Mécanique des Fluides

Franck Nicoud
Polytech Montpellier // IMAG - UMR CNRS 5149

www.math.univ-montp2.fr/~nicoud/

franck.nicoud@umontpellier.fr

Définition

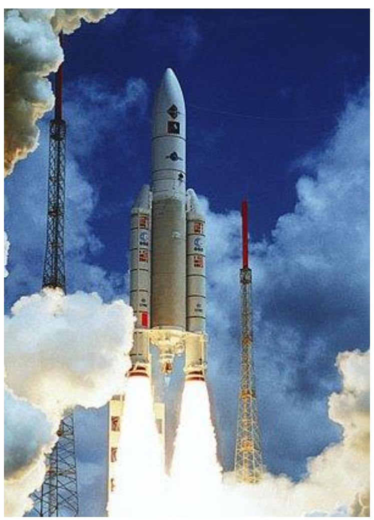
1. **Fluide**: c'est un milieu infiniment déformable sous l'effet de forces constantes en temps. Il peut être compressible (exemple des gaz), ou incompressible (exemple des liquides).

2. **Mécanique**: c'est la branche de la science qui étudie le mouvement des systèmes matériels et leurs déformations, en relation avec les forces qui provoquent ou modifient ce mouvement ou ces déformations.

3. **Mécanique des fluides**: englobe la statique des fluides ou hydrostatique (science des fluides au repos) et la dynamique des fluides (sciences des fluides en mouvement)

Pourquoi étudier la mécanique

1. Les fluides en mouvement sont présents « partout »:
    1. Sciences de l'ingénieur: aéronautique, énergétique, aérospatiale, astronomie
    2. Sciences de l'environnement: météorologie, océanographie, climatologie, hydrologie
    3. Science du vivant: hémodynamique, biomécanique du mouvement



Cadre de ce cours

1. On s'intéresse au mouvement d'un fluide homogène (une seule espèce chimique « équivalente ») vu comme un milieu continu. Cela exclut la description de phénomènes:
   - se passant à des échelles microscopiques (intérieur d'un choc fort par exemple),
   - Liés à des réactions chimiques (comme dans le cas de la combustion dans un moteur)

2. L'état du fluide est alors décrit complètement par la masse volumique ρ, la pression p, la température T et le vecteur vitesse $\mathbf{V} = \vec{V} = (u_1, u_2, u_3) = (u, v, w)$ à chaque instant t et en chaque point de l'espace $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

3. Ces quantités doivent être comprises comme représentatives de la « particule fluide » centrée sur la position $\mathbf{x}$

Plan général

1. Rappels
2. Quelques solutions analytiques
3. Notion de turbulence
4. Interaction fluide-structure

Variables de Lagrange et d'Euler

1. **Variables de Lagrange $\boldsymbol{t, x_L, y_L, z_L}$:** on suit l'évolution d'une particule fluide au cours du temps; celle-ci est repérée par ses coordonnées $x_L(t)$, $y_L(t)$, $z_L(t)$. Toute grandeur physique $f(t, x_L, y_L, z_L)$ est représentative de <u>la</u> particule fluide qui se trouvait à la position $x_{L0} = x_L(0)$, $y_{L0} = y_L(0)$, $z_{L0} = z_L(0)$. à l'origine des temps $t = 0$.

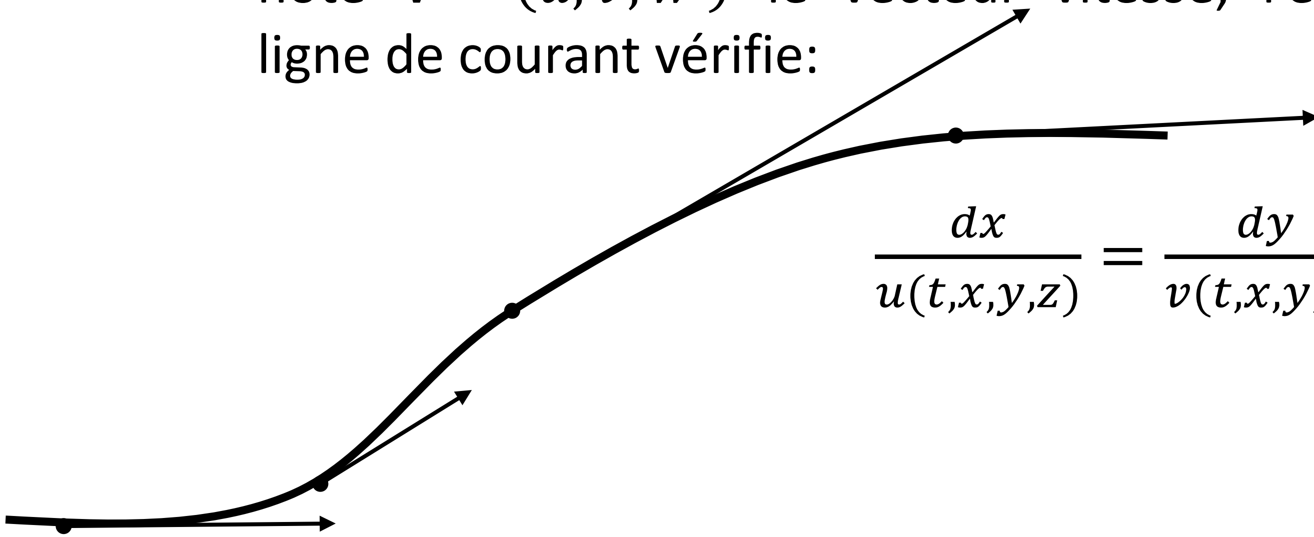
   <u>C'est le point de vue directement issu de la mécanique du point</u>

2. **Variables d'Euler $\boldsymbol{t, x, y, z}$:** on s'intéresse à l'évolution temporelle des grandeurs physiques au point x, y, z. La valeur $f(t, x, y, z)$ n'est pas représentative d'une particule fluide particulière mais uniquement de celle qui se trouve à <u>la</u> position x, y, z à l'instant t

   <u>C'est le point de vue de l'expérimentateur qui observe l'écoulement de l'extérieur par une sonde fixe.</u>

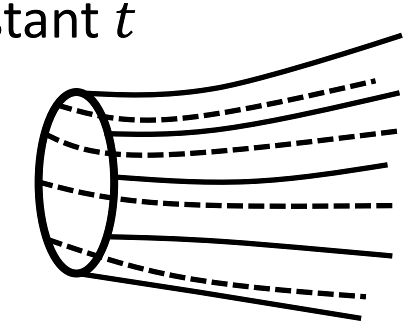
Lignes et surfaces particulières

1. **Ligne de courant:** C'est une ligne dont la tangente en tout point est colinéaire au vecteur vitesse à l'instant t. Si on note $\mathbf{V} = (u, v, w\,)$ le vecteur vitesse, l'équation d'une ligne de courant vérifie:



$$\frac{dx}{u(t,x,y,z)} = \frac{dy}{v(t,x,y,z)} = \frac{dz}{w(t,x,y,z)}$$

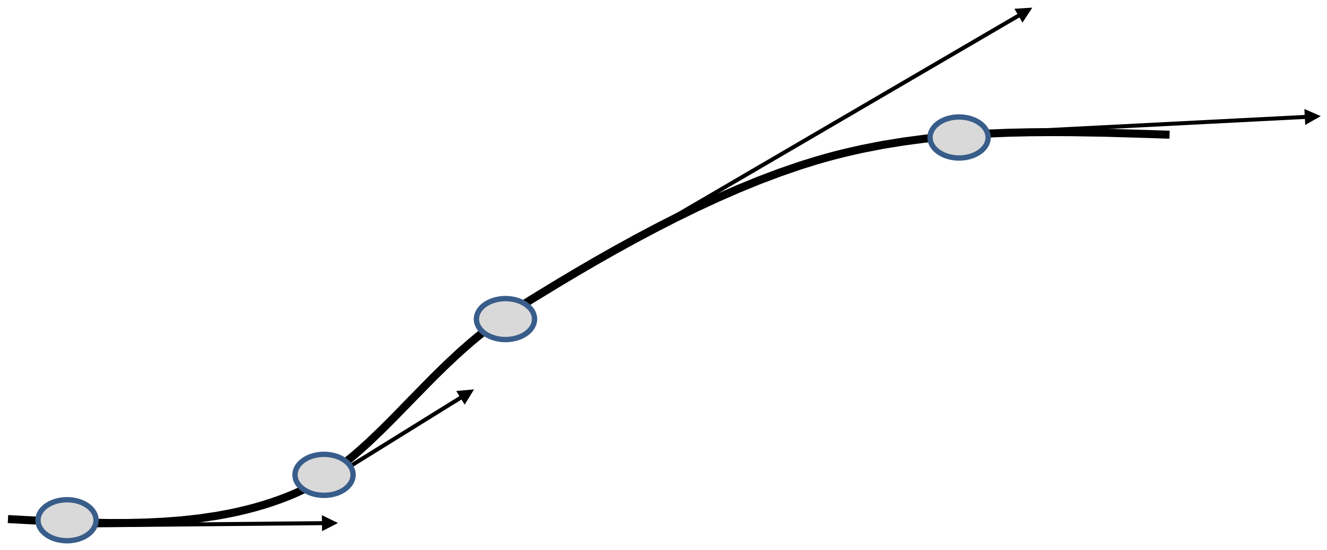
2. **Tube de courant**: c'est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé à l'instant t



Lignes et surfaces particulières

3. **Trajectoire:** C'est la courbe décrite au cours du temps par une particule fluide. L'équation d'une telle courbe est

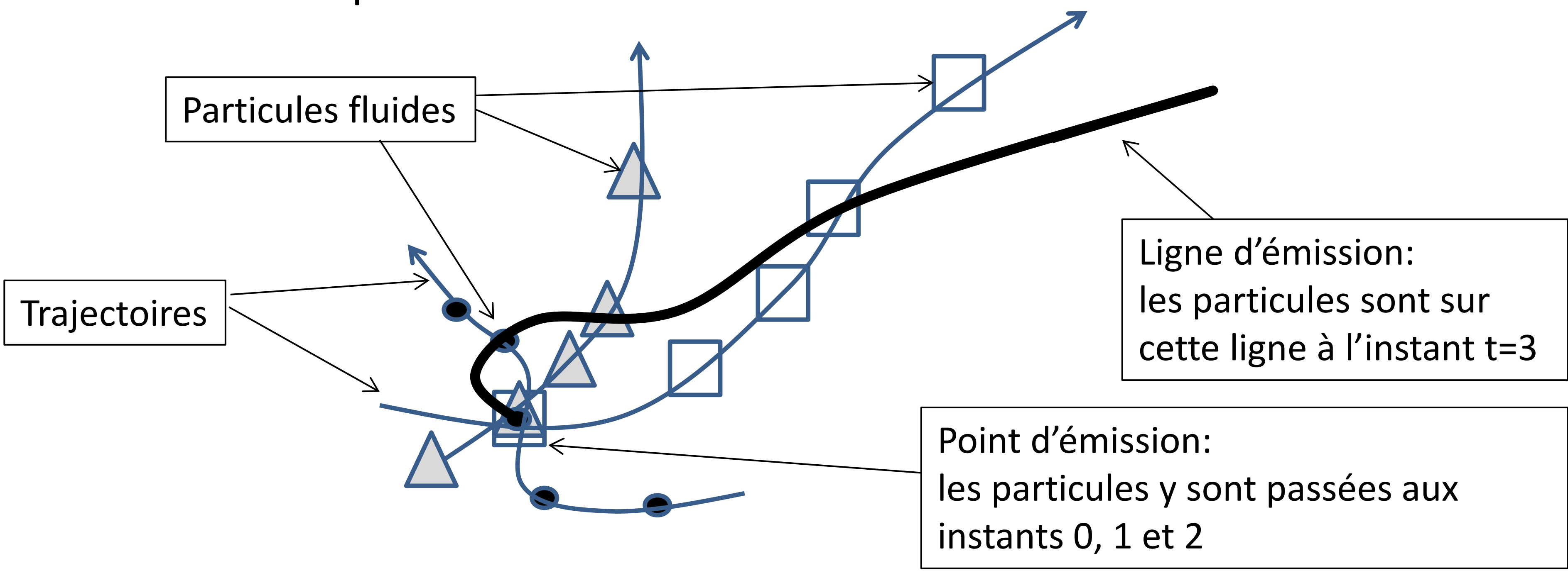
$$\frac{dx}{dt} = u(t,x,y,z); \ \frac{dy}{dt} = v(t,x,y,z); \ \frac{dz}{dt} = w(t,x,y,z)$$



Rq: Lignes de courant et trajectoires sont confondues en écoulement permanent

Lignes et surfaces particulières

4. **Ligne d'émission:** C'est l'ensemble des positions géométriques occupées à l'instant t par toutes les particules fluides ayant occupé une position de référence dans le passé



Rq: Lignes d'émission et trajectoires sont confondues en écoulement permanent

Gradient de vitesse

- Les variations spatiales du vecteur vitesse à l'instant t sont décrites à travers le tenseur gradient de vitesse:

$$g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

- Ce tenseur d'ordre deux peut être décomposé de manière unique en parties symétrique et anti-symétrique

$$g_{ij} = S_{ij} + R_{ij}\ ;\ S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) ; R_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- La partie symétrique est appelée <u>tenseur des vitesses de déformation</u>. Sa trace est $\mathrm{tr}(\mathbf{S}) = S_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\mathbf{V}$
- **ATTENTION**: la sommation des indices répétés est utilisée implicitement dans ce cours ($S_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ est alors bien la divergence du vecteur vitesse)

Gradient de vitesse
Partie symétrique

- Il est parfois utile de séparer le tenseur vitesse de déformation en partie sphérique et déviatrice:

$$S_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}S_{kk} + S_{ij}^{d}, \qquad \text{avec } S_{kk}^{d} = 0$$

- On peut aussi séparer les termes diagonaux et extra-diagonaux:

$$S_{ij} = S_{ij}^{diag} + S_{ij}^{cross}, \qquad \text{avec } S_{i\neq j}^{diag} = 0 \text{ et } S_{i=j}^{cross} = 0$$

Gradient de vitesse
Partie anti-symétrique

- La partie anti-symétrique est liée au vecteur rotationnel

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot}\boldsymbol{V} \ ; \Omega_k = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

par la relation indicielle: $\Omega_k = -\varepsilon_{ijk}R_{ij}$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et ε_{ijk} est le pseudo-tenseur alterné d'ordre 3

- $$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = 0 \ \ si \ i = j \text{ ou } i = k \ \text{ ou } \ j = k \\ \varepsilon_{ijk} = +1 \ \text{ si } i, j, k = 1{,}2{,}3 \ \text{ ou } 2{,}3{,}1 \ \text{ ou } 3{,}1{,}2 \\ \varepsilon_{ijk} = -1 \ \text{ si } i, j, k = 1{,}3{,}2 \ \text{ ou } 3{,}2{,}1 \ \text{ ou } 2{,}1{,}3 \end{cases}$$

Vorticité et circulation

- Le vecteur rotationnel $\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot}\boldsymbol{V}$ ne doit pas être confondu avec le **vecteur tourbillon** (ou vortex) défini par
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\boldsymbol{V}$$
- Par définition, la **vorticité** est le module du vecteur tourbillon: $\omega = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{rot}\boldsymbol{V}\right\|$

- <u>Formule de Stokes:</u> on considère une surface Σ quelconque de vecteur normal $\vec{n}$ et portée par un contour fermé *C* orienté d'élément d'arc $\overrightarrow{dl}$. La circulation du vecteur vitesse le long de *C* et le flux du vecteur rotationnel à travers Σ sont alors égales:

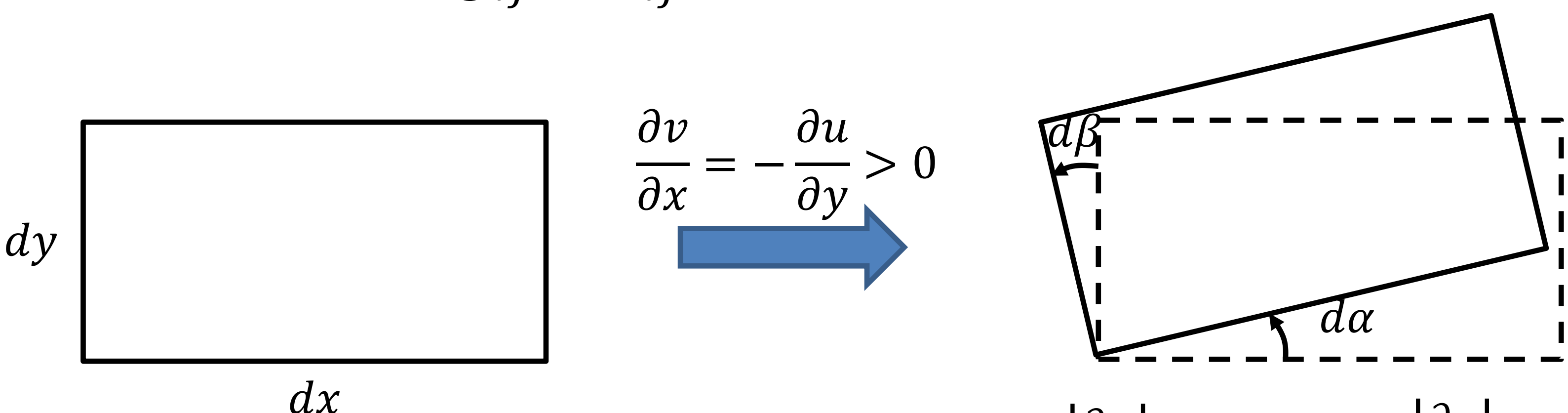
$$\oint_C \vec{V}\cdot\overrightarrow{dl} = 2\iint_\Sigma \vec{\omega}\cdot\vec{n}d\sigma = \iint_\Sigma \overrightarrow{rot}\boldsymbol{V}\cdot\vec{n}d\sigma$$

Cinématique

- On s'intéresse aux perturbations que subit une parcelle de fluide élémentaire plongée dans un champ de vitesse pendant une durée élémentaire *dt*
- Le gradient de vitesse se décompose de manière générique comme suit:

$$g_{ij} = S_{ij}^{diag} + S_{ij}^{cross} + R_{ij} \quad \text{avec} \quad \omega_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}R_{ij}$$

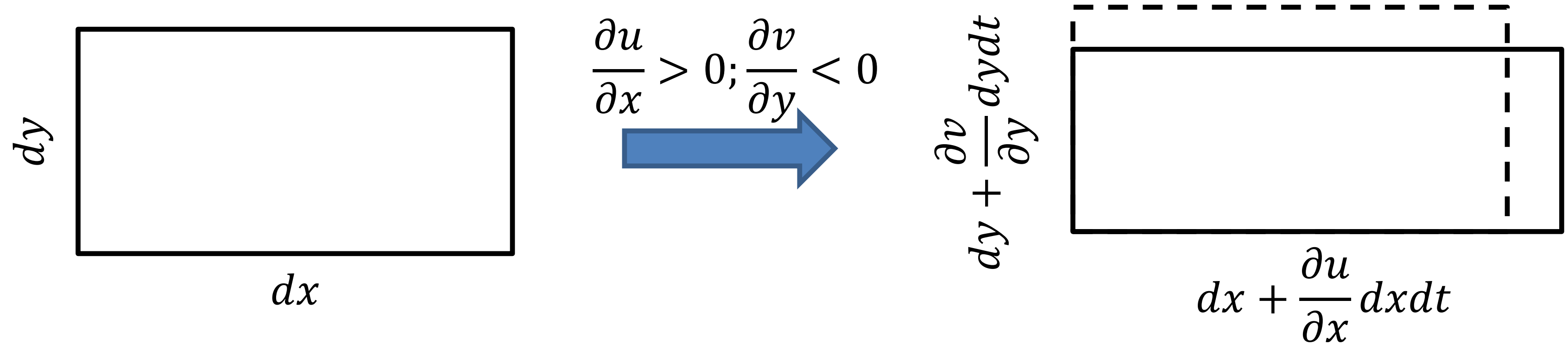
- **Rotation pure**: $g_{ij} = R_{ij}$



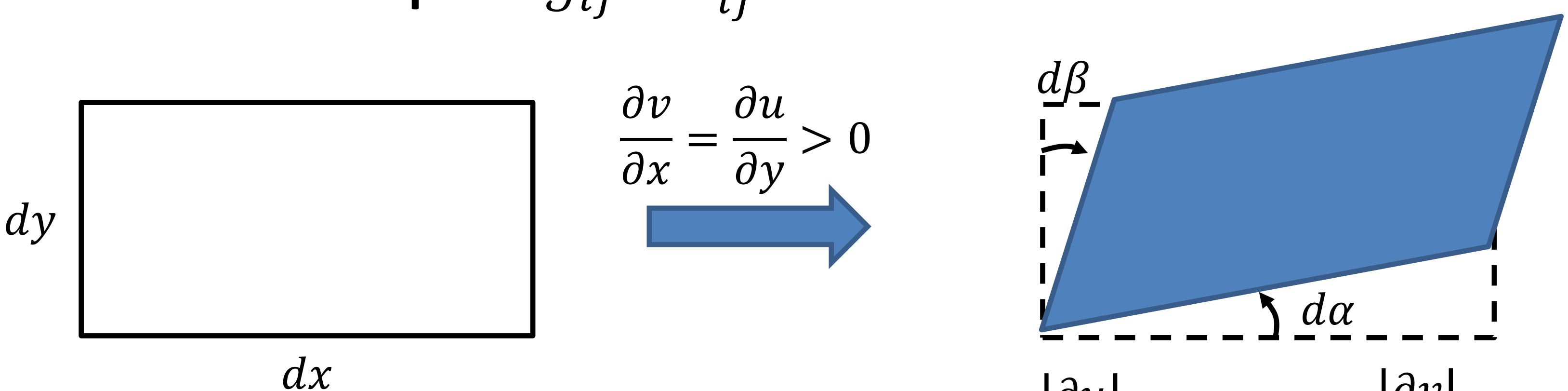
$$|d\beta| = \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| dt \qquad |d\alpha| = \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| dt = |d\beta|$$

Cinématique

- **Dilatation pure**: $g_{ij} = S_{ij}^{diag}$



- **Déformation pure:** $g_{ij} = S_{ij}^{cross}$

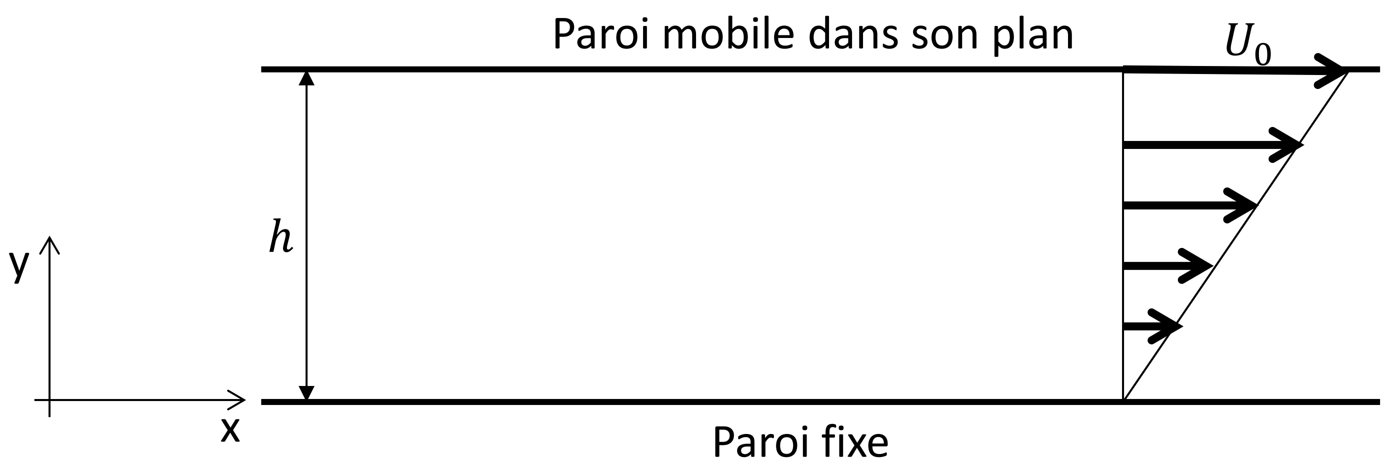


$|d\beta| = \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| dt \quad |d\alpha| = \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| dt = |d\beta|$

Viscosité

Cette grandeur est associée à la résistance qu'oppose tout fluide à sa mise en mouvement. Dans l'expérience de Couette, pour certains fluides (fluides newtoniens) et en régime permanent, le profil de vitesse est linéaire et la force F qu'il faut exercer sur une portion d'aire A de la paroi supérieure pour maintenir son mouvement est telle que:

$\frac{F}{A} = \mu \frac{U_0}{h}$ où μ est la viscosité dynamique du fluide (kg/m/s ou Pa.s)



Viscosité

- La quantité $\frac{F}{A}$ est une force par unité de surface; elle est appelée contrainte et notée $\tau_{xy} = \frac{F}{A}$ où le premier indice (x) repère la direction de la force et le second (y) repère la direction de la normale à la surface
- Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes s'exprime comme suit (sous l'hypothèse de Stokes):

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu S_{kk}\delta_{ij}$$

où $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ est le tenseur des vitesses de déformation

Viscosité

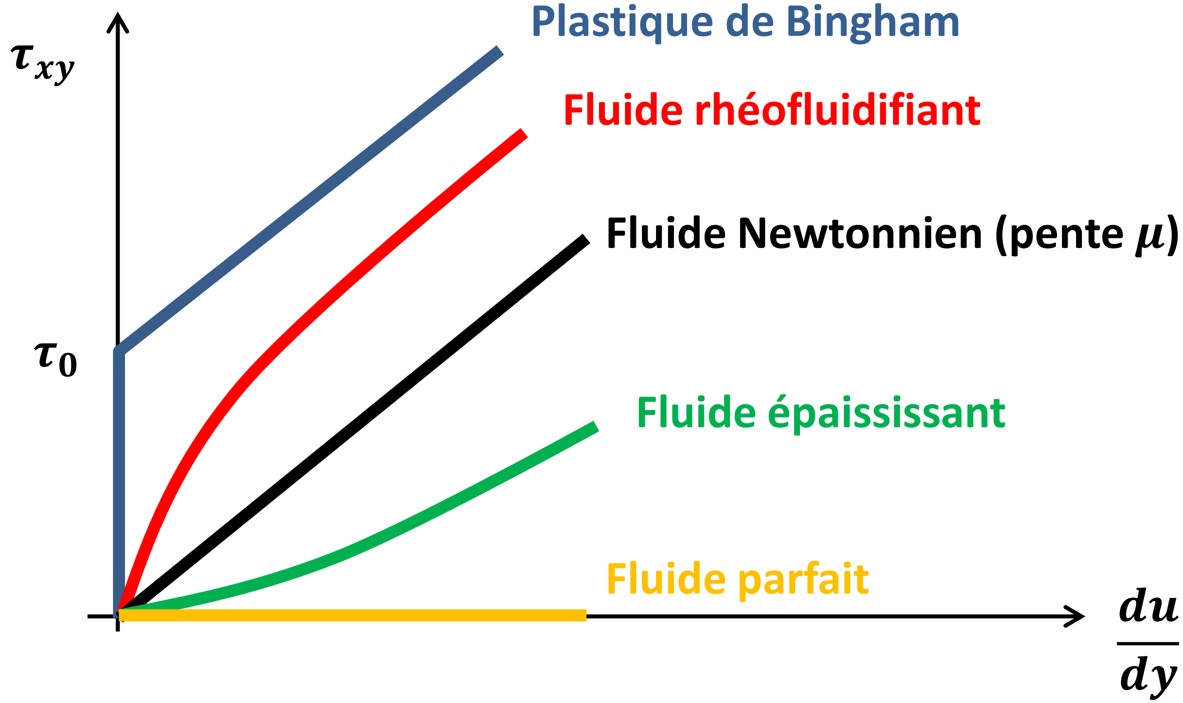
- On introduit souvent dans les équations la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ qui s'exprime en m^2/s
- Le modèle newtonien est très représentatif de deux fluides très communs: l'air et l'eau. Il sera donc utilisé dans la suite de ce cours.
- Quelques données numériques:

Fluide	Masse volumique (kg/m^3)	Viscosité dynamique (kg/m/s ou Pa.s)	Viscosité cinématique (m^2/s)
Air	1.29	1.85×10^{-5}	1.43×10^{-5}
Eau	1000	10^{-3}	10^{-6}

- L'eau est-elle plus ou moins visqueuse que l'air ???

Rhéologie

- D’autres comportements rhéologiques sont utilisés pour représenter des fluides complexes



- Par exemple le sang a un comportement rhéofluidifiant dont la viscosité pour les grands cisaillements est de l’ordre de 4 cPoise (soit 4×10^{-3} Pa.s)

Notion de bilan

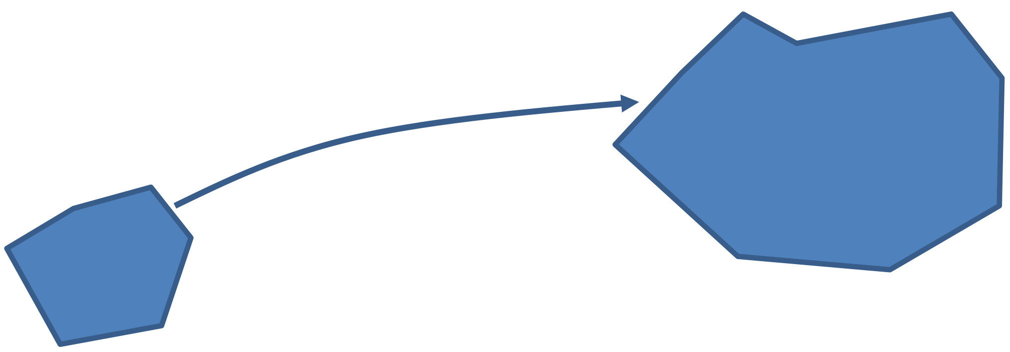
1. L’analyse d’un écoulement se fait à travers l’écriture de bilans issus des grandes lois de conservation
   - masse,
   - quantité de mouvement,
   - énergie

2. La région sur laquelle ces bilans sont faits dépend des variables utilisées

3. Dans tous les cas, un bilan ne peut se faire que sur une région ne contenant que des particules fluides, éventuellement en contact avec une paroi solide

Domaine matériel

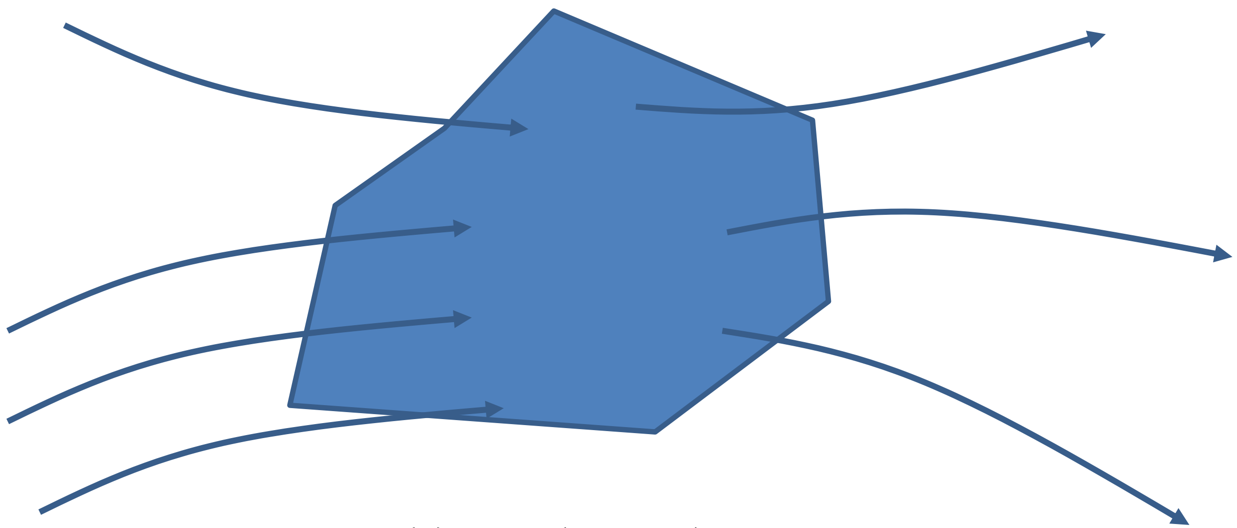
- En variables de Lagrange, les bilans sont réalisés sur un domaine matériel $D(t)$ constitué de particules fluides (toujours les mêmes) que l'on suit dans leur mouvement.
- Ce domaine se déforme au cours du temps et n'échange pas de masse avec l'extérieur



$D(t)$ $D(t + \Delta t)$

Volume de contrôle

- En variables d'Euler, les bilans sont réalisés sur un volume de contrôle Δ constitué de particules fluides (pas toujours les mêmes)
- Ce domaine ne se déforme pas au cours du temps et échange de la masse avec l'extérieur



$$\Delta(t) = \Delta(t + \Delta t) = \Delta$$

Liens entre descriptions Langrangienne et Eulerienne

- Les principes de conservation sont écrits naturellement en variables de Lagrange (ex: la masse d'une particule fluide se conserve)

- En variable d'Euler, plus aptes à représenter le point de vue de l'observateur/expérimentateur, on représente les variations prises en suivant une seule et même particule par la dérivée particulaire

- Le passage entre les deux points de vue se fait grâce à 2 ingrédients fondamentaux:
  - La dérivée particulaire
  - Le théorème de transport

Dérivée particulaire

- On cherche à évaluer dans le formalisme Eulérien les variations de f vues par la particule située en x, y, z à l'instant t

- On impose pour cela à $\mathrm{dM} = (dx, dy, dz)$ de correspondre au déplacement physique d'une particule fluide sur sa trajectoire, soit $\frac{dM}{dt} = (u, v, w)$

- La quantité $f(t, x, y, z)$ étant décrite en variable d'Euler, sa différentielle est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Dérivée particulaire

- La dérivée totale par rapport au temps est alors:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

- Puisque l'on a choisi le déplacement $\frac{dM}{dt} = (u, v, w)$, on obtient:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}$$

- Cette quantité, exprimée en variables d'Euler, est **représentative des variations de f lorsque l'on suit la particule située en x, y, z à l'instant t. C'est la dérivée particulaire**

Dérivée particulaire

- En notation indicielle cela donne, en notant $\frac{dx_j}{dt} = u_j$ la vitesse de la particule dans la direction *j*:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} dt + u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

- Et avec la sommation implicite:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Dérivée particulaire

- L'expression se généralise sans difficulté au cas d'un vecteur en considérant les composantes du vecteur successivement
- On obtient ainsi l'expression de **l'accélération d'une particule fluide** écrite en variables d'Euler

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

- Il faut bien noter ici que l'indice j est muet
- Le caractère <u>non-linéaire</u> de ce terme est <u>fondamental</u> en mécanique des fluides; il est par exemple à l'origine du phénomène de turbulence abordé en fin de cours
- L'opérateur $\frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$ est appelé opérateur de convection ou d'advection dans le cas particulier où $f = u_i$

Ecoulement permanent

- Un écoulement est dit **permanent** si la **dérivée partielle en temps** de toute quantité exprimée en variable d'Euler est nulle

- La dérivée particulaire n'est cependant pas nulle; elle devient :

$$\frac{df}{dt} = u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

- L'accélération d'une particule fluide plongée dans un écoulement permanent n'est donc pas nulle en général:

$$\frac{du_i}{dt} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Théorème de transport

- La dualité de raisonnement sur un domaine matériel $D(t)$ ou un volume de contrôle Δ est concrétisée par le théorème de Reynolds

$$\frac{d}{dt}\iiint_{D(t)} f(t,x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x,y,z)dxdydz$$

$$+ \oiint_{\Sigma} f(t,x,y,z)\, u_i n_i d\sigma$$

- Δ est fixe et coïncidant avec D à l'instant t
- n_i est la i$^{\text{ème}}$ composante du vecteur unitaire normal à la surface Σ qui englobe Δ, orienté vers l'extérieur

Théorème de transport

- En utilisant le théorème d'Ostrogadski on obtient une forme légèrement différente:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{D(t)} f(t,x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t,x,y,z)dxdydz$$

$$+ \iiint\limits_{\Delta} \frac{\partial f(t,x,y,z)\, u_i}{\partial x_i} dxdydz$$

- L'intégrale de surface est donc remplacée par une intégrale de volume portant sur la divergence du vecteur $f\mathbf{V}$

Equations du Mouvement

- Elles s'obtiennent en appliquant les principes de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) à un domaine matériel quelconque et en utilisant le théorème de transport appliqué à une fonction f bien choisie
- Par exemple, pour $f = \rho$, la conservation de la masse contenue dans le domaine matériel donne successivement $\frac{d}{dt}\iiint_{D(t)} \rho dxdydz = 0$, puis $\iiint_{\Delta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}\right) dxdydz = 0$, et enfin **l'équation de continuité**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

Equations du Mouvement

- L'application du principe fondamental de la dynamique à un domaine matériel quelconque conduit, en choisissant $f = \rho \mathbf{V}$ pour l'application du théorème de transport, à l'équation de la quantité de mouvement suivante:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i$$

où F_i représente les forces de volume (ex: la pesanteur g)

- Si le fluide est Newtonien, le tenseur des contraintes est proportionnel au tenseur vitesse de déformation $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$:

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu S_{kk}\delta_{ij}$$

Remarque sur le terme convectif

- Le terme convectif (ou terme d'accélération) est écrit naturellement, par application du théorème de transport, sous sa forme dite conservative: $\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}$

- Il est souvent utile d'utiliser une autre forme, dite non-conservative: $\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, qui est strictement équivalente grâce à l'équation de continuité et qui conduit à:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i$$

- Une troisième forme, dite de Crocco, s'écrit:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\vec{V}\cdot\vec{V}}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$$

Energie cinétique

- En multipliant l’équation de quantité de mouvement par la vitesse u_i, on obtient l’équation suivante pour l’énergie cinétique $e_c = \frac{1}{2} u_i u_i$:

$$\rho \frac{\partial e_c}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e_c}{\partial x_j} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho u_i F_i$$

ou encore, en posant $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$:

$$\rho \frac{\partial e_c}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial e_c}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij} u_i}{\partial x_j}}_{\substack{\text{puissance des}\\ \text{forces extérieures}\\ \text{de surface}}} + \underbrace{-\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\substack{\text{puissance des}\\ \text{forces intérieures}\\ \text{de surface}}} + \underbrace{\rho u_i F_i}_{\substack{\text{puissance des}\\ \text{forces extérieures}\\ \text{de volume}}}$$

- On remarque que la puissance des forces intérieures de surface liées à la viscosité est nulle en l’absence de vitesse de déformation; que la puissance des forces intérieures de pression est nulle en fluide incompressible

Théorème de Bernoulli
Forme faible

- On considère un **fluide parfait de masse volumique constante en mouvement permanent et soumis à des forces extérieures dérivant d'un potentiel** $\left(F_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)$
- Le bilan d'énergie cinétique conduit alors au fait que la quantité

$$\mathcal{H} = p + \frac{1}{2}\rho u_i u_i + \rho\Phi$$

est constante le long d'une ligne de courant

- Ce résultat se généralise dans le cas où la masse volumique n'est pas constante mais ne dépend que de la pression ($\rho = \rho(p)$; évolution barotrope)
- On parle de **forme faible** du théorème de Bernoulli car la quantité **$\mathcal{H}$ n'est conservée que sur chaque ligne de courant**

Théorème de Bernoulli
Forme faible

- Les forces volumiques se réduisent en général à la pesanteur et dans ce cas la **charge** (sous forme de pression) s'écrit

$$\mathcal{H} = p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z$$, où z est l'altitude

- On appelle également **charge** (sous forme de hauteur) la quantité

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z$$

- Le théorème de Bernoulli indique que la charge (pression ou hauteur) se conserve sur une ligne de courant

Théorème de Bernoulli
Généralisation – fluide visqueux

- A partir de l'équation de l'énergie cinétique, on montre que les charges à l'entrée (e) et à la sortie (s) d'un système fluide vérifient:

$$\mathcal{H}_s - \mathcal{H}_e = \frac{\dot{W}}{\phi} - \frac{\psi}{\phi} \quad \text{ou encore} \quad H_s - H_e = \frac{\dot{W}}{\rho g \phi} - \frac{\psi}{\rho g \phi} = h_{ext} - h_{vis}$$

  où ϕ est le débit volumique, $\dot{W}$ la puissance apportée (>0) ou prélevée (<0) par l'extérieur au fluide et ψ la puissance dissipée par effet visqueux (<0)

- La perte de charge par effet visqueux, h_{vis}, résulte de deux contributions proportionnelles à $\frac{V^2}{2g}$:
  - Perte de charge régulière liée au frottement et proportionnelle à la longueur du système. Par exemple, pour une conduite: $f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$ avec f le coefficient de frottement
  - Perte de charge singulière associée aux singularités géométriques (ex: $\left(1-\frac{S_1}{S_2}\right)^2\frac{V^2}{2g}$ pour un élargissement brusque entre les sections S_1 et S_2)

Théorème de Bernoulli

Généralisation – écoulement non permanent

- La forme faible du théorème de Bernoulli s'obtient également à partir de l'équation de quantité de mouvement écrite avec la forme de Crocco
- Cette approche indique que pour la cas d'un écoulement non permanent, les charges aux points A et B d'une même ligne de courant vérifient

$$p_A + \frac{1}{2}\rho {V_A}^2 + \rho g z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho {V_B}^2 + \rho g z_B + \int_A^B \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- ATTENTION: Cette relation n'a évidemment d'intérêt que lorsque la ligne de courant entre A et B n'évolue pas en temps, ce qui n'est pas toujours le cas pour un écoulement non permanent

Théorème de Bernoulli

Forme forte

- On considère un **fluide de masse volumique constante en mouvement irrotationnel et soumis à des forces extérieures dérivant d'un potentiel** $\left(F_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)$
- La vitesse dérive alors d'un potentiel: $u_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$; on montre alors que la quantité

$$\mathcal{H} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + p + \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \rho \Phi$$

est constante dans tout le domaine de l'écoulement

- On parle de **forme forte** du théorème de Bernoulli car la quantité $\mathcal{H}$ **est commune à toutes les lignes de courant**

Equations de Navier-Stokes incompressibles

- Masse:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

- Quantité de mouvement:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i \text{ avec } \tau_{ij} = 2\mu S_{ij}$$

- Equation d'état:

$$\rho = \rho_0$$

Théorème d'Euler

- Pour un écoulement permanent, le flux de quantité de mouvement à travers une surface de contrôle Σ fixe de normale sortante $\vec{n}$ et délimitant un volume Δ constitué exclusivement de particules fluides est égal à la résultante des forces extérieures appliquées au fluide.
- C'est une conséquence directe de l'équation de la quantité de mouvement intégrée sur le volume Δ :

$$\oiint_{\Sigma} \rho\vec{V}\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)d\sigma = \iiint_{\Delta} \rho\vec{F}dv + \oiint_{\Sigma} \vec{T}d\sigma$$

- Un théorème similaire peut être établi pour les moments:

$$\oiint_{\Sigma} \rho\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}\left(\vec{V}\cdot\vec{n}\right)d\sigma = \iiint_{\Delta} \rho\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}dv + \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}d\sigma$$

- $\vec{F}$ et $\vec{T}$ sont respectivement les forces de volumes et de surface appliquées au fluide. La pression et les contraintes visqueuses contribuent à $\vec{T}$

Echelles caractéristiques

1. Rappel: équation de quantité de mouvement pour un fluide incompressible:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

2. On introduit les échelles caractéristiques de l'écoulement et du fluide suivantes:

L_0: longueur $\qquad$ U_0: vitesse

ρ: masse volumique $\qquad$ μ: viscosité dynamique

3. Les variables adimensionnées peuvent alors être déduites:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/U_0 \qquad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}/L_0$$

$$p^* = p/\rho U_0^2 \qquad t^* = tU_0/L_0$$

Nombre de Reynolds

1. L'équation adimensionnée de quantité de mouvement devient alors

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}$$

2. Le terme de viscosité est alors inversement proportionnel au nombre de Reynolds défini par:

$$R_e = \frac{\rho U_0 L_0}{\mu}$$

ou encore:

$$R_e = \frac{U_0 L_0}{\nu}$$

Nombre de Reynolds

1. Ce nombre sans dimension très important en mécanique des fluides prend typiquement des valeurs entre 10^{-3} (capillaire sanguin) et 10^{6} (avion de ligne)

2. Plusieurs interprétations physiques correspondent à ce nombre. Par exemple, en l'écrivant sous la forme:

$$R_e = \frac{\rho \frac{U_0^2}{L_0}}{\mu \frac{U_0}{L_0^2}}$$

   on s'aperçoit qu'il s'agit du rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité.

3. D'autres interprétations du même nombre font intervenir les échelles de longueur ou de temps liées à la diffusion et la convection

Echelles de temps

1. On considère un écoulement d'un fluide de viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ de vitesse caractéristique U_0 et s'établissant dans un domaine de taille caractéristique L_0. Les temps caractéristiques de la diffusion et de la convection sont alors les suivants:

$$\tau_{diff} = \frac{L_0^2}{\nu} \qquad \tau_{conv} = \frac{L_0}{U_0}$$

Le nombre de Reynolds apparait alors comme étant le rapport des échelles de temps de diffusion et de convection

$$R_e = \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}}$$

Echelles de longueur

2. On considère un écoulement d'un fluide de viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ de vitesse caractéristique U_0 et s'établissant pendant une durée τ. Les distances parcourues par diffusion et par convection sont alors les suivantes:

$$L_{diff} = \sqrt{\nu\tau} \qquad\qquad L_{conv} = U_0\tau$$

Le nombre de Reynolds apparait alors comme étant le carré du rapport des échelles de longueur de convection et de diffusion :

$$R_e = \left(\frac{L_{conv}}{L_{diff}}\right)^2$$

Cas asymptotiques

1. Deux cas limites permettent (parfois) d'obtenir des solutions analytiques :

   a) $R_e \longrightarrow 0$: les forces de viscosité sont alors prépondérantes et l'équation de quantité de mouvement devient linéaire:

   $$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

   On dit que l'écoulement est rampant

   a) $R_e \longrightarrow \infty$: la viscosité est négligeable et on retrouve l'équation d'Euler:

   $$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$