde pas de 2-orbifold discal dans F.

On dit que F est *incompressible* s'il n'est pas compressible. Notons que si F est mauvais ou un turnover de caractéristique d'Euler négative ou nulle, F est toujours incompressible. On dit que $\mathcal{O}$ est *irréductible* s'il n'admet aucun 2-sous-orbifold orientable incompressible de caractéristique d'Euler strictement positive. En particulier, un orbifold irréductible n'admet pas de mauvais 2-sous-orbifold. Un orbifold de dimension 3 fermé est *petit* s'il n'admet aucun 2-sous-orbifold incompressible. On voit donc que tout orbifold petit est irréductible.

Deux 2-sous-orbifolds F, F' sont *isotopes* si les applications canoniques $(|F|, \Sigma_F) \to (|\mathcal{O}|, \Sigma_{\mathcal{O}})$ et $(|F'|, \Sigma'_F) \to (|\mathcal{O}|, \Sigma_{\mathcal{O}})$ sont isotopes. Si F, F' sont isotopes, ils sont isomorphes (en tant qu'orbifolds) et F est incompressible si et seulement si F' l'est. On utilisera le fait suivant :

Fait. Soit F un 2-sous-orbifold. Soit $D \subset F$ un sous-orbifold discal. Soit D' un 2-sous-orbifold de $\mathcal{O}$ tel que $D' \cap F = \partial D'$ et $D \cup D'$ est un 2-sous-orbifold sphérique compressible. Alors le 2-sous-orbifold obtenu à partir de F en remplaçant D par D' est isotope à F.

6.2 2-sous-orbifolds PL minimaux

Définition. Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3. Une *triangulation* $\mathcal{T}$ de $\mathcal{O}$ est une triangulation de la variété sous-jacente $|\mathcal{O}|$ pour laquelle $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est un sous-complexe du 1-squelette et chaque 3-simplexe de $\mathcal{T}$ intersecte $\Sigma_{\mathcal{O}}$ en un sommet, une arête ou l'ensemble vide. Le couple $(\mathcal{O}, \mathcal{T})$ est appelé *orbifold triangulé.* Si F est un orbifold de dimension 2 orientable et f une application de F vers $\mathcal{O}$, on dit que f est en *position générale* si l'application induite entre espaces sous-jacents est en position générale par rapport à $\mathcal{T}$ et si pour tout $x \in F$, le groupe local en $f(x)$ est isomorphe au groupe local en x.

Définition. Soit $(\mathcal{O}, \mathcal{T})$ un orbifold triangulé de dimension 3 et F un orbifold de dimension 2 compact orientable. Une *application normale* de F vers $\mathcal{O}$ est une application $f : F \to \mathcal{O}$ telle que l'application induite $|f| : |F| \to (|\mathcal{O}|, \mathcal{T})$ est normale et pour tout $x \in F$, le groupe local en $f(x)$ est isomorphe au groupe local en x.

Deux applications normales $f, f' : F \to \mathcal{O}$ sont *normalement homotopes* si les applications induites entre espaces sous-jacents sont normalement homotopes. Comme pour les variétés, on note $\mathcal{N}(f)$ la classe d'homotopie normale de f.

Exemple. Soit $f : F \to \mathcal{O}$ une application normale. Si $|f|$ est un plongement, son image est l'espace sous-jacent d'un 2-sous-orbifold de $\mathcal{O}$ isomorphe à F. Un tel orbifold sera appelé *sous-orbifold normal*, et l'application f un *plongement*. Dans la suite, on identifie souvent un 2-sous-orbifold normal $F \subset \mathcal{O}$ avec l'application d'inclusion $F \to \mathcal{O}$ (qui est un plongement).

Exemple. Soit $f : F \to \mathcal{O}$ une application normale. Si $|f|$ est un revêtement double sur son image, cette image est l'espace sous-jacent d'un 2-sous-orbifold non orientable (à un côté) dont le revêtement d'orientation est isomorphe à F. On appelle une telle application f un *revêtement double*.

Dans la suite, on fixe un orbifold triangulé $(\mathcal{O}, \mathcal{T})$ de dimension 3 et on munit $\mathcal{T}^{(2)}$ de la métrique de Jaco-Rubinstein régulière. Soit $f : F \to \mathcal{O}$ une application en position générale. Le *poids singulier* $\mathrm{sing}(f)$ de f est le nombre de points singuliers de F. Son *poids total* $\mathrm{pd}(f)$ (resp. sa longueur $\mathrm{lg}(f)$) est défini comme le poids (resp. la longueur) de l'application sous-jacente. L'*aire PL* de f est le triplet $\|f\| = (\mathrm{sing}(f), \mathrm{pd}(f), \mathrm{lg}(f)) \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{R}_+$. On met sur l'ensemble de ces triplets l'ordre lexicographique.

Remarquons que le poids singulier de f est inférieur ou égal au poids total (d'où le nom), puisque l'hypothèse sur les groupes locaux force l'image d'un point singulier à être un point singulier, donc dans le 1-squelette de $\mathcal{T}$. Deux applications normalement homotopes ont le même poids singulier et le même poids total, donc une application normale minimise l'aire PL dans sa classe d'homotopie normale si et seulement si elle minimise la longueur. Nous allons maintenant citer un résultat de [28] traitant de l'existence et de l'unicité d'une telle surface.

On doit d'abord donner deux définitions : on appelle *linking 2-sous-orbifold* un 2-sous-orbifold plongé normal qui borde un petit 3-sous-orbifold discal autour d'un sommet de $\mathcal{T}$. Un *multiple* d'un linking 2-sous-orbifold S est une application normale obtenue en recollant des triangles dans un nombre fini de copies de S.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences directes de résultats de [28].

Théorème 6.2.1 (Théorèmes 1 et 2 de [28]). *Soit $f : F \to \mathcal{O}$ une application normale qui n'est pas un multiple d'un linking 2-sous-orbifold. Il existe une et une seule application d'aire PL minimale dans la classe d'homotopie normale de f.*

Théorème 6.2.2 (Corollaire 3 de [28]). *Soit $f : F \to \mathcal{O}$ une application normale qui n'est pas un multiple d'un linking 2-sous-orbifold. Si f est un plongement, l'application d'aire PL minimale dans $\mathcal{N}(f)$ est soit un plongement, soit un revêtement double.*

Proposition 6.2.3. *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble non vide d'applications normales tel que chaque $f \in \mathcal{F}$ est d'aire PL minimale dans $\mathcal{N}(f)$, et tous les éléments de $\mathcal{F}$ ont le même poids total. Alors l'ensemble des aires PL des éléments de $\mathcal{F}$ est fini. En particulier, $\mathcal{F}$ admet un élément d'aire PL minimale.*

Preuve. Soit ω le poids total commun des éléments de $\mathcal{F}$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $V(f)$ la réunion des 3-simplexes qui intersectent $f(F)$. Les poids singuliers des éléments de $\mathcal{F}$ appartiennent à l'ensemble fini des entiers naturels inférieurs ou égaux à ω, donc il suffit de démontrer que l'ensemble de leurs longueurs est fini. Le lemme 4.3.1 donne la borne uniforme ω^2 sur la taille des ensembles $V(f)$.

Par conséquent, la collection $\{V(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est finie à homéomorphisme combinatoire près. Dans chaque $V(f)$, le nombre de classes d'homotopie normale d'applications de poids total ω est finie. Or la régularité de la métrique de Jaco-Rubinstein et le fait que les éléments de $\mathcal{F}$ minimisent la longueur dans leur classe d'homotopie normale impliquent que pour tous $f, g \in \mathcal{F}$, s'il existe un homéomorphisme combinatoire de $V(f)$ sur $V(g)$ qui conjugue f et g, alors $\lg(f) = \lg(g)$. Ceci prouve que l'ensemble des longueurs des éléments de $\mathcal{F}$ est fini. □

Soit F un 2-sous-orbifold en position générale. Ci-dessous, on décrit trois mouvements qui permettent de mettre F en position normale.

M_1 : soit σ un 3-simplexe et U une composante de $|F| \cap \sigma$ qui n'est pas un disque. On choisit une courbe plongée $\gamma \subset U$ non homotope à zéro dans U et qui borde un disque $D \subset \operatorname{Int} \sigma$ tel que $D \cap |F| = \gamma$. Par chirurgie le long de γ, on obtient un ou deux orbifolds selon si γ sépare F ou non. Dans le deuxième cas, il y a un choix à faire. On dira donc qu'une classe $\mathcal{C}$ de 2-sous-orbifolds est stable par ce mouvement si au moins un des orbifolds obtenus appartient à $\mathcal{C}$.

M_2 : soit σ un 3-simplexe et U une composante de $|F| \cap \sigma$ qui est un disque, mais ne rencontre pas $\mathcal{T}^{(1)}$. On choisit un tel disque « innermost », c'est-à-dire que la boule qu'il coupe de σ ne contient aucune autre composante de

$|F| \cap \sigma$. On pousse U dans le 3-simplexe voisin. Ce mouvement peut toujours être réalisé par une isotopie.

M_3 : soit σ un 3-simplexe et U une composante de $|F| \cap \sigma$ qui est un disque, mais rencontre une même arête e de σ deux fois. On en choisit un « innermost » et on le pousse dans le 3-simplexe voisin. Ce mouvement peut être réalisé par une isotopie seulement si e n'est pas contenu dans le lieu singulier.

Lemme 6.2.4. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de 2-sous-orbifolds. Supposons que $\mathcal{C}$ est stable par isotopie et par les mouvements* M_1–M_3. *Alors pour tout $F \in \mathcal{S}$ en position générale, il existe un 2-sous-orbifold $F' \in \mathcal{C}$ normal d'aire PL inférieure ou égale à celle de F.*

Preuve. On définit la *complexité* $c(F)$ d'un 2-sous-orbifold F en position générale par $c(F) = (\mathrm{sing}(F), \mathrm{pd}(F), \mathrm{n}(F))$ avec l'ordre lexicographique, où $\mathrm{n}(F)$ est la somme sur tous les 2-simplexes σ de $\mathcal{T}$ du nombre de composantes de $\sigma \cap |F|$.

Soit $F \in \mathcal{C}$ en position générale. Si F n'est pas normal, on applique les mouvements M_1–M_3 jusqu'à obtenir un 2-sous-orbifold normal. Comme la complexité c décroit strictement à chaque étape, le processus se termine avec un 2-sous-orbifold normal F'. Comme l'aire PL décroit à chaque étape, on a bien $\|F'\| \leq \|F\|$. □

Si $\mathcal{C}$ est une classe de 2-sous-orbifolds stable par isotopie, on appelle *complétion* de $\mathcal{C}$ la classe $\hat{\mathcal{C}}$ obtenue en rajoutant à $\mathcal{C}$ les revêtements doubles qui sont normalement homotopes à des éléments de $\mathcal{C}$.

Théorème 6.2.5. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de 2-sous-orbifolds. Supposons que $\mathcal{C}$ est stable par isotopie et par les mouvements* M_1–M_3. *Soit $\hat{\mathcal{C}}$ la complétion de $\mathcal{C}$. Alors $\hat{\mathcal{C}}$ admet un élément d'aire PL minimale.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}'$ le sous-ensemble de $\hat{\mathcal{C}}$ constitué des applications normales. Remarquons que $\mathcal{C}'$ a la propriété de stabilité suivante : si f est un plongement ou un revêtement double normalement homotope à un élément de $\mathcal{C}'$, alors $f \in \mathcal{C}'$.

Le lemme 6.2.4 entraîne que $\mathcal{C}'$ est non vide et que tout élément d'aire PL minimale dans $\mathcal{C}'$ sera automatiquement d'aire PL minimale dans $\hat{\mathcal{C}}$. Il nous reste à montrer que $\mathcal{C}'$ admet un élément d'aire PL minimale.

Comme $(\mathrm{sing}, \mathrm{pd})$ prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^2$, cette fonction admet un minimum (s, ω). Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}'$ le sous-ensemble constitué des applications $f \in \mathcal{C}'$ telles que $(\mathrm{sing}(f), \mathrm{pd}(f)) = (s, \omega)$ et f est l'application d'aire PL minimale dans $\mathcal{N}(f)$. D'après les théorèmes 6.2.1 et 6.2.2 et la propriété de stabilité de $\mathcal{C}'$, $\mathcal{F}$ est non vide et tout élément d'aire PL minimale dans $\mathcal{F}$ sera d'aire PL minimale dans $\mathcal{C}'$. Or tous les éléments de $\mathcal{F}$ ont le même poids total ω, donc l'existence d'un élément d'aire PL minimale dans $\mathcal{F}$ est garantie par la proposition 6.2.3. $\square$

6.3 Théorèmes équivariants

6.3.1 Irréductibilité

Théorème 6.3.1. *Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 orientable irréductible. Alors tout revêtement régulier de $\mathcal{O}$ est irréductible.*

Preuve. Soit $\mathcal{O}'$ un revêtement régulier de $\mathcal{O}$. Notons Γ le groupe de revêtement, de sorte que $\mathcal{O} = \mathcal{O}'/\Gamma$. Munissons $\mathcal{O}'$ d'une triangulation Γ-équivariante $\mathcal{T}$ et de la métrique de Jaco-Rubinstein régulière. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des 2-sous-orbifolds incompressibles de $\mathcal{O}'$ dont la caractéristique d'Euler est strictement positive et $\hat{\mathcal{S}}$ sa complétion. Cherchant une contradiction, on suppose que $\mathcal{S}$ n'est pas vide.

Lemme 6.3.2. *La classe $\mathcal{S}$ est stable par isotopie et par les mouvements* M_1–M_3.

Preuve. On a déjà vu que $\mathcal{S}$ est stable par isotopie, donc par le mouvement M_2.

Pour la stabilité par M_1, on voit que la courbe γ sépare $|\mathcal{F}|$ en deux disques. La chirurgie donne donc deux sous-orbifolds F_1 et F_2 dont l'espace sous-jacent est S^2. Si F_1 et F_2 étaient tous les deux compressibles, l'un serait une sphère régulière bordant une boule, donc l'autre serait isotope à F, ce qui contredit l'incompressibilité de F. Un des deux sous-orbifolds obtenus par chirurgie est donc dans $\mathcal{S}$.

Pour M_3, si l'arête e est contenue dans le lieu singulier, le sous-orbifold obtenu est une sphère avec au plus un point singulier. S'il n'était pas incompressible, ce serait une sphère régulière bordant une boule, donc F serait isotope à un bon fuseau compressible, ce qui est absurde. $\square$

Lemme 6.3.3. *$\mathcal{S}$ contient un 2-sous-orbifold équivariant.*

Preuve. D'après le théorème 6.2.5 et le lemme 6.3.2, il existe une application normale $f_0 \in \hat{\mathcal{S}}$ d'aire PL minimale. Comme $\mathcal{T}$ est Γ-équivariante et la métrique de Jaco-Rubinstein est régulière, chaque translaté de f_0 par Γ est encore une application normale d'aire PL minimale dans $\hat{\mathcal{S}}$.

Commençons par traiter le cas où f_0 est un plongement. On va montrer que son image F_0 est un 2-sous-orbifold équivariant. Comme l'action de Γ est propre, il y a au plus un nombre fini d'éléments $g_1, \ldots, g_p \in \Gamma$ vérifiant $g_iF_0 \cap F_0 \neq \emptyset$ et $g_iF_0 \neq F_0$.

Grâce à l'astuce de Meeks-Yau, on peut supposer que pour tout i, F_0 intersecte g_iF_0 transversement en un nombre fini de courbes plongées qui évitent le lieu singulier. Chaque courbe d'intersection sépare F_0 (resp. g_iF_0) en deux disques avec au plus trois points singuliers. Il n'y a qu'un nombre fini de tels disques. Choisissons-en un d'aire PL minimale parmi eux et notons-le D. Remarquons que D est innermost.

Si $D \subset F_0$, posons $F_1 = F_0$ et $F_2 = g_iF_0$, et sinon posons $F_1 = g_iF_0$ et $F_2 = F_0$, de sorte que dans les deux cas on a $D \subset F_1$. Soient D_1, D_2 les 2-sous-orbifolds tels que $D_1 \cup D_2 = F_2$ et $\partial D_1 = \partial D_2 = \partial D$. Soit F_i' un 2-sous-orbifold obtenu en lissant $D \cup D_i$ pour $i = 1, 2$. Vu que D est innermost, F_1' et F_2' sont plongés. Comme D a une aire PL plus petite que l'autre disque dans F_1 avec le même bord, D a au plus un point singulier.

On sait que $\|D\| \leq \|D_i\|$ pour $i = 1, 2$, d'où $\|F_1'\| \leq \|F_2\|$ et $\|F_2'\| \leq \|F_2\|$. Il en résulte que F_1' et F_2' sont des sphères avec au plus trois points singuliers. Comme F_2 est d'aire PL minimale dans $\mathcal{S}$, on en déduit que F_1' et F_2' n'appartiennent pas à $\mathcal{S}$.

Si $\mathrm{sing}(D) = 0$, on a

$$\mathrm{sing}(F_1') + \mathrm{sing}(F_2') = \mathrm{sing}(D_1) + \mathrm{sing}(D_2) = \mathrm{sing}(F_2) \leq 3.$$

Supposons sans perte de généralité que $\mathrm{sing}(F_1') \leq \mathrm{sing}(F_2')$. Alors $\mathrm{sing}(F_1')$ vaut 0 ou 1. Si c'est 0, F_1' est une sphère non-singulière compressible. Comme F_2 est incompressible, F_2' doit être également incompressible et isomorphe à F_2, d'où $F_2' \in \mathcal{S}$. Si $\mathrm{sing}(F_1') = 1$, F_1' est une goutte d'eau, donc $F_1' \in \mathcal{S}$. Dans les deux cas, on parvient à une contradiction.

Si $\mathrm{sing}(D) = 1$, les contraintes $\mathrm{sing}(D_1) + \mathrm{sing}(D_2) \leq 3$ et $\mathrm{sing}(D_i) \geq \mathrm{sing}(D)$ impliquent que $\mathrm{sing}(D_1) = 1$ ou $\mathrm{sing}(D_2) = 1$ (ou les deux). Il y a à nouveau deux cas à étudier : si $\mathrm{sing}(F_2) = 2$, alors $\mathrm{sing}(D_1) = \mathrm{sing}(D_2) = 1$. On peut supposer que par exemple D_1 est isomorphe à D. Alors F_1' est un bon fuseau. Comme F_1' n'appartient pas à $\mathcal{S}$, il est compressible. Mais alors F_2' est incompressible et isomorphe à F_2, donc $F_2' \in \mathcal{S}$, et on aboutit encore à une contradiction. Si $\mathrm{sing}(F_2) = 3$, alors par exemple $\mathrm{sing}(D_1) = 1$ et $\mathrm{sing}(D_2) = 2$, d'où $\mathrm{sing}(F_1') = 2$. Si le fuseau F_1' était mauvais, il appartiendrait à $\mathcal{S}$, donc il est bon et on conclut come précédemment.

Pour terminer la preuve du lemme 6.3.3, on doit traiter le cas où l'application minimale f_0 est un revêtement double. On utilise encore l'astuce de Meeks-Yau : on considère une petite perturbation f_ϵ de f_0 qui est un plongement normalement homotope à f_0 de longueur au plus $\lg(f_0) + \epsilon$ et tel que toute opération de lissage d'un 2-sous-orbifold obtenu par chirurgie le long d'une courbe d'intersection de f_ϵ avec un de ses translatés fait gagner une longueur de plus de ϵ. L'argument utilisé pour le cas du plongement montre que f_ϵ est équivariant. $\square$

Soit F' un 2-sous-orbifold $F' \subset \mathcal{O}'$ équivariant donné par le lemme précédent. En projetant F' dans $\mathcal{O}$, on obtient un 2-sous-orbifold $F \subset \mathcal{O}$ de caractéristique d'Euler strictement positive.

Si F est orientable, F est compressible car $\mathcal{O}$ est irréductible. On peut relever un 3-sous-orbifold discal de $\mathcal{O}$ bordé par F en un 3-sous-orbifold discal de $\mathcal{O}'$ bordé par F', ce qui contredit l'incompressibilité de F'.

Si F n'est pas orientable, on applique le même raisonnement à une petite perturbation F_ϵ qui borde un voisinage régulier de F et on obtient de même une contradiction, ce qui termine la preuve du théorème 6.3.1. □

Remarque. Réciproquement, si $\mathcal{O}'$ est un revêtement de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ est irréductible, $\mathcal{O}$ est irréductible. C'est facile à démontrer pour les variétés ; pour les orbifolds, il faut utiliser le fait que les actions de groupes finis sur B^3 sont standard [39, 36]. Cela permet de supprimer dans le théorème 6.3.1 l'hypothèse que le revêtement est régulier, en se servant du revêtement universel comme intermédiaire. Le résultat complet est donc le suivant.

Corollaire 6.3.4. *Si $\mathcal{O}$ est un orbifold de dimension 3 orientable et $\mathcal{O}'$ un revêtement de $\mathcal{O}$, alors $\mathcal{O}$ est irréductible si et seulement si $\mathcal{O}'$ est irréductible.*

Le théorème de la sphère équivariante 4.1.4 est une conséquence immédiate de cet énoncé. Le corollaire 6.3.4 a été démontré indépendamment par Y. Takeuchi et M. Yokoyama [54] en utilisant des méthodes similaires.

6.3.2 Turnovers

Théorème 6.3.5. *Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 orientable, irréductible, qui ne contient pas de turnover incompressible. Alors aucun revêtement régulier de $\mathcal{O}$ ne peut contenir de turnover incompressible.*

Preuve. La preuve du théorème 6.3.5 est pratiquement identique à celle du théorème 6.3.1, la classe $\mathcal{S}$ étant remplacée par la classe $\mathcal{S}'$ des sous-orbifolds incompressibles avec au plus trois points singuliers dont l'espace sous-jacent est S^2. La preuve du lemme 6.3.2 est similaire.

Dans le lemme 6.3.3, le cœur de la preuve est l'analyse des 2-sous-orbifolds obtenus par chirurgie le long d'une courbe d'intersection transverse innermost entre deux éléments de $\mathcal{S}$. On a utilisé le fait que la surface sous-jacente d'un tel sous-orbifold est S^2 ainsi que des arguments de comptage de nombres de points coniques. La même analyse est valable pour $\mathcal{S}'$.

Dans la fin de la preuve du théorème 6.3.1, on a utilisé l'invariance du signe de la caractéristique d'Euler par revêtements finis. Pour adapter la preuve, on utilise le fait que tout 2-sous-orbifold d'un orbifold de dimension 3 orientable qui est le quotient d'un turnover est un turnover. □

6.4 Fin de la preuve

Lemme 6.4.1. *Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 irréductible (orientable, sans bord). Supposons que $|\mathcal{O}|$ contient une surface plongée orientable incompressible (soit une sphère ne bordant pas une boule, soit une surface π_1-injective de genre ≥ 1). Alors $\mathcal{O}$ contient un 2-sous-orbifold incompressible.*

Preuve. Si $|\mathcal{O}|$ est réductible, soit $F \subset \mathcal{O}$ un 2-sous-orbifold tel que $|F|$ est une sphère incompressible et $\mathrm{sing}(F)$ est minimal. Montrons que F est incompressible.

Comme $\mathcal{O}$ est irréductible, F ne peut être sphérique (sinon $|F|$ borderait une boule). Donc si F est compressible, il existe un 2-sous-orbifold discal D tel que $\partial D = D \cap F$ et ∂D sépare F en deux sous-orbifolds D_1, D_2 qui sont des disques avec au moins deux points singuliers. Comme $|F|$ est incompressible, au moins une des sphères $|D| \cup |D_1|$ et $|D| \cup |D_2|$ est incompressible, or chacune rencontre le lieu singulier en moins de points que $|F|$, contredisant la minimalité de $\mathrm{sing}(F)$.

Supposons maintenant que $|\mathcal{O}|$ est irréductible. Soit $F \subset \mathcal{O}$ un 2-sous-orbifold tel que $|F|$ est une surface incompressible et $\mathrm{sing}(F)$ est minimal. Comme précédemment, on suppose F compressible et on cherche une contradiction. Il existe alors un 2-sous-orbifold discal D tel que $\partial D = D \cap F$ et ∂D sépare F en deux sous-orbifolds dont l'un, D', est un disque avec au moins deux points coniques. Soit F' le 2-sous-orbifold obtenu à partir de F en remplaçant D par D'. Comme $|\mathcal{O}|$ est irréductible, $|F'|$ est isotope à $|F|$, donc incompressible, d'où la contradiction recherchée. □

Proposition 6.4.2. *Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 fermé, orientable, irréductible et ne contenant aucun turnover incompressible. Supposons que $\pi_1\mathcal{O}$ est infini et isomorphe au groupe fondamental d'un orbifold de Seifert compact, orientable, irréductible. Alors $\mathcal{O}$ est de Seifert.*

Preuve. Il existe un revêtement régulier fini $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$ tel que $\pi_1\mathcal{O}'$ est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert Haken. Il résulte des théorèmes 6.3.1 et 6.3.5 que $\mathcal{O}'$ est irréductible et ne contient aucun turnover incompressible.

Montrons que $\mathcal{O}'$ contient un 2-sous-orbifold incompressible. Si $|\mathcal{O}'|$ est réductible, le lemme 6.4.1 fournit le 2-sous-orbifold incompressible cherché. Supposons donc $|\mathcal{O}'|$ irréductible. Alors comme $\pi_1(|\mathcal{O}'|) \cong \pi_1\mathcal{O}$, $|\mathcal{O}'|$ est une variété de Haken, et on applique encore le lemme 6.4.1.

D'après un résultat de W. Dunbar [12], $\mathcal{O}'$ admet une hiérarchie. Son revêtement universel est donc homéomorphe à $\mathbf{R}^3$ (cf. [60, 53]). En particulier, $\mathcal{O}'$ est un bon orbifold. Comme $\pi_1\mathcal{O}'$ est sans torsion, il en résulte que $\mathcal{O}'$ est une variété. Puisque cette variété a le même groupe fondamental qu'une variété de Seifert, elle est elle-même de Seifert d'après le théorème 4.2.1. Le théorème de W. Meeks et P. Scott [38] prouve que $\mathcal{O}$ est un orbifold de Seifert. □

Preuve du théorème 0.0.2. Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 fermé, orientable et petit. Soit Z un sous-groupe infini cyclique normal de $\pi_1\mathcal{O}$. Soit $\hat{\mathcal{O}}$ le revêtement régulier de $\mathcal{O}$ tel que $\pi_1\hat{\mathcal{O}} = Z$ et $\Gamma = \pi_1\mathcal{O}/Z$ le groupe de revêtement.

Si Z est d'indice fini, $\hat{\mathcal{O}}$ est fermé. D'après les théorèmes 6.3.1 et 6.3.5, $\hat{\mathcal{O}}$ est irréductible et ne contient aucun turnover incompressible. D'après la proposition 6.4.2, $\hat{\mathcal{O}}$ est une variété. Or il n'existe aucune variété fermée, orientable, irréductible dont le π_1 est infini cyclique, donc en fait Z est d'indice infini.

On peut donc appliquer le théorème 5.5.4 à l'action de Γ sur $|\hat{\mathcal{O}}|$, ce qui prouve que Γ est un groupe de surface virtuel. Il en résulte que $\pi_1\mathcal{O}$ est isomorphe au groupe fondamental d'un orbifold de Seifert compact, orientable, irréductible. D'après la proposition 6.4.2, $\mathcal{O}$ est de Seifert. □

6.5 Conclusion

Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 fermé, orientable, irréductible, qui ne contient aucun turnover incompressible. Alors le théorème de Dunbar [12] implique que $\mathcal{O}$ est soit de Haken (c'est-à-dire admet une hiérarchie), soit petit. Notre preuve du théorème 0.0.2 donne donc le résultat un peu plus fort suivant :

Théorème 6.5.1. *Soit $\mathcal{O}$ un orbifold de dimension 3 fermé, orientable, irréductible, ne contenant aucun turnover incompressible. Si $\pi_1\mathcal{O}$ admet un sous-groupe infini cyclique normal, $\mathcal{O}$ est un orbifold de Seifert.*

Le problème est qu'il existe des orbifolds fermés, orientables, irréductibles, contenant des turnovers incompressibles, mais qui ne sont pas de Haken (cf. [12]). Il est naturel de penser que le groupe fondamental d'un tel orbifold ne peut pas contenir de sous-groupe infini cyclique normal, et donc que le théorème 6.5.1 reste vrai sans l'hypothèse que $\mathcal{O}$ ne contient pas de turnover incompressible. Une démonstration de ce fait indépendante du théorème des orbifolds demanderait une version orbifold du lemme de Dehn.

Bibliographie

[1] O. Attie. Quasi-isometry classification of some manifolds of bounded geometry. *Math. Z.*, 216(4) :501–527, 1994.

[2] H. Bass. The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups. *Proc. London Math. Soc.*, 25 :603–614, 1982.

[3] M. Bestvina, M. Kapovich et B. Kleiner. Van Kampen's embedding obstruction for discrete groups. Preprint 2000.

[4] J. Block et S. Weinberger. Aperiodic tilings, positive scalar curvature and amenability of spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(4) :907–918, 1992.

[5] F. Bonahon et L. C. Siebenmann. The characteristic toric splitting of irreducible compact 3-orbifolds. *Math. Ann.*, 278 :441–479, 1987.

[6] B. H. Bowditch. A topological characterisation of hyperbolic groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 11(3) :643–667, 1998.

[7] B. H. Bowditch. Planar groups and the Seifert conjecture. Preprint, November 1999.

[8] R. D. Canary et Y. N. Minsky. On limits of tame hyperbolic 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 43(1) :1–41, 1996.

[9] A. Casson et D. Jungreis. Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds. *Invent. Math.*, 118 :441–456, 1994.

[10] T. Coulhon et L. Saloff-Coste. Isopérimétrie pour les groupes et les variétés. *Revista Math. Iberoamericana*, 9 :293–314, 1993.

[11] W. Dicks et M. J. Dunwoody. *Groups acting on graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[12] W. D. Dunbar. Hierarchies for 3-orbifolds. *Topology Appl.*, 29(3) :267–283, 1988.

[13] S. Eilenberg et J. A. Zilber. Semi-simplicial complexes and singular homology. *Ann. of Math. (2)*, 51 :499–513, 1950.

[14] B. Farb et R. Schwartz. The large-scale geometry of Hilbert modular groups. *J. Differential Geom.*, 44(3) :435–478, 1996.

[15] M. Freedman, J. Hass et P. Scott. Closed geodesics on surfaces. *Bull. London Math. Soc.*, 14 :385–391, 1982.

[16] M. Freedman, J. Hass et P. Scott. Least area incompressible surfaces in 3-manifolds. *Invent. Math.*, 71 :609–642, 1983.

[17] D. Gabai. Convergence groups are Fuchsian groups. *Annals of Math.*, 136 :447–510, 1992.

[18] É. Ghys. Les groupes hyperboliques. *Astérisque*, 189-190, 1990. Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90.

[19] É. Ghys, A. Haefliger et A. Verjovsky, éditeurs. *Group theory from a geometrical viewpoint.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1991.

[20] É. Ghys et P. de la Harpe, éditeurs. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.

[21] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publ. Math.* IHES, 53 :53–73, 1981.

[22] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[23] M. Gromov. Foliated Plateau problem, part II : harmonic maps of foliations. *GAFA*, 1 :253–320, 1991.

[24] M. Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[25] M. Gromov, J. Lafontaine et P. Pansu. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* CEDIC, Paris, 1981.

[26] J. Hempel. *3-manifolds*, *Ann. of Math. Studies,* volume 86. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[27] W. Jaco. *Lectures on three-manifold topology*, *CBMS Lecture Notes,* volume 43. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1980.

[28] W. Jaco et J. H. Rubinstein. PL minimal surfaces in 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 27(3) :493–524, 1988.

[29] W. Jaco et J. H. Rubinstein. PL equivariant surgery and invariant decompositions of 3-manifolds. *Adv. in Math.*, 73(2) :149–191, 1989.

[30] W. H. Jaco et P. B. Shalen. *Seifert fibered spaces in 3-manifolds.* Memoirs of the American Mathematical Society, n° 220. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, Sept. 1979.

[31] K. Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundary*, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 761. Springer, Berlin, 1979.

[32] M. Kanai. Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 37(3) :391–413, 1985.

[33] M. Kapovich et B. Kleiner. Coarse Alexander duality and duality groups. Preprint 1999.

[34] M. Kapovich et B. Leeb. On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds. *GAFA*, 5(3) :582–603, 1995.

[35] H. Kneser. Geschlossene Flächen in dreidimensionaler mannigfaltigkeiten. *Jahresbericht der Deut. Math. Verein.*, 38 :248–260, 1929.

[36] S. Kwasik et R. Schultz. Icosahedral group actions on $\mathbf{R}^3$. *Invent. Math.*, 108(2) :385–402, 1992.

[37] S. Maillot. Quasi-isometries of groups, graphs and surfaces. To appear in *Comment. Math. Helv.*

[38] W. H. Meeks, III et P. Scott. Finite group actions on 3-manifolds. *Invent. Math.*, 86(2) :287–346, 1986.

[39] W. H. Meeks, III et S.-T. Yau. Group actions on $\mathbf{R}^3$. In *The Smith conjecture (New York, 1979)*, pages 167–179. Academic Press, Orlando, FL, 1984.

[40] W. H. Meeks III, L. Simon et S.-T. Yau. Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature. *Annals of Mathematics*, 116 :621–659, 1982.

[41] G. Mess. The Seifert conjecture and groups which are coarse quasiisometric to planes. Preprint.

[42] J. Milnor. The geometric realization of a semi-simplicial complex. *Ann. of Math. (2)*, 65 :357–362, 1957.

[43] W. D. Neumann. Seifert manifolds. Preprint.

[44] C. D. Papakyriakopoulos. On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math. (2)*, 66 :1–26, 1957.

[45] J. Roe. Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 104(497), 1993.

[46] M. Scharlemann. Sutured manifolds and generalized Thurston norms. *J. Differential Geom.*, 29(3) :557–614, 1989.

[47] P. Scott. Compact submanifolds of 3-manifolds. *J. London Math. Soc. (2)*, 7 :246–250, 1973.

[48] P. Scott. A new proof of the annulus and torus theorems. *Amer. J. Math.*, 102 :241–277, 1980.

[49] P. Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15 :407–487, 1983.

[50] P. Scott. There are no fake Seifert fibered spaces with infinite π_1. *Annals of Math.*, 117 :35–70, 1983.

[51] P. Scott. Strong annulus and torus theorems and the enclosing property of characteristic submanifolds of 3-manifolds. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 35 :485–506, 1984.

[52] P. Scott et T. Tucker. Some examples of exotic noncompact 3-manifolds. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 40(160) :481–499, 1989.

[53] Y. Takeuchi. Partial solutions of the bad orbifold conjecture. *Topology Appl.*, 72(2) :113–120, 1996.

[54] Y. Takeuchi et M. Yokoyama. PL-least area 2-orbifolds and its applications to 3-orbifolds. Preprint, 2000.

[55] W. P. Thurston. The geometry and topology of three-manifolds. Lecture notes, Princeton University (1976–1979).

[56] J. Tits. Groupes à croissance polynomiale (d'après M. Gromov et al.). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 1980/81*, pages 176–188. Springer, Berlin, 1981.

[57] P. Tukia. Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups. *J. Reine Angew. Math.*, 391 :1–54, 1988.

[58] F. Waldhausen. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Invent. Math.*, 3–4 :308–333, 87–117, 1967.

[59] F. Waldhausen. Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten. *Topology*, 6 :505–517, 1967.

[60] F. Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Annals of Math.*, 87 :56–88, 1968.

[61] J. H. C. Whitehead. On 2-spheres in 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64 :161–166, 1958.

Index