

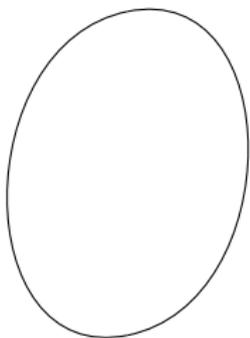
# $\mathcal{D}$ -modules quantiques de sous-variétés de variétés toriques

(arXiv:1112.1552, E. Mann-T. Mignon)

Poitiers, 14 décembre 2011

## Section 1

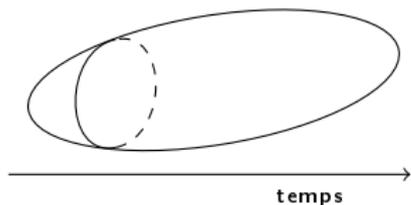
### Prélude : les origines physiques



En théorie des cordes, Chaque particule est une cordelette (espace topologique de dimension 1).

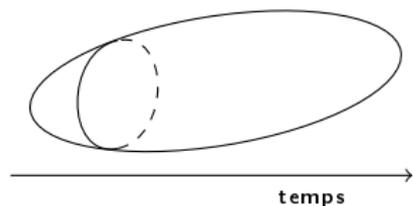
Cette cordelette vibre, et le mode de vibration défini toutes ses caractéristiques (masse, charge électrique, spin, etc...).

*Une particule élémentaire ?*



*vie d'une unique particule*

Au fil du temps, la particule trace une "surface univers" dans l'espace-temps.



*vie d'une unique particule*

Au fil du temps, la particule trace une "surface univers" dans l'espace-temps.

On sait la munir d'une structure complexe : c'est une surface de Riemann.

## Dimensions supplémentaires

L'espace-temps usuel ne permet pas de retrouver l'ensemble des particules connues. Il n'y a pas suffisamment de mode de vibrations possibles.

## Dimensions supplémentaires

L'espace-temps usuel ne permet pas de retrouver l'ensemble des particules connues. Il n'y a pas suffisamment de mode de vibrations possibles.

Les physiciens (Witten, . . . ) prédisent l'existence de dimensions physiques supplémentaires en plus des 4 usuelles : 6 ou 7 selon les théories.

## Dimensions supplémentaires

L'espace-temps usuel ne permet pas de retrouver l'ensemble des particules connues. Il n'y a pas suffisamment de mode de vibrations possibles.

Les physiciens (Witten, . . . ) prédisent l'existence de dimensions physiques supplémentaires en plus des 4 usuelles : 6 ou 7 selon les théories.

## Variétés de Calabi-Yau

En tout point de l'espace temps usuel est ainsi attachée une variété compacte  $X$  de longueur très petite.

## Dimensions supplémentaires

L'espace-temps usuel ne permet pas de retrouver l'ensemble des particules connues. Il n'y a pas suffisamment de mode de vibrations possibles.

Les physiciens (Witten, . . . ) prédisent l'existence de dimensions physiques supplémentaires en plus des 4 usuelles : 6 ou 7 selon les théories.

## Variétés de Calabi-Yau

En tout point de l'espace temps usuel est ainsi attachée une variété compacte  $X$  de longueur très petite.

Pour la dimension 6, elle est munie d'une structure complexe et d'une métrique kählerienne, son fibré canonique est trivial : c'est une variété de Calabi-Yau.

## SQFT

Soit  $(X, \omega)$  = (variété de Calabi-Yau, forme de Kähler),  
on peut étudier le modèle physique qui lui correspond.

## SQFT

Soit  $(X, \omega) =$  (variété de Calabi-Yau, forme de Kähler),  
on peut étudier le modèle physique qui lui correspond.

Par exemple, la trajectoire d'une particule de surface univers  $\Sigma$   
dans  $X$  est une application :

$$f : \Sigma \longrightarrow X$$

On définit *l'action* d'une telle trajectoire à l'aide de la métrique  $\omega$ .

## SQFT

Soit  $(X, \omega)$  = (variété de Calabi-Yau, forme de Kähler),  
on peut étudier le modèle physique qui lui correspond.

Par exemple, la trajectoire d'une particule de surface univers  $\Sigma$   
dans  $X$  est une application :

$$f : \Sigma \longrightarrow X$$

On définit *l'action* d'une telle trajectoire à l'aide de la métrique  $\omega$ .

A  $(X, \omega)$  les physiciens associe une "SQFT" : **S**tring **Q**uantum  
**F**ield **T**heory, qui prédit le comportement physique des particules  
dans cette variété.

# SQFT

Soit  $(X, \omega)$  = (variété de Calabi-Yau, forme de Kähler),  
on peut étudier le modèle physique qui lui correspond.

Par exemple, la trajectoire d'une particule de surface univers  $\Sigma$   
dans  $X$  est une application :

$$f : \Sigma \longrightarrow X$$

On définit l'*action* d'une telle trajectoire à l'aide de la métrique  $\omega$ .

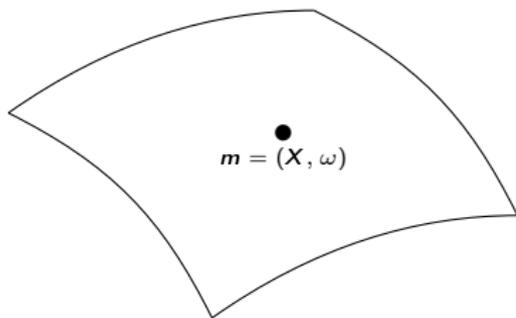
A  $(X, \omega)$  les physiciens associe une "SQFT" : **S**tring **Q**uantum  
**F**ield **T**heory, qui prédit le comportement physique des particules  
dans cette variété.

Une SQFT est une représentation d'une superalgèbre de Lie.  
L'existence d'une telle représentation n'est pas prouvée en général.

## Variations des $(X, \omega)$

## Variations des $(X, \omega)$

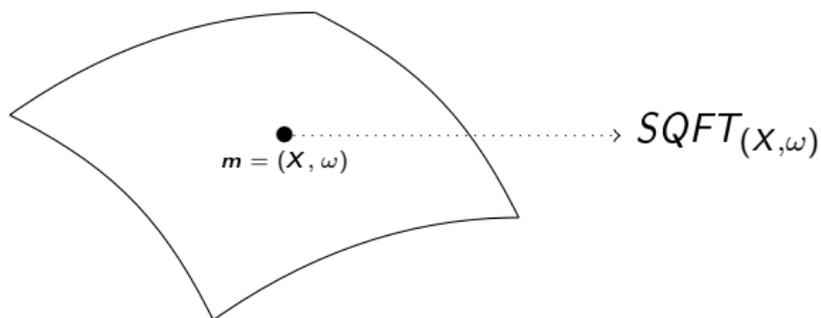
Admettons l'existence d'un espace de module de couples  $(X, \omega)$ .



espace de module des couples  $(X, \omega)$

## Variations des $(X, \omega)$

Admettons l'existence d'un espace de module de couples  $(X, \omega)$ .



espace de module des couples  $(X, \omega)$

On obtient une SQFT en tout point.

## Symétrie miroir

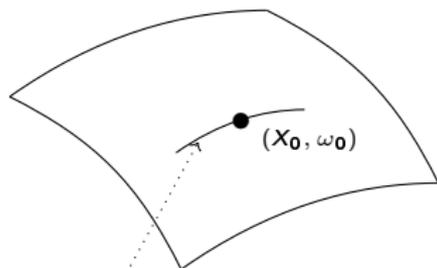
Etant donnée une SQFT (représentation de superalgèbre de Lie), on sait en construire une autre en permutant certains générateurs de la superalgèbre de Lie. C'est une involution entre les SQFT.

## Symétrie miroir

Etant donnée une SQFT (représentation de superalgèbre de Lie), on sait en construire une autre en permutant certains générateurs de la superalgèbre de Lie. C'est une involution entre les SQFT.

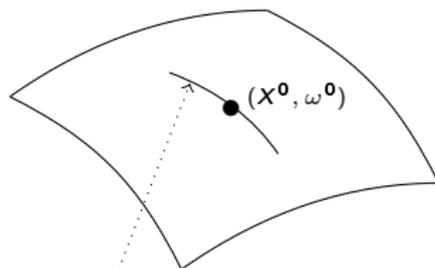
Dans le cas où  $(X_0, \omega_0)$  est une hypersurface quintique de  $\mathbb{P}^4$ , les physiciens ont observé le phénomène suivant :

Côté A



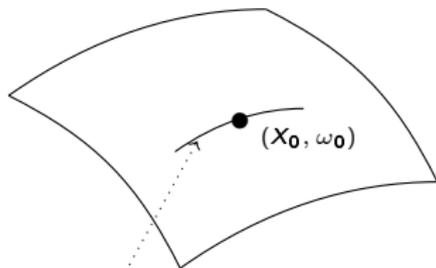
$M^A$  :  $X_0$  constant,  $\omega$  varie dans  $H^2(X, \mathbb{C})$

Côté B



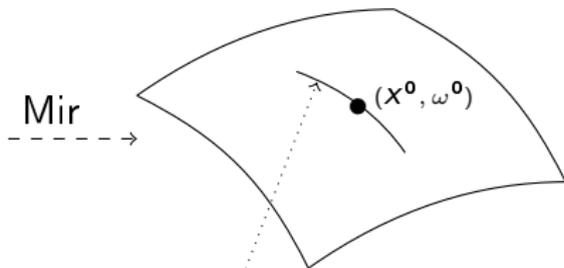
$M^B$  :  $X$  varie, polarisée

Côté A



$M^A : X_0 \text{ constant, } \omega \text{ varie dans } H^2(X, \mathbb{C})$

Côté B

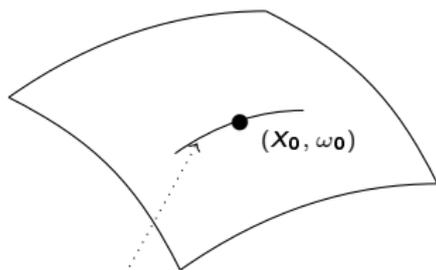


$M^B : X \text{ varie, polarisée}$

Il existe un biholomorphisme local (**application miroir**) :

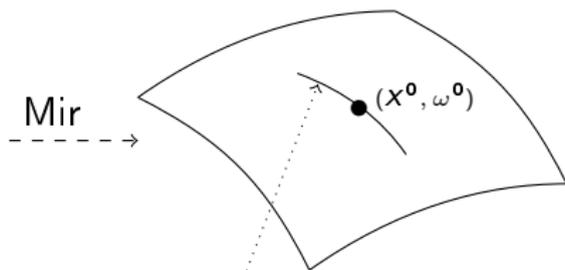
$$\begin{array}{ccc} \text{Mir} : & M^A & \longrightarrow & M^B \\ & (X_0, \omega_0) & \longmapsto & (X^0, \omega^0) \end{array}$$

Côté A



$M^A : X_0$  constant,  $\omega$  varie dans  $H^2(X, \mathbb{C})$

Côté B



$M^B : X$  varie, polarisée

Mir



Il existe un biholomorphisme local (**application miroir**) :

$$\begin{aligned} \text{Mir} : \quad M^A &\longrightarrow M^B \\ (X_0, \omega_0) &\longmapsto (X^0, \omega^0) \end{aligned}$$

tel que les SQFT correspondantes soient duales l'une de l'autre :

$$SQFT_{(X_0, \omega)} \longleftrightarrow SQFT_{\text{Mir}(X_0, \omega)}$$

## Conséquences mathématiques

La symétrie miroir permet des prédictions mathématiques :

- Le côté B (cas toriques ou sous-variétés de toriques) est plus combinatoire: des calculs sont possibles.
- Le côté A fait intervenir les invariants de Gromov-Witten et la cohomologie quantique.

## Conséquences mathématiques

La symétrie miroir permet des prédictions mathématiques :

- Le côté B (cas toriques ou sous-variétés de toriques) est plus combinatoire: des calculs sont possibles.
- Le côté A fait intervenir les invariants de Gromov-Witten et la cohomologie quantique.

## Autres versions

Il existe de nombreuses constructions de SQFT en physique. On n'est pas contraint de se limiter au variété de Calabi-Yau, l'application miroir peut aboutir sur d'autres espaces de paramètres (modèles de Landau-Ginsburg).

## Conséquences mathématiques

La symétrie miroir permet des prédictions mathématiques :

- Le côté B (cas toriques ou sous-variétés de toriques) est plus combinatoire: des calculs sont possibles.
- Le côté A fait intervenir les invariants de Gromov-Witten et la cohomologie quantique.

## Autres versions

Il existe de nombreuses constructions de SQFT en physique. On n'est pas contraint de se limiter au variété de Calabi-Yau, l'application miroir peut aboutir sur d'autres espaces de paramètres (modèles de Landau-Ginsburg).

**Comment formuler mathématiquement les phénomènes de symétrie miroir ?**

## Section 2

Formulations mathématiques par les  $\mathcal{D}$ -modules :  
le point de vue de Givental

Givental propose le type de formulation suivante pour la symétrie miroir :

(la version présentée ici est celle d'Iritani, en terme de  $\mathcal{D}$ -modules ou encore "fibrés à connexions").

De chaque côté A et B, on construit des fibrés triviaux de fibres isomorphes à la cohomologie (paire ici) de la variété de départ  $X$ .

$$\begin{array}{ccc} F & & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ V \approx M_A & & W \approx M_B \\ \text{Côté A} & & \text{Côté B} \end{array}$$

De chaque côté A et B, on construit des fibrés triviaux de fibres isomorphes à la cohomologie (paire ici) de la variété de départ  $X$ .

$$\begin{array}{ccc} F = V \times H^{2*}(X, \mathbb{C}) & M \xrightarrow{\sim} & W \times H^{2*}(X, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & & W \\ \text{Côté A} & & \text{Côté B} \end{array}$$

- Du côté A,  $F$  est trivial par construction.  
Du côté B, on démontrera que  $M$  est trivial.

De chaque côté A et B, on construit des fibrés triviaux de fibres isomorphes à la cohomologie (paire ici) de la variété de départ  $X$ .

$$\begin{array}{ccc} (F, \nabla^A) & & (M, \nabla^B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & & W \\ \\ \text{Côté A} & & \text{Côté B} \end{array}$$

- Du côté A,  $F$  est trivial par construction.  
Du côté B, on démontrera que  $M$  est trivial.
- Ces fibrés sont tous deux munis d'une connexion.  
(et d'autres structures : un pairing, une structure entière, dont on ne parlera pas ici).

De chaque côté A et B, on construit des fibrés triviaux de fibres isomorphes à la cohomologie (paire ici) de la variété de départ  $X$ .

$$\begin{array}{ccc}
 (F, \nabla^A) & & (M, \nabla^B) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V & \xleftarrow{\text{Mir}} & W \\
 \text{Côté A} & & \text{Côté B}
 \end{array}$$

- Du côté A,  $F$  est trivial par construction.  
Du côté B, on démontrera que  $M$  est trivial.
- Ces fibrés sont tous deux munis d'une connexion.
- Il existe (localement) une application miroir biholomorphe entre les espaces de bases de ces deux fibrés telle que les fibrés à connexions qui s'en déduisent soient isomorphes de l'autre.

## Section 3

Le côté A sans sous-variété : l'espace de base, la connexion quantique

## Le côté $A$ : l'espace de base

$X$  variété projective lisse fixée.

$X$  variété projective lisse fixée.

On considère les classes  $\tau \in H^2(X, \mathbb{C})$  telles que

$\text{Im}(\tau) \in H^2(X, \mathbb{R})$  est une  $(1, 1)$  forme de Kähler.

l'espace de modules du côté  $A$  pourrait être l'ensemble de ces classes.

$X$  variété projective lisse fixée.

On considère les classes  $\tau \in H^2(X, \mathbb{C})$  telles que

$\text{Im}(\tau) \in H^2(X, \mathbb{R})$  est une  $(1, 1)$  forme de Kähler.

l'espace de modules du côté  $A$  pourrait être l'ensemble de ces classes.

La théorie (SQFT) s'exprime uniquement en fonction des nombres :

$$e^{2i\pi \int_d \tau},$$

Où  $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$  est la classe d'homologie d'un 2-cycle (la classe de l'image d'un surface univers  $\Sigma$ ).

$X$  variété projective lisse fixée.

On considère les classes  $\tau \in H^2(X, \mathbb{C})$  telles que

$\text{Im}(\tau) \in H^2(X, \mathbb{R})$  est une  $(1, 1)$  forme de Kähler.

l'espace de modules du côté  $A$  pourrait être l'ensemble de ces classes.

La théorie (SQFT) s'exprime uniquement en fonction des nombres :

$$e^{2i\pi \int_d \tau},$$

Où  $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$  est la classe d'homologie d'un 2-cycle (la classe de l'image d'un surface univers  $\Sigma$ ).

On travail donc "à la cohomologie entière près".

## Le cône de Kähler complexifié

L'image de l'ensemble  $\{\tau \in H^2(X, \mathbb{C}), \text{Im } \tau \text{ kählerienne}\}$  dans le tore

$$\mathbf{T} = H^2(X, \mathbb{C})/H^2(X, \mathbb{Z}).$$

forme le **cône de Kähler complexifié** de  $X$ .

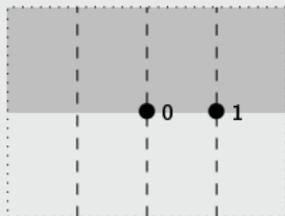
## Le cône de Kähler complexifié

L'image de l'ensemble  $\{\tau \in H^2(X, \mathbb{C}), \text{Im } \tau \text{ kählerienne}\}$  dans le tore

$$\mathbb{T} = H^2(X, \mathbb{C})/H^2(X, \mathbb{Z}).$$

forme le **cône de Kähler complexifié** de  $X$ .

Un exemple : cône de Kähler de  $\mathbb{P}^n$ .



en gris :  $\left\{ \tau \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}), \right.$   
 $\left. \text{Im } \tau \text{ kählerienne} \right\}$

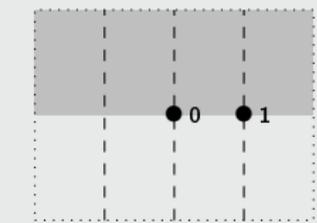
## Le cône de Kähler complexifié

L'image de l'ensemble  $\{\tau \in H^2(X, \mathbb{C}), \text{Im } \tau \text{ kählerienne}\}$  dans le tore

$$\mathbb{T} = H^2(X, \mathbb{C})/H^2(X, \mathbb{Z}).$$

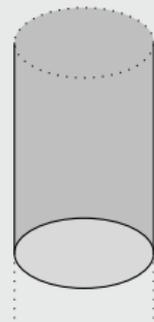
forme le **cône de Kähler complexifié** de  $X$ .

## Un exemple : cône de Kähler de $\mathbb{P}^n$ .



en gris :  $\{\tau \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}), \text{Im } \tau \text{ kählerienne}\}$

quotient  
par  $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$



$H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})/H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$

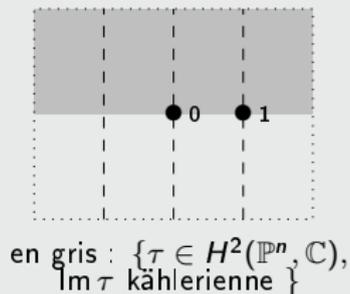
## Le cône de Kähler complexifié

L'image de l'ensemble  $\{\tau \in H^2(X, \mathbb{C}), \text{Im } \tau \text{ kählerienne}\}$  dans le tore

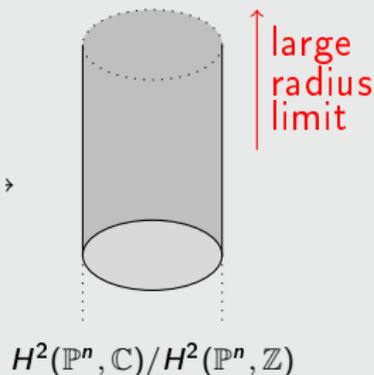
$$\mathbb{T} = H^2(X, \mathbb{C})/H^2(X, \mathbb{Z}).$$

forme le **cône de Kähler complexifié** de  $X$ .

## Un exemple : cône de Kähler de $\mathbb{P}^n$ .



quotient  
par  $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$



L'application miroir ne pourra être définie qu'au voisinage du "large radius limit" :

$$\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow +\infty} \tau$$

L'application miroir ne pourra être définie qu'au voisinage du "large radius limit" :

$$\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow +\infty} \tau$$

On peut "compactifier" de manière naturelle et algébrique le cône de Kähler au large radius limit :

L'application miroir ne pourra être définie qu'au voisinage du "large radius limit" :

$$\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow +\infty} \tau$$

On peut "compactifier" de manière naturelle et algébrique le cône de Kähler au large radius limit :

En passant à l'exponentielle, on observe que

$$\mathbf{T} = H^2(X, \mathbb{C})/H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } \mathbb{C}[H_2(X, \mathbb{Z})]$$

(la "fonction"  $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$  envoie  $[\tau] \in \mathbf{T}$  vers  $e^{2i\pi \int_d \tau}$ ).

## Compactification au large radius limit

Considérons le cône de Mori

$$NE(X) \subset H_2(X, \mathbb{Z})$$

## Compactification au large radius limit

Considérons le cône de Mori

$$NE(X) \subset H_2(X, \mathbb{Z})$$

Posons :

$$\Lambda := \mathbb{C}[NE(X)]$$

$$\mathbf{V} := \text{Spec } \Lambda$$

## Compactification au large radius limit

Considérons le cône de Mori

$$NE(X) \subset H_2(X, \mathbb{Z})$$

Posons :

$$\Lambda := \mathbb{C}[NE(X)]$$

$$\mathbf{V} := \text{Spec } \Lambda$$

On a :

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{V}$$

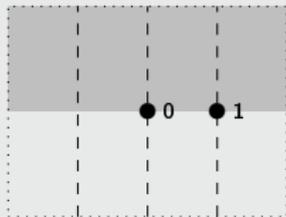
Il existe

$$\mathbf{0} \in \mathbf{V}$$

correspondant au large radius limit de  $\mathbf{T}$ .

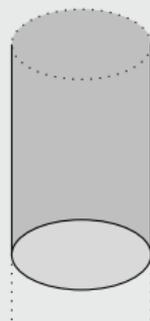
$\mathbf{V}$  peut-être singulier en  $\mathbf{0}$ .

## Un exemple : espaces de paramètres de $\mathbb{P}^n$



en gris :  $\{\tau \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}),$   
 $\text{Im } \tau \text{ kählerienne}\}$

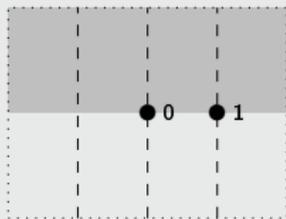
quotient  
par  $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$



$H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})/H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$

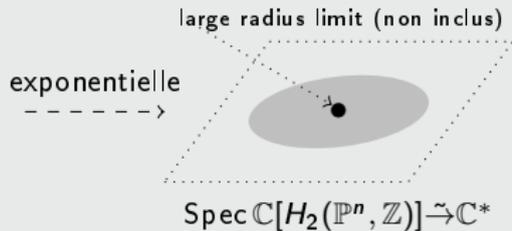
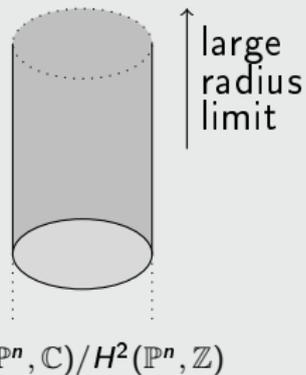
large  
radius  
limit

# Un exemple : espaces de paramètres de $\mathbb{P}^n$

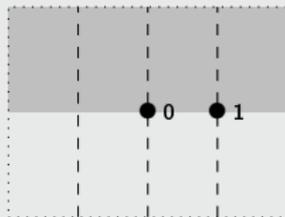


en gris :  $\{\tau \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}), \text{Im } \tau \text{ kählerienne}\}$

quotient  
par  $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$

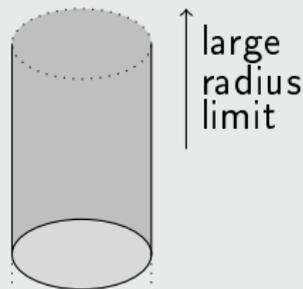


# Un exemple : espaces de paramètres de $\mathbb{P}^n$

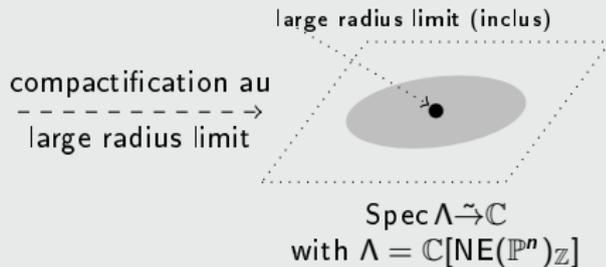
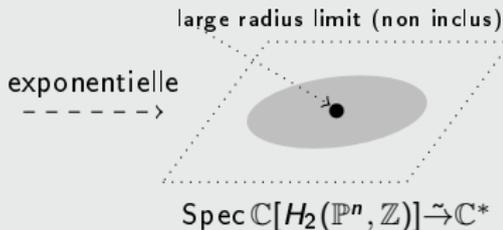


en gris :  $\{\tau \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}), \text{Im } \tau \text{ kählerienne}\}$

quotient  
par  $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$



$H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})/H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$



## Les paramètres à base fixée

Fixons une base  $T_1, \dots, T_r$  de  $H^2(X, \mathbb{C})$ .

Les classes  $\tau \in H^2(X, \mathbb{C})$  s'écrivent

$$\tau = \tau_1 T_1 + \dots + \tau_r T_r, \tau_i \in \mathbb{C}$$

Un point de  $\mathbf{T}$  s'écrit

$$q = (q_1, \dots, q_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$$

où

$$q_a = e^{\tau_a}$$

## Constante de Planck

Autre paramètre : la "constante de Planck"  $\hbar$

Nous la noterons plutôt

$$z \in \mathbb{C}.$$

## Conclusion sur l'espace de base du côté A

L'espace de base est :

$$\mathbf{V} \times \mathbb{C} = \{(q, z) \in \text{Spec}(\Lambda) \times \mathbb{C}\}$$

## Conclusion sur l'espace de base du côté A

L'espace de base est :

$$\mathbf{V} \times \mathbb{C} = \{(q, z) \in \text{Spec}(\Lambda) \times \mathbb{C}\}$$

Si nécessaire, on se restreint au tore :

$$\mathbf{T} \times \mathbb{C}$$

## Conclusion sur l'espace de base du côté A

L'espace de base est :

$$\mathbf{V} \times \mathbb{C} = \{(q, z) \in \text{Spec}(\Lambda) \times \mathbb{C}\}$$

Si nécessaire, on se restreint au tore :

$$\mathbf{T} \times \mathbb{C}$$

Si nécessaire, on se restreint à un "voisinage du large radius limit".

## Le côté A : la connexion

## Produit quantique

On note

$T_0, \dots, T_s$  base homogène de  $H^{2^*}(X, \mathbb{C})$ ,  
 $T^0, \dots, T^s$  base duale pour la cohomologie de Poincaré.

## Produit quantique

On note

$T_0, \dots, T_s$  base homogène de  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ ,  
 $T^0, \dots, T^s$  base duale pour la cohomologie de Poincaré.

Soit  $q \in \mathbf{V}$ ,  $\alpha, \beta \in H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

$$\alpha \bullet_q \beta := \sum_{d \in H_2(X, \mathbb{Z})} \sum_{i=0}^s q^d \langle \alpha, \beta, T_i \rangle_{0,3,d} T^i$$

## Produit quantique

On note

$T_0, \dots, T_s$  base homogène de  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ ,

$T^0, \dots, T^s$  base duale pour la cohomologie de Poincaré.

Soit  $q \in \mathbf{V}$ ,  $\alpha, \beta \in H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

$$\alpha \bullet_q \beta := \sum_{d \in H_2(X, \mathbb{Z})} \sum_{i=0}^s q^d \langle \alpha, \beta, T_i \rangle_{0,3,d} T^i$$

où les  $\langle \alpha, \beta, T_i \rangle_{0,3,d}$  sont les invariants de Gromov-Witten à 3 points.

## Produit quantique

On note

$T_0, \dots, T_s$  base homogène de  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ ,  
 $T^0, \dots, T^s$  base duale pour la cohomologie de Poincaré.

Soit  $q \in \mathbf{V}$ ,  $\alpha, \beta \in H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

$$\alpha \bullet_q \beta := \sum_{d \in H_2(X, \mathbb{Z})} \sum_{i=0}^s q^d \langle \alpha, \beta, T_i \rangle_{0,3,d} T^i$$

où les  $\langle \alpha, \beta, T_i \rangle_{0,3,d}$  sont les invariants de Gromov-Witten à 3 points.

C'est le produit quantique ; associatif, commutatif, d'unité  $\mathbb{1} \in H^0(X, \mathbb{C})$ .

## Voisinage de convergence

Si  $X$  est Calabi-Yau ou Fano (où si  $-K_X$  est nef), il existe un voisinage du large radius limit où le produit quantique est convergent

## Voisinage de convergence

Si  $X$  est Calabi-Yau ou Fano (où si  $-K_X$  est nef), il existe un voisinage du large radius limit où le produit quantique est convergent

On note

$$V \subset T$$

cet ouvert.

### Définition : la connexion quantique

Soit le fibré trivial à fibres isomorphes à  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

$$F \longrightarrow \mathbf{V} \times \mathbb{C}$$

## Définition : la connexion quantique

Soit le fibré trivial à fibres isomorphes à  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

$$F \longrightarrow \mathbf{V} \times \mathbb{C}$$

Sur  $V \times \mathbb{C} \subset (\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}$  on le muni de la connexion méromorphe  $\nabla$  suivante

$$\begin{aligned}\nabla_{q_a \partial_{q_a}} &:= q_a \partial_a + \frac{1}{z} T_a \bullet_q \cdot & (a = 1, \dots, r) \\ \nabla_{z \partial_z} &:= z \partial_z - \frac{1}{z} c_1(\mathcal{T}_X) \bullet_q \cdot + \mu(\cdot)\end{aligned}$$

## Définition : la connexion quantique

Soit le fibré trivial à fibres isomorphes à  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

$$F \longrightarrow \mathbf{V} \times \mathbb{C}$$

Sur  $V \times \mathbb{C} \subset (\mathbb{C}^*)^r \times \mathbb{C}$  on le muni de la connexion méromorphe  $\nabla$  suivante

$$\begin{aligned}\nabla_{q_a \partial_{q_a}} &:= q_a \partial_{q_a} + \frac{1}{z} T_a \bullet_q \cdot & (a = 1, \dots, r) \\ \nabla_{z \partial_z} &:= z \partial_z - \frac{1}{z} c_1(\mathcal{T}_X) \bullet_q \cdot + \mu(\cdot)\end{aligned}$$

où

- La forme bilinéaire " $\bullet_q$ " est le produit quantique.
- $\mu$  est le morphisme diagonal sur  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$  défini par :  
$$\mu(T_a) := \frac{1}{2} (\deg(T_a) - \dim_{\mathbb{C}} X) T_a.$$

Définition : le  $\mathcal{D}$ -module quantique

Le  $\mathcal{D}$ -module quantique (du côté  $A$ ) est le couple  $(F, \nabla)$ .

Définition : le  $\mathcal{D}$ -module quantique

Le  $\mathcal{D}$ -module quantique (du côté  $A$ ) est le couple  $(F, \nabla)$ .

La connexion  $\nabla$  est intégrable ( $\nabla^2 = 0$ ).

Définition : le  $\mathcal{D}$ -module quantique

Le  $\mathcal{D}$ -module quantique (du côté  $A$ ) est le couple  $(F, \nabla)$ .

La connexion  $\nabla$  est intégrable ( $\nabla^2 = 0$ ).

On peut écrire explicitement, à l'aide des invariants de Gromov-Witten descendants une solution fondamentale de ce fibré à connexion :

## Sections plates : l'automorphisme $L$

On définit un automorphisme multivalué  $L$  de  $F$  dont la valeur en chaque fibre est :

$$L(q, z) : H^{2*}(X) \longrightarrow H^{2*}(X) \quad (1)$$

$$\gamma \longmapsto L(q, z)\gamma \quad (2)$$

## Sections plates : l'automorphisme $L$

On définit un automorphisme multivalué  $L$  de  $F$  dont la valeur en chaque fibre est :

$$L(q, z) : H^{2*}(X) \longrightarrow H^{2*}(X) \quad (1)$$

$$\gamma \longmapsto L(q, z)\gamma \quad (2)$$

où  $L(q, z)\gamma$  vaut :

$$q^{-T/z}\gamma - \sum_{a=0}^s \sum_{\substack{d \in H_2(X, \mathbb{Z}) \\ d \neq 0}} q^d \left\langle \frac{q^{-T/z}\gamma}{z + \psi_1}, \widetilde{T}_a \right\rangle_{0,2,d} T^a$$

## Sections plates : l'automorphisme $L$

On définit un automorphisme multivalué  $L$  de  $F$  dont la valeur en chaque fibre est :

$$L(q, z) : H^{2*}(X) \longrightarrow H^{2*}(X) \quad (1)$$

$$\gamma \longmapsto L(q, z)\gamma \quad (2)$$

où  $L(q, z)\gamma$  vaut :

$$q^{-T/z}\gamma - \sum_{a=0}^s \sum_{\substack{d \in H_2(X, \mathbb{Z}) \\ d \neq 0}} q^d \left\langle \frac{q^{-T/z}\gamma}{z + \psi_1}, \widetilde{T}_a \right\rangle_{0,2,d} T^a$$

où

$\psi_1$  permet de définir les invariants de G-W avec descente.

## Sections plates : l'automorphisme $L$

On définit un automorphisme multivalué  $L$  de  $F$  dont la valeur en chaque fibre est :

$$L(q, z) : H^{2*}(X) \longrightarrow H^{2*}(X) \quad (1)$$

$$\gamma \longmapsto L(q, z)\gamma \quad (2)$$

où  $L(q, z)\gamma$  vaut :

$$q^{-T/z}\gamma - \sum_{a=0}^s \sum_{\substack{d \in H_2(X, \mathbb{Z}) \\ d \neq 0}} q^d \left\langle \frac{q^{-T/z}\gamma}{z + \psi_1}, \widetilde{T}_a \right\rangle_{0,2,d} T^a$$

où

$\psi_1$  permet de définir les invariants de G-W avec descente.

$$q^{-T/z} := e^{-z^{-1} \sum_{a=1}^r T_a \log(q_a)}.$$

## Proposition

Les sections  $L(q, z)\gamma$  sont plates pour  $\nabla$  dans la direction  $V$  de  $V \times \mathbb{C}$ .

## Proposition

Les sections  $L(q, z)\gamma$  sont plates pour  $\nabla$  dans la direction  $V$  de  $V \times \mathbb{C}$  :

$$\nabla_{\delta_{q_a}} L(q, z) \cdot \gamma = 0,$$

## Proposition

Les sections  $L(q, z)\gamma$  sont plates pour  $\nabla$  dans la direction  $V$  de  $V \times \mathbb{C}$  :

$$\nabla_{\delta_{q_a}} L(q, z) \cdot \gamma = 0,$$

La direction " $z \in \mathbb{C}$ " de  $V \times \mathbb{C}$  demande un travail supplémentaire.

Ainsi, à la direction  $z$  près, l'automorphisme  $L$  permet de trivialisier la connexion  $\nabla$  :

$$\begin{array}{ccc} (F, d) & \xrightarrow{L} & (F, \nabla) \\ \downarrow & & \swarrow \\ & & V \times \mathbb{C} \end{array}$$

Ainsi, à la direction  $z$  près, l'automorphisme  $L$  permet de trivialisier la connexion  $\nabla$  :

$$\begin{array}{ccc} (F, d) & \xrightarrow{L} & (F, \nabla) \\ \downarrow & & \swarrow \\ & & V \times \mathbb{C} \end{array}$$

où  $d$  est la connexion triviale définie par la dérivation.

## La fonction $J$

La fonction  $J$  est la section de  $F$  :

$$L^{-1}\mathbb{1}$$

A commutative diagram illustrating the relationship between the spaces  $(F, d)$ ,  $(F, \nabla)$ , and  $V \times \mathbb{C}$ . The diagram consists of three nodes:  $(F, d)$  at the top left,  $(F, \nabla)$  at the top right, and  $V \times \mathbb{C}$  at the bottom center. A horizontal arrow labeled  $L$  points from  $(F, d)$  to  $(F, \nabla)$ . A vertical arrow points from  $(F, d)$  down to  $V \times \mathbb{C}$ . A curved arrow labeled  $J$  points from  $V \times \mathbb{C}$  up to  $(F, d)$ . A curved arrow labeled  $\mathbb{1}$  points from  $(F, \nabla)$  down to  $V \times \mathbb{C}$ .

## La fonction $J$

La fonction  $J$  est la section de  $F$  :

$$L^{-1}\mathbb{1}$$

$$\begin{array}{ccc} (F, d) & \xrightarrow{L} & (F, \nabla) \\ \downarrow J & & \uparrow \mathbb{1} \\ V \times \mathbb{C} & & \end{array}$$

La fonction  $J$  s'exprime à l'aide des invariants de Gromov-Witten descendants.

Elle est multivaluée ( $\log q_a$ ).

## Section 4

Le côté  $B$  des variétés toriques : systèmes GKZ

Les SQFT (le point de vue physique) du côté  $B$  peuvent-être obtenues de plusieurs façons :

Les SQFT (le point de vue physique) du côté  $B$  peuvent-être obtenues de plusieurs façons :

- Comme présenté en première partie, on peut regarder l'espace de module des variétés de Calabi-Yau polarisées.

Les SQFT (le point de vue physique) du côté  $B$  peuvent-être obtenues de plusieurs façons :

- Comme présenté en première partie, on peut regarder l'espace de module des variétés de Calabi-Yau polarisées.
- Pour des variétés non Calabi-Yau mais toriques ou intersections complètes de toriques, on pourra regarder le "modèle de Landau-Ginsburg".

Les SQFT (le point de vue physique) du côté  $B$  peuvent-être obtenues de plusieurs façons :

- Comme présenté en première partie, on peut regarder l'espace de module des variétés de Calabi-Yau polarisées.
- Pour des variétés non Calabi-Yau mais toriques ou intersections complètes de toriques, on pourra regarder le "modèle de Landau-Ginsburg".

Contrairement au côté  $A$ , nous ne présenterons que l'objet combinatoire fabriqué à partir de ces données, sans référence à son origine physique.

Les SQFT (le point de vue physique) du côté  $B$  peuvent-être obtenues de plusieurs façons :

- Comme présenté en première partie, on peut regarder l'espace de module des variétés de Calabi-Yau polarisées.
- Pour des variétés non Calabi-Yau mais toriques ou intersections complètes de toriques, on pourra regarder le "modèle de Landau-Ginsburg".

Contrairement au côté  $A$ , nous ne présenterons que l'objet combinatoire fabriqué à partir de ces données, sans référence à son origine physique.

Dans cette section, nous supposons que  $X$  est une variété torique (sans sous-variété).

Soit  $N$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $n$ , et  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  associé.

Soit  $N$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $n$ , et  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  associé.

On considère une variété torique  $X$  de dimension  $n$ , lisse et projective, définie par un éventail  $\Sigma$  de  $N_{\mathbb{R}}$ .

Soit  $N$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $n$ , et  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  associé.

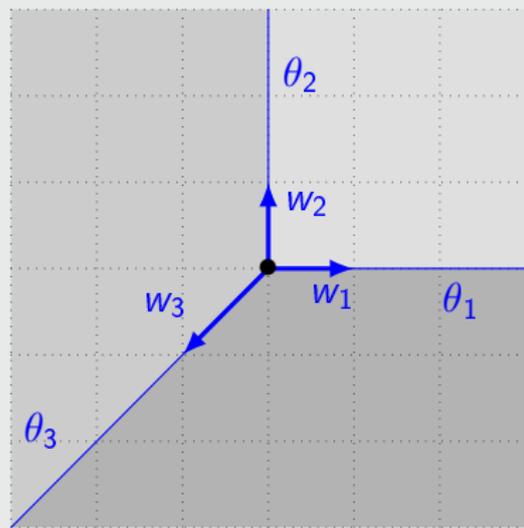
On considère une variété torique  $X$  de dimension  $n$ , lisse et projective, définie par un éventail  $\Sigma$  de  $N_{\mathbb{R}}$ .

On note

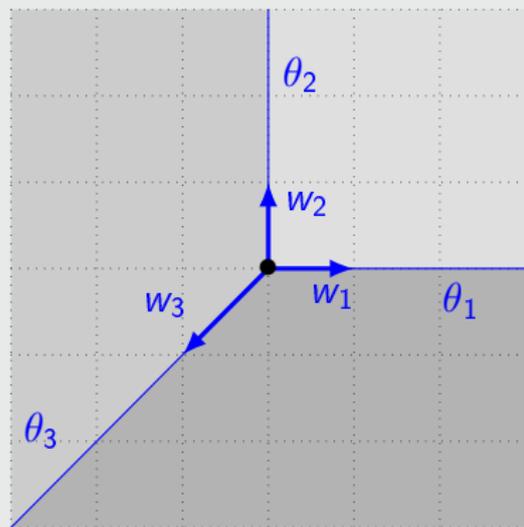
$$\Sigma(1) := \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$$

l'ensemble des rayons de l'éventail. On note  $w_{\theta}$  le générateur (dans  $N$ ) d'un rayon  $\theta$ .

## Exemple : éventail de $\mathbb{P}^2$

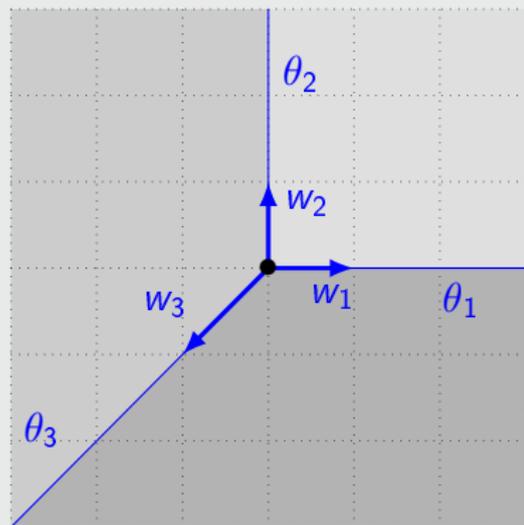


## Exemple : éventail de $\mathbb{P}^2$

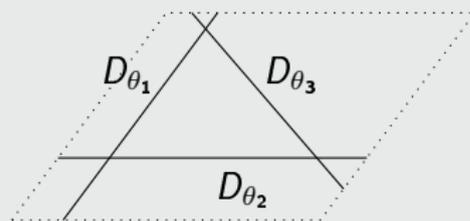


Chaque rayon  $\theta$  correspond à un diviseur  $D_\theta$  de  $X$  invariant sous l'action du tore.

## Exemple : éventail de $\mathbb{P}^2$



Chaque rayon  $\theta$  correspond à un diviseur  $D_\theta$  de  $X$  invariant sous l'action du tore.



Diviseurs toriques de  $\mathbb{P}^2$

ici,  $[D_{\theta_1}] = [D_{\theta_2}] = [D_{\theta_3}]$   
 $= H \in H^2(\mathbb{P}^2, \mathbb{C})$ .

On considère l'algèbre d'opérateurs (non commutative) suivante :

$$\mathbb{D} := \mathbb{C}[q_a^\pm, z] \langle z\delta_{q_a} \rangle$$

où les  $q_a$  sont les même que pour le côté A (il y en a autant que la dimension de  $H^2(X, \mathbb{C})$ ), et

$$\delta_{q_a} = q_a \partial_{q_a}.$$

On considère l'algèbre d'opérateurs (non commutative) suivante :

$$\mathbb{D} := \mathbb{C}[q_a^\pm, z] \langle z\delta_{q_a} \rangle$$

où les  $q_a$  sont les même que pour le côté  $A$  (il y en a autant que la dimension de  $H^2(X, \mathbb{C})$ ), et

$$\delta_{q_a} = q_a \partial_{q_a}.$$

## Quantisation

On définit une application de "quantisation" :

$$H^2(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{D}$$
$$\tau = \sum_a \tau_a T_a \longmapsto \hat{\tau} = \sum_a \tau_a \delta_{q_a}$$

qui s'étend aux diviseurs.

Le système GKZ associé à  $\Sigma$  est l'ensemble des opérateurs de  $\mathbb{D}$  suivants :

Le système GKZ associé à  $\Sigma$  est l'ensemble des opérateurs de  $\mathbb{D}$  suivants :

### Système GKZ de $\Sigma$

Pour chaque  $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$  on pose :

$$\square_d = \prod_{\theta} \prod_{\nu=0}^{d_{\theta}^{+}-1} (\widehat{D}_{\theta} - z\nu) - q^d \prod_{\theta} \prod_{\nu=0}^{d_{\theta}^{-}-1} (\widehat{D}_{\theta} - z\nu)$$

Le système GKZ associé à  $\Sigma$  est l'ensemble des opérateurs de  $\mathbb{D}$  suivants :

### Système GKZ de $\Sigma$

Pour chaque  $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$  on pose :

$$\square_d = \prod_{\theta} \prod_{\nu=0}^{d_{\theta}^{+}-1} (\widehat{D}_{\theta} - z\nu) - q^d \prod_{\theta} \prod_{\nu=0}^{d_{\theta}^{-}-1} (\widehat{D}_{\theta} - z\nu)$$

où

$$d_{\theta} = \int_d D_{\theta} ; \quad d_{\theta}^{+} = \max(d_{\theta}, 0), \quad d_{\theta}^{-} = \max(-d_{\theta}, 0).$$

Le système GKZ associé à  $\Sigma$  est l'ensemble des opérateurs de  $\mathbb{D}$  suivants :

### Système GKZ de $\Sigma$

Pour chaque  $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$  on pose :

$$\square_d = \prod_{\theta} \prod_{\nu=0}^{d_{\theta}^{+}-1} (\widehat{D}_{\theta} - z\nu) - q^d \prod_{\theta} \prod_{\nu=0}^{d_{\theta}^{-}-1} (\widehat{D}_{\theta} - z\nu)$$

où

$$d_{\theta} = \int_d D_{\theta} ; \quad d_{\theta}^{+} = \max(d_{\theta}, 0), \quad d_{\theta}^{-} = \max(-d_{\theta}, 0).$$

L'**idéal GKZ** est l'idéal à gauche  $\mathbb{G} = \langle \square_d, d \in H_2(X, \mathbb{Z}) \rangle$

Le **module GKZ** est le quotient  $\mathbb{M} = \mathbb{D}/\mathbb{G}$ .

Ce système d'opérateurs  $\{\square_d\}$  se déduit des systèmes GKZ associées à un ensemble de vecteurs dans un réseau.

Gelfand-Kapranov-Zelevinskii ont introduit ces systèmes d'équations différentielles au début des années 90.

Ce système d'opérateurs  $\{\square_d\}$  se déduit des systèmes GKZ associées à un ensemble de vecteurs dans un réseau.

Gelfand-Kapranov-Zelevinskii ont introduit ces systèmes d'équations différentielles au début des années 90.

Les solutions de ces systèmes sont connues : on les exprime à l'aide de séries ou d'intégrales.

Dans notre cas, on construit ainsi la fonction  $I$  :

$$I : \mathbf{T} \times \mathbb{C} \longrightarrow H^{2*}(X, \mathbb{C})$$

qui vérifie, pour tout  $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$  :

$$\square_d(I) = 0$$

Le  $\mathbb{D}$ -module  $\mathbb{M} = \mathbb{D}/G$  peut être vu comme un  $\mathbb{C}[q_a^\pm, z]$ -module.  
On peut tout faisceautiser au dessus de  $\mathbf{T} \times \mathbb{C}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \dashrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathbb{M} = \mathbb{D}/G & \dashrightarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

Le  $\mathbb{D}$ -module  $\mathbb{M} = \mathbb{D}/\mathbb{G}$  peut être vu comme un  $\mathbb{C}[q_a^\pm, z]$ -module.  
On peut tout faisceautiser au dessus de  $\mathbf{T} \times \mathbb{C}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \dashrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathbb{M} = \mathbb{D}/\mathbb{G} & \dashrightarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

**Théorème (Iritani) : liberté locale pour les variétés toriques**

Il existe un voisinage  $U \subset \mathbf{T}$  du large radius limit tel que le faisceau de  $\mathcal{O}_U$ -module  $\mathcal{M}|_U$  soit libre de rang  $\dim H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

On obtient de plus un isomorphisme de  $\mathcal{D}$ -modules :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{M}, d) & \xrightarrow{\sim (\cdot I)} & (F, \nabla^B) \\
 \uparrow \mathbf{1} & \searrow & \downarrow I \\
 & & U \times \mathbb{C}
 \end{array}$$

où :

- $F$  est le fibré trivial de fibres  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .
- $d$  est la connexion canonique sur  $\mathcal{M}$ .
- L'isomorphisme envoie  $1 \in \mathbb{M}$  sur la section  $I$  de  $F$ .

## Théorème (Givental-Iritani) : symétrie miroir

Il existe un voisinage  $W \subset U$  du large radius limit et une application biholomorphe "miroir" :

$$Mir : W \longrightarrow V$$

telle que les fibrés

$$(\mathcal{M}|_W, d) \text{ et } Mir^*(\mathcal{F}, \nabla).$$

soient isomorphes.

En particulier la fonction  $I$  (combinatoire) et  $J$  (série en invariants de Gromov-Witten) se déduisent l'une de l'autre via l'application miroir.

## Conclusion : Symétrie miroir pour les variétés toriques

$$\begin{array}{ccc} (F, d) & \xrightarrow{\sim L} & (F, \nabla) \\ \downarrow J & & \uparrow \mathbb{1} \\ V \times \mathbb{C} & & \end{array}$$

- Le côté A.

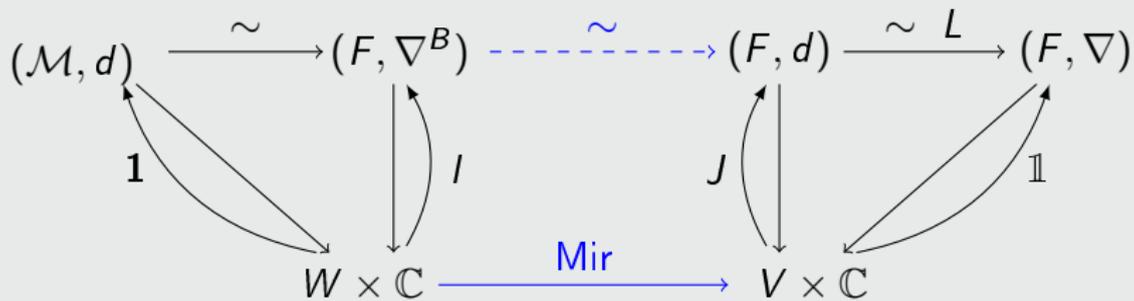
## Conclusion : Symétrie miroir pour les variétés toriques

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}, d) & \xrightarrow{\sim} & (F, \nabla^B) \\ & \searrow \mathbf{1} & \downarrow I \\ & & W \times \mathbb{C} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (F, d) & \xrightarrow{\sim L} & (F, \nabla) \\ & \downarrow J & \nearrow \mathbb{1} \\ & & V \times \mathbb{C} \end{array}$$

- Le côté A.
- Le côté B.

## Conclusion : Symétrie miroir pour les variétés toriques



- Le côté A.
- Le côté B.
- Les applications miroirs.

## Section 5

# Sous-variétés intersections complètes de variétés toriques

Nous traiterons le cas d'une hypersurface  $Z \subset X$  définie par une section générale d'un fibré en droite ample  $\mathcal{L}$ .

## Le côté A : $\mathcal{D}$ -modules quantiques twistés

Pandharipande –et d'autres– introduisent des invariants de Gromov-Witten "twistés" par  $\mathcal{L}$  en l'un des points marqués  $j$  :

## Le côté A : $\mathcal{D}$ -modules quantiques twistés

Pandharipande –et d'autres– introduisent des invariants de Gromov-Witten "twistés" par  $\mathcal{L}$  en l'un des points marqués  $j$  :

Soit  $X_{0,l,d}$  l'espace de modules des applications stables de courbes rationnelles à  $l$  points marqués dans  $X$ , de classe d'homologie image  $d$ .

## Le côté A : $\mathcal{D}$ -modules quantiques twistés

Pandharipande –et d'autres– introduisent des invariants de Gromov-Witten "twistés" par  $\mathcal{L}$  en l'un des points marqués  $j$  :

Soit  $X_{0,l,d}$  l'espace de modules des applications stables de courbes rationnelles à  $l$  points marqués dans  $X$ , de classe d'homologie image  $d$ .

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{0,l,d} & & \\ \downarrow \pi & \searrow f & \\ X_{0,l,d} & \xrightarrow{e_1, \dots, e_l} & X \end{array} \quad \mathcal{L}$$

## Le côté A : $\mathcal{D}$ -modules quantiques twistés

Pandharipande –et d'autres– introduisent des invariants de Gromov-Witten "twistés" par  $\mathcal{L}$  en l'un des points marqués  $j$  :

Soit  $X_{0,l,d}$  l'espace de modules des applications stables de courbes rationnelles à  $l$  points marqués dans  $X$ , de classe d'homologie image  $d$ .

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{0,l,d} & & \\ \downarrow \pi & \searrow f & \\ X_{0,l,d} & \xrightarrow{e_1, \dots, e_l} & X \end{array} \quad \mathcal{L}$$

avec :

- $\mathcal{C}_{0,l,d}$  Courbe universelle.
- $e_1, \dots, e_l$  morphismes d'évaluation.

Soit  $\mathcal{L}_{0,l,d}(j)$  le fibré localement libre sur  $X_{0,l,d}$ , noyau du morphisme naturel :

$$\pi_* f^* \mathcal{L} \longrightarrow e_j^* \mathcal{L}$$

Soit  $\mathcal{L}_{0,l,d}(j)$  le fibré localement libre sur  $X_{0,l,d}$ , noyau du morphisme naturel :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{0,l,d}(j) \longrightarrow \pi_* f^* \mathcal{L} \longrightarrow e_j^* \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

Soit  $\mathcal{L}_{0,l,d}(j)$  le fibré localement libre sur  $X_{0,l,d}$ , noyau du morphisme naturel :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{0,l,d}(j) \longrightarrow \pi_* f^* \mathcal{L} \longrightarrow e_j^* \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

### Invariants GW twistés en $j$

Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

L'invariant GW-twisté en  $j$  des classes  $\alpha_i$  est :

$$\langle \alpha_1, \dots, \tilde{\alpha}_j, \dots, \alpha_l \rangle_{0,l,d}^{tw} = \int_{[X_{0,l,d}]^{vir}} c_{top}(\mathcal{L}_{0,l,d}(j)) \prod_i e_i^* \alpha_i$$

Avec ces invariants on construit :

Avec ces invariants on construit :

- Un produit quantique twisté  $\bullet_q^{tw}$ .

Avec ces invariants on construit :

- Un produit quantique twisté  $\bullet_q^{tw}$ .
- Une connexion twistée sur le fibré trivial  $F$  de fibre  $H^{2*}(X)$ .

Avec ces invariants on construit :

- Un produit quantique twisté  $\bullet_q^{tw}$ .
- Une connexion twistée sur le fibré trivial  $F$  de fibre  $H^{2*}(X)$ .
- Un "pairing twisté"  $(\cdot, \cdot)^{tw}$  –à partir de la dualité de Poincaré modifié par  $c_{top}(\mathcal{L})$ – qui vérifie les relations de Frobenius

$$(\alpha_1 \bullet_q^{tw} \alpha_2, \alpha_3)^{tw} = (\alpha_1, \alpha_2 \bullet_q^{tw} \alpha_3)^{tw}.$$

Cette construction fournit des énoncés de symétrie miroir mais présente des inconvénients :

Cette construction fournit des énoncés de symétrie miroir mais présente des inconvénients :

- Les invariants de GW twistés dépendent du choix d'un des points marqués : ils sont peu naturels.

Cette construction fournit des énoncés de symétrie miroir mais présente des inconvénients :

- Les invariants de GW twistés dépendent du choix d'un des points marqués : il sont peu naturels.
- Le fibré muni de la connexion twistée -de fibres  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ - n'a pas de signification géométrique claire.

Cette construction fournit des énoncés de symétrie miroir mais présente des inconvénients :

- Les invariants de GW twistés dépendent du choix d'un des points marqués : il sont peu naturels.
- Le fibré muni de la connexion twistée -de fibres  $H^{2*}(X, \mathbb{C})$ - n'a pas de signification géométrique claire.
- Le "pairing twisté" est dégénéré.

## $\mathcal{D}$ -module quantique réduit

## $\mathcal{D}$ -module quantique réduit

Soit  $c$  la classe de chern  $c_{top}(\mathcal{L})$ . On considère le morphisme de multiplication par  $c$  :

$$\begin{array}{ccc} m_c : H^{2*}(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{2*}(X, \mathbb{C}) \\ \alpha & \longmapsto & c\alpha. \end{array}$$

## $\mathcal{D}$ -module quantique réduit

Soit  $c$  la classe de chern  $c_{top}(\mathcal{L})$ . On considère le morphisme de multiplication par  $c$  :

$$\begin{array}{ccc} m_c : H^{2*}(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{2*}(X, \mathbb{C}) \\ \alpha & \longmapsto & c\alpha. \end{array}$$

Définition : Anneau de cohomologie réduit

L'anneau de cohomologie réduit par  $\mathcal{L}$  est :

$$\overline{H^{2*}} = H^{2*}(X, \mathbb{C}) / \ker(m_c)$$

et  $\overline{F}$  le fibré trivial de base  $\mathbf{T}$  et de fibre  $\overline{H^{2*}}$ .

## Definition : Invariants GW réduits

Soient  $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_l \in \overline{H^{2*}}$  des classes réduites. On pose :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_l \rangle_{0,l,d}^{red} &:= \langle \alpha_1, \dots, \widetilde{c_{top}(\mathcal{L})} \alpha_j, \dots, \alpha_l \rangle_{0,l,d}^{tw} \\ &= \int_{[X_{0,l,d}]^{vir}} c_{top}(\pi_* f^* \mathcal{L}) \prod_i e_i^* \alpha_i \end{aligned}$$

Les invariants de GW réduits ne dépendent plus d'un choix de  $j$ .

Les invariants GW réduits permettent de définir un produit quantique et une connexion réduite sur le fibré trivial de fibres  $H^{2*}(X, \mathbb{C}) / \ker m_c$ .

On construit ainsi un  $\mathcal{D}$ -module quantique réduit

$$(\bar{F}, \bar{\nabla}).$$

## Interprétation géométrique

Soit  $i : Z \hookrightarrow X$  l'inclusion de  $Z$  dans  $X$ .

On note

$$H_{amb}^{2*}(Z, \mathbb{C}) := i^*(H^{2*}(X, \mathbb{C}))$$

la partie "ambiante" de la cohomologie de  $Z$  (celle qui provient de  $X$ ). Elle ne diffère de  $H^{2*}(Z, \mathbb{C})$  qu'en dimension moitié.

On note  $(F_{amb}^Z, \nabla_{amb}^Z)$  la partie "ambiante" du  $\mathcal{D}$ -module quantique de  $Z$ , de fibres  $H_{amb}^{2*}(Z, \mathbb{C})$ .

## Interprétation géométrique

Soit  $i : Z \hookrightarrow X$  l'inclusion de  $Z$  dans  $X$ .

On note

$$H_{amb}^{2*}(Z, \mathbb{C}) := i^*(H^{2*}(X, \mathbb{C}))$$

la partie "ambiante" de la cohomologie de  $Z$  (celle qui provient de  $X$ ). Elle ne diffère de  $H^{2*}(Z, \mathbb{C})$  qu'en dimension moitié.

On note  $(F_{amb}^Z, \nabla_{amb}^Z)$  la partie "ambiante" du  $\mathcal{D}$ -module quantique de  $Z$ , de fibres  $H_{amb}^{2*}(Z, \mathbb{C})$ .

**Théorème (E. Mann, — )**

Les fibrés à connexion :

$$(\bar{F}, \bar{\nabla}) \text{ et } (F_{amb}^Z, \nabla_{amb}^Z)$$

sont isomorphes.

## Du côté $B$

### Système GKZ twistés

De même que pour le côté  $A$ , on sait -depuis "longtemps"- construire le systèmes GKZ "twistés" ad-hoc à partir des données  $(X, \mathcal{L})$ .

## Du côté $B$

### Système GKZ twistés

De même que pour le côté  $A$ , on sait -depuis "longtemps"- construire les systèmes GKZ "twistés" ad-hoc à partir des données  $(X, \mathcal{L})$ .

On donne l'interprétation géométrique suivante des systèmes GKZ twistés :

C'est le système GKZ -usuel- de l'espace total du fibré dual  $\mathcal{L}^\vee$ .  
(variété torique quasi-projective).

## Symétrie miroir twistée.

Nous montrons un énoncé de symétrie miroir twistée en terme de  $\mathcal{D}$ -module quantique.

## Symétrie miroir twistée.

Nous montrons un énoncé de symétrie miroir twistée en terme de  $\mathcal{D}$ -module quantique.

Toutefois, on s'aperçoit que la fonction  $J$  twistée n'est plus définie par  $L^{-1}\mathbb{1}$  ;

La relation entre les fonctions  $I$  et  $J$  twistées n'est vraie que dans les classes réduites.

On aimerait un énoncé réduit.

Les fibrés twistés ont des fibres de dimension  $\dim H^{2*}(X, \mathbb{C})$ .

Les fibrés twistés ont des fibres de dimension  $\dim H^{2^*}(X, \mathbb{C})$ .

Du côté  $A$ , en quotientant, les fibres réduites étaient de dimension  $\dim H^{2^*}(X, \mathbb{C}) - \dim \ker m_C$ .

Il nous faut réduire les fibres du côté  $B$ .

Les fibrés twistés ont des fibres de dimension  $\dim H^{2^*}(X, \mathbb{C})$ .

Du côté A, en quotientant, les fibres réduites étaient de dimension  $\dim H^{2^*}(X, \mathbb{C}) - \dim \ker m_c$ .

Il nous faut réduire les fibres du côté B.

## Equations manquantes

Du côté B, nous avons  $\mathbb{D}/\mathbb{G}$  ou  $\mathbb{G}$  est un système d'équation différentielles. Ce système est incomplet, il nous faut trouver les équations manquantes.

## Définition : idéal quotient

Soit  $c = c_1(\mathcal{L})$ . Dans la base  $(T_a)$ , écrivons  $c = \sum c_a T_a$ . On pose :

$$\hat{c} = \sum c_a \delta_{q_a} \in \mathbb{D}$$

Soit  $\mathbb{G}$  l'idéal GKZ twisté défini par  $(X, \mathcal{L})$ . On note  $\text{Quot}(\hat{c}, \mathbb{G})$  l'idéal engendré par les opérateurs :

$$\{P \in \mathbb{D}, \hat{c}.P \in \mathbb{G}\}$$

### Définition : idéal quotient

Soit  $c = c_1(\mathcal{L})$ . Dans la base  $(T_a)$ , écrivons  $c = \sum c_a T_a$ . On pose :

$$\hat{c} = \sum c_a \delta_{q_a} \in \mathbb{D}$$

Soit  $\mathbb{G}$  l'idéal GKZ twisté défini par  $(X, \mathcal{L})$ . On note  $\text{Quot}(\hat{c}, \mathbb{G})$  l'idéal engendré par les opérateurs :

$$\{P \in \mathbb{D}, \hat{c}.P \in \mathbb{G}\}$$

Contrairement à la situation commutative, l'ensemble  $\{P \in \mathbb{D}, \hat{c}.P \in \mathbb{G}\}$  n'est pas un idéal de  $\mathbb{D}$ .

Toutefois, c'est bien un système d'équations qui contient l'idéal  $\mathbb{G}$ .

On pose :

$$\mathbb{M}^{\text{res}} = \mathbb{D} / \text{Quot}(\hat{c}, \mathbb{G}).$$

C'est un  $\mathbb{D}$ -module que l'on nomme  **$\mathbb{D}$ -module résiduel**  
(en référence aux schémas résiduels de géométrie algébrique)  
On note  $\mathcal{M}^{\text{res}}$  le faisceau de  $\mathcal{O}_{\mathbb{T}}$ -module correspondant.

### Théorème (E. Mann, — )

Il existe un voisinage  $U$  du large radius limit tel que le faisceau de  $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}$ -module

$$\mathcal{M}_{|U \times \mathbb{C}}^{\text{res}}$$

soit localement libre de rang  $\dim H^{2*}(X, \mathbb{C}) - \dim \ker m_c$ .

## Théorème (E. Mann, — )

Il existe un voisinage  $U$  du large radius limit tel que le faisceau de  $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}$ -module

$$\mathcal{M}|_{U \times \mathbb{C}}^{\text{res}}$$

soit localement libre de rang  $\dim H^{2*}(X, \mathbb{C}) - \dim \ker m_c$ .

### Preuve :

On distingue, selon la valeur de  $z$  :

- $z \neq 0$  : Adolphson en twisté, puis réduction.

## Théorème (E. Mann, — )

Il existe un voisinage  $U$  du large radius limit tel que le faisceau de  $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}$ -module

$$\mathcal{M}_{|U \times \mathbb{C}}^{\text{res}}$$

soit localement libre de rang  $\dim H^{2*}(X, \mathbb{C}) - \dim \ker m_c$ .

### Preuve :

On distingue, selon la valeur de  $z$  :

- $z \neq 0$  : Adolphson en twisté, puis réduction.
- $z = 0$  : Etude de l'anneau de Batyrev twisté  $B$ , *i.e.*, défini par un éventail quasi-projectif lisse.  
Sur un ouvert de Zariski de  $\text{Spec } \Lambda$ , cet anneau est plat, fini, de la bonne longueur.

## Théorème (E. Mann, — )

Il existe un voisinage  $U$  du large radius limit tel que le faisceau de  $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}$ -module

$$\mathcal{M}|_{U \times \mathbb{C}}^{\text{res}}$$

soit localement libre de rang  $\dim H^{2*}(X, \mathbb{C}) - \dim \ker m_c$ .

### Preuve :

On distingue, selon la valeur de  $z$  :

- $z \neq 0$  : Adolphson en twisté, puis réduction.
- $z = 0$  : Etude de l'anneau de Batyrev twisté  $B$ , *i.e.*, défini par un éventail quasi-projectif lisse.

Sur un ouvert de Zariski de  $\text{Spec } \Lambda$ , cet anneau est plat, fini, de la bonne longueur.

On définit le Batyrev résiduel  $B^{\text{res}}$  et on montre l'isomorphisme :

$$B^{\text{res}} \longrightarrow \mathcal{M}|_{z=0}^{\text{res}}$$

## Théorème (E. Mann, —)

Il existe un voisinage  $W \subset U$  du large radius limit et une application biholomorphe "miroir" :

$$Mir : W \longrightarrow V$$

Fournissant des isomorphismes twistés et réduits :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_{|W}^{tw}, d) & \xrightarrow{\sim} & Mir^*(F, \nabla^{tw}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{M}_{|W}^{res}, d) & \xrightarrow{\sim} & Mir^*(\bar{F}, \bar{\nabla}) \end{array}$$