Optimisation de distances dans le plan

Daniel Massart

Université d'été Maths en Jeans, août 2019

1 Le cas de dimension 1

1.1 Le cas de deux villes

Vous êtes un médecin de campagne, appelé à intervenir, avec égale probabilité, dans les charmantes petites cités d'Aliceville et Bobville. Vous vous déplacez librement dans le plan euclidien, à la vitesse constante de votre vieux cheval Hippocrate, et vous cherchez à minimiser votre temps de trajet, et la fatigue d'Hippocrate. Où allez-vous vous installer ?

1.2 Trois villes

Votre collègue de Charlieville, située sur l'axe Aliceville-Bobville, et de même population qu'Aliceville et Bobville, vient de prendre sa retraite, et vous héritez de sa clientèle. Envisagez-vous de déménager ?

1.3 Quatre villes et plus

Même question si vous devez travailler dans une quatrième ville, de taille équivalente et toujours alignée avec les précédentes. Et si on rajoute des villes ?

2 Le cas de dimension 2

2.1 Trois villes

On reprend la situation de la question 1.2, mais on ne suppose plus que les villes sont alignées.

2.2 Quatre villes et plus

Idem.

3 Commentaires

3.1 Deux villes

Si vous avez répondu "au milieu", je vous invite à faire le calcul ! Votre intuition vient probablement du cas, beaucoup plus satisfaisant mathématiquement, où on minimise la somme *des carrés* des distances. Penser à la distinction entre moyenne et médiane.

3.2 Triangle

Ici nous sommes entre nous, et nous pouvons parler de gradient et de fonctions convexes. Pour l'expliquer aux élèves ça risque d'être un peu plus compliqué. Voici une suggestion (pas totalement convaincante). On commence par le cas de dimension 1, là on peut parler de dérivée aux élèves. On observe que chaque fonction (distance à une des villes) contribue à la dérivée de la somme pour une valeur de ± 1, suivant le côté duquel on se trouve. Tout se passe comme si chaque ville vous tirait à elle, avec une force constante, indépendante de la distance à laquelle vous vous en trouvez.

Cela suggère le dispositif expérimental suivant : dans une table vous percez des trous correspondant à vos villes. Vous attachez des poids d'un kilo à des ficelles (si on voulait minimiser la somme des carrés des distances, au lieu de poids on mettrait des ressorts), qui passent par les trous, et vous nouez les brins libres ensemble (le noeud vous représente, vous et Hippocrate). S'il n'y a pas trop de frottement au passage par les trous (exercice : poncer, huiler), le dispositif trouvera tout seul un point d'équilibre qui est votre solution, ou du moins une de vos solutions.

Les élèves connaissent (si je ne rêve pas) les vecteurs et la loi de l'équilibre statique, donc ils sauront trouver, et construire à la règle et au rapporteur, la solution. Si on a des élèves intéressés par la géométrie, c'est l'occasion de leur parler d'angle au sommet/angle au centre, et de leur expliquer pourquoi une construction à la règle et au compas, c'est encore mieux.

3.3 Quadrilatère

Commencer par le cas où le quadrilatère est convexe (c'est l'occasion de parler d'enveloppe convexe !).

3.4 Historique

Ce problème semble avoir été considéré pour la première fois par Fermat, et le point solution dans le triangle s'appelle point de Fermat. Vous venez de démontrer le théorème de Fermat !