

LE MODELE DE BLACK ET SCHOLES

1. Motivations

Une option est un droit d'acheter (**Call**) ou de vendre (**Put**), une quantité déterminée d'un bien (le **sous-jacent**) à un prix fixé d'avance (le **strike** = **prix d'exercice**). L'achat d'un call permet de se prémunir contre une hausse du prix du sous-jacent alors que l'achat d'un put permet de se prémunir contre une baisse du prix du sous-jacent.

Le modèle de Black et Scholes met en rapport le prix d'une option (u) et les variations du prix de l'actif sous-jacent (x) dans une équation parabolique rétrograde en temps.

La formule suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + rx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ru$$

permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir de :

- x valeur de l'action sous-jacente
- t le temps qui reste à l'option avant maturité (date d'échéance), en années
- K le prix d'exercice fixé par l'option
- r le taux d'intérêt sans risque
- σ la **volatilité** (taux de variation estimé des cours de l'actif sous-jacent par rapport à la tendance du marché) du prix de l'action

Nous allons nous intéresser ici au cas de la vente (Put) : une personne achète au temps $t=0$ une option au prix $u(x,0)$ qui lui donne le droit de vendre une action x au prix d'exercice K au temps $t=T$, date d'échéance, quelque soit le prix réel de l'action.

Cette personne exercera bien sûr son droit uniquement si le prix de l'action à maturité $x(T)$ est plus faible que le prix d'exercice K , c'est-à-dire si $x(T) \leq K$.

On recherche donc à déterminer le prix optimal d'achat de l'option pour une condition finale de $\boxed{u(x,T) = \max(0, K-x)}$.

Nous verrons également plusieurs choix possibles de conditions aux limites.

2. Equation différentielle stochastique (EDS) de Black et Scholes

Les actions suivent un processus dit « brownien géométrique » qui a la forme suivante :

$$dx = \mu x dt + \sigma x dz \quad (1)$$

où :

- x est toujours le prix de l'action,
- μ le taux de rendement attendu
- σ la volatilité de l'action
- dz est un processus qui a la forme suivante :

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt}$$

avec ε qui suit une loi normale $N(0,1)$.

Soit u le prix d'une option, un développement de Taylor nous donne :

$$u^{n+1} - u^n = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2$$

on va à l'ordre 2 en x à cause de la dépendance en $dt^{1/2}$ de dz .

En remplaçant dx par $\mu x dt + \sigma x dz$ on obtient :

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mu x + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma x dz \quad (2) \quad (\text{Lemme d'Ito})$$

La version discrète des équations est :

$$\Delta x = \mu x \Delta t + \sigma x \Delta z$$

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mu x + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right) \Delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma x \Delta z$$

Fabrication de portefeuille sans risque

On va éliminer dz en composant un portefeuille de x et u , c'est-à-dire on compose linéairement les deux équations afin de faire disparaître Δz .

On multiplie (1) par $\frac{\partial u}{\partial x}$ et (2) par -1.

On obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx - du = - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right) dt$$

Considérons le portefeuille suivant composé de u_x sous-jacent (actions) et d'une option :

$$\Pi = \frac{\partial u}{\partial x} x - u$$

Le changement de valeur de ce portefeuille durant une période Δt est donc :

$$\begin{aligned}\Delta \Pi &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \Delta u \\ &= \left(-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right) \Delta t\end{aligned}$$

On constate que Δz , la seule source d'aléatoire dans Δx et Δu , a disparu. Cela signifie donc que $\Delta \Pi$, la variation du portefeuille est certaine.

Non-arbitrage : le portefeuille a un rendement de taux sans risque.

Ainsi $\Delta \Pi$ s'écrit :

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$$

En remplaçant Π et $\Delta \Pi$ par leur valeur, on obtient :

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 \right) \Delta t = -r \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} x \right) \Delta t$$

Cette équation peut être réorganisée de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r u$$

C'est l'équation différentielle de Black et Scholes.

3. Discrétisation de l'EDP

On considère l'EDP de type parabolique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r u$$

On limite le calcul à $x \in [0, L]$.

- **Schéma discret (centré) :**

On construit un maillage uniforme discrétisant $]0, L[$.

Pour cela il faut définir un échantillonnage de l'espace et du temps.

Soit $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$ et $h = \frac{L}{N+1}$.

h est le pas d'espace.

Il faut définir aussi un pas de temps Δt , $t^n = n \Delta t$ pour $n=0, \dots, N+1$.

On représente l'inconnue du problème discret par u_i^n , où u_i^n approche $u(x_i, t^n)$ avec $i=0, \dots, N+1$.

On peut réécrire l'EDP initiale sous la forme :

$$u_t + r x u_x + \frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx} = r u$$

Pour construire le schéma aux différences finies on remplace dans cette EDP :

- $u_t(x_i, t_{n+1})$ par $\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t}$
- $u_x(x_i, t_n)$ par $\frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{2h}$
- $u_{xx}(x_i, t_n)$ par $\frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2}$

En effet, on a les développements de Taylor suivants :

$$u(x_{i-1}, t^n) = u(x_i, t^n) - h u_x(x_i, t^n) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i, t^n) - \frac{h^3}{3!} u_{3x}(x_i, t^n) + \frac{h^4}{4!} u_{4x}(x_i, t^n) + O(h^5)$$

$$u(x_{i+1}, t^n) = u(x_i, t^n) + h u_x(x_i, t^n) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i, t^n) + \frac{h^3}{3!} u_{3x}(x_i, t^n) + \frac{h^4}{4!} u_{4x}(x_i, t^n) + O(h^5)$$

$$u(x_i, t^{n-1}) = u(x_i, t^n) - \Delta t u_t(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x_i, t^n) + O(\Delta t^3)$$

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t u_t(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x_i, t^n) + O(\Delta t^3)$$

On notera par la suite $u(x_i, t_n) = u_i^n$ et $u(x_i, t_{n+1}) = u_i^{n+1}$.

On obtient alors le schéma discret suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + r x_i \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = r u_i^n$$

Ce schéma peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$u_h^{n+1} = G_h(\Delta t) u_h^n$$

où $u_h^n = u_h(t^n)$ désigne la projection de la solution exacte $u(x, t^n)$ du problème sur le maillage ;

$$u_h(t^n) = \begin{bmatrix} u(x_0, t_n) \\ u(x_1, t_n) \\ \vdots \\ u(x_{N+1}, t_n) \end{bmatrix} ;$$

et $G_h(\Delta t)$ est la matrice triadiagonale suivante :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & - & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \vdots \\ 0 & \Delta t(\frac{rx_i}{2h} - \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2}) & \Delta t(r + \frac{\sigma^2 x_i^2}{h^2}) + 1 & -\Delta t(\frac{rx_i}{2h} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2}) & 0 \\ \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & - & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

- **Schéma discret (décentré amont) :**

On procède de la même manière en remplaçant :

- $u_t(x_i, t_{n+1})$ par $\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t}$
- $u_x(x_i, t_n)$ par $\frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{h}$
- $u_{xx}(x_i, t_n)$ par $\frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{h^2}$

On obtient alors le schéma discret suivant :

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + rx_i \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = ru_i^n}$$

Ce schéma peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$u_h^{n+1} = G_h(\Delta t) u_h^n$$

où $u_h^n = u_h(t^n)$ désigne la projection de la solution exacte $u(x, t^n)$ du problème sur le maillage ;

$$u_h(t^n) = \begin{bmatrix} u(x_0, t_n) \\ u(x_1, t_n) \\ \vdots \\ u(x_{N+1}, t_n) \end{bmatrix} ;$$

et $G_h(\Delta t)$ est la matrice triadiagonale suivante :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & - & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \vdots \\ 0 & \Delta t \left(\frac{r x_i}{h} - \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2} \right) & \Delta t \left(r - \frac{r x_i}{h} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{h^2} \right) + 1 & -\Delta t \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2} & 0 \\ \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & - & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Remarque : Dans la pratique on utilise le décentrage pour des raisons de stabilité du système. En effet, les discrétisations centrées oscillent dès que le nombre de Peclet (ici : $2h \frac{r}{\sigma^2 x}$) est grand.

- **Consistance et précision du schéma**

On fait des développements de Taylor de la solution exacte:

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t u_t(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x_i, t^n) + O(\Delta t^3)$$

$$u(x_{i-1}, t^n) = u(x_i, t^n) - h u_x(x_i, t^n) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i, t^n) - \frac{h^3}{3!} u_{3x}(x_i, t^n) + \frac{h^4}{4!} u_{4x}(x_i, t^n) + O(h^5)$$

$$u(x_{i+1}, t^n) = u(x_i, t^n) + h u_x(x_i, t^n) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i, t^n) + \frac{h^3}{3!} u_{3x}(x_i, t^n) + \frac{h^4}{4!} u_{4x}(x_i, t^n) + O(h^5)$$

Schéma centré :

On injecte la solution exacte dans le schéma discret centré, on obtient en simplifiant une erreur de troncature $\varepsilon(h, t)$:

$$\varepsilon(h, t) = \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x_i, t^n) + O(\Delta t^2) + r x_i \frac{h^2}{3!} u_{3x}(x_i, t^n) + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2} \frac{h^2}{4!} u_{4x}(x_i, t^n) + O(h^3)$$

Par conséquent, comme $\varepsilon(h, t) \xrightarrow{h, t \rightarrow 0} 0$, le schéma est **consistant** et précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Schéma décentré amont :

On injecte la solution exacte dans le schéma discret décentré, on obtient en simplifiant une erreur de troncature $\varepsilon(h,t)$:

$$\varepsilon(h,t) = \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x_i, t^n) + O(\Delta t^2) + r x_i \left(-\frac{h}{2} u_{xx}(x_i, t^n) + \frac{h^2}{3!} u_{3x}(x_i, t^n) \right) + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2} \frac{h^2}{4!} u_{4x}(x_i, t^n) + O(h^3)$$

Par conséquent, comme $\varepsilon(h,t) \xrightarrow{h,t \rightarrow 0} 0$, le schéma est **consistant** et précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.

4. Condition finale - Conditions aux limites

La condition finale est donnée par

$$u(x,T) = \max(0, K-x)$$

avec $K > 0$ et $x \in [0, L]$.

Nous allons étudier l'effet du choix des conditions aux limites en $x=0$ et $x=L$ sur la solution du modèle de Black et Scholes.

1. Premier choix :

On considère les conditions aux limites suivantes :

$$(1) \begin{cases} u(L,t)=0 \\ u_t(0,t)=ru(0,t) \end{cases}$$

On a donc une équation différentielle du premier ordre en temps à résoudre:

$$(3) u_t = ru$$

Ce qui donne en intégrant :

$$u(0,t) = c e^{rt} \text{ avec } c \text{ une constante à déterminer.}$$

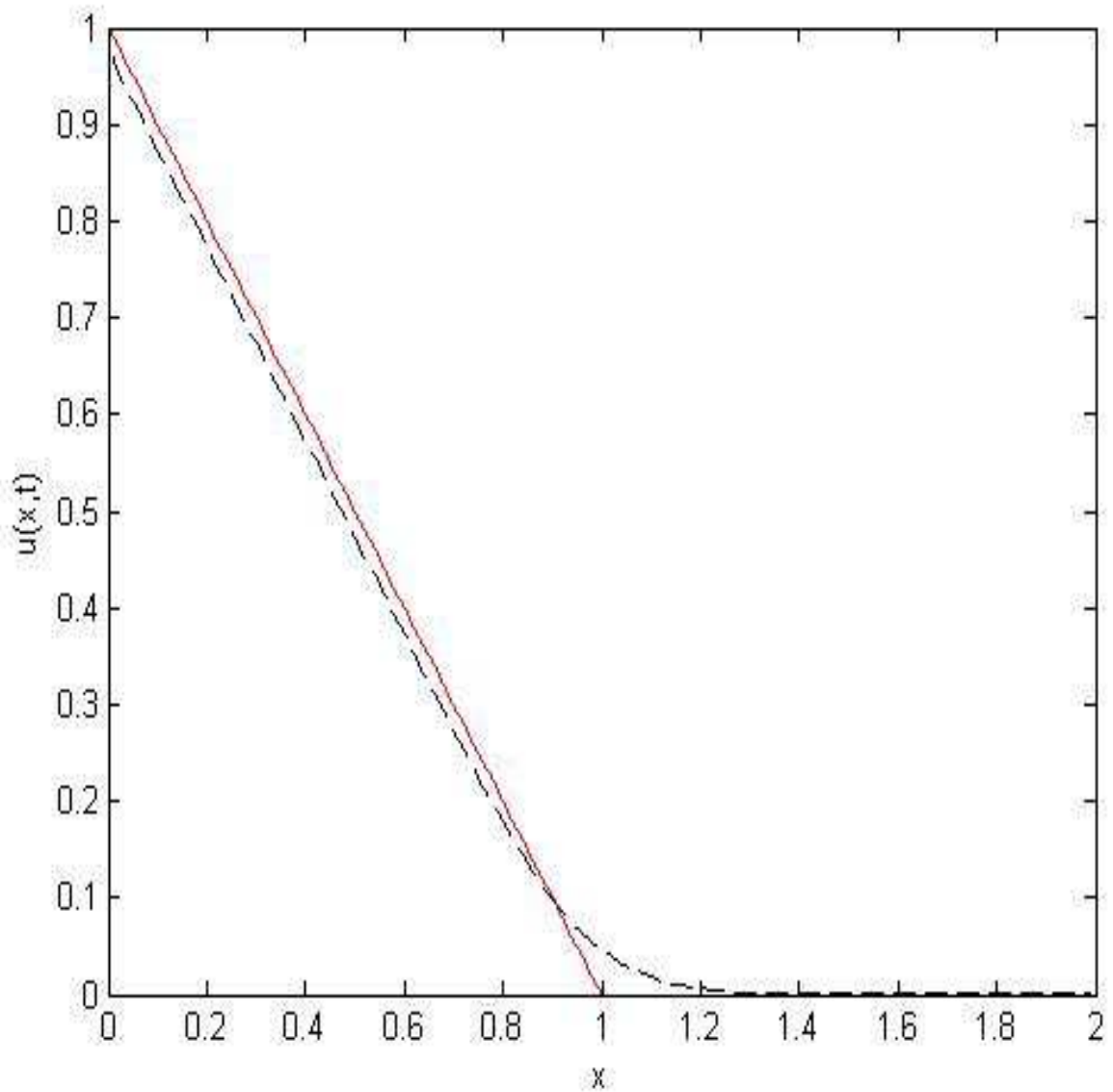
D'après la condition finale, on a $u(0,T) = K$.

D'où $c = K e^{-rT}$.

Ainsi la condition aux limites sera donnée par :

$$u(0,t) = Ke^{r(t-T)}$$

Voici la solution de l'équation de Black et Scholes obtenue avec ces conditions aux bords :



2. Deuxième choix :

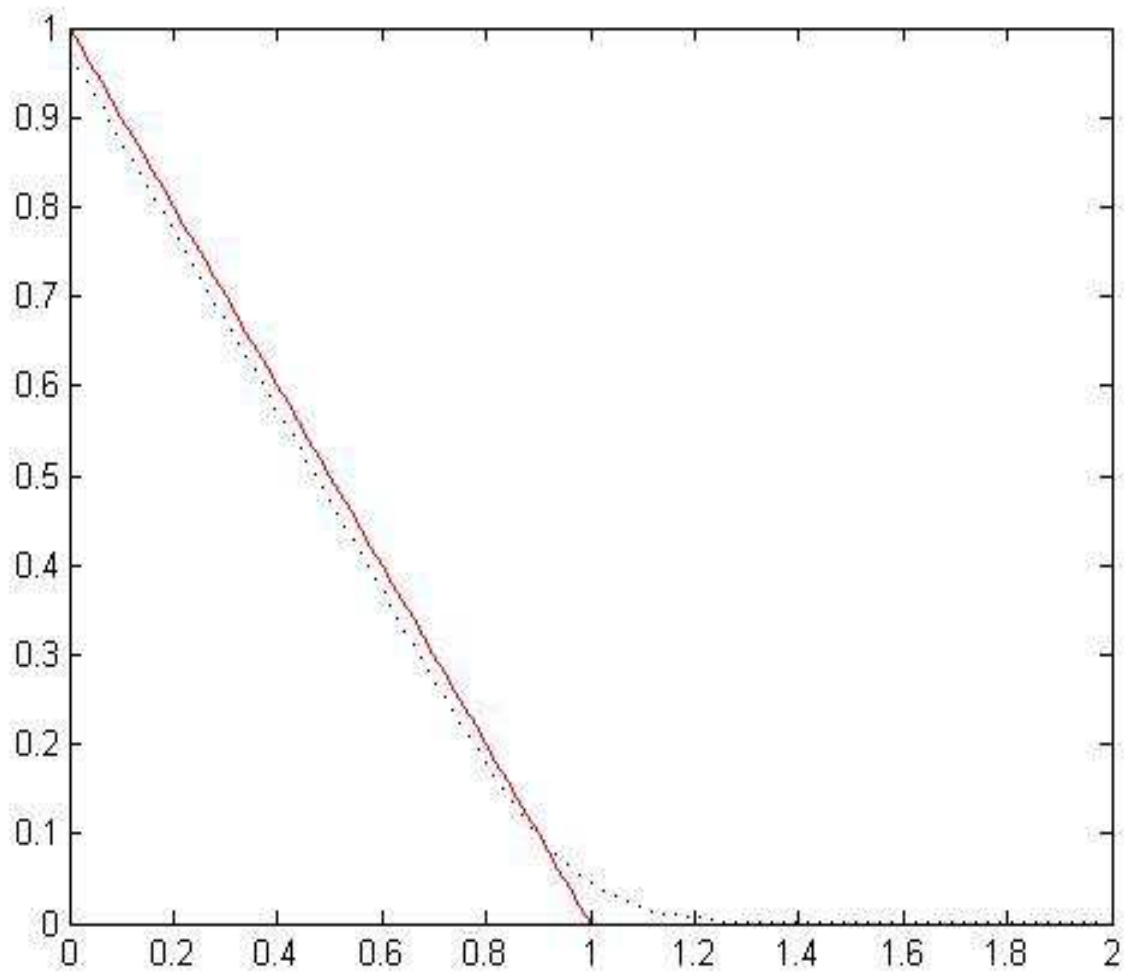
On considère les conditions aux limites suivantes :

$$(2) \begin{cases} u(L,t)=0 \\ u_x(0,t)=-1 \end{cases}$$

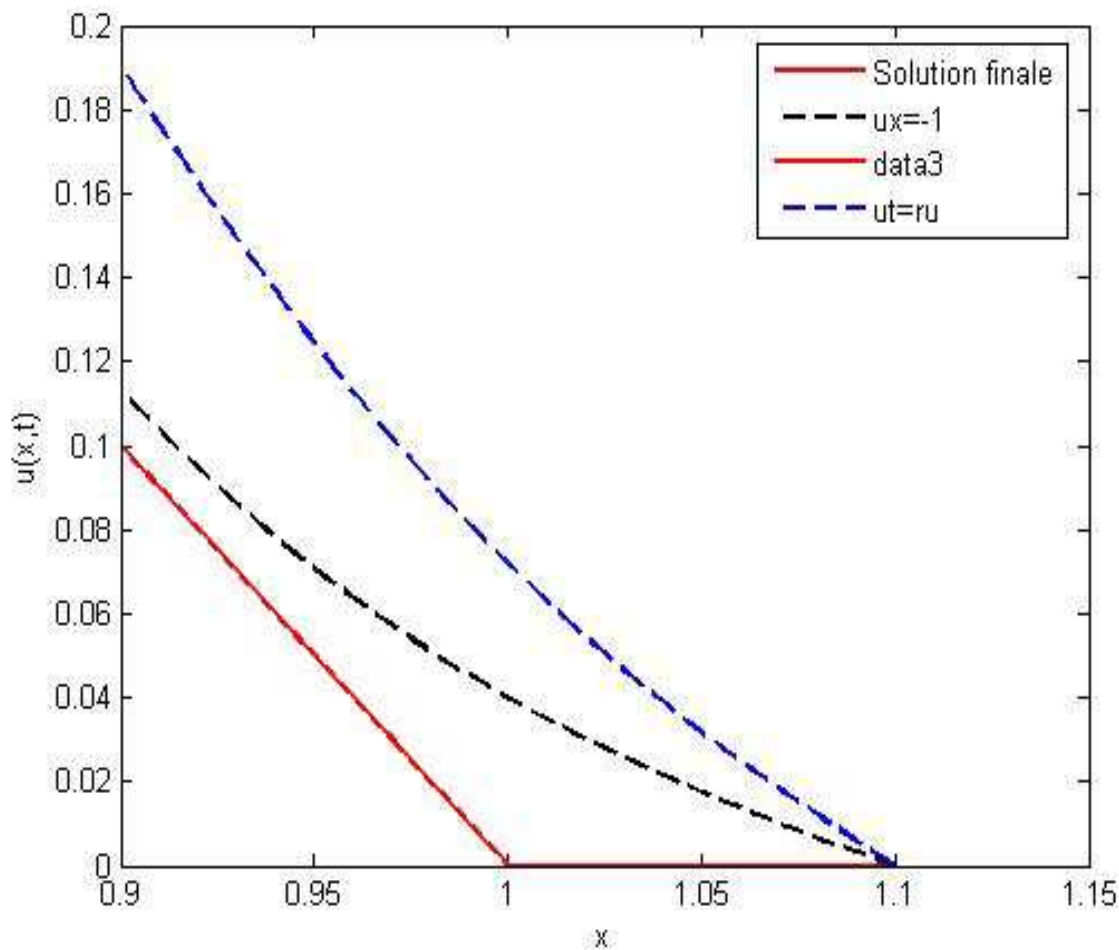
Ce qui est équivalent à :

$$(3) \begin{cases} u(L,t)=0 \\ \frac{u_1^n - u_0^n}{h} = -1 \end{cases}$$

Voici la solution de l'équation de Black et Scholes obtenue avec ces conditions aux bords :



Comparons désormais les deux solutions obtenues avec des conditions aux limites différentes :



On remarque donc qu'il vaut mieux prendre comme condition en 0 $u_x = -1$ que $u_t = ru$.

5. Stabilité de la discrétisation

Définition (rayon spectral) : On appelle rayon spectral d'une matrice A le nombre positif :

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice A .

L'étude de la stabilité du système revient à montrer que :

$$\rho(A) < 1$$

Le calcul des valeurs propres n'étant pas aisé, on lie ceci à la diagonale dominante de la matrice de discrétisation.

En effet :

Définition : Une matrice carrée $M=(a_{i,j})$ est à *diagonale dominante* si pour tout i ,

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Théorème (Gershgorin-Hadamard) : Soit une matrice quelconque A . Si λ est valeur propre, réelle ou complexe, de A , il existe un indice de ligne i tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Ainsi, si on suppose A à diagonale dominante, on obtient :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

En supposant $|a_{ii}| < \frac{1}{2}$ on obtient alors $|\lambda| < 1$.

Il est donc raisonnable de penser que l'étude de la diagonale dominante est une bonne estimation de la stabilité même si celle-ci n'est pas une estimation absolue.

- **Schéma centré :**

Le système sera stable à condition que la matrice tridiagonale $G_h(\Delta t)$:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & - & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \vdots \\ 0 & \Delta t(\frac{rx_i}{2h} - \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2}) & \Delta t(r + \frac{\sigma^2 x_i^2}{h^2}) + 1 & -\Delta t(\frac{rx_i}{2h} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2}) & 0 \\ \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & - & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

soit à diagonale dominante.

C'est-à-dire, lorsque :

$$| \Delta t(r + \frac{\sigma^2 x_i^2}{h^2}) + 1 | > | \Delta t(\frac{rx_i}{2h} - \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2}) | + | -\Delta t(\frac{rx_i}{2h} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2}) |$$

Ce qui donne comme condition de stabilité:

$$\Delta t < \frac{h^2}{rh^2 + rx_i h + \sigma^2 x_i^2}$$

- **Schéma décentré(amont) :**

Le système sera stable à condition que la matrice tridiagonale $G_h(\Delta t)$:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 & - & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \Delta t(\frac{rx_i}{h} - \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2}) & \Delta t(r - \frac{rx_i}{h} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{h^2}) + 1 & -\Delta t \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2} & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \\ 0 & - & 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

soit à diagonale dominante.

C'est-à-dire, lorsque :

$$| \Delta t(r - \frac{rx_i}{h} + \frac{\sigma^2 x_i^2}{h^2}) + 1 | > | \Delta t(\frac{rx_i}{h} - \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2}) | + | -\Delta t \frac{\sigma^2 x_i^2}{2h^2} |$$

Ce qui donne comme condition de stabilité:

$$\Delta t < \frac{h^2}{rh^2 + \sigma^2 x_i^2}$$

6. Exemples d'application

Exemple 1 :

Je reviens d'un voyage aux Etats-Unis avec des dollars.

Si je les change en euros, mon risque est nul, mais pourquoi ne pas garder les dollars en espérant que le dollar va monter ?

La banque peut me garantir de vendre mes dollars au meilleur du cours d'aujourd'hui et du cours dans six mois ; mais ce n'est pas gratuit !

Il faut que la banque y trouve aussi son intérêt.

Combien cela va-t-il me coûter ?

La réponse est dans la formule de Black et Scholes !

Exemple 2 (Le groupe Danone) :

Considérons l'action : Groupe Danone.

Cours du sous jacent (x) = 118.40 €

Prix d'exercice (K) = 85 €

Date d'émission = 23/06/2006

Date d'échéance = 16/03/2007

Taux de dividende (r) = 2 %

Volatilité (σ) = 53.43 %

Le prix du warrant (u) donné est 0.09 €. Est-ce que ce prix est raisonnable ?

Simulation avec notre modèle de Black et Scholes pour $t = 0.3$ (en années) :

