

Cours de Palatásacay

novembre 2022

Introduction à la géométrie
de courbure négative



André,

13-08-22

Plan du cours

I Préliminaires: géométrie différentielle

1) courbes planes p. 10

2) surfaces dans \mathbb{R}^3 = feuillet-Bonnet

p. 21

3) métriques riemanniennes sur des
ouverts du plan
p. 54

II le plan hyperbolique p. 60

1- isométries p. 62

2- géodésiques p. 70

3- à propos du Vème postulat d'Euclide p. 74

4- aire des triangles p. 77

5- finesse des triangles p. 84

6- construction de surfaces hyperboliques

- par recollement

- par quotient: exemple de la surface modulaire

Ce cours est une introduction
à ceux de Gilles et Gerard qui
auront lieu en décembre. Je vais
commencer par vous expliquer d'où
viennent les questions qu'on se
pose. En très gros, il s'agit de
répondre à la question "quelle est
la forme de l'espace dans lequel nous
vivons ?" La réponse n'est pas
du tout intuitivement évidente.
Pensez à la quantité d'observations
et de réflexion qu'il a fallu
pour comprendre que la terre n'est
pas plate. De la même façon,
la réponse "ben, on voit bien que l'espace
dans lequel nous vivons est homogène,
isotrope, infini dans toutes les directions,

c'est donc \mathbb{R}^3 , "qui était parfaitement suffisante pour Newton (ici pour dire qu'elle n'a rien de stupide), doit être reformulée en "localement (i.e. aussi loin que porte notre regard) l'espace ambiant est \mathbb{R}^3 ", de la même façon que localement la terre est plate.

Il s'agit donc de comprendre la forme ^{globale} d'un espace uniquement à partir d'observations locales.

C'est là que la notion de courbure est fondamentale : la courbure peut être mesurée par des observations locales (par exemple, sur terre, en regardant les angles des triangles; ou, en relativité générale, en évaluant

la densité de matière en un point de l'espace) mais elle détermine la géométrie globale (nous en verrons un exemple avec le thm de Götz-Bonnet).

Ce vaste programme est totalement réalisé en dimension 2 (on a une classification complète des surfaces), et dans une certaine mesure en dim 3; en dim 4 il est non seulement hors de portée, mais on peut démontrer qu'il ne faut espérer aucune classification raisonnable. Pas de chance, 4 est justement la dimension de notre espace-temps.

Il n'est donc pas question de comprendre la forme de notre espace-temps simplement en disant "voici la liste complète des espaces possibles, trouvez le votre dans la liste".

C'est là que les théorèmes de
finitude, comme ceux que vont
raconter Gérard et Gilles, deviennent
intéressants. Pensez à une équation
que vous ne savez pas résoudre :
il peut être utile de savoir que,
par exemple dans un certain intervalle,
vous n'avez qu'un nombre fini de
solutions. En géométrie les théorèmes
de finitude ont en général l'allure suivante :
"Thm" il n'existe, à difféomorphisme
près, qu'un nombre fini de variétés (=
espace) à courbure dans un certain
intervalle, diamètre dans un autre intervalle,
+ quelques autres conditions du même genre.

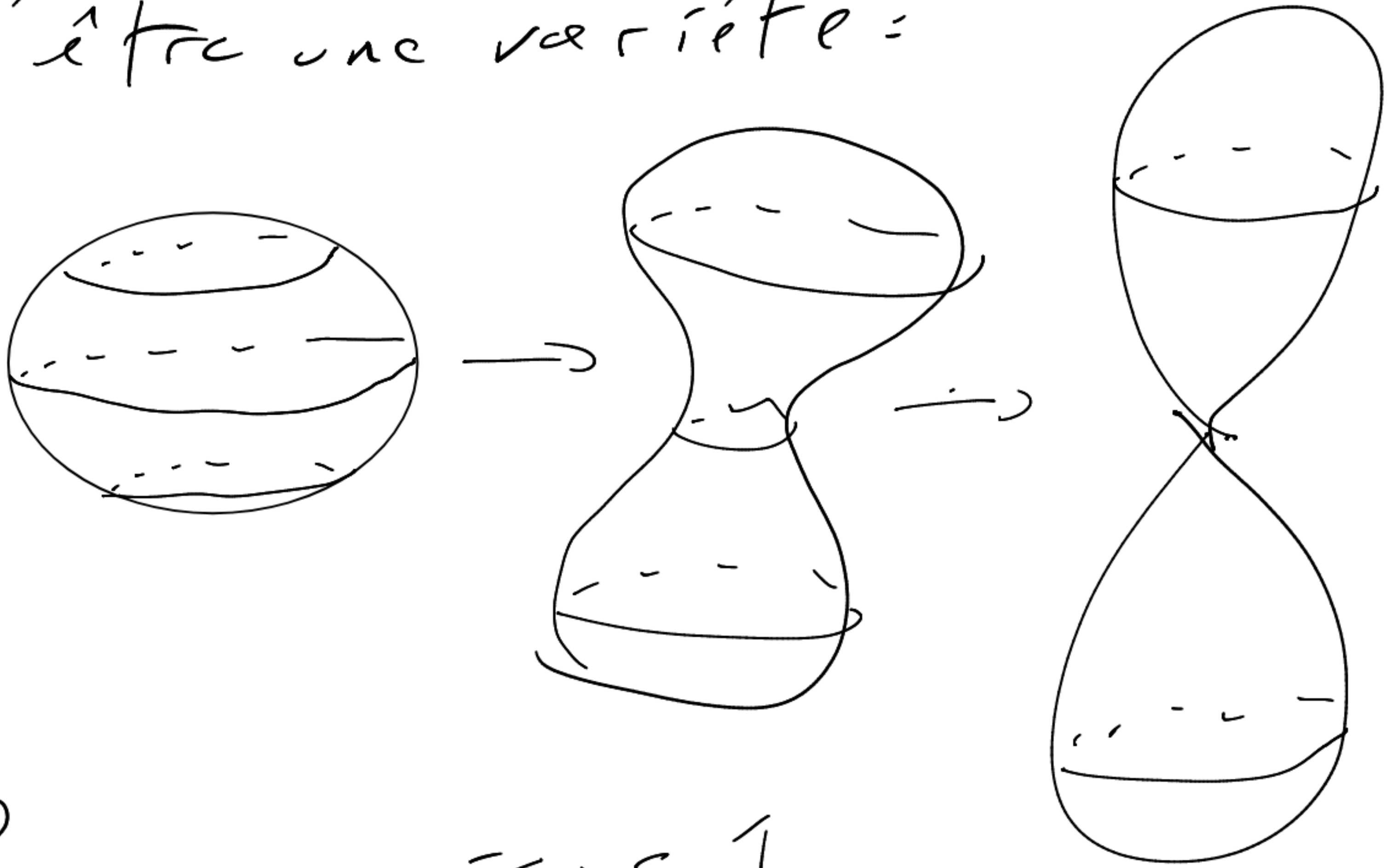
La raison pour la quelle ce cours insiste sur la courbure négative est qu'elle est en un sens générique (c'est particulièrement clair en $\dim 2$, nous en reparlons). Une autre raison est que la courbure négative est étroitement liée avec la notion d'entropie.

L'entropie est une notion d'origine dynamique (bon en fait d'origine physique) qui est habituellement présentée comme une mesure du chaos dans un système (pensez à des molécules de gaz dans une boîte). Que peut-elle avoir à faire avec la classification des espaces-temps possibles? Le lien n'est pas du tout direct!

Observez que tout ce que j'ai
raconté jusqu'à présent se place
dans le cadre des espaces localement
homogènes (tous les points sont pareils)
et isotropes (toutes les directions
sont pareilles), en d'autres termes,
des variétés différentiables.

Mais la physique nous indique
que l'espace-temps peut avoir des
singularités (pensez aux trous noirs
ou au big bang). Il y a une autre
raison pour considérer des espaces
plus généraux: étant des créatures
imparfaites, nous ne pouvons connaître
les choses qu'approximativement;
et si on fait des approximations,
on a besoin d'une notion de limite,

pour évaluer la qualité de nos approximations! Or une limite de variétés n'a aucune raison d'être une variété:



Pour ces raisons il est utile de considérer des espaces plus généraux que les variétés différentiables, et on aura besoin d'une notion de courbure pour de tels espaces.

Chapitre I : les courbes planes

(référence: Do Carmo)

Df on appelle courbe paramétrée plane une application $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (x(t), y(t))$
où I est un intervalle de \mathbb{R}
et les fonctions x, y sont de classe C^2 .

Je voudrais définir une notion de courbure pour les courbes = quelque chose qui mesurerait à quel point une courbe est courbée. On va procéder axiomatiquement = on commence par se demander quelles propriétés on attend d'une telle notion, et ensuite on voit si ces propriétés suffisent à la déterminer.

La première propriété qu'on attend est que la courbure soit une notion locale: on veut pouvoir parler de courbure de γ en un $t \in I$, donc la courbure de γ devrait être une fonction $I \rightarrow \mathbb{R}$.

D'autre part, deux courbes qui sont "très proches" en un $t \in I$ devraient avoir la même courbure en t . Que signifie "très proche" en t ? Nos courbes sont supposées C^2 , donc elles admettent un développement limité à l'ordre 2 en t . On va dire qu'elles sont très proches si elles ont le même $DL_2(t)$. Faire un **DESSIN** pour expliquer pourquoi avoir le $DL_1(t)$ ne suffit pas. Et on veut le moins de dérivées possible.

La deuxième propriété qu'on attend de la courbure est que ce soit une notion géométrique: elle ne devrait dépendre uniquement de ce qu'on voit, c'est-à-dire savoir l'image $\{\gamma(t) | t \in I\}$ de γ , et pas de la paramétrisation (Pensez que la route n'est pas plus ou moins courbée suivant que vous roulez plus ou moins vite) i.e. si vous avez une bijection $C^1 \downarrow I, \varphi = I \rightarrow I$, la courbure de $\gamma \circ \varphi$ est égale à la courbure de $\gamma \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi^{-1}(t)$. Une conséquence pratique est qu'on peut supposer la courbe paramétrisée à vitesse 1.

Enfin, toujours du fait que la courbure est une notion géométrique, elle doit être invariante par isométrie de \mathbb{R}^2 : si $\Phi = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une isométrie (translation, rotation, symétrie, et composition d'icelles)

alors $\Phi \circ \gamma$ a la même courbure que γ en $t \in I$. Une conséquence immédiate est que la courbure d'une droite ou d'un cercle est constante (indépendante de $t \in I$) : en effet si l'image de γ est un cercle ou une droite, $\forall t, t' \in I$, il existe une isométrie de \mathbb{R}^2 qui préserve l'image de γ et envoie $\gamma(t)$ sur $\gamma(t')$, donc $\forall t, t' \in I, \kappa_\gamma(\gamma(t)) = \kappa_\gamma(\Phi \circ \gamma(t)) = \kappa_\gamma(\gamma(t'))$.

Une troisième condition raisonnable est que la courbure d'une droite est nulle (qu'y a-t-il de moins courbé qu'une droite?). Enfin, il faut imposer une normalisation: on va décider que la courbure d'un cercle de rayon 1 vaut 1 (toutes les conditions précédentes sont respectées si on multiplie la courbure par $\lambda \in \mathbb{R}$).

Voilà maintenant ce qu'on peut déduire de toutes ces conditions.

Puisqu'on a le droit d'utiliser les isométries du plan, on peut supposer que le vecteur-vitesse $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ est horizontal en t_0 et $(x(t_0), y(t_0)) = (0, 0)$

i.e. $\dot{y}(t_0) = 0$. De plus on a
 suppose que γ est paramétrisé
 à vitesse 1, donc $\dot{x}(t) + \dot{y}(t) = 1$
 donc $\dot{x}(t_0) = \pm 1$. Pour faire
 une symétrie / O_y o.p.s $\dot{x}(t_0) = 1$.

De plus, observons que si la
 vitesse est constante = 1, alors
 la dérivée seconde (l'accélération)
 est perpendiculaire au vecteur
 vitesse: en effet

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire.

Par conséquent γ admet le
 développement limité à l'ordre 2

$$\text{en } t_0 \text{ : } \gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)h + \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{2}h^2 + o(h^2).$$

On voit que le seul paramètre dont on dispose est $\ddot{y}(t_0)$, donc si les conditions que nous avons imposées sont raisonnables, la courbure doit être une fonction de $\ddot{y}(t_0)$. Pour quoi pas $|\ddot{y}(t_0)|$? voyons si les conditions sont vérifiées. Si γ est une droite, sa vitesse est constante = $(1, 0)$, donc l'accélération est nulle, la courbure vaut 0. Si γ est un arc de rayon 1, modulo isométrie on a $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, comme $\dot{\gamma}(t_0) = (1, 0)$ on a $t_0 = \pm \frac{\pi}{2}$, alors $\ddot{\gamma}(t_0) = (0, \pm 1)$ donc la courbure vaut bien 1.

Interprétation géométrique :
 si γ est une courbe t. g / $|\ddot{\gamma}(t_0)| = 1$
 et $\ddot{\gamma}(t_0) \wedge \dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, alors il existe
 un unique arc de cercle, appelé arc de
 osculateur à $\gamma(t_0)$, qui admet le
 même DL₂(t₀) que γ . La courbure
 est l'inverse du rayon du cercle
 osculateur. En effet,

$t \mapsto \frac{1}{\ddot{\gamma}(t_0)} (\sin(\ddot{\gamma}(t_0)t), 1 - \cos(\ddot{\gamma}(t_0)t))$
 est une paramétrisation à vitesse
 1 d'un arc de cercle qui admet le \hat{m} DL₂(t₀)
 que γ (ex: notez que $\ddot{\gamma}(t_0) \neq 0$ par
 la condition $\ddot{\gamma}(t_0) \wedge \dot{\gamma}(t_0) \neq 0$).

Cette interprétation géométrique
 explique pourquoi la courbure telle que
 nous l'avons définie est invariante
 par isométrie.

Observez tout de même que si
vous en un peu arnaqués = j'aurais
pu choisir n'importe quelle fonction
 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ croissante, telle que $f(0) = 0$
et $f(1) = 1$, et $f(|\ddot{y}(t_0)|)$ aurait
satisfait toutes mes conditions.
Nous en reparlerons.

Problème : montrer qu'une courbe
paramétrée à vitesse 1 est déterminée,
à isométrie de \mathbb{R}^2 près, par sa courbure,

i.e. si $\gamma, \gamma' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant
 $|\gamma(t)| = |\gamma'(t)| = 1 \quad \forall t \in I$ et $\kappa(\gamma(t)) = \kappa(\gamma'(t))$
 $\forall t \in I$, alors il existe une isométrie
de \mathbb{R}^2 qui envoie $\gamma(t)$ sur $\gamma'(t) \quad \forall t \in I$.

Une propriété que je ne vais pas démontrer, mais dont je me servirai plus tard :

Prop $\gamma =]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^2$ courbe fermée ($\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$) simple (injective sur $]\alpha, \beta[$) C^1 par morceaux (il possède un nombre fini de discontinuités).

Alors $\int_{\alpha}^{\beta} \arg(\dot{\gamma}(t)) dt = 2\pi -$ somme des $(\pi - \text{angles intérieurs aux discontinuités})$

Chapitre II = surfaces paramétrées de \mathbb{R}^3

A présent on considère des objets
de la forme

$$f = \text{ouvert de } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

de classe C^2 , $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

on demande que le plan tangent soit
bien défini: $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \neq 0$.

On voudrait définir une notion de courbure pour les surfaces par amitrées. La première idée qui vient à l'esprit est de généraliser l'interprétation géométrique de la courbure des courbes: on prend l'inverse du rayon de la sphère osculatrice.

Voici pourquoi ce n'est pas une bonne idée. On aimerait que, comme pour les courbes, la courbure d'une surface suffise à déterminer la surface, à isométrie de \mathbb{R}^3 près.

Maintenant considérez une sphère de rayon 1, et un cylindre droit de rayon 1 = ils ont tous les deux, en tout point, une sphère osculatrice de rayon 1.

Pourtant elles ne sont clairement pas isométriques (ce n'est pas si facile, à ce stade, de le démontrer) ce sera évident lorsque nous aurons correctement défini la courbure).

Question quel est le problème avec la sphère osculatrice?

Réponse le problème est que le cylindre n'est pas courbé de la même façon dans toutes les directions (0 pour les sections droites, 1 pour les sections circulaires) et que la sphère osculatrice ne peut pas en tenir compte.

Question: que faire?

Idée remplacer la sphère par un ellipsoïde osculateur

Problème: il n'est pas unique

Comment faire pour trouver
l'ellipsoïde osculateur à partir
des dérivées secondes de la surface,
comme dans le cas des courbes!

Pour me simplifier la vie
j vais supposer que ma surface est
le graphe d'une fonction $U \rightarrow \mathbb{R}$
(on peut toujours se ramener à ce
cas en mettant le plan tangent à
l'horizontale), donc la surface
paramétrisée est $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$.

Dans ce cas la dérivée seconde de f
en (x_0, y_0) est donnée par une matrice:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$
 et, par le lemme de
Schwarz, f étant C^2 ,
la matrice est symétrique.

Et vous avez vu en algèbre linéaire qu'une matrice symétrique réelle (ne pas oublier réelle) est diagonalisable.

Df On appelle courbures principales de la surface en (x_0, y_0) les valeurs propres de la matrice des dérivées secondes. On appelle courbure de Gauß le produit des courbures principales, et courbure moyenne leur somme.

Exemples sphère (exemple dégénéré)

cylindre

torse de révolution

modèles locaux = graphes de formes

quadratiques

intuition en courbure négative, les géodésiques divergent plus, les boules sont plus amples, les triangles plus fins (en courbure positive, \exists triangle tri-rectangle)

Une expression de la courbure que
je ne vais pas démontrer, mais
dont je me servirai plus tard:

$f = U \rightarrow \mathbb{R}^3$ surface paramétrée
n normale unitaire $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} / \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\|$

Alors $K_1 = n \cdot \frac{\partial n}{\partial u} \wedge \frac{\partial n}{\partial v}$

Jusqu'ici toutes les définitions
impliquent l'espace ambiant \mathbb{R}^3
si vous êtes un être 2-dimensionnel
vivant sur la surface, vous ne
pouvez pas voir d'ellipsoïde
osculateur, ni paire de sections
par des plans perpendiculaires au
plan tangent, on se demande comment
vous pourriez calculer la courbure.

Vous allez me dire que vous
vous en moquez de la vie des êtres
2-dimensionnels, mais pensez que nous
sommes de pauvres êtres 3-dimensionnels
et que nous n'avons a priori aucun
moyen de calculer la courbure de l'espace
dans lequel nous vivons, ce qui serait
pour tout intéressante puisque la
relativité générale nous dit que la

courbure de l'espace est reliée à la densité de matière présente.

Essayons un moment d'adopter le point de vue de nos amis $2d$.
Tout ce qu'ils peuvent faire, c'est mesurer des distances et des aires dans leur monde $2d$.

⚠ les distances ne se mesurent pas de la même façon dans le monde $2d$ que dans l'espace ambiant \mathbb{R}^3 :
les $2d$ ne peuvent pas ne peuvent pas sortir de la surface pour prendre des raccourcis. Ils suivent, sur la surface, des courbes que l'on appelle géodésiques, nous y reviendrons.

Par exemple, si le monde 2d est une feuille de papier, les êtres 2d peuvent vérifier que les triangles équilatéraux satisfont le thm de Pythagore. Mais si un être 3d malicieux s'évise dérouler la feuille de papier, sans la froisser ni la déchirer, ils ne s'apercevront de rien.

Observez que quand on fait cette opération d'enroulement, une des deux courbures principales change (celle qui s'enroule), mais pas l'autre (puisque la droite reste droite). En particulier, la courbure de Gauß reste nulle.

Le Théorème Egregium de Gauß dit précisément que la courbure (que nous appelons maintenant) de Gauß ne dépend que de quantités intrinsèques, i.e. de quantités qui peuvent être mesurées par les êtres 2d (en l'occurrence, les distances).

Notez que l'auteur, qui a démontré beaucoup de théorèmes remarquables, n'a employé le mot qu'à propos de celui-là.

Montrer un exemple avec une

casquette

En pratique = Aire d'un disque ^{intrinsèque} de rayon r
 $= \pi r^2 - K \frac{\pi r^4}{12} + o(r^4)$ (faire l'exo avec une calotte sphérique)

triangles géométriques (méthode historique de Gauss)

Je reviens brièvement sur les géodésiques, juste pour indiquer un moyen géométrique de trouver les géodésiques d'une surface paramétrée de \mathbb{R}^3 : ce sont les courbes telles que si on les parcourt à vitesse constante, leur accélération est perpendiculaire à la surface (pour une courbe à vitesse constante, l'accélération est toujours perpendiculaire à la courbe elle-même, mais pas forcément à la surface. Exemple avec des parallèles sur une sphère). Une conséquence est que les géodésiques sont les solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 (i.e. qui fait intervenir les dérivées et dérivées secondes)

donc le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que par tout point de la surface, dans toute direction tangente, passe une unique géodésique.

Dans certains cas très symétriques, cette information est suffisante pour déterminer les géodésiques; par exemple dans le cas des sphères, on a vu que les grands cercles sont des géodésiques; mais comme en chaque point, dans chaque direction, passe un grand cercle, on sait que les grands cercles sont toutes les géodésiques.

Exo trouver les géodésiques des cylindres
Un autre cas où on sait trouver les géodésiques est celui des surfaces

de révolution, mais cela demande plus de travail. En général on ne peut pas déterminer les géodésiques, parce qu'on ne sait pas résoudre les équations différentielles.

J'ai dit que les géodésiques sont
les courbes tracées sur la surface,
parcourues à vitesse constante, telles
que l'accélération est perpendiculaire
à la surface. L'idée est qu'une
géodésique "va tout droit", pour autant
qu'il soit possible d'aller tout droit
sur une surface courbe (pensez un plan
euclidien, où la ligne droite est le plus court
chemin entre deux points), et si l'accélération
a une composante tangentielle nécessairement
⊥ à la courbe (puisque la vitesse est
constante), cela va faire tourner la
courbe à gauche ou à droite suivant
la position de la composante tangentielle
par rapport au vecteur-vitesse.

La définition suivante permet de quantifier cette idée :

DF la courbure géodésique d'une courbe C^2 tracée sur une surface paramétrée est le mm de la composante tangentielle de l'accélération.

Rq 1) la courbure géodésique d'une courbe est nulle ssi la courbe est une géodésique

2) pour une courbe plane, la courbure est exactement la courbure géodésique (puisqu'il n'y a pas de composante normale)

1-2.2. Cas β -Bouret

Dans toute la suite, quand je parlerai d'un triangle ou autre polygone, il sera entendu que les côtés sont des segments de droites, c'est à dire de pseudo-droites.

Sur la sphère il y a des triangles à 3 angles droits, en particulier la somme des angles est $> \pi$; à l'inverse, sur la pseudo-sphère (l'espace de tout $E_i(\ell)$), il existe des triangles avec un angle nul et deux angles aigus, donc la somme est $< \pi$.

On est tenté d'en déduire le principe suivant = la courbure positive (resp. négative) fait gonfler (resp.

rétrécir) les angles.

Le théorème de Gauß-Bonnet donne en sens précis à cet énoncé informel. Sous sa forme la plus simple, il dit la chose suivante:

Thm Soit $f = U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
une surface paramétrisée C^∞ et soit

T un triangle géométrique de $f(U)$
d'angles intérieurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Alors

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi + \int_T K(u,v) \left| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right| du dv$$

où $K(u,v)$ désigne la courbure de Gauß au point $f(u,v)$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right| du dv$ est "l'élément d'aire" (aire d'un parallélogramme infinitésimal) sur $f(U)$.

Exemple pour un triangle sphérique, on a $\sum \theta_i = \pi + \text{Aire}(T)$

Nous allons démontrer un énoncé un peu plus général : on admet des bords non géodésiques, et plus que 3 sommets.

Thm Soit $f = U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée C^2 , et soit $\gamma = [a, b] \rightarrow f(U)$ une courbe C^1 par morceaux. Soit R la région délimitée par γ dans $f(U)$. (réunion des composantes connexes d'adhérence compacte de $f(U) \setminus \gamma([a, b])$). On a

$$\int_R K(f(u, v)) \left| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right| du dv = (2-n)\pi + \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_i - \int_\gamma \kappa_g(\gamma(t)) dt$$

où n est le nombre de discontinuités de γ
 \mathcal{D}_i est l'angle intérieur en la i -ème discontinuité
 κ_g est la courbure géodésique de γ (où elle est définie (en dehors des discontinuités))

Preuve du thm pour se simplifier
la vie on va supposer $|e_1| = |e_2| = |\bar{\gamma}| = 1$,
 $e_1 \cdot e_2 = 0 \Rightarrow e_1 = \frac{\partial F}{\partial u}$ et $e_2 = \frac{\partial F}{\partial v}$.

Considérons la courbe plane $\beta = f'(\gamma)$
et l'intégrale $I = \int_{\beta} e_1 \cdot \dot{e}_2 dt$

où $\dot{e}_2 = \frac{d}{dt} e_2$.

On va calculer I de deux façons différentes,
une directe, l'autre avec Stokes.

Directe $|\bar{\gamma}| = 1$ donc on peut écrire

$$\bar{\gamma} = \cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2$$

Posons $\gamma = u \wedge \bar{\gamma}$ où $u = \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} = e_1 \wedge e_2$

Observons que $\gamma = (e_1 \wedge e_2) \wedge (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2)$
 $= \cos \theta e_2 - \sin \theta e_1$

de sorte que $\dot{\gamma} = \dot{\theta}(-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) + \cos \theta \dot{e}_1 + \sin \theta \dot{e}_2$
 $= \dot{\theta} \gamma + \cos \theta \dot{e}_1 + \sin \theta \dot{e}_2$

et là on se souvient que la courbure géodésique de γ est la composante tangentielle de $\ddot{\gamma}$, de plus $|\dot{\gamma}|=1$ donc $\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} = 0$, et comme ν est tangentiel

et $\perp \dot{\gamma}$, $K_{\text{g}}(\gamma) = \nu \cdot \ddot{\gamma}$ donc

$$\begin{aligned} K_{\text{g}} &= \dot{\theta} + (-\sin \theta \dot{e}_1 + \cos \theta \dot{e}_2) \cdot (\cos \theta \dot{e}_1 + \sin \theta \dot{e}_2) \\ &= \dot{\theta} - \dot{e}_1 \cdot \dot{e}_2 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $e_1 \cdot e_2 = 0$ donc $\dot{e}_1 \cdot \dot{e}_2 = -\dot{e}_1 \cdot e_2$.

Par conséquent
$$\underline{I} = \int_{\gamma} (\dot{\theta} - K_{\text{g}}) dt$$

$$= (2-n)\pi + \sum \theta_i - \int_{\gamma} K_{\text{g}}(\alpha(t)) dt$$

en utilisant un lemme du 1^{er} chapitre.

Maintenant, calculons I en utilisant Stokes, ou plus exactement la formule de Green-Riemann qui dit

$$\int_{\beta} (P\dot{u} + Q\dot{v}) dt = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv$$

on l'applique à $P(u,v) = e_1 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial u}$, $Q(u,v) = e_1 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial v}$,

et on observe que (par dérivation composée)

$$\dot{e}_2 = \frac{\partial e_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial e_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\text{Donc } I = \int_{\gamma} e_1 \cdot \dot{e}_2 = \int_{\beta} (P\dot{u} + Q\dot{v}) dt$$

$$= \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv$$

et d'autre part

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial e_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial v} + e_1 \cdot \frac{\partial^2 e_2}{\partial u \partial v} - \frac{\partial e_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial u} - e_1 \cdot \frac{\partial^2 e_2}{\partial v \partial u}$$

$$= \frac{\partial e_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial v} - \frac{\partial e_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial u} \quad \text{par Schwarz (fisk } C^2)$$

Maintenant on se souvient de l'expression de la courbure $K = n \cdot \left(\frac{\partial n}{\partial u} \wedge \frac{\partial n}{\partial v} \right)$
 cette identité $(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$
 (exercice)

$$\text{Donc } K = \left(e_1 \cdot \frac{\partial n}{\partial u} \right) \left(e_2 \cdot \frac{\partial n}{\partial v} \right) - \left(e_1 \cdot \frac{\partial n}{\partial v} \right) \left(e_2 \cdot \frac{\partial n}{\partial u} \right)$$

ensuite on observe que $e_1 \cdot n = 0$ donc

$$e_1 \cdot \frac{\partial n}{\partial u} = - \frac{\partial e_1}{\partial u} \cdot n, \text{ et puisque } e_1 \cdot e_2 = 0,$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial u} \in \text{Vect}(e_2, n) \text{ et de même } \frac{\partial e_2}{\partial v} \in \text{Vect}(e_1, n)$$

$$\text{Donc } \frac{\partial e_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial v} = \left(\text{composante en } n \text{ de } \frac{\partial e_1}{\partial u} \right) \times \left(\text{composante en } n \text{ de } \frac{\partial e_2}{\partial v} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial e_1}{\partial u} \cdot n \right) \left(\frac{\partial e_2}{\partial v} \cdot n \right)$$

Donc $\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \rho}{\partial v} = K$, ce qui conclut la preuve du thm. \square

Mais Gauss-Bonnet peut nous dire beaucoup plus que ça en fait.

Imaginons que notre surface est découpée en triangles (dont on peut supposer les bords géodésiques: s'il ne le sont pas, il n'y a qu'à tirer dessus).

On peut calculer l'intégrale de la courbure en la calculant sur chaque triangle, puis en sommant sur tous les triangles: on obtient d'un côté $\int K$, de l'autre

$$\sum_{\text{triangles}} \left(\sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi \right) = -\frac{1}{10} (\# \text{triangles}) + 2\pi (\# \text{somets})$$

et on observe que chaque triangle a 3 côtés, mais chaque côté appartient à 2 triangles, donc le nombre total de côtés est $\frac{3}{2} \# \text{triangles}$

$$\text{donc } \frac{-1}{2} \# \text{triangles} = \# \text{triangles} - \# \text{côtés}$$

$$\text{ce qui donne } \int K = 2\pi (\# \text{triangles} - \# \text{côtés} + \# \text{somets})$$

La quantité de droite est ce qu'on appelle la caractéristique d'Euler.

Ce qu'elle a de remarquable c'est que non seulement elle ne dépend pas de la façon dont on découpe la surface en triangles, mais en fait elle ne dépend que de la topologie de la surface: deux surfaces homéomorphes ont la même caractéristique d'Euler, même si elles ont l'air très différentes.

Par exemple, une sphère, un ballon dégonflé, un tétraèdre, ont tous la même, à savoir 2.

Pour la sphère unité (le ballon gonflé), $\kappa \equiv 1$, on obtient que l'aire totale vaut 4π . Pour le ballon dégonflé, cela signifie que la courbure négative qui apparaît aux endroits creux est compensée par une courbure plus forte aux endroits pleins.

La caractéristique d'Euler est bien plus puissante qu'elle n'en a l'air = j'ai dit que deux surfaces homéomorphes ont même caractéristique d'Euler, mais la réciproque est vraie, si on se restreint aux surfaces compactes, sans bord, orientables (pour les non-orientables, c'est vrai aussi, si on les considère à part).

Donc on a une liste complète
des surfaces compactes, sans bord, orientables:

sphère tore bitore tritore etc...

$$\chi = 2 \quad \chi = 0$$



$$\chi = -4$$



$$\chi = -2$$

pour obtenir les non-orientables, il suffit
de prendre une orientable, y faire un (resp 2)
petit trou, et de recoller un (resp 2)
ruban de Möbius. Notez qu'en recollant
un Möbius vous faites diminuer χ de 1

puisque $\chi(\text{disque}) = 1$ mais $\chi(\text{Möbius}) = 0$.

Dans la suite j'en concentrerai sur les
orientables parce que les non-orientables
à partir des orientables en quotientant
par une involution qui renverse l'orientation,
donc en termes de géométrie on ne verra rien
chez les non-orientables qu'on ne puisse voir chez les 2or.

Observez que plus χ grandit (en valeur absolue), plus il y a de courbure négative : la courbure négative semble être majoritaire dans la nature.

On peut se demander, que se passe-t-il en dimension plus grande ?

Rien ne nous empêche de considérer des applications $\cup \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k+n}$.

Cette question possède un intérêt physique : l'espace dans lequel nous vivons est de dimension 3 (4 si on rajoute le temps), sa courbure est liée (par la relativité générale) à la densité de matière présente, mais nous n'avons (à ce jour) aucun moyen de connaître sa topologie, ni même de savoir s'il est compact.

La réponse à la question sur la dimension supérieure est, pour faire court, en dimension 3 c'est compliqué, et à partir de la dimension 4 on ne peut espérer aucune classification raisonnable. Le but du cours de MM Besson et Courtois est d'essayer de mettre un peu d'ordre dans cette anarchie sous la forme de théorèmes de finitude : ok, on ne peut pas classer, mais au moins on sait que sous des conditions raisonnables* il n'y a qu'un nombre fini de possibilités

* du type courbure totale $< 10^6$. . .

c'est comme quand on ne sait pas résoudre une équation, mais qu'on peut dire au moins qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions $< 10^6$. . .

Le théorème de Gauß-Bonnet
comme d'autres questions.

Le n°1 sur la liste, la sphère, admet
une métrique de courbure constante
(le ballon gonflé). Y'en est-il des

autres ? regardons le n°2 : le tore.

S'il admet une métrique de courbure
constante, cette courbure est forcément
nulle.

Remarquons tout de suite qu'un tore
de courbure nulle (de classe C^2) ne
peut pas exister dans \mathbb{R}^3 : en effet
une surface compacte dans \mathbb{R}^3

forcément un point de courbure positive.

La raison en est que, la surface étant
compacte, elle est contenue dans une boule,
et l'on réduit le rayon de la boule

jusqu'à ce qu'elle touche la surface,
et au point de contact, la courbure
de la surface est minorée par celle de
la boule, qui est > 0 .

Notez que cet argument ne s'applique
pas aux surfaces non-compactes :
par exemple un cylindre dans \mathbb{R}^3 est
de courbure nulle, puisqu'il est obtenu
en enroulant (opération qui ne change
pas les distances intrinsèques, donc
pas la courbure d'après le Théorème Egregium)
une feuille de papier.

Mais alors, si on enlève la restriction
d'être une surface dans \mathbb{R}^3 , on peut très
bien fabriquer un tore de courbure
nulle. En effet, repartons du cylindre

obtenus en enroulant un plan contenu dans \mathbb{R}^3 . Maintenant, imaginons le \mathbb{R}^3 comme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 : on peut l'enrouler, comme on a enroulé un \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 , sans changer la courbure, de façon que le cylindre s'enroule sur lui-même, pour former un tore.

Qu'en est-il des suivants sur la liste : le bitore, le tritore, etc... ? s'ils peuvent être représentés par une ^{surface} à courbure constante, celle-ci est forcément négative. Nous y reviendrons au chapitre sur le plan hyperbolique.

La question de trouver des surfaces à topologie donnée à courbure constante est intéressante pour elle-même = une surface

à courbure constante est plus symétrique,
plus homogène, en un mot plus jolie.

Mais la recherche de "surfaces" de dim 3
à courbure constante, ou en tous cas ayant
une certaine homogénéité, joue aussi
un rôle important dans la réponse
apportée par (entre autres) Thurston,
Hamilton, Perelman, au problème de
classification des "surfaces" (ou "variétés")

de dim 3. En gros, la réponse est qu'une
variété de dim 3 peut être coupée en
un nombre fini de morceaux homogénéisables
(par exemple, admettent une métrique à
courbure constante). N'hésitez pas à poser
des questions à Gérard et Gilles là-dessus, ils
font partie des 10 personnes au monde qui
compréhendent d'un bout à l'autre la preuve de
Perelman.

I-3 = métriques riemanniennes
sur des domaines plans

Maintenant que nous savons
mesurer la courbure sans référence
à l'espace ambiant, nous
allons abandonner le point de
vue des surfaces paramétrées dans
 \mathbb{R}^3 : nous allons considérer des
domaines de \mathbb{R}^2 , mais au lieu d'y
mesurer les distances de façon usuelle
(euclidienne), nous allons les mesurer
à l'aide de ce qu'on appelle une
métrique riemannienne.

Df on appelle métrique riemannienne
sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , une application
 $g = U \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{matrices } 2 \times 2 \text{ symétriques} \\ \text{définies positives} \end{array} \right\}$

Quel est le rapport avec les distances?

Tout d'abord, une métrique riemannienne permet de mesurer des vitesses : si (u, v) est un vecteur de \mathbb{R}^2 , vu comme le vecteur-vitesse en $(x, y) \in U$ d'une courbe γ , $\sqrt{g(x, y)} \cdot \text{longueur de } (u, v) \text{ en } (x, y)$ (vitesse de γ en (x, y))

est $g(x, y)$, vu comme une forme quadratique, appliquée au vecteur (u, v) .

Si on peut mesurer des vitesses, on peut mesurer des longueurs = la longueur d'une courbe γ est le temps que vous mettez à la parcourir en vous déplaçant à vitesse 1. Et si on peut mesurer des longueurs, on peut mesurer des distances = la distance entre deux

points P et Q est tout simplement la plus petite longueur d'un chemin joignant P à Q (s'il en existe).

Exemples 1) la distance euclidienne usuelle correspond à prendre $g(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en supposant que U est convexe pour qu'on puisse y tracer des lignes droites).

2) Si on a une surface paramétrée,

$$\Phi = U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

, on peut lui associer une métrique riemannienne sur U , de la façon suivante: si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$(x, y) \in U$, $d\Phi$ est une application

linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 , on définit la

longueur de (u, v) , pour la métrique associée à Φ , comme étant la

longueur (usuelle) du vecteur de \mathbb{R}^3
 $d\Phi(u, v)$. Cela signifie qu'on mesure
les distances dans V comme si on
était dans la surface $\Phi(U)$.

La métrique riemannienne est alors

$$U \rightarrow \text{Mat. sym. déf. } > 0$$

$$(x, y) \mapsto d\Phi(x, y) \cdot {}^t(d\Phi(x, y)).$$

C'est exactement ce que nous faisons
quand nous regardons une carte du
monde et que nous constatons que la
ligne droite sur la carte n'est pas le
plus court chemin.

Ceci montre que les objets du
chapitre précédent sont tous pris
en compte par le nouveau point de vue.

Mais on peut se poser la question inverse = étant donnée une métrique riemannienne sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, peut-on la représenter par une surface dans \mathbb{R}^3 ?

Réponse oui, localement (c'est à dire à condition d'accepter de prendre un ouvert plus petit $V \subset U$) mais en général, non. La raison est la suivante = si vous avez un petit ouvert de courbure négative, vous pouvez le représenter par une chips (un morceau du graphe de $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$). Mais si vous essayez d'agrandir l'ouvert, le chips va se mettre à faire des plis, comme une feuille de salade ; et si vous l'agrandissez encore, les plis deviendront

tellement serrés que l'application Φ
ne pourra plus être lisse.

Donc le point de vue des métriques
riemannniennes est plus riche que celui
des surfaces paramétrées.

Tout ce long préambule n'avait d'autre
but que d'introduire le vrai héros
de ce cours = le plan hyperbolique.

Chapitre IV: le plan hyperbolique \mathbb{H}^2

Soit l'ouvert U est juste le demi-plan supérieur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

Et la métrique riemannienne est

$$U \rightarrow M \text{ et}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que la longueur d'un vecteur (u, v) , tangent à U en un point (x, y) , est $\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{y}$.

Une première remarque est que, bien que les longueurs soient différentes dans les plans hyperboliques et euclidiens, les angles sont les mêmes. En effet, si vous avez deux vecteurs (u_1, v_1) et (u_2, v_2) tangents en un même point (x, y) , leur

produit scalaire est $\frac{1}{g^2} (u_1, v_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{g^2}$

mais rappelons que l'angle θ qu'ils forment est déterminé par

$$\cos \theta = \frac{(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2)}{\|(u_1, v_1)\| \cdot \|(u_2, v_2)\|} = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{\sqrt{(u_1^2 + v_1^2)(u_2^2 + v_2^2)}}$$

dans les deux cas. Donc nous ne serons pas complètement déphasés.

En revanche voici un fait déphasant : la longueur du vecteur (u, v) devient très

grande quand $g \rightarrow 0$. Autrement dit, quand vous vous déplacez à vitesse 1

dans le plan hyperbolique, pour un observateur euclidien, vous allez de plus en plus lentement, et en fait vous n'arriverez jamais au bord = pour les habitants du plan hyperbolique, le bord est à l'infini.

IV-1 - Le groupe d'isométries de \mathbb{H}^2 .

Nous avons vu que les angles sont les mêmes dans \mathbb{H}^2 et dans \mathbb{R}^2 euclidien.

Donc une isométrie de \mathbb{H}^2 doit préserver les angles usuels (en supposant qu'elle préserve l'orientation).

Q que connaissez-vous comme transformation qui préserve les angles ?

R les isométries bien sûr; mais observez qu'à part les translations horizontales, il n'y a pas d'isométrie de \mathbb{H}^2 qui préserve le demi-plan supérieur.

Indication: souvenez-vous de votre cours d'analyse complexe: les applications holomorphes préservent les angles (et l'orientation). Et que connaissez-vous comme transformation holomorphe injective

(une isométrie est forcément injective)

bingo, les transformations homographiques.

Exo si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, alors

$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ laisse invariant $\{z / \text{Im} z > 0\}$.

solution $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}$

$$= \frac{(ac|z|^2 + bd + adz + bc\bar{z})}{|cz+d|^2}$$

dont la partie imaginaire est $\frac{ad-bc \text{Im} z}{|cz+d|^2} > 0$

c'est bien joli de préserver le domaine D ,
mais il faut aussi préserver la métrique:

Exo $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est une isométrie de \mathbb{H}^2 .

Il s'agit de vérifier qu'un vecteur
tangent (u, v) en (x, y) , $y > 0$, est envoyé par φ
sur un vecteur tangent en $\varphi(x, y)$, de même
longueur hyperbolique.

solution (u, v) est envoyé par φ sur $\varphi(z)$. (u, v) , vu comme un vecteur tangent en $\varphi(z)$.

On a $\varphi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ et la longueur

de (u, v) en $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est

$\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\text{Im}(\varphi(z))}$ mais on a vu que $\text{Im} \varphi(z) = \frac{(ad-bc)\text{Im} z}{|cz+d|^2}$

Donc la longueur de $\varphi'(z) \cdot (u, v)$ en $\varphi(z)$

est $|\varphi'(z)| \cdot \frac{|cz+d|}{(ad-bc)\text{Im}(z)} \cdot \sqrt{u^2+v^2} = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\text{Im} z}$

= longueur en z de (u, v) \square

Donc nous avons trouvé une famille d'isométries de \mathbb{H}^2 . Cette famille ressemble

beaucoup à un groupe de matrices:

Exo l'application $\Phi = \text{Sh}_2 \mathbb{R} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{isométries} \\ \text{positives de} \\ \mathbb{H}^2 \end{array} \right\}$

est un morphisme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$

de groupes, presque injectif:

son noyau est $\{ \pm \text{Id} \}$.

Pour autant rien ne nous dit que nous
avons trouvé toutes les isométries.

Pour cela nous aurons besoin d'un
Lemme si une isométrie ^{à priori, différentiable,} φ (pas forcément

homographique ^{a priori}) de \mathbb{H}^2 fixe
de point $i \in U$, et φ fixe le vecteur $(0,1)$
tangent en i , alors φ est l'identité.

Preuve observons tout d'abord que si
 φ préserve les distances, alors φ envoie
géodésique sur géodésique, puisque les
géodésiques sont définies par le fait de
minimiser la distance.

Ensuite on se souvient que
par un point, dans une direction donnée,
passe une unique géodésique; puisque
 φ fixe $(0,1)$, φ envoie sur elle-même la
géodésique γ passant par i dans la direction
 $(0,1)$. Cela ne signifie pas, a priori,

que tous les points de γ sont fixés.
Mais observez que φ préserve les
distances, et qu'il y a le long de γ
pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, un unique point σ
à distance t de i . Donc en fait γ
est fixée point par point, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}_+$,
 $\gamma(t) = \varphi(\sigma(t))$.

Enfin, notons que puisque φ préserve
les distances, sa dérivée préserve
les normes des vecteurs tangents (puisque
les distances s'obtiennent en intégrant la
norme le long des géodésiques). Donc $\varphi(i)$
est une isométrie de \mathbb{R}^2 , préservant l'orien-
tation, et le vecteur $(0,1)$, donc c'est l'identité.

Donc l'argument que nous avons utilisé
pour $(0,1)$ marche pour tout vecteur ty en i :
toutes les géodésiques issues de i sont
fixées point par point.

Comme les géodésiques sont solutions d'une équation, elles sont définies sur un intervalle, donc nous venons de démontrer que φ coïncide avec l'identité sur un voisinage ouvert de i . Comme, par continuité de φ , $\{z \in U \mid \varphi(z) = z\}$ est fermé, par convexité de U , $\varphi = \text{Id}$ sur U tout entier. \square

Voilà maintenant comment cela nous permet de déterminer toutes les isométries de \mathbb{H}^2 . Il s'agit de montrer que le morphisme

$\Phi = \text{SL}_2\mathbb{R} \rightarrow \text{isom.}$ est surjectif.

Soit donc φ une isométrie ^{dérivable et} positive de \mathbb{H}^2 . Soit $b+ia = \varphi(i)$, alors, en notant $\varphi_1(z) = az+b$, on a $\varphi_1^{-1}(\varphi(i)) = i$,

et $\psi_1^{-1} \circ \psi$ est encore une isométrie de \mathbb{H}^2 , qui fixe i (mais pas $(0,1)$).

Ensuite on regarde $(\psi_1^{-1} \circ \psi)'(i) \cdot (0,1)$, c'est un vecteur tangent en i , de norme 1, on peut l'écrire sous la forme $(\sin \theta, \cos \theta)$.

Soit $\psi_2 = \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$

$$e^{i(\frac{\theta}{2} - \varphi)}$$

$$z \mapsto \frac{z \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{z \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}}$$

Exo $\psi_2(i) = i$, et $\psi_2'(i) = e^{i\vartheta}$

donc $\psi_2'(i) \cdot (\sin \theta, \cos \theta) = e^{i\frac{\theta}{2}} = (0,1)$

si vous me permettez ce horrible mélange de nombres complexes et de vecteurs.

Par conséquent $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \psi$ est une isométrie de \mathbb{H}^2 , qui fixe i , et dont la dérivée fixe $(0,1)$ = c'est l'identité,

donc $\varphi = \Psi_1 \circ \Psi_2^{-1} \in \text{SL}_2 \mathbb{R}$, ce qui
démontre la surjectivité de $\underline{\Phi}$.

Maintenant que nous disposons d'un
gros groupe d'isométries, il va être
facile de déterminer les géodésiques.

IV-2 Géodésiques de \mathbb{H}^2

Lemme les droites verticales
sont géodésiques.

Preuve les symétriques/droites
verticales sont des isométries
(pas positives). Donc, la réflexion ψ ,
envoie la géodésique issue de i dans
la direction $(0,1)$ sur une géodésique
issue de $\psi(i) = i$ dans la direction
 $\psi'(i) \cdot (0,1) = (0,1)$. Mais il n'y a qu'une
géodésique issue de i dans la direction
 $(0,1)$, donc elle est invariante par ψ ,
donc c'est $\mathbb{R} + i$. Donc $\mathbb{R} + i$ est une
géodésique. Les translations horizontales
sont des isométries, toutes les droites
verticales sont géodésiques. \square

Prop les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont les droites verticales et les demi-cercles centrés sur l'axe réel.

Preuve soient $z = a + ib \in \mathbb{H}^2$, et (u, v) un vecteur tangent en z , on cherche la géodésique issue de z dans la direction (u, v) .

Reprenons la preuve de la surjectivité de l'homomorphisme $\mathbb{P} = \text{ou } \gamma$ avait construit un élément de $SL_2\mathbb{R}$ (c'était $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$) qui envoie i sur z , et dont le dérivé envoie $(0, 1)$ sur (u, v) .

Ensuite, observez qu'un élément

$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ de $SL_2\mathbb{R}$ se décompose de

la façon suivante: $z \mapsto \frac{t}{f} z$

- si $\gamma = 0$ = homothétie et translation $z \mapsto z + \frac{t}{f}$
- si $\gamma \neq 0$ = homothétie $z \mapsto \gamma z$, translation $z \mapsto z + \delta$, inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$,

homothétie $z \mapsto (-\frac{\alpha}{\delta}z + \beta)$

translation $z \mapsto z + \frac{\alpha}{\delta}$

en ré-écrivant
$$\frac{\alpha z + \beta}{\delta z + \rho} = \frac{\frac{\alpha}{\delta}(z + \delta) - \frac{\alpha}{\delta}\delta + \beta}{\delta z + \rho}$$

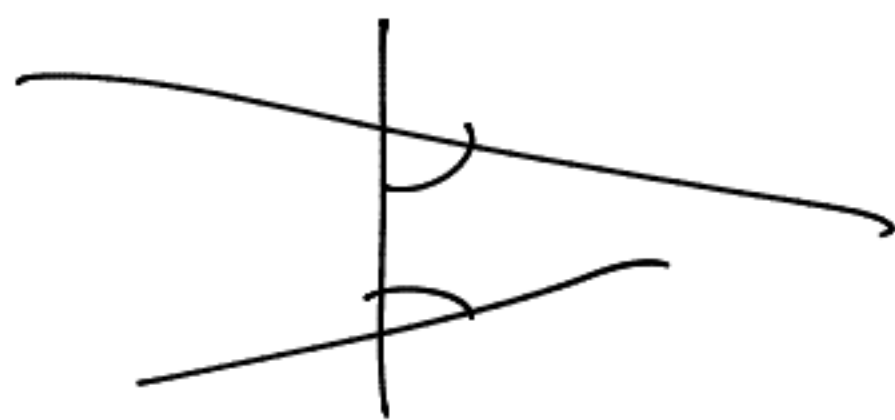
Les translations et les homothéties changent les droites verticales en droites verticales, et l'inversion change la droite verticale $x = x_0$ en le cercle de centre $\frac{1}{2x_0}$ ($x_0 \neq 0$)

Donc toutes les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont des droites verticales ou des demi-cercles centrés au bord. Comme par un point donné, dans une direction donnée passe une unique droite verticale (si la direction est verticale) ou arc centré au bord (exercice: le construire à la règle et au compas)

nous avons démontré que les géodésiques
de \mathbb{H}^2 sont exactement les droites
verticales et les cercles centrés au bord. \square

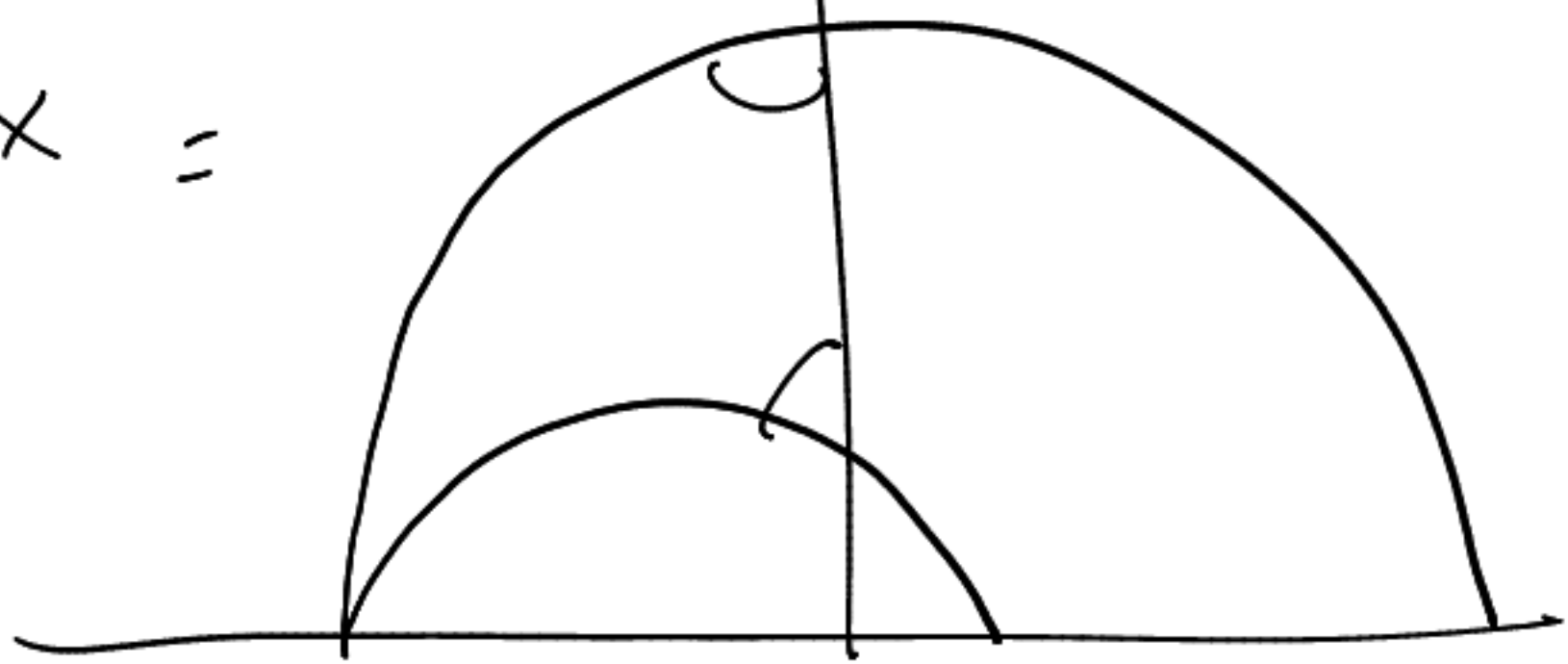
IV-3. A propos du IV^{ème} postulat d'Euclide
Vous savez (j'espère) que la géométrie
du plan euclidien peut être définie
axiomatiquement, à partir des
postulats suivants :

- 1) par deux points passe une unique droite
- 2) toute ligne droite peut être prolongée à l' ∞
- 3) étant donnés deux points, il existe un
cercle de centre le premier, passant par le 2nd
- 4) tous les angles droits sont congruents
(en langage moderne, il existe une isométrie qui
envoie l'un sur l'autre)
- 5) si deux droites sont sécantes avec une
troisième, de sorte que la somme des
angles intérieurs d'un côté est $< \pi$, alors
les deux droites sont sécantes de ce côté



Maintenant, imaginons qu'on appelle "droites" les géodésiques de \mathbb{H}^2 , cercle de centre z et de rayon R l'ensemble $\{x \in \mathbb{H}^2 \mid d(x, z) = R\}$, et voyons si la géométrie ainsi définie satisfait les postulats d'Euclide.

- 1) ex 0 (à l'autique, à la règle et au compas!)
- 2) évident (rappelez-vous que le bord intérieur est à l'infini)
- 3) évident avec la définition des cercles
- 4) ex 0 (indication: trouver le bon élément de $L_2(\mathbb{R})$)
- 5) clairement faux =



Cela montre, en particulier, que le 5^{ème} postulat n'est pas conséquence des 4 premiers. Il a quand même fallu plus

de 2000 ans pour s'en apercevoir
(Euler, Boljaj, Lobachevski)!

Notez que le 5^{ème} postulat est
souvent énoncé sous la forme "par
un point donné passe une unique
parallèle à une droite donnée". C'est
équivalent si on définit le parallélisme
comme le fait de ne pas se rencontrer.

Mais sous cette forme, il y a un
contre-exemple évident - la géométrie
sphérique! En fait les gens étaient
au courant depuis longtemps, la géométrie
sphérique est très étudiée, notamment
dans la marine, mais elle n'était pas
considérée comme un vrai contre-exemple
parce qu'il n'est pas clair qu'elle satisfait le
2^{ème} postulat.

IV-4 Aire des Triangles

Une des propriétés les plus remarquables de la géométrie hyperbolique est qu'on peut calculer l'aire des triangles à partir de leurs angles.

Bien sûr en géométrie euclidienne c'est impossible puisque les homothéties préservent les angles, mais pas l'aire.

Mais en géométrie hyperbolique, les homothéties (qui préservent le $\frac{1}{2}$ plan supérieur) sont des isométries, donc préservent l'aire! En fait en géom. hyp.,

toute transformation qui préserve les angles est une isométrie (elle préserve les angles donc elle est holomorphe, et une bijection holomorphe du $\frac{1}{2}$ plan est une homographie

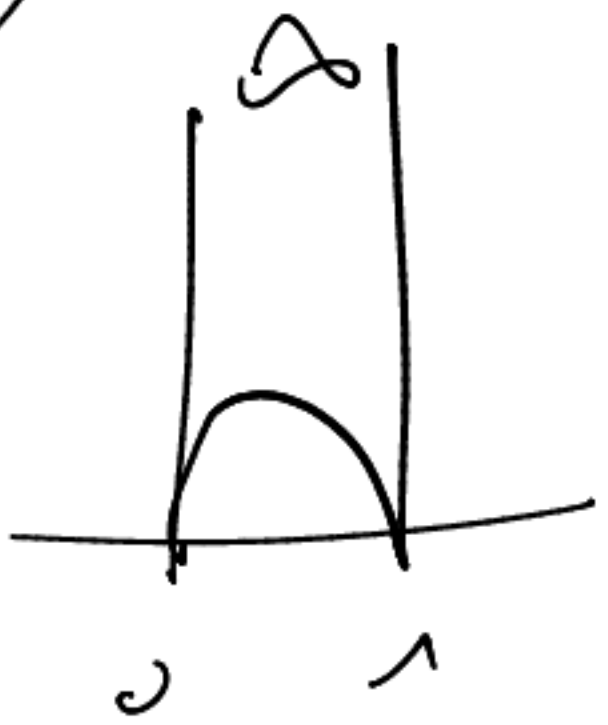
Exo)

Théorème (formule de Gauss-Bonnet)
 L'aire d'un triangle
 hyperbolique dont les angles intérieurs
 sont $\alpha, \beta,$ et $\gamma \in [0, \pi]$ est $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Preuve Commençons par le cas le
 plus exotique : celui où les 3 sommets
 sont à l' ∞ . Notons que puisque les
 géodésiques sont perpendiculaires au
 bord, un tel triangle, appelé idéal,
 a tous ses angles nuls.

Tout d'abord, observons qu'à isomé-
 trie près, il n'existe qu'un seul triangle
 idéal : celui dont les sommets sont

$0, 1$ et ∞ . En effet, supposons que
 les sommets sont a, b et c
 $\in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.



Alors l'homographie $z \mapsto \frac{b-c}{b-a} \frac{z-a}{z-c}$

envoie a sur 0 , c sur ∞ ,

et b sur 1 .

Il ne nous reste plus qu'à calculer l'aire
du triangle $(0, 1, \infty)$, mais comme je suis
flemmard je vais calculer celle du

triangle $(-1, 1, \infty)$ =

$$\int_{x=-1}^1 dx \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2}$$

$$= \int_{x=-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi}^0 d\theta = \pi$$

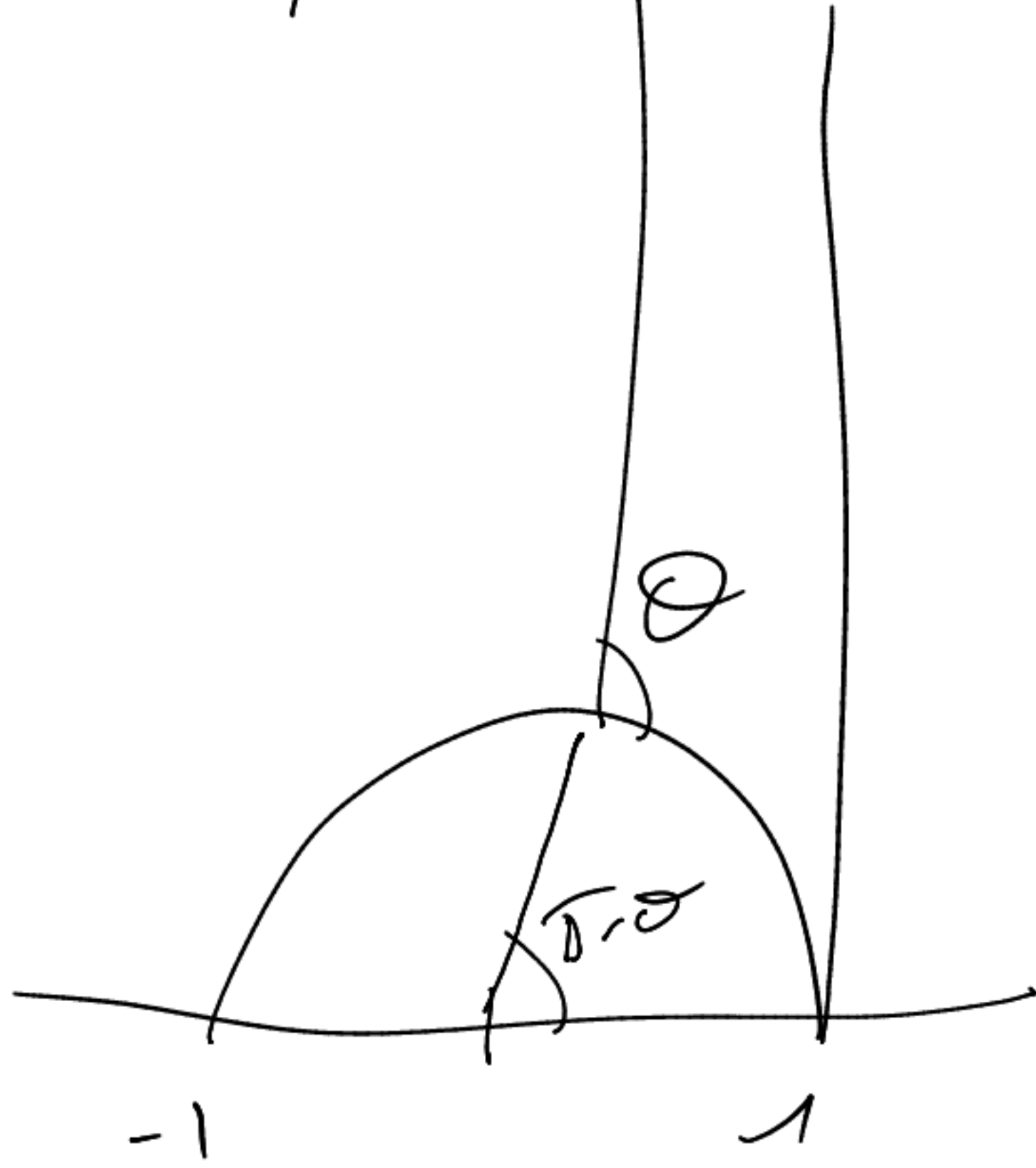
$$x = \cos \theta \quad \theta \in [-\pi, 0]$$

$$dx = -\sin \theta d\theta$$

Donc l'aire des triangles idéaux est π .

où le $\frac{1}{y^2}$ vient du
fait que l'aire
d'un petit carré
en (x, y) est $\frac{\epsilon^2}{y^2}$

Ensuite on calcule l'aire d'un triangle ayant 2 sommets à l' ∞ . Comme tout à l'heure, modulo isométrie, il n'en existe qu'un pour un angle θ donné :



le calcul de tout à l'heure devient avec le changement de variable s

$$\int_{x=\cos(\pi-\theta)}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\theta}^{\pi} du = \pi - \theta$$

$x = \cos(\pi - u)$

Ensuite on regarde un triangle avec un seul sommet à l' ∞ ,

là encore on se ramène à un triangle



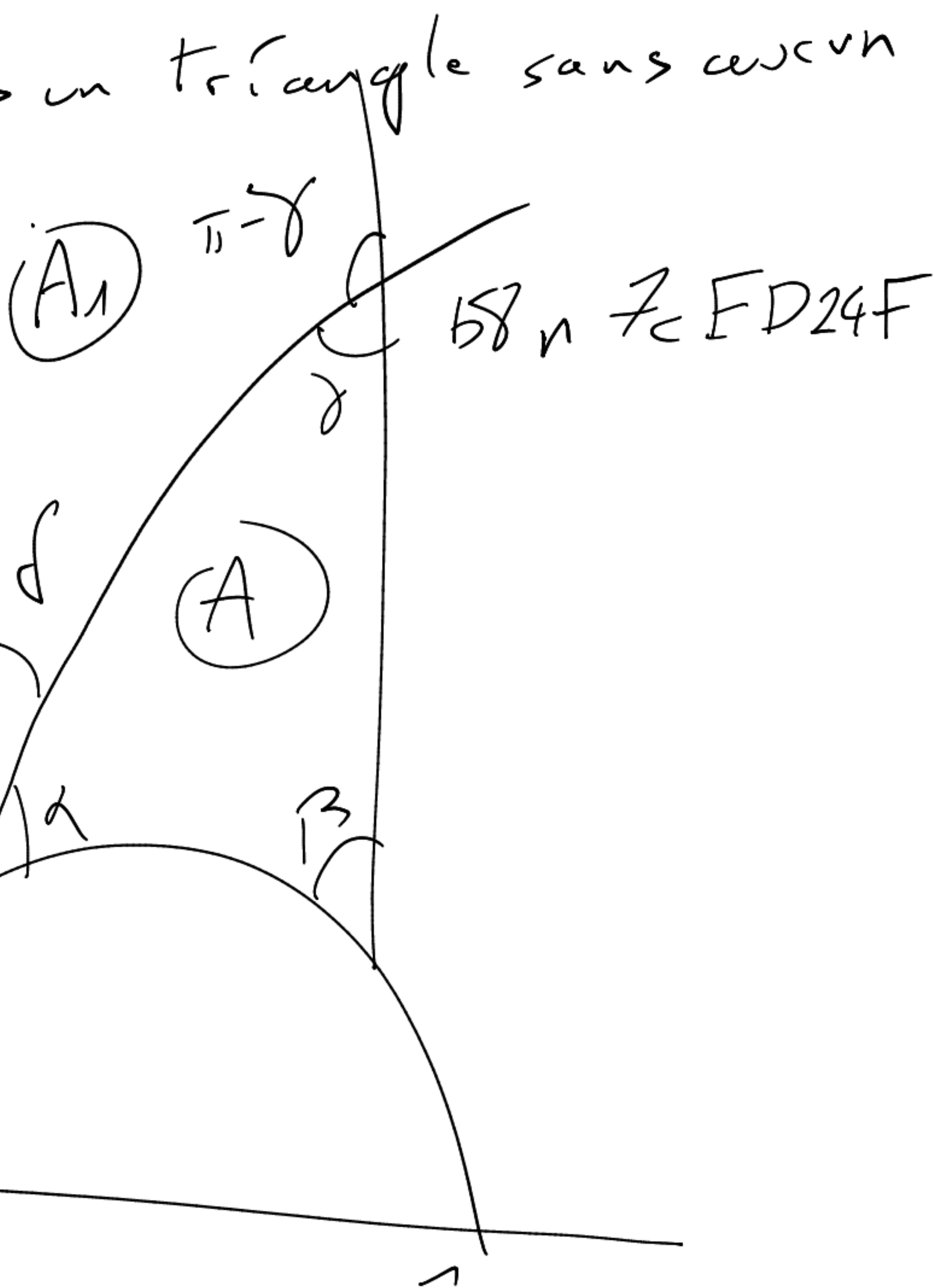
et on utilise le cas précédent.

En fin, regardons un triangle sans aucun sommet à l' ∞

$$A + A_1 = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$A_1 = \pi - (\beta + \pi - \gamma) = \gamma - \beta$$

$$A = \pi - \alpha - \beta - \gamma - \gamma + \beta = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$



On peut voir cette formule comme
un cas particulier de Gauss-Bonnet,
sauf qu'elle ne contient pas de courbure,
mais justement nous allons nous
en servir pour calculer la courbure.

Commençons par observer que la
courbure est invariante par isométrie;
et comme le groupe d'isométrie de \mathbb{H}^2
agit transitivement (quelques soient
deux points, il existe une isométrie
qui envoie l'un sur l'autre), la courbure,
vue comme fonction sur \mathbb{H}^2 , est constante.

Alors Gauss-Bonnet (différentiel)
+ Gauss-Bonnet (hyperbolique)
 $\Rightarrow \kappa \equiv -1$.

Ensuite = parler de constructions
par recouvrement

dire qu'on peut obtenir des surfaces

de tous genres

mentionner la classification des surfaces

-> la géométrie hyperbolique est "générique"^{!!!}

-> thm d'uniformisation:

-> quel des dimensions supérieures?

-> conjecture de Poincaré = hyperbolique n'est

pas générique en dim ≥ 3 . Mais courbure ≤ 0 ?

quel de la courbure de Sol? (pour Nil est 0)

$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 = 0$ tous les produits avec \mathbb{R} = aussi

-> demander à GG, ils connaissent la preuve de

Perelman mieux que personne (littéralement)

-> courbure constante est trop demander, mais

on s'intéresse à des propriétés qualitative de

la courbure (finesse des triangles)

-> expliquer plus GG s'intéressent à des espaces réguliers

5- Finesse des triangles: $\exists f > 0$,



$\forall ABC$ triangle géométrique,

chaque côté est contenu dans le f -voisinage des 2 autres.

Cette propriété s'appelle f -hyperbolicité.

m_q et $l'épa$, (\mathbb{R}^2 oui!)

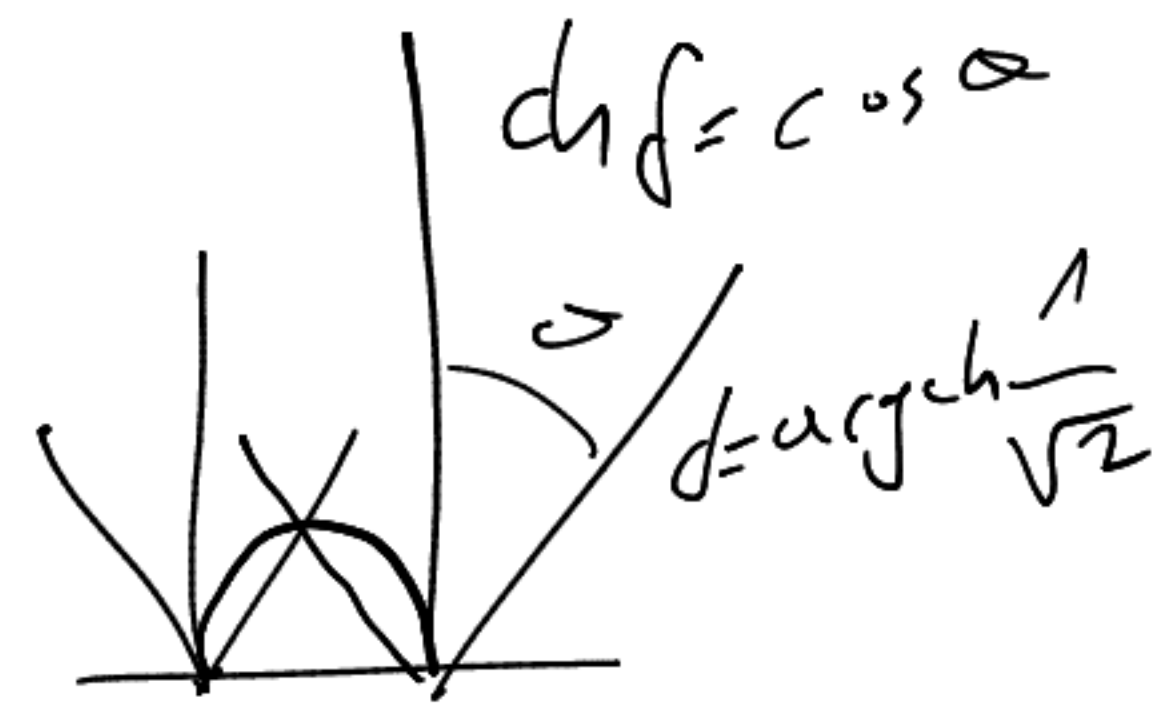
On va $m_q \mathbb{H}^2$ possède cette propriété, et trouver le f . Commençons par le

faire pour les triangles idéaux :
modèle isométrique ops en des sommets est ∞
ou α coté du bus $\subset V_f$ (côtés verticaux)

où $f = \arg \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{2}}$, et comme

toujours par isométrie on peut permuter les côtés,

ça marche pour n'importe quel côté.



2) cas général toujours par isométrie,
on peut supposer qu'un des côtés est vertical.
voir dessin page suivante.

Soit x sur un des côtés, on cherche y sur
un des deux autres côtés, tel que $d(x, y) \leq f$.

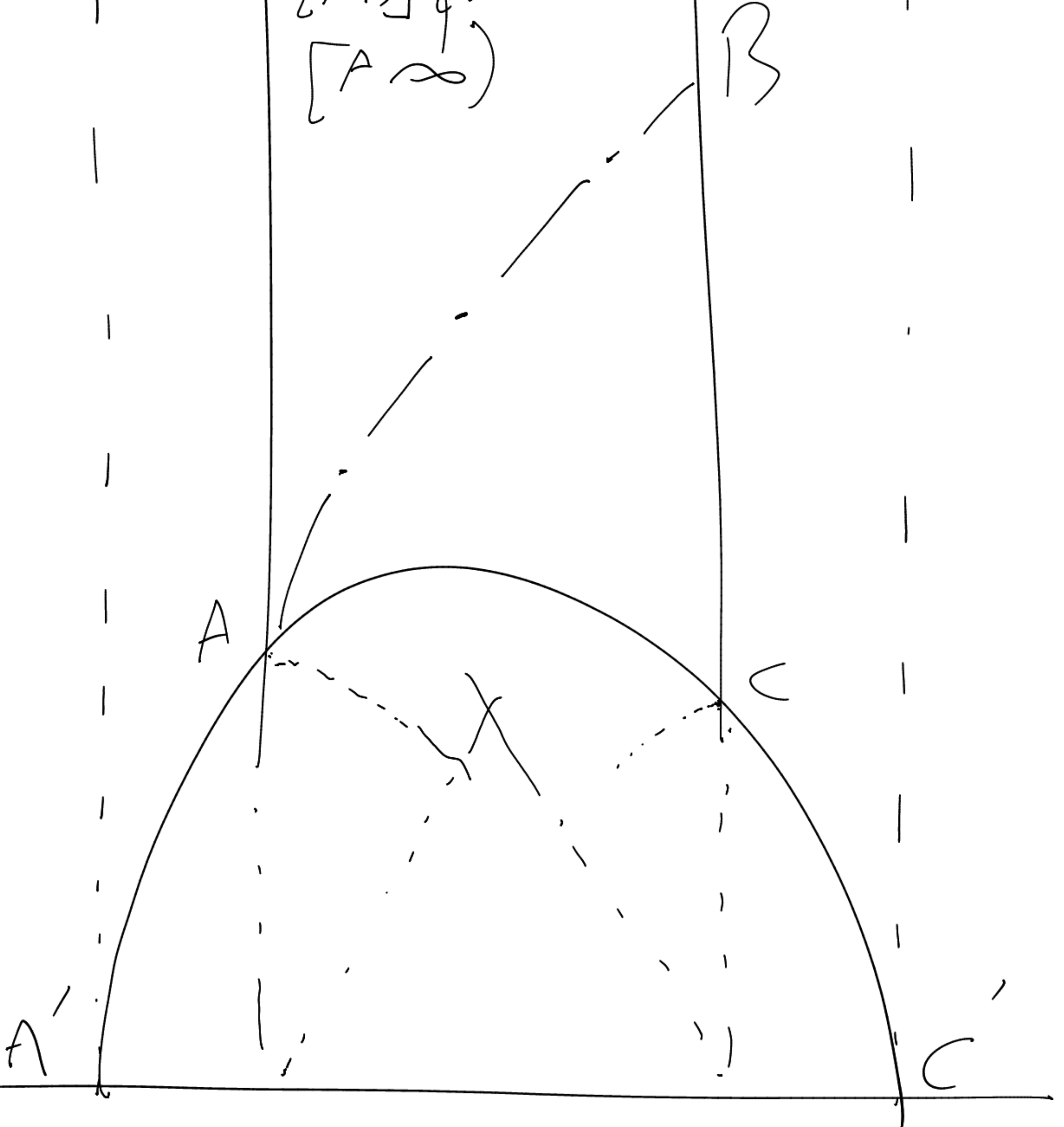
Toujours à isométrie près, ops $x \in [AC]$
(on peut rendre à l'importe quel côté vertical, et
on peut échanger les 2 côtés non verticaux en
préservant le côté vertical). D'après le
1^{er} cas, $\exists y' \in (A'\Delta) \cup (C'\Delta)$ tq, $d(x, y') \leq f$.

cas 2.1 $y' \in (A'\Delta)$. Alors $[xy']$ coupe $[AB]$
avant $(A'\Delta)$, donc $\exists y \in [AB]$, $d(x, y) \leq f$.

cas 2.2 $y' \in (C'\Delta)$. Alors $[xy']$ coupe $[BC]$
ou $[AB]$ avant $(C'\Delta)$, donc $\exists y \in [BC] \cup [AB]$,
 $d(x, y) \leq f$. \square

1 seul sommet à l'infini 1000 d, les 5 du côté

dit à part.
tout point V de $[AC]$
est plus proche
d'un point de
 $[AB]$ que de
 $[A\infty)$



Cette propriété de f -finesse des triangles, aussi appelée f -hyperbolicité, n'a l'air de rien mais en fait c'est la propriété la plus utilisée de la courbure négative, et c'est elle qu'on utilise pour définir une notion de courbure pour les espaces qui ne sont pas des variétés (par exemple, des espaces métriques) pour lesquels la courbure telle que nous l'avons définie n'existe pas. Vous allez me demander, à quoi bon définir la courbure pour des espaces qui ne sont pas des variétés, puisque la physique nous dit que l'espace dans lequel nous vivons est une variété.

Une première réponse est que l'espace dans lequel nous vivons n'est pas tout à fait une variété, puisqu'il peut avoir des singularités comme le big bang ou les trous noirs, où l'homogénéité locale n'est pas respectée.

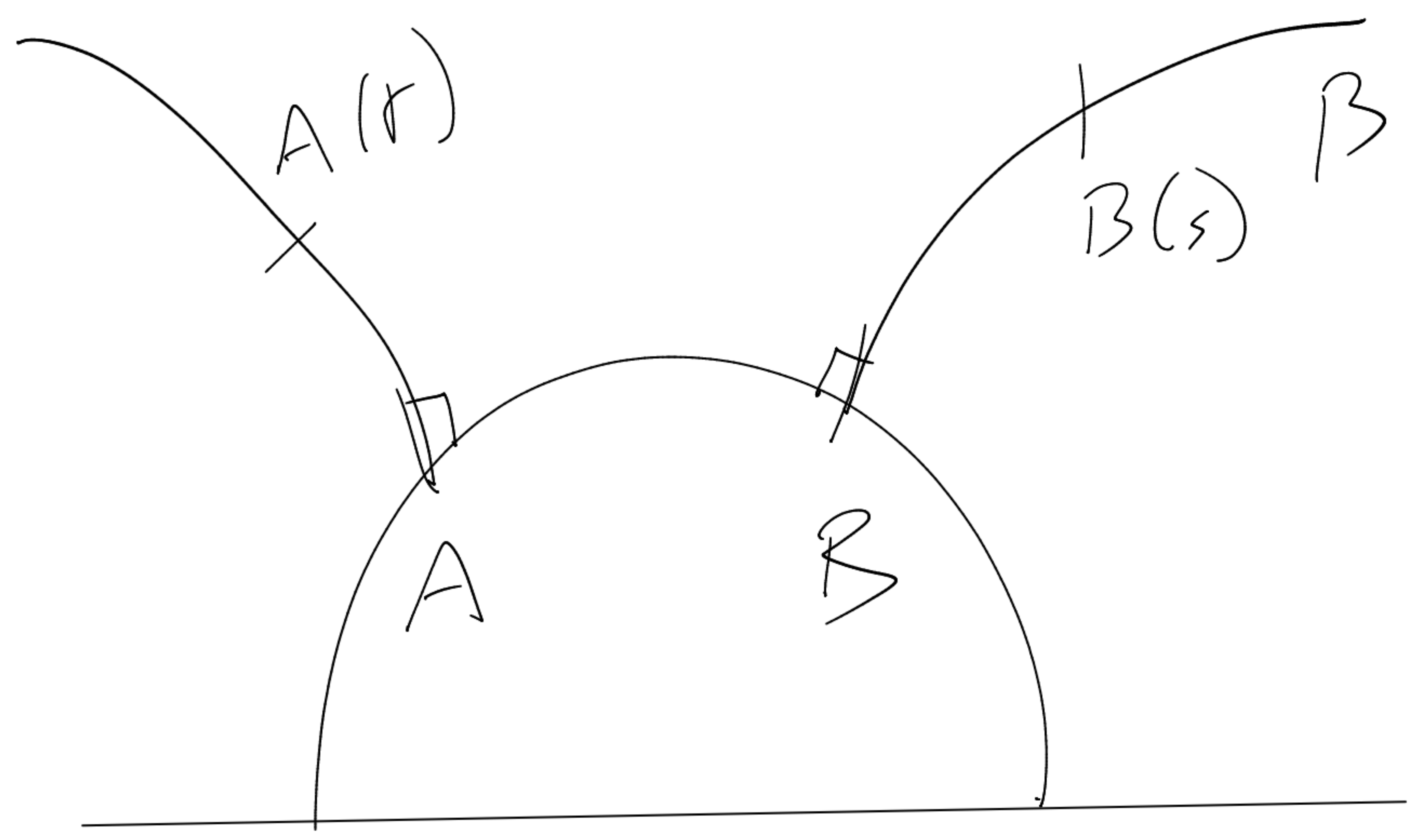
Une deuxième réponse est que nous ne pouvons pas connaître parfaitement notre espace ambiant, seulement par approximations successives, ce qui suppose de pouvoir prendre des limites; mais une limite de variétés peut très bien ne pas être une variété, donc une théorie assez robuste pour permettre le passage à la limite doit nécessairement s'appliquer au-delà du cadre strict des variétés (espace local homogène et isotrope).

II-6 construction de surfaces

hyperboliques

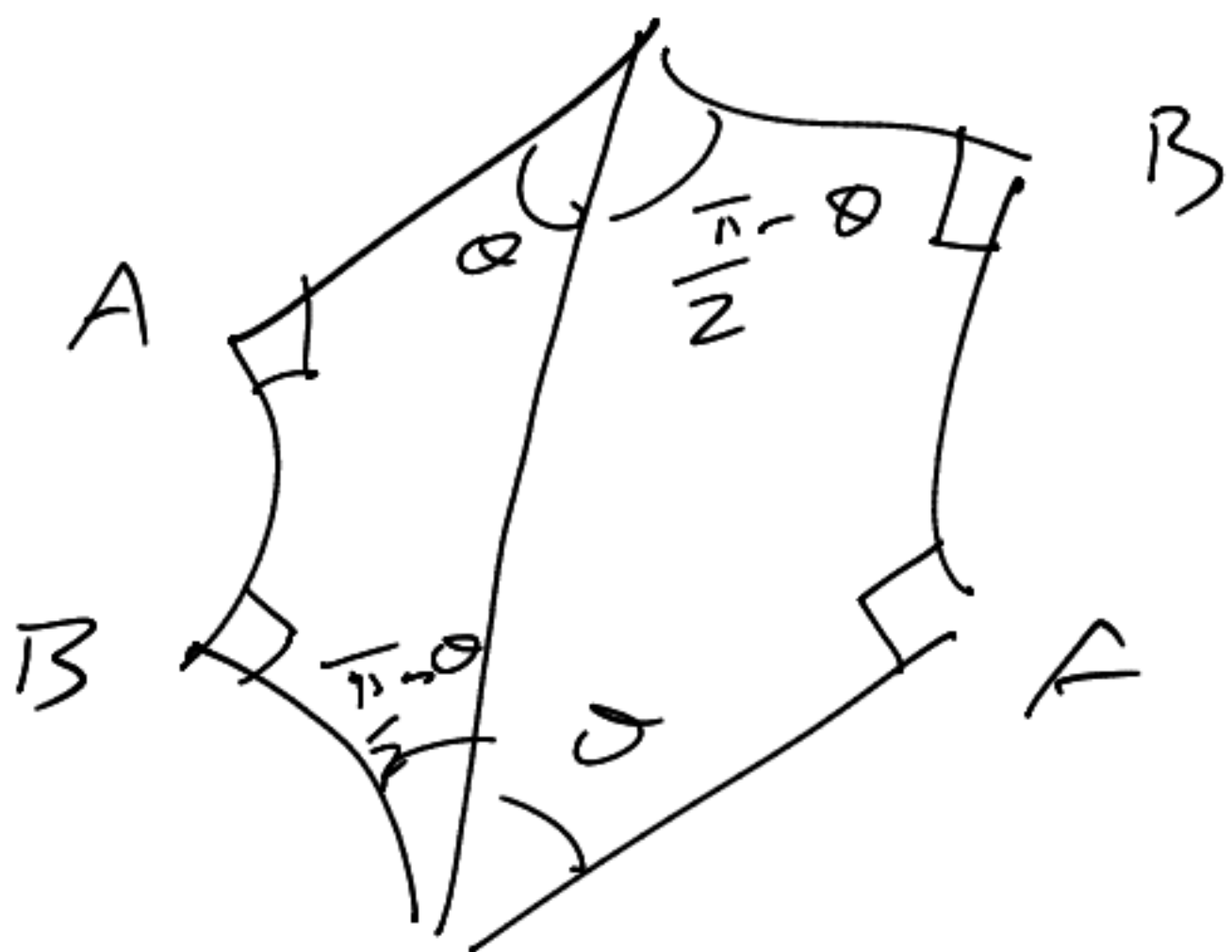
1) existence d'hexagones rectangles

Considérons une géodésique γ , deux points A et B sur γ , et α et β les perpendiculaires à γ issues de A et B respectivement, $A(t)$ et $B(s)$ des points sur α et β , respectivement, du même côté de γ , à distance t (resp. s) de A (resp. B).



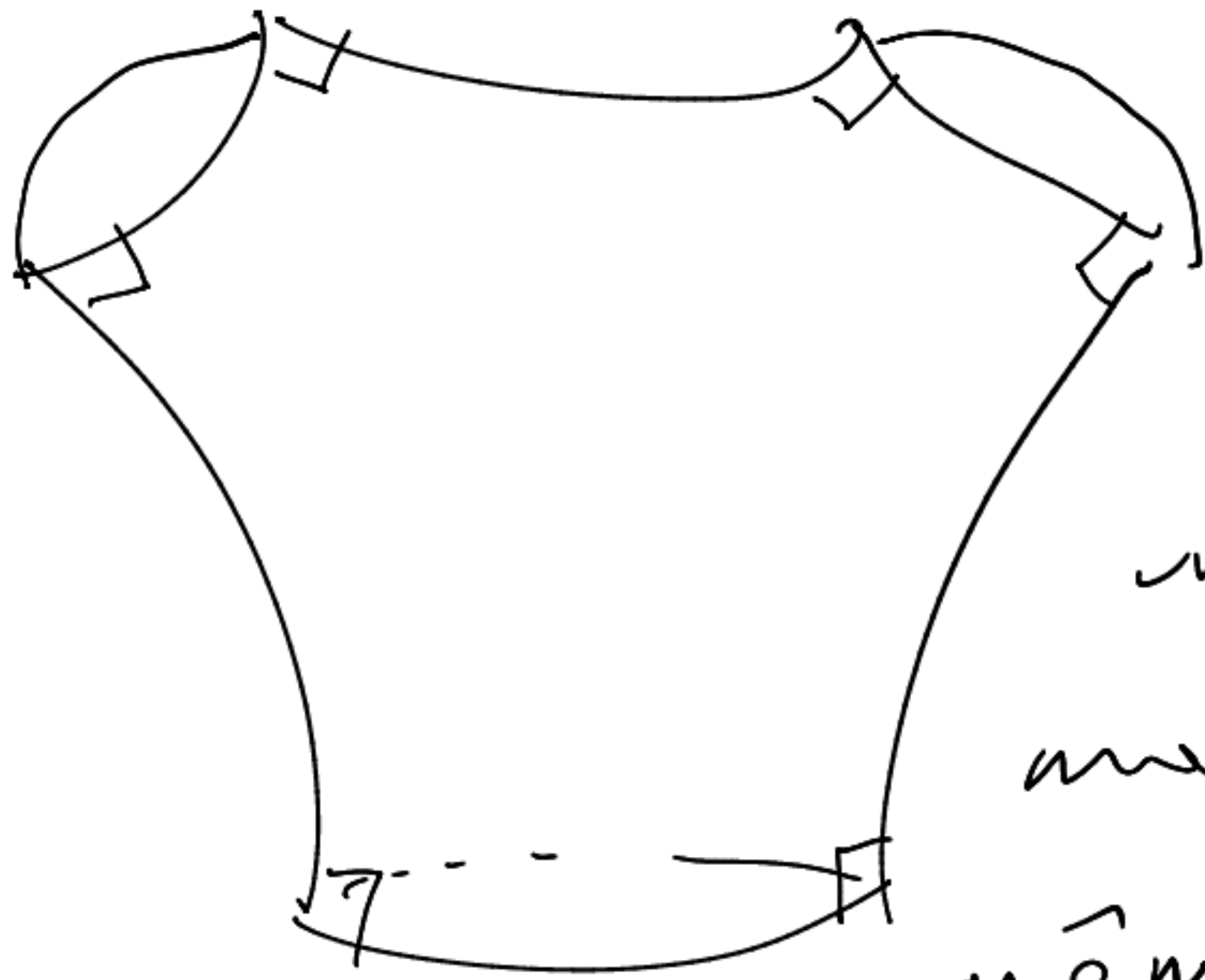
Soit $\varphi(t, s)$ le quadrilatère $AB(s)A(t)B(t)$. Quand $s, t \rightarrow \infty$, la somme des angles en $A(t)$ et $B(s)$ tend vers 0, et quand $s, t \rightarrow 0$, elle tend vers π , donc on peut trouver des valeurs intermédiaires de s et t telles que la somme vaut $\frac{\pi}{2}$.

Prenons alors deux copies de $\varphi(s, t)$, et recollons-les par le côté $A(t)B(s)$, mais en recollant $A(t)$ avec $B(s)$. On obtient ainsi un hexagone dont tous les angles sont droits.



2 / construction de pantalons hyperboliques.

Maintenant qu'on sait fabriquer des hexagones rectangles, fabriquons deux copies du même hexagone, et collons-les ensemble, un bord sur deux avec son homologe dans l'autre hexagone, on obtient la surface ci-contre.



Topologiquement c'est un disque avec deux trous, mais on l'appelle pantalon, même si "culotte" serait

visuellement plus satisfaisant, et traduit plus fidèlement l'anglais "pair of pants".

3) construction de surfaces hyperboliques
de tous genres

on ne s'arrête pas en si bon chemin:
maintenant qu'on a fabriqué un pantalon
hyperbolique, on en fait une copie, et
on les recolle ensemble, en prenant soin
de recoller entre eux les bords de même
longueur pour que ça ne fasse pas de plis:

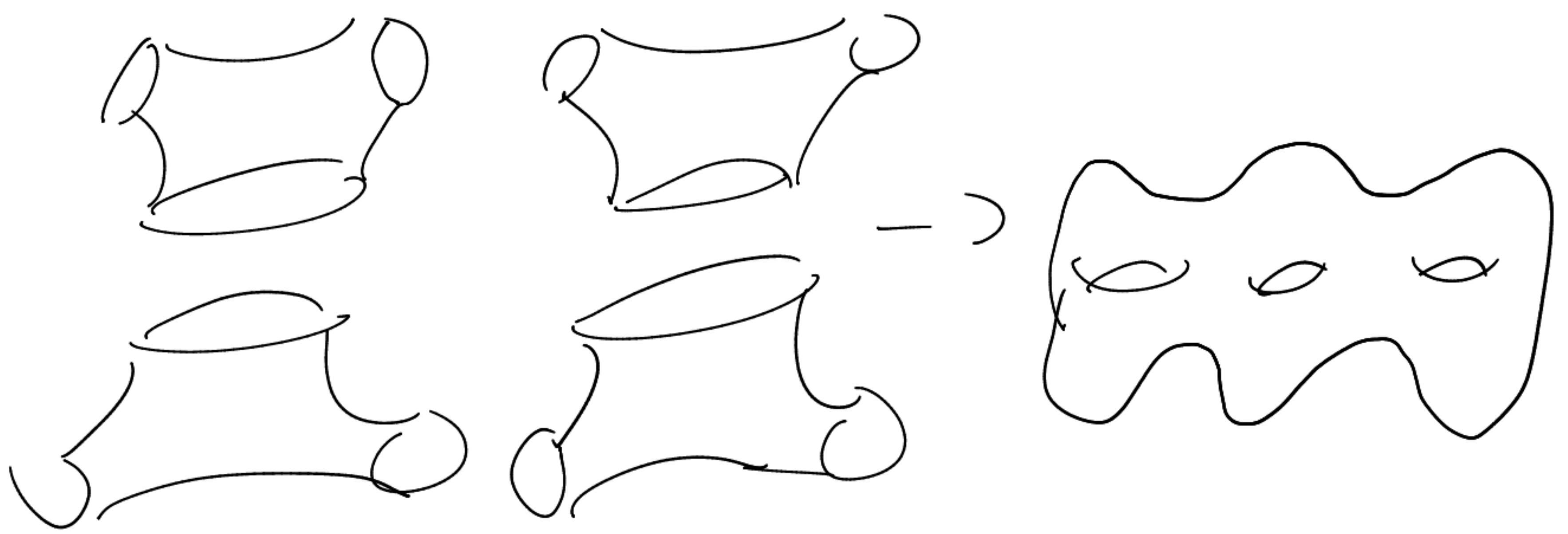


Bien sûr on ne peut
pas faire cette opération

dans \mathbb{R}^3 , pas plus qu'on ne peut fabriquer

un tore plat (C^2) dans \mathbb{R}^3 ; mais on peut le faire abstraitement (en considérant un espace quotient par une relation d'équivalence) et en fait il existe une dimension (finie, mais que j'ai oubliée, ce n'est pas toujours 4) où on peut réaliser ce recollement.

Il n'y a pas non plus de raison de s'arrêter au genre 2 ($\chi = -2$):



etc...

Nous avons donc réalisé le programme de "géométrisation" que j'évoquais au chapitre sur Poincaré-Bonnet = toutes les surfaces (vues comme objets topologiques) peuvent être

munie d'une géométrie, sphérique (sphère, plan projectif), euclidienne (tore, bouteille de Klein), ou hyperbolique (toutes les autres).

Observez qu'il y a beaucoup de liberté dans les constructions précédentes = d'une part il y a beaucoup d'hexagones rectangles non isométriques entre eux, mais il y a également beaucoup de façons différentes de recoller les pentagones.

L'ensemble des surfaces hyperboliques de genre fixé n'est pas juste un ensemble, il possède un tas de structures intéressantes, par exemple il est lui-même une variété riemannienne (de dimension $6g-6$), à quelques détails près. Pour cette raison

il mérite ce nom, on l'appelle espace des modules des surfaces de genre g (si vous avez déjà rencontré ce nom en géométrie algébrique, il s'agit bien du même).

Vous vous demandez peut-être, "y a-t-il un espace de modules en genre 0 ou 1"? Pour le genre 0 la réponse n'est pas très intéressante: une fois qu'on a choisi le rayon, il n'existe, à isométrie près, qu'une seule sphère.

Pour le genre 1, par contre, c'est très intéressant: l'espace des modules des tores euclidiens (c'est-à-dire fixée à 1) est le quotient par $SL_2\mathbb{Z}$ du plan hyperbolique! Même quand on fait de la géométrie euclidienne, on ne peut pas échapper à la géométrie hyperbolique.

Construction de surfaces hyperboliques par quotient: exemple de la surface modulaire

Commençons par le cercle: vous savez qu'on peut obtenir un arc (topologique) en recollant les deux extrémités d'un segment, mais aussi comme un quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} . De la même façon, le tore peut s'obtenir en recollant les côtés d'un carré, mais aussi comme quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Peut-on obtenir des surfaces hyperboliques par une construction analogue? la réponse est "oui, toutes", mais nous allons nous concentrer sur un exemple.

Le \mathbb{Z}^2 de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ peut être vu comme l'ensemble des translations par des vecteurs

de coordonnées entières.

Ceci nous suggère de regarder
le quotient $\mathbb{H}^2 / SL_2(\mathbb{Z})$ où $SL_2(\mathbb{Z})$
désigne les matrices de $SL_2(\mathbb{R})$ à coefficients
entiers.

Introduction à la dynamique du flot géodésique

Une surface hyperbolique est obtenue en recollant ensemble des morceaux de plan hyperbolique, donc dans chacun des morceaux on connaît bien les géodésiques; mais que sait-on du comportement à long terme des géodésiques, quand on change plein de fois de morceaux?

Regardons d'abord les cas les plus simples: la sphère ronde, et les tores euclidiens. Sur la sphère ronde, nous avons vu que les géodésiques sont les grands cercles, donc les géodésiques se referment toutes, au bout d'un temps $2\pi R$.

Si on pense aux géodésiques comme aux trajectoires de la lumière, vous voyez devant vous une infinité d'images de votre dos.

Sur le tore c'est déjà un peu plus
intéressant: prenons l'exemple du
tore carré quand on sort par
un côté, on rentre par le côté opposé,
comme Pac-Man, avec la même direction.



Je vous laisse en exercice les faits suivants,
qui donnent une description complète du
comportement à long terme des géodésiques:
- si la direction fait un angle de la forme
 πr , $r \in \mathbb{Q}$, avec l'horizontale, alors la
géodésique se referme, au bout d'un temps
qui dépend du dénominateur de r .
- si la géodésique fait un angle irrationnel $x\pi$,
elle est dense dans le tore: en regardant devant
vous, vous voyez l'ensemble du territoire!
ça se démontre exactement comme pour $x\pi \rightarrow x\pi \bmod 1$.

Avant de passer au cas des surfaces hyperboliques, j'attire votre attention sur le fait que si la sphère n'est pas ronde, ou le tore n'est pas plat, c'est beaucoup plus compliqué, et a posteriori ce n'est pas moins compliqué que le cas des surfaces hyperboliques, dont nous allons parler maintenant. Les sphères (resp. les tores euclidiens) sont les moins chaotiques des sphères (resp. des tores), en un sens que je vais essayer d'expliquer.

DEF Si (M, g) est une surface munie d'une métrique riemannienne, on appelle fibré unitaire tangent de (M, g) l'ensemble des couples $(x \in M, v \text{ vecteur tangent unitaire à } M \text{ en } x)$. On le note $T_1 M$.

Df on appelle flot géodésique sur T_1M la famille d'applications φ_t indexée par $t \in \mathbb{R}$, définie par $\varphi_t(x, v) = (y, w)$ qui consiste à partir de x dans la direction v , et à marcher tout droit (c'est à dire en suivant la géodésique, à vitesse 1 pendant un temps t (si $t < 0$ on part dans la direction opposée = $\varphi_{-t}(x, v) = \varphi_t(x, -v)$), y est le point d'arrivée, w est la direction dans laquelle on arrive.

Rg "flot" signifie "action du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ " : $\varphi_{t+t'} = \varphi_t \circ \varphi_{t'}$

Définir la notion de chaos pour le flot géodésique n'est pas simple, il n'y a pas une définition universellement acceptée

mais toutes les définitions proposées contiennent la condition d'entropie positive.

Mais qu'est-ce que l'entropie ? la définition est un peu technique, pour amortir le choc je vais essayer de l'expliquer informellement.

Supposons, comme c'est le cas dans la réalité, qu'on ne peut mesurer les distances qu'avec une précision $\varepsilon > 0$. C'est alors (par compacité) comme si M consistait en un nombre fini de points. Et si on regarde le flot géodésique pendant un temps t , on ne voit qu'un nombre fini $N_\varepsilon(t)$ de trajectoires. On se souvient de dire que le flot est chaotique si $N_\varepsilon(t)$ croît exponentiellement vite, disons $N_\varepsilon(t) \sim e^{\lambda_\varepsilon t}$.
Notons qu'alors $\lambda_\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log N_\varepsilon(t)}{t}$.

Ceci motive la définition suivante :

DF on appelle l'entropie topologique
du flot φ_t , $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log N_\varepsilon(t)}{t} =: h(\varphi)$

Rq la $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ est là parce qu'on veut
une définition indépendante de la précision
de nos instruments de mesure.

On voit tout de suite que
l'entropie du flot géodésique sur la
sphère ronde est nulle = puisque toutes
les orbites sont 2π -périodiques, on a
 $N_\varepsilon(t+2\pi) = N_\varepsilon(t) \forall t, \forall \varepsilon$, donc $t \mapsto N_\varepsilon(t)$
est bornée. En particulier, puisque
l'entropie est toujours ≥ 0 , on obtient
ce que je disais tout à l'heure = la sphère
ronde minimise l'entropie parmi toutes

les métriques possibles sur la sphère.

Qu'en est-il du tore? c'est juste un peu plus compliqué, il faut s'inspirer du cas des rotations sur le cercle ($x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$, à faire en exercice).

On voit que $N_\varepsilon(t)$ croît au plus linéairement en t . Donc, comme dans le cas de la sphère, les tores plats minimisent l'entropie parmi toutes les métriques possibles sur le tore.

Pour les surfaces de genre > 1 , ça se complique. Si le cas des tores se traite par analogie avec les rotations, le cas des surfaces de genre > 1 se traite à l'aide de l'autre archétype des systèmes dynamiques: le décalage sur les suites.

Df $\sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  s'appelle décalage.
(binaire)

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

On munit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la distance " 2^{-n} " :
 u_k et v_k coïncident pour tout $k \leq n$, on
peut alors calculer $h(\sigma)$ (exercice).

Qu'est-ce qu'un truc pareil
peut bien avoir en commun avec un
flot géodésique ? Voici comment on s'y
prend : on peut découper T_{1M} en un nombre
fini de morceaux, numérotés U_1, \dots, U_N , et
à une géodésique on associe son itinéraire
(la suite des morceaux qu'elle traverse).

Il se trouve (c'est là que la courbure
négative intervient) que cette application
est surjective, et on en déduit (cf. exo
de mon poly) que l'entropie est positive.

Le fait que l'entropie est minimisée, parmi toutes les métriques possibles sur une surface de genre > 1 , par les métriques hyperboliques, est un théorème de Katok, qui date des années 80 :

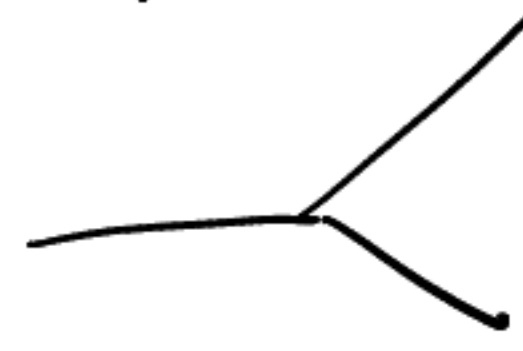
Thm (Katok) M surface compacte de genre > 1 .

Alors $\inf_g h(g) = h(y_0)$ où $K(y_0) \equiv -1$.

g $\stackrel{=}{=} 4\pi(g-1)$

Dans les années 90, Besson, Courtois, et Fallot, ont généralisé ce fait à des variétés hyperboliques de toutes dimensions : la métrique minimisant l'entropie est toujours celle de courbure constante, si elle existe (notez qu'en $\dim > 2$, si elle existe, elle est unique, c'est un théorème de Mostow des années 70). La philosophie de ces résultats est que plus on est symétrique (homogène)

moins on est chaotique (c'est moralement satisfaisant), mais la présence de courbure négative amène toujours un certain degré de chaos.

Le problème avec cette notion d'entropie, dans la perspective du cours de G&G, est qu'elle suppose l'existence d'un flot géodésique, donc d'une métrique riemannienne. G&G se place dans le cadre des espaces métriques: on peut mesurer des distances, mais pas toujours les vitesses. Les géodésiques existent, mais elles peuvent être des lignes brisées, et surtout il n'y a pas unicité: on peut avoir quelque chose comme  et du coup on ne peut pas définir le flot géodésique, qui demande de suivre la géodésique dans une direction donnée.

Il faut donc trouver une notion
d'entropie adaptée au cadre des
espaces métriques. Dans le cas où
on peut mesurer des volumes (ce qui
n'est pas forcément le cas dans les espaces
métriques, c'est une hypothèse qu'il faut
rajouter), c'est la notion d'entropie
volumique (enchaîner sur le chapitre 10 du
poly de systèmes dynamiques).