Outils Mathématiques TEE, 1^{er} semestre

Prof. Bijan Mohammadi

HAT105X

Contenu 1ère partie : HAT105X

- Rappels : fractions, développer, factoriser, identités remarquables.
- Chapitre1 : Equations: équations du 1er degré, systèmes d'équations, équations du 2nd degré
- Chapitre 2 : Dérivation: définition, exemples, opérations, Variations et courbes représentatives des fonctions
- Chapitre 3 : Fonctions usuelles: Fonction exponentielle, Fonction logarithme, Fonctions trigonométriques, fonctions hyperboliques
- Chapitre 4 : Calcul vectoriel et produit scalaire

Contenu 2ème partie : HAT203X

- Suites: modes de génération, arithmétiques et géométriques, sens de variation. Calcul de sommes.
- Primitive et intégrale d'une fonction d'une variable réelle. Propriétés linéarité, positivité, relation de Chasles. Calcul masse de la Terre, signal sismographe.
- Equations différentielles linéaires du 1er ordre. Application radioactivité, Carbon 14.
- Courbes et surfaces. Représentation paramétrique d'une droite, équation cartésienne d'un plan, section et intersections (systemes, lignes de niveau), coordonnées cylindriques et sphériques, Longueurs, surfaces, volumes des solides usuels

1ère partie

Rappels : fractions, développer, factoriser, identités remarquables

Fractions

Si a et b sont des réels non nuls, et non divisible l'un par l'autre:
$1/a + 1/b = (a+b)/ab$
Si $a = bc$ par exemple, on peut faire plus simple:
$1/a + 1/b = 1/a + c/(cb) = (1+c)/a$
On retrouve le même résultat avec la première méthode:
$(a+b)/ab = (bc+b)/cb^2 = (c+1)/a$
Division de fractions: $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$

Fractions : Attention aux parenthèses

print((1/2) / (3/-4)) = -2/3 : -0.6666666666666666
print(1/2 / 3/-4) = -1/24 :-0.041666666666666664
print(-4/6) = -2/3 :-0.6666666666666666

Manipulations des fractions

Exemples:
$1/2 + 1/3 = 5/6$
$1/15 + 2/-5 = 1/15 + 2/-5(-3/-3) = 1/15 - 6/15 = -5/15 = -1/3$
$(1/2)/(3/-4) = -4/6 = -2/3$
$(2/-1)/(1/-2)/(3/-2) = -8/3$
$(2/-1)\ (1/-2)\ (3/-2) = -3/2$

Voir d'autres exemples en TD.

Domaine de variations

Si $x \in [-2, 3]$ et $y \in [-1, 0.5]$,
-quel est le domaine de variations de xy, de yx ?
-quel est le domaine de variations de $x + y$, de $y + x$?
-quel est le domaine de variations de $x - y$, de $y - x$?
-quel est le domaine de variations de x/y, de y/x ?
-quel est le domaine de variations de $(x + y)/(x - y)$?
-quel est le domaine de variations de $(x - y)/(x + y)$?
-quel est le domaine de variations de $|x - y|/|x + y|$?

Domaine de variations : attention aux divisions par zéro

Si $x \in [-2, 3]$ et $y \in [-1, 0.5]$,
x/y n'est pas défini en $y = 0$
x/y et y/x varient sur $]-\infty, +\infty[$

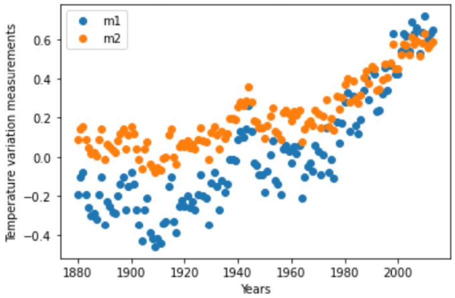
Domaine de variations

Après adimensionnement, les valeurs observées pour deux quantités u et v appartiennent aux intervalles $[-10^{-5}, 10^{-3}]$ et $[-10^{2}, 10^{6}]$.
Définir les domaines de variations de :

$w_1 = uv$,
$w_2 = v + 10^4 u$,
$w_3 = u - v/10^7$,
$w_4 = v/u$,
$w_5 = w_1/w_2$

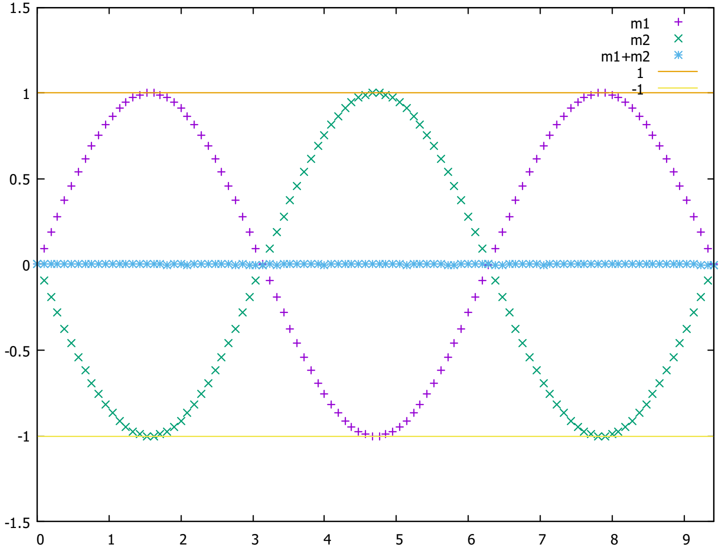
Il faut introduire des variables intermédiaires:
$y = 10^4 u$, puis étudier $w_2 = v + y$.

Domaine de variations




```
min m1 :  -0.46 max m1 :  0.72
min m2 :  -0.08 max m2 :  0.63
min (m1+m2) :  -0.54 max (m1+m2) :  1.35
min (m1-m2) :  -0.38 max (m1-m2) :  0.09
min (m1*m2) :  -0.02 max (m1*m2) :  0.46
min (m1/m2) :  -165 max (m1/m2) :  85
min abs(m1) :  0.01 max abs(m1) :  0.72
min abs(m2) :  0.002 max abs(m2) :  0.632
```

Domaine de variations



Identités remarquables

Utiles pour développer ou factoriser, à connaître dans les deux sens

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Attention les noms des variables n'ont pas d'importance:

$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$

$y^2 - t^2 = (y-t)(y+t)$

$\eta^2 - a^2/b = (\eta - a/\sqrt{b})(\eta + a/\sqrt{b})$ si $b > 0$

Equation et systèmes d'équations de 1er ordre

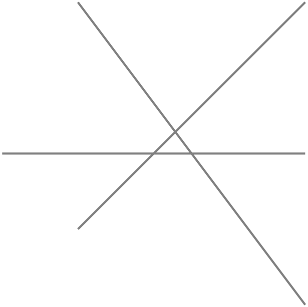
Solution d'une équation du 1er ordre : Trouver l'intersection entre les droites $y = 0$ et $y = ax + b$

Si a est différent de zéro, la solution est $x = -b/a$
Exemple : $-2x - 3 = 0 \rightarrow x = -3/2$
Si $a = 0$, il n'y a pas de solution.
Si $a = b = 0$, tout x est solution.
La droite $y = ax + b$ est de pente a, b est l'ordonnée en x=0 ou l'intercept.

La droite D_1 passe par $A = (-1, 3)$ et par $B = (-1, -6)$.
La droite D_2 passe par $A = (-1, 3)$ et par $C = (1, 3)$.
Les deux droites se croisent en A.

Equation de la droite à partir de 2 points

Trouver les équations des droites suivantes:
D_1 passante par $(-1, 2)$ et $(2, -2)$
D_2 passante par $(-1, -1)$ et $(2, 2)$
D_3 passante par $(-2, 0)$ et $(2, 0)$



$D_1 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + 4x/3 - 2/3 = 0\}$
$D_2 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 0\}$
D_1 et D_2 se croisent en (x_*, y_*) tel que $7x/3 = 2/3 : (2/7, 2/7)$.

Solution d'un système d'équations du 1er ordre : trouver l'intersection entre des droites quelconques

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \rightarrow y = (-a_{11}x + b_1)/a_{12}$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2 \rightarrow y = (-a_{21}x + b_2)/a_{22}$$
$$(-a_{11}x + b_1)/a_{12} = (-a_{21}x + b_2)/a_{22}$$
$$a_{22}(-a_{11}x + b_1) = a_{12}(-a_{21}x + b_2)$$

$$x = (b_1 a_{22} - a_{12} b_2)/(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

et

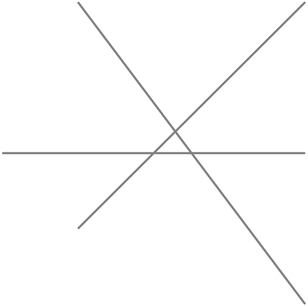
$$y = (-a_{11}x + b_1)/a_{12} = (-a_{21}x + b_2)/a22$$

Si il y a plus d'équations que d'inconnues

Si il y'a plus d'équations que d'inconnues, les équations supplémentaires peuvent être éliminées (par combinaisons de deux équations indépendantes, on verra ce que cela veut dire) sinon il n'y a pas de solution: toutes les droites ne passent pas par un même point.

Intersection entre droites

Trouver les intersections des droites suivantes:
D_1 passante par $(-1, 2)$ et $(2, -2)$
D_2 passante par $(-1, -1)$ et $(2, 2)$
D_3 passante par $(-2, 0)$ et $(2, 0)$



Solutions d'une équation de 2nd degré: trouver l'intersection entre la droite $y = 0$ et le polynôme $y = ax^2 + bx + c$: trouver les zéros ou racines de la fonction

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

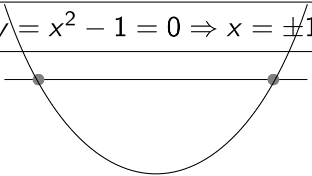
Suivant la valeur du discriminant Δ, il peut y avoir une racine réelle (si $\Delta = 0$), 2 racines réelles (si $\Delta > 0$) ou 2 racines complexes (si $\Delta < 0$).

Vérifier que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) = 0$ a comme solutions $x = 1$ et $x = -2$.
Nous verrons les nombres complexes plus tard.

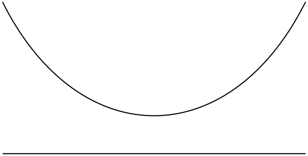
Lien avec les identités remarquables

$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$ a comme solution $x = -2$
$y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2 = 0$ a comme solution $y = 2$
$y^2 - t^2 = (y-t)(y+t) = 0$ a comme solution $y = \pm t$
Retrouver ces résultats en utilisant le discriminant.

Trouver l'intersection entre la droite $y = 0$ et $y = ax^2 + bx + c$



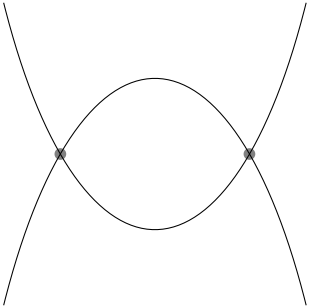
$\boxed{y = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1}$



$\boxed{y = x^2 + 1 = 0 \text{ pas de solution dans } \mathbb{R}\text{, mais } x = i \text{ avec } i^2 = -1}$

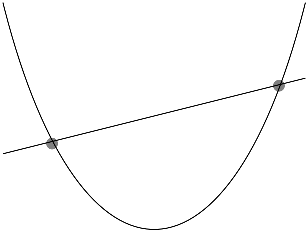
Trouver l'intersection entre deux polynômes d'ordre 2

Trouver l'intersection de:
$P_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ et $P_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$
revient à trouver les zéros de :
$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 = 0$



Trouver l'intersection entre une droite et un polynôme d'ordre 2

Trouver l'intersection de:
$P : y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ et $D : y = b_2x + c_2$
revient à trouver les zéros de : $a_1x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 = 0$



Fonctions

Fonctions d'une variable réelle $y = f(x)$

Une relation entre les abcisses x et les ordonnées y où il y'a au maximum un y pour chaque x.
Càd qu'on n'a jamais : $y_1 \neq y_2 = f(x)$
Faire un dessin.
Tous les y ne sont pas forcement 'une image'.
ex: $y = f(x) = x^2 \geq 0$ donc aucun $y < 0$ n'est une image.
Tous les x ne sont pas nécessairement 'un antécédent'.
ex: $y = f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$ donc aucun $x < 0$ n'est un antécédent.

Représentation graphique et exemples.

Transformations élémentaires de $f(x)$

Symétrie : $g(x) = f(-x)$
Shift à droite de a : $g(x) = f(x - a)$
Shift à gauche de a : $g(x) = f(x + a)$
Décalage vers le haut de a : $g(x) = f(x) + a$
Décalage vers le bas de a : $g(x) = f(x) - a$

Fonction paire: $f(x) = f(-x)$
Fonction impaire: $f(x) = -f(-x)$
toute fonction peut s'ecrire comme somme de deux fonctions paires et impaires:
$f(x) = p(x) + i(x) = 0.5(f(x) + f(-x)) + 0.5(f(x) - f(-x))$

Exemples

Domaine de définition

Il faut faire attention à ce que la fonction soit définie.
Par exemple, il faut éviter les divisions par zéro ou la racine carrée de valeurs négatives.
Exemples:
$f(x) = 1/x$ est définie sur
$f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur
$f(x) = 1/\sqrt{x}$ est définie sur
$f(x) = x/\sqrt{x-2}$ est définie sur

Un modèle de réaction chimique

La concentration d'un réactif dans une réaction chimique de second ordre est donnée au cours du temps par la loi:
$C(t) = C(0)/(1 + kC(0)t)$
où $k > 0$ est la constante de cinétique chimique.
Tracer l'allure du graphe de C en fonction du temps.
Si on observe pour une concentration initiale $C(0) = 1g/l$, une concentration de $C(3600s) = 0.1g/l$ au bout d'une heure, quelle est la constante de cinétique chimique ?

Continuité

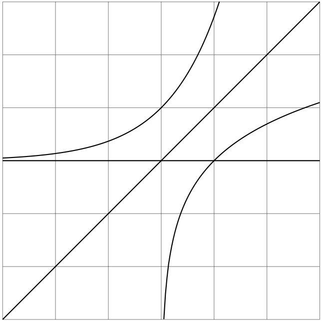
Une fonction est continue si son graphe n'est pas rompu ou déchiré.
Ex: $f(x \leq 0) = -1 \;\; et \;\; f(x > 0) = 1$ est discontinue en $x = 0$ et continue en dehors de ce point.

Fonctions usuelles :Exponentielle et son inverse, la Logarithme

Exponontielle: $y = e^x = \exp(x)$

Propriétés:
$e^{a+b} = e^a e^b$
$(e^a)^b = e^{ab}$

Logarithme: fonction telle que $\log(\exp(x)) = x$, symétrie par rapport à la droite $y = x$



Fonctions usuelles :Exponentielle et son inverse, la Logarithme

$x^a x^b = x^{a+b}$
$2^3 2^{-5} = 2^{-2} = 1/4$
$2^0 2^{-5} = 1/32$

$(x^a)^b = x^{ab}$
$(2^{1/2})^{-2} = 1/2$

Fonctions usuelles :Exponentielle et son inverse, la Logarithme

Donner le domaine de validité des expressions suivantes:
$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
$\log(a^b) = b \log(a)$
$x^c = \exp(c \log(x))$

Fonctions usuelles : Logarithme en base quelconque

$\log_b(x) = y$ si $b^y = x, x > 0, b > 0, b \neq 1$

La base $b = \sqrt[y]{x}$

Pour tout b, $\log_b b = 1$ et $\log_b 1 = 0$ car $b^1 = b$ et $b^0 = 1$.

Exemples.

$\log_2(64) = 6$ car $2^6 = 64$ et on a $2 = \sqrt[6]{64}$.

Application de $\log_b(\sqrt[p]{x}) = \frac{\log_b(x)}{p}$:
$\log_{10}(\sqrt{1000}) = \frac{1}{2}\log_{10}(1000) = \frac{3}{2} = 1.5$

Logarithme en base 10 : mesures multi-échelle

Lorsque des mesures sont sur plusieurs ordres de grandeurs, on représente les courbes en échelle logarithmique en base 10 car:
$\log_{10}(10^n x) = \log_{10}(10^n) + \log_{10}(x) = n + \log_{10}(x)$
Par exemple, des mesures se répartissant entre 10^{-6} et 10^6 (12 ordres de grandeurs) sont difficiles à visualiser.
En échelle log10, les mesures seront réparties entre -6 et 6.
Appliquer à l'illustration de l'évolution de $^{14}C/C_{total}$.

Le carbon 14

Une matière radioactive se désintègre au cours du temps suivant:
$C(t) = C(0)\exp(-\lambda t)$
où $C(t)$ est la concentration au temps t exprimé en années et λ est la constante radioactive; pour le ${}^{14}C$, $\lambda \approx 1,210 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{an}^{-1}$ et la période radioactive (ou demi-vie) 5730 ans.
En combien d'années la concentration initiale est réduite de moitié? Puis encore de moitié?
Les échantillons vieux de plus de 50 000 ans ne peuvent être datés au carbone 14, car la concentration de radiocarbone (c'est-à-dire le rapport ${}^{14}C/C_{total}$ de l'échantillon) est trop faible pour être mesurée. Les résultats ne sont relativement précis que pour les âges inférieurs à 35 000 ans (voir wikipedia). Quel est le seuil de détection des techniques actuelles si ${}^{14}C/C_{total} \sim 10^{-12}$ dans les organismes vivants?

pH et dB

Chimie: $pH = -\log_{10}(a_{H^+}) = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H^+}}\right)$ (sans dimension).
a_{H^+} : activité des ions hydrogène H^+, sans dimension. Et inversement, $a_{H^+} = 10^{-pH}$.

Acoustique: $L_P = 10\log_{10}\left(\dfrac{P}{P_0}\right)$ dB. P_0 : pression de référence, P pression mesurée (dans la même unité).

Et inversement, $P = 10^{0.1L_P}P_0$.

Q: $+3$dB implique quelle augmentation de puissance sonore ?
$10^{0.3} = 2$

Fonctions usuelles: polynômes

Polynômes: $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

On a vu les cas $n = 1$ et $n = 2$.

Addition: $P_n(x) \pm P_m(x) = P_{\max(n,m)}(x)$

Produit: $P_n(x) * P_m(x) = P_{n+m}(x)$
$P_3(x) * P_1(x) : (x^2 + x^3)(1 + x) = x^2 + 2x^3 + x^4 : P_4(x)$

Factorisation: décomposition en éléments simples, avec n le plus petit possible: $P_6(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 = x^4(x^2 - 2x + 1)$

x^* est un zéro de $P_n(x)$ si $P_n(x^*) = 0$. Si $n \geq 3$, pour trouver les zéros il faut d'abord factoriser; sinon utiliser des méthodes numériques.
Les zéros de $P_6(x)$ sont 0 et 1.

Comparaison de comportements de fonctions

Pour trouver le domaine de définition, le comportement asymptotique ou la limite des fonctions, il est utile de pouvoir comparer les fonctions entre elles.

Par exemple, lorsque $x \to +\infty$, on a les inégalités suivantes: $\log(x) < P_n(x) < e^x$, pour tout entier n

On peut en déduire que

$\log(x)/P_n(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$

$e^x/P_n(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$

Quel est le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{e^x - P_n(x)}$?

Exemples

Quand $t \to +\infty$, on a les comportements suivants:

$$\frac{\exp(2t+1)}{\ln(t)} \to +\infty$$

$$\frac{\exp(-2t+1)}{\ln(t+2)} \to 0$$

$$\frac{\exp(t^3)}{t^{3000}} \to +\infty$$

$$\frac{\exp(t^2)}{t^{3000} + t^{3000000}} \to +\infty$$

$$\frac{\exp(-t)}{\ln(t)} \to 0$$

Exemples

Quand $t \to +\infty$, $y = 1/t \to 0^+$, et on a les comportements suivants:

$$\frac{\exp(2y)}{\ln(y)} \to 0$$

$$\frac{\exp(-2y)}{\ln(y+1)} \to +\infty$$

$$\frac{\exp(y^3+1)}{y^{3000}+1} \to e = 2.71828$$

$$\frac{\exp(y^2)}{\ln(-y^2)} \text{ : n'est pas définie}$$

$$\frac{\exp(-y)+y+1}{1+\ln(y+1)} \to 2$$

Exemples

Quand $t \to -\infty$, $y = 1/t \to 0^-$, et on a les comportements suivants:

$$\frac{\exp(2y)}{\ln(y)} \text{ : n'est pas définie}$$

$$\frac{\exp(-2y)}{\ln(1+y^2)} \to +\infty$$

$$\frac{\exp(y^3+1)}{y^{3000}+1} \to e = 2.71828$$

$$\frac{\exp(y^2)}{\ln(-y)} \to 0^-$$

$$\frac{\exp(-y)+y+1}{1+\ln(y+1)} \to 2$$

Nombres complexes et fonctions trigonométriques

On rappelle les règles de manipulation des complexes avec $i^2 = -1$:

Produit de nombres complexes conjugués:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$z^2 = (a + ib)(a + ib) = a^2 - b^2 + i2ab$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + ib}{a - ib} = \frac{a^2 - b^2 + i2ab}{a^2 + b^2}$$

Nombres complexes et fonctions trigonométriques

Représentation polaire de z avec $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ la norme de $z = a + ib$.
On définit les fonctions trigonométriques:
$\cos(\theta) = a/\rho, \; \sin(\theta) = b/\rho.$
$z = a + ib = \rho \exp(i\theta) = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$
où $\theta = Atan(b/a)$ est la phase.

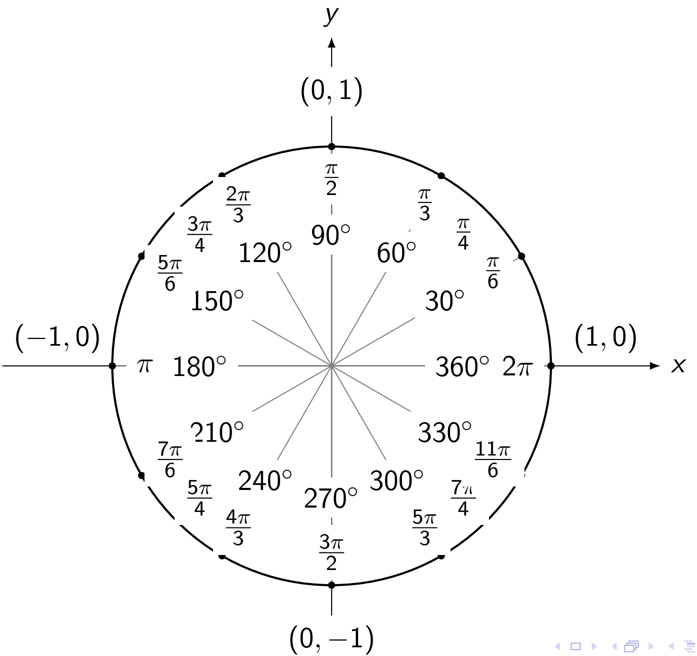
Il est intéressant de remarquer les relations suivantes:

$$\log(z) = \log(\rho \exp(i\theta)) = \log(\rho) + \log(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \log(\rho) + i\theta$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Cercle trigonométrique



Fractions avec des nombres complexes

Pour les complexes, c'est un peu plus délicat qu'avec les réels.

Exemples:

- $1/i - 1/2i = -i/2$
- $1/(a+ib)+1/(c+id) = (a-ib)/(a^2+b^2)+(c-id)/(c^2+d^2)$
- $= ((a-ib)(c^2+d^2)+(c-id)(a^2+b^2))/((a^2+b^2)(c^2+d^2))$
- $= ((a-ib)(c^2+d^2)+(c-id)(a^2+b^2))/((a^2+b^2)(c^2+d^2))$
- $= (a(c^2+d^2)+c(a^2+b^2)-i(b(c^2+d^2)+d(a^2+b^2)))/((a^2+b^2)(c^2+d^2))$

Fonctions hyperboliques

On a vu les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus,...) qui sont aussi appelées circulaires car en lien avec le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$.

Les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique font intervenir l'équation de hyperbole $x^2 - y^2 = 1$, d'où la dénomination d'hyperbolique.

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

qui vérifient: $\cosh^2(x) - \sinh(x)^2 = 1$, d'où leurs dénominations.

On peut vérifier que:

$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$
et
$coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

Dérivation

Dérivation

Calculer la dérivée d'une fonction permet de trouver la pente en un point du graphe de $y = f(x)$.

La dérivée mesure la variation locale de la fonction:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \quad pour \quad dx \quad petit$$

Par exemple,

$$(x^2)' = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + dx^2 + 2xdx - x^2}{dx} = 2x + dx \sim 2x$$

$f'(x) = 2x$ est la dérivée de $f(x) = x^2$.

Dérivation et variation

Si la dérivée existe, et
-si $f'(a) > 0$, alors $f(x)$ est croissante autour de $x = a$,
-si $f'(a) < 0$, alors $f(x)$ est décroissante autour de $x = a$,
-si $f'(a) = 0$, alors $f(x)$ est 'constante' autour de $x = a$.

Exemples:

$f(x) = x$ est croissante autour de $x = 1$
$f(x) = -x$ est croissante autour de $x = -1$
$f(x) = (x-1)^2$ est presque nulle autour de $x = 1$

Dérivation et extréma

Extréma : minimum, maximum ou point d'inflexion.

Si la dérivée existe, et si $f'(a) = 0$, alors $f(x)$ a un extremum en $x = a$.

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$: c'est un minimum.
Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$: c'est un maximum.
Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$: c'est un point d'inflexion.

Exemples:
$y = (x+1)^2$ a un minimum en $x = -1$.
$y = -(x-1)^2$ a un maximum en $x = 1$.
$y = x^3$ a un point d'inflexion en $x = 0$.

Dérivation: rappels formules de base

$(x^a)' = ax^{a-1}$ pour $a \in \mathbb{R}$,
$\sin(x)' = \cos(x)$
$\cos(x)' = -\sin(x)$
$(\sum_{i=0}^{n} a_i \; x^i)' = \sum_{i=1}^{n} i \; a_i \; x^{i-1}$

La dérivation permet d'introduire la fonction exponentielle de façon élégante. Il s'agit de la seule fonction réelle telle que: $f' = f$ et $f(0) = 1$.

si $x > 0$, $(\ln(x))' = 1/x$

Dérivation: deux régles fondamentales

Dérivation de produit de fonctions:
$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Exemple: $(x^2 \sin(x))' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$

Dérivation d'une fonction composée: $(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x)$

Exemple: $\sin(x^2)' = \cos(x^2)2x$

Dérivation: domaine de définition

On ne calcule la dérivée en un point que si la fonction et sa dérivée sont définies en ce point.

Exemples:

$y = |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$, sa dérivée est $y' = -1$ sur $x < 0$ et $y' = 1$ sur $x > 0$.

Dérivation et extréma

$f(x) = -0.2x^3 + 4x^2 + x + 1$ a deux extréma sur $[-4, 18]$.

En effet, $f'(x) = -0.6x^2 + 8x + 1$ s'annule en deux points sur $[-4, 18]$.

Et $f''(x) = -1.2x + 8$ est positive au premier (un minimum) et négative au second (un maximum).

Voir figure:

```
plot [-4:18][]
-0.2*x**3+4*x**2+x+1,-0.6*x**2+8*x+1,-1.2*x+8,0
```

Dérivation et extréma

$f(x) = x^4 + 4\cos(x)$ a deux extréma sur $[-\pi/5, \pi/3]$.

En effet, $f'(x) = 4x^3 - 4\sin(x)$ s'annule en deux points sur $[-\pi/5, \pi/3]$.

Et $f''(x) = 12x^2 - 4\cos(x)$ est négative au premier (un maximum) et positive au second (un minimum).

Voir figure:

```
plot [-pi/5:pi/3][]
x**4+4*cos(x),4*x**3-4*sin(x),12*x**2-4*cos(x),0
plot [-pi/5:pi/3][] x**3,sin(x)
```

La localisation des extréma se fait numériquement (par méthode de Newton par ex).

Modélisation des échanges au sein d'une cellule

Les échanges entre une cellule et son environnement s'effectuent via sa membrane et sont proportionnels à la surface de celle-ci.
On considère une cellule cylindrique de base un disque de rayon r et de hauteur h.
- Quel est le volume de la cellule ? Quelle est sa surface ?
- On suppose que le volume de cette cellule est égal à $1mm^3$.
Quelle est la valeur du rayon r qui permet à la cellule d'avoir la plus petite surface, et en conséquence minimiser les échanges avec l'extérieur ?
Quelle est la hauteur correspondante ?

Même problème pour une cellule parallélépipèdique de côtés a, b, c.

Modélisation des échanges au sein d'une cellule

Faire un schéma.

$V = \pi r^2 h$
$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$V = \pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = 1/(\pi r^2)$
donc
$S(r,h) = 2\pi(r^2 + rh) = 2\pi(r^2 + \frac{1}{\pi r})$

On cherche là où la dérivée s'annule:
$S' = 2\pi(2r - \frac{1}{\pi r^2}) = 0 \Rightarrow r = (2\pi)^{-1/3}$

Minimiser le temps de transport

Il s'agit de déterminer la trajectoire optimale minimisant le temps de transport d'un point $A = (x_A, y_A)$ à un point $B = (x_B, y_B)$ sous les contraintes suivantes:
- on ne peut se déplacer qu'en ligne droite,
- on se déplace à la vitesse v_1 à ordonnée ou abcisse fixe,
- on se déplace à la vitesse $v_2 = \lambda v_1$ sinon, avec $0 < \lambda < 1$,
- on ne peut changer que n fois de direction.

Recherche personnelle et en séance:
Nous allons modéliser ce problème et introduire de nouvelles hypothèses, si nécessaires, pour obtenir la trajectoire optimale suivant les scénarios de λ et n.
Exemple:
$x_A = y_A = 0$, $x_B = y_B = 1km$, $v_1 = 1m/s$, $\lambda = 0.5$, $n = 2$.

Maximiser la résistance d'une poutre

Lorsqu'on veut équarrir (c'est-à-dire tailler) un tronc d'arbre de manière à obtenir la poutre la plus résistante possible, on se garde bien de lui donner une section carrée, mais une section qui soit plus haute que large. En mécanique, on montre que la résistance de la poutre est proportionnelle au produit de l'aire de la section par sa hauteur.

Illustrer ce problème. Trouver les dimensions de la section de la poutre la plus résistante que l'on puisse fabriquer avec un tronc de diamètre D.

On supposera le tronc cylindrique. La section est donc un rectangle de diagonales de longueur D.

Tracer la fonction à maximiser et le point optimal.

Recherche personnelle et en séance: Nous allons estimer et minimiser le nombre de poutres nécessaires au support de la future charpente de la cathédrale Notre-Dame de Paris (voir wikipedia).

Maximiser la résistance d'une poutre

Faire un schéma.

$R(l, h) = lh^2 = l(D^2 - h^2)$ car $l^2 + h^2 = D^2$

On cherche là où la dérivée s'annule:
$R'(l, h) = (D^2 - h^2) - 2l^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{D}{\sqrt{3}}(m)$
C'est un maximum car $R''(l) < 0$ (la fonction est convexe).

La forme d'un jet d'eau tombant sous contrainte de débit

On observe que rayon r de la section du jet n'est pas constant mais diminue lorsque la distance h à la base du jet augmente. Pour comprendre la forme du jet, il s'agit d'identifier la fonction $r(h \geq 0)$, dont la courbe délimite le jet par révolution autour de l'axe du jet.
1. Notons $v(h)$ la vitesse de l'eau et $S(h)$ la surface de la section du jet; ce sont des fonctions de la variable h. Le débit $D = v(h)S(h)$ du jet est imposé par le robinet et est constant.
L'application de la dynamique des corps donne:
$1/2v^2(h) - 1/2v^2(0) = gh$.
Faire un schéma illustrant le problème.
Montrer que : $r(h) = r_0(1 + Kh)^{-1/4}$, ave K est une constante dépendant de g, D et r_0. Tracer l'allure de r.

La forme d'un jet d'eau tombant sous contrainte de débit

Faire un schéma

$v^2 = v_0^2 + 2gh$
$D = vS = v\pi r^2$
Les relations $v_0 = D/(\pi r_0^2)$ et $v = D/(\pi r^2)$ sont toujours vraies.
$r^2 = \frac{D}{\pi(2gh+v_0^2)^{1/2}} = \frac{v_0 \pi r_0^2}{\pi v_0 (2gh/v_0+1)^{1/2}}$
On peut prendre la racine car tout est positif.
$r = \frac{r_0}{(1+2gh/v_0)^{1/4}} = r_0(1+Kh)^{-1/4}$ avec $K = 2g/v_0$.
Tracer l'allure de r.

D'autres applications de la dérivée

Nous avons vu comment utiliser la dérivation en optimisation.
Calculer la dérivée d'une fonction permet aussi, par exemple, de trouver:
-la pente en un point du graphe de $y = f(x)$.
-la vitesse de déplacement le long d'une trajectoire définie par les points $(x, y) = (x, f(x))$.
-les vecteurs tangent et normale à la trajectoire.

Calcul vectoriel

Calcul vectoriel

Un vecteur est une grandeur qui a une longueur, une direction et un sens. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.

En deux dimensions:
$\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$
La longueur est donnée par la norme:
$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
La direction est donnée par le vecteur unitaire:
$\vec{t} = (u_1, u_2)/\|\vec{u}\|$
$\vec{u}$ et $\vec{t}$ vont dans le même sens.
$-\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont en sens opposé.
Le produit de la longueur par l'orientation (± 1) est la mesure algébrique. Ceci suppose un choix a priori d'orientation. Si on suppose que l'axe passant par A et B est orienté de A vers B, alors, $\overline{AB} = \|\vec{AB}\|$ et $\overline{BA} = -\|\vec{AB}\|$.

Somme de vecteurs, produit d'un vecteur et un scalaire, relation de Chasles

Illustrer ces relations:

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$a\vec{u} = (au_1, au_2)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Si $\vec{u} = \vec{OA}$ avec O et A deux points de $\mathbb{R}^2$, on a toujours:
$\vec{u} = \vec{OB} + \vec{BA}$, pour tout point B. On peut même avoir d'autres points intermédiaires: $\vec{u} = \vec{OB_1} + \vec{B_1B_2} + ... + \vec{B_{n-1}B_n} + \vec{B_nA}$

Produit scalaire

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle compris entre deux vecteurs.
L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{t}$ est nul.
L'angle entre $-\vec{u}$ et $\vec{t}$ est π.

Le produit scalaire est défini par:
$\vec{u}.\vec{v} = 1/2\left((\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Conséquence: $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

L'angle θ entre deux vecteur est défini grâce à:
$-1 \leq \cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \leq 1$

Démontrer avec le théorème de Pythagore que si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Produit scalaire et projection

La projection d'un vecteur $\vec{u}$ sur un autre vecteur $\vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$ défini par:

$$\vec{w} = \left(\vec{u}.\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

où $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ est le vecteur unitaire le long de $\vec{v}$.

Le calcul du produit scalaire se réduit à: $\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ avec n le nombre de composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension 3.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non alignés dans $\mathbb{R}^3$ et formant un angle θ: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta)$, le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dit directe suivant la règle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur).
La norme de $\vec{w}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\theta)|$
Par extension, l'aire S d'un triangle ABC est donnée par:
$S = 1/2\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

Au contraire du produit scalaire, il n'y a pas de formule simple pour estimer le produit vectoriel, surtout quand la dimension de l'espace est grand. La norme de $\vec{w}$ est donnée par:
$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$

Produit mixte dans $\mathbb{R}^3$

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en dimension 3, pris dans cet ordre, est le nombre réel noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$.
Ce produit est le volume signé du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs.
Un produit mixte est invariant par permutation circulaire de ses vecteurs.
Un produit mixte change de signe quand on permute deux vecteurs.
Un produit mixte nul indique la coplanarité des vecteurs.

D'autres exemples de modélisation

Modélisation et manipulation de fractions

Ecire les relations mathématiques pour les questions suivantes.

Combien de centre de vaccination faut-il installer pour vacciner 68 000 000 de personnes en 30 jours, chaque centre ne pouvant recevoir que 3000 personnes par jour ?
Combien de centres en moyenne cela représente pour chacun des 101 départements français ?
De combien d'opérateurs avons-nous besoin si chacun peut prendre en charge au plus 32 personnes par jour ?
Combien de rendez-vous à proposer par centre si en moyenne 15% des créneaux ne sont pas honorés par les usagers ?
Arrondir toujours les réponses à l'entier supérieur par sécurité.

Algorithme et logique

-3 personnes, 3 chapeaux noirs et 2 blancs
-Chaque personne ne voit que le chapeau des autres et pas le sien
-La première personne dit ne pas savoir de quelle couleur est son chapeau,
-La deuxième personne dit ne pas savoir de quelle couleur est son chapeau,
-La troisième personne donne la bonne couleur.

Décrire l'algorithme (la démarche) de déduction utilisé par la personne 3.

Trouver l'équation : bilan de pollution

Un réservoir de volume $V = 10^{10} L$ est rempli d'eau. À partir de l'instant $t = 0$, on déverse involontairement un poluant dans le réservoir, avec un débit constant $d = 1cm^3/s$. On considère que le mélange se fait parfaitement et instantanément. On note $C(t)$ la quantité du poluant dans le réservoir à l'instant t.
On peut trouver la loi suivie par $C(t)$ en faisant un bilan en temps:
$C(t + \Delta t) - C(t) = d\Delta t$
Si Δt est petit, $(C(t + \Delta t) - C(t))/\Delta t$ est une approximation de $C'(t))$ et on peut inférer une loi pour la dérivée de C en fonction du temps $C'(t) = d$ dont la solution est: $C(t) = d\ t + D$ avec $D = 0$ car $C(0) = 0$ (pas de poluant initialement). La quantité de poluant présente croît donc linéairement en fonction du temps.
Quel est le taux de pollution au bout d'un mois de 30 jours ?

Trouver l'équation : dynamique de population

La croissance de population de couples de lapins sur une île est observée à interval régulier Δt (2 mois par exemple).

On constate que les couples deviennent productifs après Δt.

Entre t^n et t^{n+1}, on observe une augmentation du nombre de couples égale au nombre de couples observé en $t^{n-1} = t^n - \Delta t$.

Inférer et justifier la loi d'évolution du nombre de couples
$C^n = C(t^n)$:
$C^{n+1} = C^n + C^{n-1}$ pour $n > 2,\ C^1 = 1,\ C^2 = 1$.

Trouver les 10 premiers termes de la suite C^n:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...

voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci`

Droite des moindres carrés

On dispose de N mesures $y_1, ..., y_N$ aux N abscisses $x_1, ..., x_N$. Le polynôme P de degré un (la droite): $P(x) = a_0 + a_1 x$ qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés des valeurs y_i données aux points x_i est celui qui minimise la somme des carrés des écarts entre les y_i et les $P(x_i)$:

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 \tag{1}$$

Montrer que les coefficients de la droite des moindres carrés a_0 et a_1 sont solutions du système suivant (dit des équations normales):

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{pmatrix} \tag{2}$$

Droite des moindres carrés