

Résolution d'équations aux dérivées partielles

A la fin du chapitre, l'étudiant doit être capable de:

1. Combiner une formule aux différences finies et un schéma d'intégration en temps pour résoudre une équation aux dérivées partielles
2. Définir les nombres de CFL et de Fourier
3. Effectuer l'analyse de stabilité de Von Newman d'une approximation spatio-temporelle

Motivation

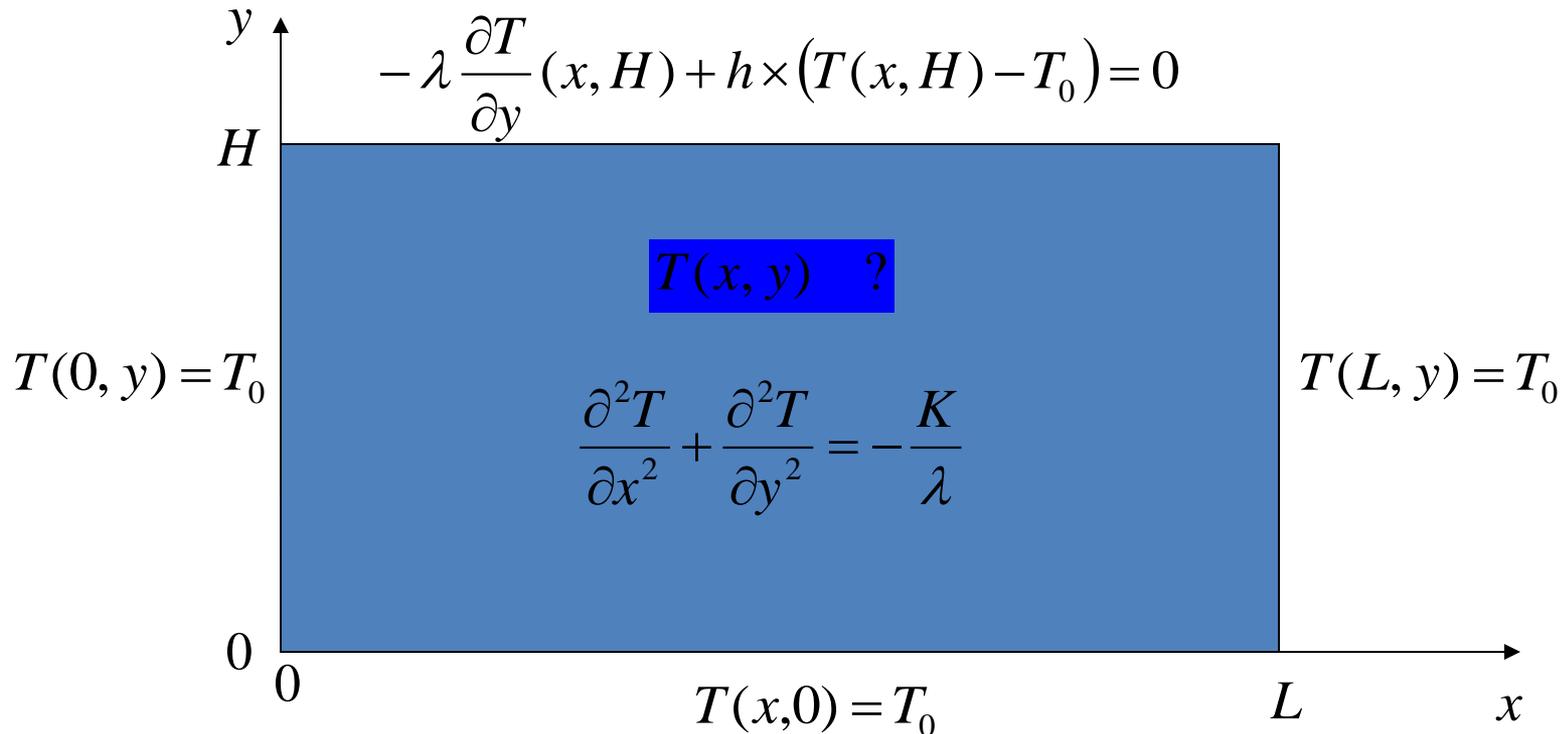
- Les équations des sciences de l'ingénieur sont connues depuis longtemps ...
 - Eq. de la chaleur (Fourier, 1807)
 - Mécanique des fluides (Navier-Stokes, 1822)
 - Electromagnétisme (Maxwell, 1873)
- Les inconnues sont des fonctions scalaires ou vectorielles de plusieurs variables: x, y, z, t
- Ces fonctions sont solutions d'équations aux dérivées partielles (EDP) en général non-linéaires

Motivation

- Les cas où une solution analytique peut être trouvée sont très rares et simples:
 - géométrie simple
 - équation linéaire
- Les solutions obtenues sont souvent très lourdes même pour ces cas simplistes ...

Exemple de résolution analytique

- Equation de la chaleur dans une cavité rectangulaire



Exemple de résolution analytique

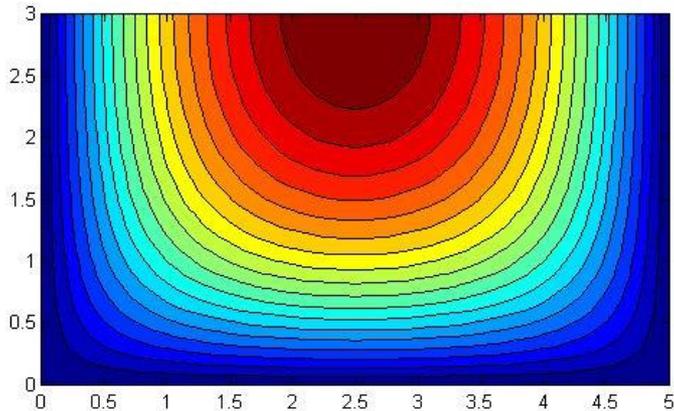
- Une méthode de séparation des variables permet d'obtenir la solution analytique de ce petit problème d'école ...

$$T(x, y) = T_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[A_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L} y\right) + \frac{\alpha_k}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} \left(\cosh\left(\frac{k\pi}{L} y\right) - 1 \right) \right] \times \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

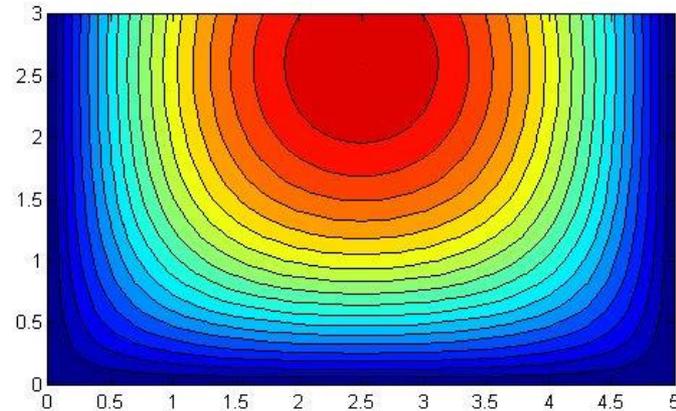
$$A_k = \frac{\alpha_k L}{k\pi} \frac{\lambda \sinh\left(\frac{k\pi}{L} H\right) - \frac{hL}{k\pi} \left(\cosh\left(\frac{k\pi}{L} H\right) - 1 \right)}{-\lambda \frac{k\pi}{L} \cosh\left(\frac{k\pi}{L} H\right) + h \sinh\left(\frac{k\pi}{L} H\right)}$$
$$\alpha_k = \frac{2K_0}{k\pi\lambda} \left[(-1)^k - 1 \right]$$

Exemple de résolution analytique

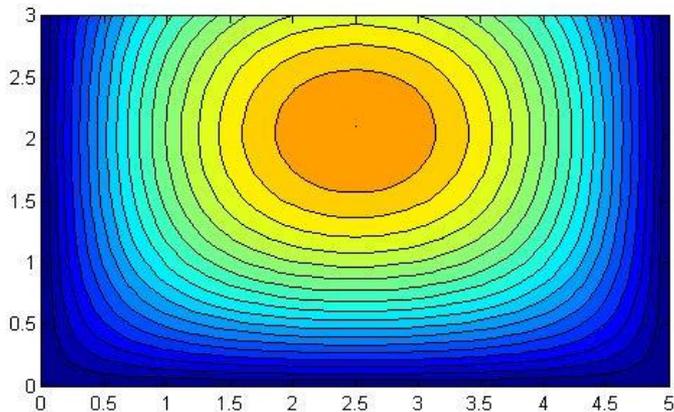
Effet des fuites par convection



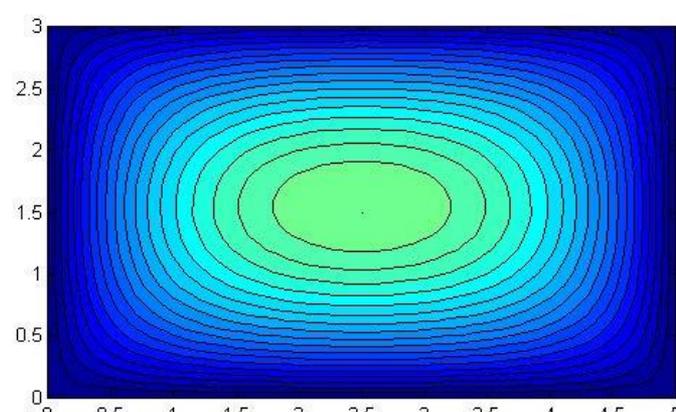
$h = 0$



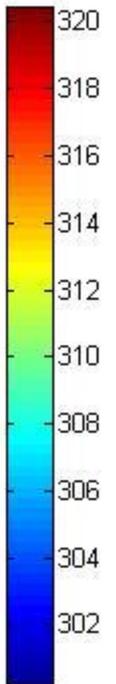
$h = 0.01$



$h = 0.05$



$h = 1$



Discrétisation

- Dans de nombreux cas, les EDP font intervenir des dérivées en temps et en espace.
- Les dérivées en temps peuvent être traitées comme vu dans le chapitre sur les équations différentielles (Euler explicite, Euler implicite, Runge-Kutta d'ordre 2 ou 4, Adams-Bashforth, Crank-Nicolson ...)
- Les dérivées en espace peuvent être traitées par approximation aux différences finies (ordre 1, 2, ... ; centrée, décentrée amont/aval)
- Les combinaisons sont donc nombreuses

Analyse de stabilité

- On cherche à répondre à la question simple suivante:
Sous quelles conditions une méthode numérique (discrétisation en temps et en espace) est-elle stable ?
- L'analyse de Von Neumann est bien adaptée et relativement simple à mettre en œuvre, au moins pour les équations linéaires et 1D et en l'absence de conditions limites ...
- Une des multiples contributions de John Von Neumann



Facteur d'amplification

- L'analyse de stabilité de Von Neumann consiste à envoyer dans le schéma une fonction test de la forme

$$f(x, t) = \hat{f}(t) \times e^{jkx}$$

$$f(x_i, t_n) = f_i^n = \hat{f}^n \times e^{jkx_i}$$

et à regarder comment l'amplitude \hat{f}^n de cette fonction évolue au fil des itérations

- On introduit pour cela le **facteur d'amplification** \hat{A} défini tel que:

$$\hat{f}^{n+1} = \hat{A} \times \hat{f}^n$$

Stabilité Von Neumann

- La stabilité du schéma peut être reliée au module du facteur d'amplification (\hat{A} est un nombre complexe !!)
- On vérifiera bientôt que, comme pour l'analyse spectrale des formules aux différences finies, le nombre qui compte est $k\Delta x$
- Deux cas peuvent se produire:
 1. Si $|\hat{A}| \leq 1$ pour toute valeur de $k\Delta x$ alors la méthode est dite stable
 2. Si $|\hat{A}| > 1$ pour au moins une valeur de $k\Delta x$ alors la méthode est dite instable

Exemple 1

- Convection pure:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U_0 \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- On choisit le schéma centré d'ordre 2 pour la dérivée en espace

- Pour $x_i = i\Delta x$ fixé, on retrouve un problème du type $\frac{dy}{dt} = F(t, y)$ avec $y(t) = f_i(t)$ et $F(t, y) = -U_0 \frac{f_{i+1}(t) - f_{i-1}(t)}{2\Delta x}$

- En appliquant Euler explicite à cette équation différentielle on obtient le schéma d'intégration suivant

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \Delta t U_0 \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

Exemple 1 - suite

- On envoie dans le schéma une fonction test de la forme

$$f_i^n = \hat{f}^n \times e^{jkx_i}$$

- Après calcul, le facteur d'amplification pour ce schéma (Euler explicite + centré ordre 2) vaut:

$$\hat{A} = 1 - j \frac{\Delta t U_0}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

- On en déduit que ce schéma est instable

$$\boxed{\exists k : |\hat{A}| > 1}$$

- On le qualifie même d'inconditionnellement instable car changer les paramètres physiques/numériques ne change rien à la stabilité

Exemple 2

- On choisit le schéma décentré amont d'ordre 1 pour la dérivée en espace
- On choisit la méthode d'Euler explicite pour l'intégration en temps
- Le schéma résultant de ces choix est le suivant:

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \Delta t U_0 \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$\hat{A} = 1 - \frac{\Delta t U_0}{\Delta x} [1 - \cos(k\Delta x) + j \sin(k\Delta x)]$$

- Ce schéma est conditionnellement stable (il n'est stable que si le nombre CFL est inférieur à l'unité). En effet, on montre aisément que:

$$\boxed{|\hat{A}| \leq 1, \quad \forall k \quad \Leftrightarrow \quad CFL = \frac{\Delta t U_0}{\Delta x} \leq 1}$$

Exemple 3

- Centré ordre 2 en espace; Runge-Kutta d'ordre p en temps
- Pour la fonction test $f(x, t) = \hat{f}(t)e^{jkx}$, on a:

$$\frac{df_i}{dt} = -U_0 \left. \frac{\partial f(t)}{\partial x} \right|_i = -jU_0 \frac{\sin k\Delta x}{\Delta x} \hat{f}(t)e^{jkx} = -jkU_0 E(k\Delta x) \hat{f}(t)e^{jkx}$$

- Autrement dit, pour l'équation de convection pure, dériver par rapport au temps la fonction test revient à la multiplier par $-jkU_0 E$, où E est la fonction erreur spectrale de la différence finie choisie (ici centré ordre 2)
- Le développement de Taylor en temps sur lequel est basée toute méthode de Runge-Kutta devient alors, pour la fonction test:

$$\hat{f}(t + \Delta t)e^{jkx} = \sum_{m=0}^p \frac{(-jkU_0 E)^m \Delta t^m}{m!} \hat{f}(t)e^{jkx}$$

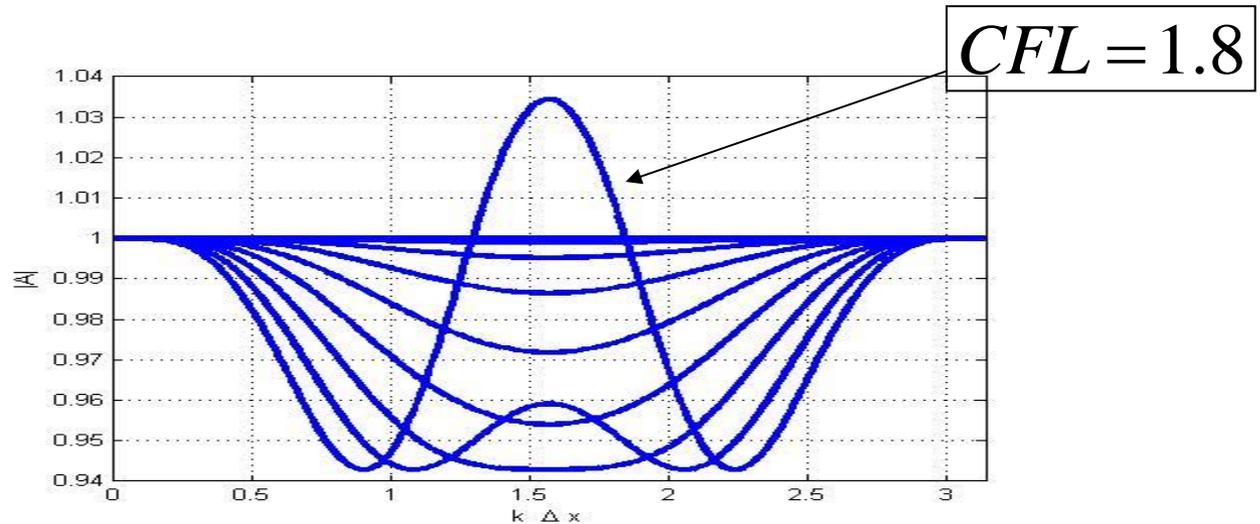
- On en déduit alors le facteur d'amplification:

$$\hat{A} = \sum_{m=0}^p \frac{(-jkU_0 E)^m \Delta t^m}{m!}$$

Exemple 3

- D'après le résultat précédent, on peut montrer que la combinaison Centré ordre 2 / Runge Kutta ordre 2 est inconditionnellement instable
- Par contre, Centré ordre 2 / Runge Kutta ordre 3 est conditionnellement stable:

$$\hat{A} = \left[\sum_{k=0}^3 \frac{\Delta t^k \hat{Y}^k}{k!} \right]$$
$$\hat{Y} = -jU_0 \frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}$$



$$|\hat{A}| \leq 1, \quad \forall k \quad \Leftrightarrow \quad CFL \leq 1.73$$

Exemple 4

- Equation de diffusion pure:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- Schéma centré ordre 2 en espace
- Euler explicite en temps

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t D \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Exemple 4 - suite

- Pour une perturbation du type $f_i^n = \hat{f}^n \times e^{jkx_i}$

$$\hat{A} = 1 + \frac{2\Delta t D}{\Delta x^2} (\cos(k\Delta x) - 1)$$

- Ce schéma est conditionnellement stable. Sa stabilité dépend du nombre de Fourier F_o

$$\left| \hat{A} \right| \leq 1, \quad \forall k \quad \Leftrightarrow \quad F_o = \frac{\Delta t D}{\Delta x^2} \leq 0.5$$

- Remarque: on peut là encore faire apparaître la fonction erreur spectrale, pour la dérivée seconde cette fois (logique ...):

$$\hat{A} = 1 - k^2 \Delta t D E(k\Delta x) \quad , \quad \text{avec } E(k\Delta x) = 2 \frac{1 - \cos k\Delta x}{k^2 \Delta x^2}$$

Réalisations sous Matlab

1. A partir des programmes précédents, créer un programme permettant de résoudre l'équation de la chaleur à l'aide d'un schéma centré d'ordre 2 et d'une intégration de type Euler explicite. Vérifier numériquement la limite de stabilité et comparer avec la valeur théorique.
2. Mêmes questions pour l'équation de convection pure. Etendre à d'autres combinaisons de schéma en espace/intégration temporelle
3. Résoudre l'équation de convection/diffusion dans le cas d'une condition initiale en forme de Gaussienne et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds/Peclet.