

Université de Montpellier
HAT203X

Autorisé: A4 aide-mémoire; calculatrice, outil connecté: Non
Barème sur 20 - 2 points par question

1. On considère le phénomène ondulatoire décrit par:

$$x(t) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 5 \cos(-\pi t).$$

En utilisant le cercle trigonométrique, quelles sont les valeurs prises par la suite $x_{n \in \mathbb{N}} = x(t_n)$ en $t_0 = 0 \text{ s}$, $t_1 = 1 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$ et $t_3 = 3 \text{ s}$.

2. Expliciter et donner la valeur en $n = 10$ de :

$$x_n = x_{n-1} - 0.5 \log_2(2^2), \quad x_0 = 0$$

et

$$y_n = 2 \log_2(\sqrt{2}) y_{n-1}, \quad y_0 = 1.$$

3. Quelle est la limite de la suite $y_0 = 0$, $y_n = \sqrt{y_{n-1} + 2}$ pour $n > 0$. Illustrer graphiquement la convergence vers la limite à l'intersection de deux fonctions.

4. Calculer en utilisant la linéarité de l'intégration, et en appliquant les techniques de changement de variables et d'intégration par parties:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x \cos(x) + x \sin(x^2)) \, dx.$$

5. Résoudre $-t^2 y'(t) - t^3 y(t) - t^3 = 0$, $y(0) = 1$, $t > 0$.

6. Est-ce que les plans de \mathbb{R}^3 , $P_1 : -x - y - z = 1$ et $P_2 : x + y - 2z = 1$ sont parallèles ? Sinon, décrire la droite de leur intersection en paramétrique.

7. Trouver l'intersection entre le plan passant par les points $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 1)$ et $C = (-1, -1, 1)$ et la surface $z = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1$. Que représente cette intersection ?

8. Etudier les extrema de $f(x, y) = -2(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2$, préciser leurs natures et la valeur de la fonction en ces points.

9. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de

$$f(x, y) = -2 \cos(x^2 - 2y^2).$$

10. Utiliser l'intégration en coordonnées sphériques pour calculer la masse en tonnes d'une planète de rayon $R = 1000 \text{ km}$ (en considérant l'approximation $\pi \sim 3$) et une densité volumique de $\rho = (1 + r) \text{ g cm}^{-3}$.