

METHODES MATHEMATIKES POUR L'INGENIEUR

Calcul Différentiel

2009

- 1- Notions de base
- 2- Dérivées directionnelles et partielles
- 3- Différentiabilité
- 4- Coordonnées cylindriques et sphériques
- 5- Opérateurs différentiels

Franck Nicoud

04 67 14 48 46

06 73 05 51 40

nicoud@math.univ-montp2.fr

<http://www.math.univ-montp2.fr/~nicoud/>

Objectifs pour l'étudiant :

A la fin de la matière, l'étudiant doit pouvoir :

- 1) calculer la différentielle d'une fonction de plusieurs variables,
 - 2) Calculer la matrice Jacobienne et le Jacobien d'une fonction à plusieurs variables
 - 3) Représenter les iso-lignes d'une fonction de 2 variables
 - 4) calculer le gradient et le Laplacien d'un champ scalaire, la divergence et le rotationnel d'un champ vectoriel.
-

Dans ce cours on étudie la généralisation de la notion de dérivabilité aux fonctions de plusieurs variables. Notre objet d'étude sera typiquement une fonction f définie sur une partie U de \mathbf{R}^n et à valeurs dans \mathbf{R}^p .

Ce type de fonction est en effet capital pour la description de nombreuses situations physiques. Par exemple, la concentration en un certain polluant d'une rivière est représentée mathématiquement par une application de trois variables du type :

$$C : U \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto C(x, y, z)$$

Ici U désigne le volume de l'espace tridimensionnel \mathbf{R}^3 occupé par le lit de la rivière, (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes d'un point contenu dans la rivière et $C(x, y, z)$ représente la concentration en ce point. Cette description permet d'analyser le taux de pollution moyen dans la rivière. Dans le cas d'un évènement intense, comme par exemple le déversement accidentel d'une grande quantité de polluant, il est nécessaire de suivre l'évolution temporelle de la concentration en chaque point du lit de la rivière. La description mathématique du phénomène sera alors basée sur une fonction de quatre variables :

$$C : U \subset \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y, z, t) \mapsto C(x, y, z, t)$$

On peut également être amené à décrire un phénomène pour lequel une fonction à valeur vectoriel est nécessaire. Par exemple, la concentration de polluant $C(x, y, z)$ dépend de la vitesse de l'eau dans le lit de la rivière. Cette quantité est bien représentée par une fonction vectorielle du type :

$$\vec{V} : U \subset \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x, y, z, t) \mapsto \vec{V}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$$

On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne usuelle sur les espaces vectoriels \mathbf{R}^n et \mathbf{R}^p et \bullet ou bien $\langle \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel.

1- NOTIONS DE BASE

- De même que l'on peut définir tout vecteur \mathbf{x} de \mathbf{R}^n à partir de ses composantes (x_1, x_2, \dots, x_n) , on pourra définir $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, vecteur de \mathbf{R}^p , à partir de ses fonctions composantes $(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, f_i est une fonction de U dans \mathbf{R} .

Remarque : dans le cas de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 on utilisera souvent la notation (x, y) ou (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2) ou (x_1, x_2, x_3)

- La $i^{\text{ème}}$ projection canonique (ou $i^{\text{ème}}$ application coordonnée) est une fonction à valeurs réelles définie par :

$$\begin{aligned}\pi_i : \mathbf{R}^p &\rightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto x_i\end{aligned}$$

Si \mathbf{f} est une application de \mathbf{R}^n à valeurs dans \mathbf{R}^p alors la $i^{\text{ème}}$ fonction composante est telle que $f_i(\mathbf{x}) = \pi_i(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, soit $f_i = \pi_i \circ \mathbf{f}$. On peut définir p fonctions composantes à partir de \mathbf{f} .

- \mathbf{f} étant définie sur une partie U de \mathbf{R}^n et à valeurs dans \mathbf{R}^p , on appelle $i^{\text{ème}}$ application partielle de \mathbf{f} en $\mathbf{x} \in U$ la fonction d'une variable réelle définie par :

$$\begin{aligned}p_i^{\mathbf{f}(\mathbf{x})} : U_i &\rightarrow \mathbf{R}^p \\ t &\mapsto p_i^{\mathbf{f}(\mathbf{x})}(t) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)\end{aligned}$$

où U_i est la partie de \mathbf{R} définie par $U_i \in \{t \in \mathbf{R} : (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\}$.

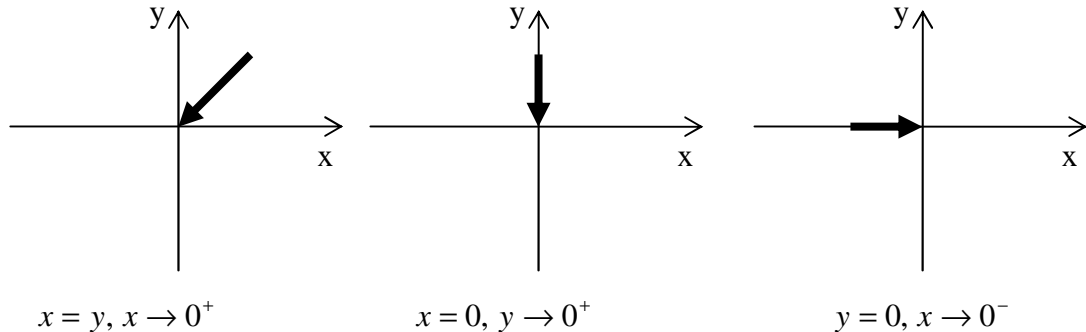
On peut définir n applications partielles à partir de \mathbf{f} .

- On dit que la fonction \mathbf{f} est continue en $\mathbf{x}_0 \in U$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \mathbf{x} \in U, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \eta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$$

On dit que \mathbf{f} est continue sur U si \mathbf{f} est continue en tout point de U . Cette définition étend celle déjà connue pour les fonctions réelles à une seule variable (obtenue en remplaçant les normes par des valeurs absolues). Comme pour les fonctions réelles, la continuité peut également être définie comme $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Il faut souligner que pour garantir la continuité de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 cette condition doit être vérifiée quelque soit la

manière dont le point \mathbf{x} tend vers le point \mathbf{x}_0 . Par exemple, dans \mathbf{R}^2 , voici trois manières de tendre vers l'origine :



Cette distinction rend la notion de continuité moins triviale pour les fonctions à plusieurs variables qu'elle ne l'est pour les fonctions d'une seule variable. Par exemple

la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par $(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$ n'est pas

continue. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \mathbf{f}(x, x) = \frac{1}{2} \neq \mathbf{f}(0,0) = 0, \quad \text{même si}$$

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \mathbf{f}(x, 0) = \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \mathbf{f}(0, y) = 0 = \mathbf{f}(0,0).$$

Quelques propriétés classiques sur la continuité sont données ci-dessous :

- la continuité est stable par combinaison linéaire : si \mathbf{f} et \mathbf{g} (deux fonctions définies sur $U \subset \mathbf{R}^n$ et à valeurs dans \mathbf{R}^p) sont continues en $\mathbf{x}_0 \in U$ alors pour tout couple de réels (λ, μ) la fonction $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ est continue en \mathbf{x}_0 ,
- la continuité est stable par combinaison : si \mathbf{f} est une fonction définie sur $U \subset \mathbf{R}^n$ et à valeurs dans \mathbf{R}^p et continue en $\mathbf{x}_0 \in U$, si \mathbf{g} est une fonction définie sur $V \subset \mathbf{R}^p$ et à valeurs dans \mathbf{R}^q et continue en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in V$, alors l'application $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ est continue en $\mathbf{x}_0 \in U$
- toute fonction construite à partir de combinaison, multiplication, quotient de fonctions continues est continue. Par exemple la fonction

$$\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{e^{\cos x}}{xy^2}$$

est continue sur son domaine de définition.

- si \mathbf{f} est continue alors toutes les applications partielles qui lui sont associées sont continues. Attention : la réciproque est fautive ! Par exemple considérons

$$\text{encore l'application définie sur } \mathbf{R}^2 \text{ par } (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Les deux fonctions partielles de \mathbf{f} en 0 sont identiquement nulles, donc continues sur \mathbf{R} et notamment en 0. Par contre la fonction \mathbf{f} n'est pas continue en 0.

- on cite également un résultat célèbre (hors cadre de ce cours) : l'image d'un compact par une fonction continue est compacte.

2- DERIVEES DIRECTIONNELLES ET PARTIELLES

- \mathbf{f} étant définie sur un ouvert U de \mathbf{R}^n et à valeurs dans \mathbf{R}^p , on considère un vecteur \mathbf{v} de \mathbf{R}^n et un élément \mathbf{x}_0 de U . On dit que \mathbf{f} admet une dérivée en \mathbf{x}_0 suivant le vecteur

\mathbf{v} si la limite suivante existe : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t}$. Dans ce cas on note $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ cette

limite.

Remarques :

- dans cette définition la variable t est un réel et la dérivée $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$, si elle existe, est un vecteur de \mathbf{R}^p
- si $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ existe alors pour tout réel non nul λ on montre que

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lambda \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$$

- Si la dérivée directionnelle $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ existe pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ et si de plus l'application (définie sur \mathbf{R}^n à valeurs dans \mathbf{R}^p) $\mathbf{v} \mapsto \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ est linéaire alors on dit que \mathbf{f} est Gâteaux-différentiable en \mathbf{x}_0 .
- \mathbf{f} étant définie sur un ouvert U de \mathbf{R}^n et à valeurs dans \mathbf{R}^p , on note $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de \mathbf{R}^n . Si \mathbf{f} admet une dérivée en $\mathbf{x}_0 \in U$ suivant le vecteur \mathbf{e}_i on dit que \mathbf{f} admet une dérivée partielle dans la direction x_i . On note $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{x}_0)$ cette dérivée.
- Par définition, la dérivée partielle $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ est donc égale à $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t}$.
En introduisant les composantes $(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,i-1}, x_{0,i}, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n})$ de \mathbf{x}_0 , on obtient encore $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}((x_{0,1}, \dots, x_{0,i-1}, x_{0,i} + t, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n})) - \mathbf{f}((x_{0,1}, \dots, x_{0,i-1}, x_{0,i}, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}))}{t}$. Si on note $p_i^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}$ la $i^{\text{ème}}$ application partielle de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 , cette limite s'écrit plus simplement $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_i^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}(t) - p_i^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}(0)}{t}$, qui n'est autre que la dérivée de $p_i^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}$ en 0. Par conséquent les différentes dérivées rencontrées jusqu'à alors sont liées par la relation : $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{x}_0) = (p_i^{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)})'(0)$. On remarque que la dérivée partielle de \mathbf{f} dans la direction x_i s'obtient en figeant les variables $x_{j \neq i}$ et en dérivant alors \mathbf{f} par rapport à x_i .
- Si on suppose que \mathbf{f} admet des dérivées partielles suivant toutes les directions en \mathbf{x}_0 , il en est de même pour ses fonctions composantes f_i . On appelle alors matrice jacobienne de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 la matrice de taille $p \times n$ d'élément générique $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)$. On note $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ cette matrice dont l'expression est :

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \quad (1)$$

- lorsque $n=p$, on définit le jacobien de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 comme le déterminant de la matrice jacobienne de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 . On note :

$$Jac_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \det(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \quad (2)$$

cette quantité réelle,

- lorsque la fonction est à valeurs réelles ($p=1$), la jacobienne est une matrice ligne. Sa transposée est une matrice colonne appelée gradient de f . On note :

$$grad f = \nabla f = Df(x_0)^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3)$$

3- DIFFERENTIELLE

On a vu précédemment que plusieurs types de dérivées peuvent être introduits dans le cas d'une fonction vectorielle à plusieurs variables. De fait, chacune de ces dérivées ne donne qu'une information partielle sur les variations de la fonction \mathbf{f} (information dans une direction donnée, pour une des composantes de \mathbf{f}). La notion de différentielle est alors introduite pour permettre une description complète des variations de \mathbf{f} au voisinage d'un point \mathbf{x}_0 . Cette notion vise donc à généraliser la notion de dérivée d'une fonction réelle à une seule variable.

Rappelons tout d'abord la définition de la dérivée dans le cas d'une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} :

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \quad (4)$$

Bien sûr, dans ce cas particulier, x_0 est un réel fixé et les quantités t , $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ sont elles aussi réelles. Cette définition ne peut pas être généralisée au cas des fonctions de plusieurs variables puisque la division par t (qui est alors un vecteur de \mathbf{R}^n) n'est pas définie. Cette difficulté est surmontée en observant que la définition de la dérivée de f en x_0 ci-dessus implique que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - (f(x_0) + tf'(x_0))}{t} = 0$. En posant $x = x_0 + t$, on trouve également

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0))}{x - x_0} = 0 \quad (5)$$

Autrement dit, l'application

$$x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

est la meilleure approximation affine qu'il est possible de trouver pour f au voisinage de x_0 . En effet, la relation (5) permet d'obtenir

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0) \quad (6)$$

où $o(x - x_0)$ est une fonction négligeable devant $(x - x_0)$ au voisinage de x_0 .

Remarque : ce résultat était en fait déjà connu puisque :

1. $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ n'est rien d'autre que l'équation de la tangente au graphe de f en x_0
2. l'équation (6) est en fait le développement limité de f en x_0 à l'ordre 1

Alternativement, l'équation (6) peut se réécrire sous la forme :

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + tf'(x_0) + o(t), \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0 \quad (7)$$

On approxime donc $f(x_0 + t)$ au voisinage de $x = x_0$ (ou alternativement $t = 0$) par $f(x_0)$ augmenté de la valeur prise par l'application linéaire $t \mapsto tf'(x_0)$. C'est cette dernière relation que l'on généralise pour définir la notion de différentielle.

Définition : \mathbf{f} étant définie sur un ouvert U de \mathbf{R}^n et à valeurs dans \mathbf{R}^p , la différentielle de \mathbf{f} en $\mathbf{x}_0 \in U$ est une application linéaire de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^p , notée $\mathbf{df}_{\mathbf{x}_0}$, telle que :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{df}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) + \mathbf{o}(\mathbf{h}), \quad \text{avec} \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{o}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad (8)$$

- On montre que si elle existe, la différentielle est unique.
- Si \mathbf{f} admet une différentielle en tout point de U on dit que \mathbf{f} est différentiable sur U . On peut alors considérer l'application \mathbf{df} de U dans l'ensemble des applications linéaires de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^p , et définie par $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{df}_{\mathbf{x}}$. Si cette application est continue, on dit que \mathbf{f} est continûment différentiable (ou de classe C^1) sur U .

Propriétés :

- la différentiabilité est stable par combinaison linéaire : si \mathbf{f} et \mathbf{g} (deux fonctions définies sur $U \subset \mathbf{R}^n$ et à valeurs dans \mathbf{R}^p) sont différentiables en $\mathbf{x}_0 \in U$ alors pour tout couple de réels (λ, μ) la fonction $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ est différentiable en \mathbf{x}_0 et sa différentielle est $\lambda\mathbf{df}_{\mathbf{x}_0} + \mu\mathbf{dg}_{\mathbf{x}_0}$
- la différentiabilité est stable par combinaison : si \mathbf{f} est une fonction définie sur $U \subset \mathbf{R}^n$ et à valeurs dans \mathbf{R}^p et différentiable en $\mathbf{x}_0 \in U$, si \mathbf{g} est une fonction définie sur $V \subset \mathbf{R}^p$ et à valeurs dans \mathbf{R}^q et différentiable en $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in V$, alors l'application $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ est différentiable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Sa différentielle est la composée des différentielles, soit $\mathbf{d}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{dg}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)} \circ \mathbf{df}_{\mathbf{x}_0}$
- si \mathbf{f} est différentiable en \mathbf{x}_0 alors \mathbf{f} est continue en ce point
- si \mathbf{f} est différentiable en \mathbf{x}_0 alors \mathbf{f} est Gâteaux-différentiable en ce point et de plus

$$\boxed{\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{df}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})} \quad (9)$$

En effet, écrivant l'équation (8) pour le vecteur $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$ où t est un réel et \mathbf{v} est un vecteur non nul fixé de \mathbf{R}^n , on obtient immédiatement, par linéarité de $\mathbf{df}_{\mathbf{x}_0}$:

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \mathbf{df}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v}) + \frac{\|\mathbf{v}\| \mathbf{o}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}. \text{ La norme de } \mathbf{v} \text{ étant fixée, le dernier terme}$$

de cette égalité tend vers zéro lorsque $t \rightarrow 0$ si bien que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} = \mathbf{df}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})$$

- si \mathbf{f} est différentiable en \mathbf{x}_0 alors \mathbf{f} admet des dérivées partielles dans toutes les directions et $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{df}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}_i)$ où \mathbf{e}_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^n . Par linéarité de la différentielle on en déduit que:

$$\boxed{\forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n, d\mathbf{f}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \mathbf{h}_i} \quad (10)$$

où les composantes de \mathbf{h} dans la base canonique de \mathbf{R}^n sont (h_1, h_2, \dots, h_n) .

- La matrice associée à la différentielle de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 dans les bases canoniques de \mathbf{R}^n et \mathbf{R}^p contient en $j^{\text{ème}}$ colonne les composantes du vecteur $d\mathbf{f}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}_j) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$.

C'est donc par définition $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, la matrice jacobienne de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 .

- On utilise souvent la notation différentielle pour l'argument de la différentielle (\mathbf{h} devient $d\mathbf{x}$). On note donc

$$d\mathbf{f}_{\mathbf{x}_0}(d\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i \quad (11)$$

ou bien, avec une notation légèrement abusive mais très répandue:

$$d\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} dx_i \quad (12)$$

Dans cette notation, $d\mathbf{x}$ est la variable microscopique ou locale, contrairement à \mathbf{x} ou \mathbf{x}_0 qui sont des variables macroscopiques ou globales. Il faut bien voir que la différentielle agit sur la variable locale alors que la fonction agit sur la variable globale. La relation (12) exprime la valeur de la différentielle de \mathbf{f} en \mathbf{x} appliquée au vecteur $d\mathbf{x}$. La notation abusive consiste à noter simplement $d\mathbf{f}$ cette quantité qui n'est en fait autre que $d\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(d\mathbf{x})$.

Comme toujours il est nécessaire de bien comprendre où vivent les différents termes de cette dernière relation : les dx_i sont des réels (composantes du vecteur

$d\mathbf{x}$ de \mathbf{R}^n) et les $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ sont des vecteurs de \mathbf{R}^p (dérivées partielles de \mathbf{f} définie

de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^p). Au final on trouve bien que la valeur prise par la différentielle de \mathbf{f} en \mathbf{x} une fois appliquée au vecteur $d\mathbf{x}$ est un vecteur de \mathbf{R}^p

- Dans le cas d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} , la relation (12) indique que le vecteur gradient de f est tel que

$$\forall d\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, df = df_{\mathbf{x}}(d\mathbf{x}) = \langle \mathbf{grad} f, d\mathbf{x} \rangle \quad (13)$$

De ce résultat on peut déduire que le vecteur gradient est perpendiculaire aux surfaces de niveau de \mathbf{f} , orienté vers les grandes valeurs de la fonction. Par

exemple, considérons une application \mathbf{f} à valeurs réelle différentiable sur \mathbf{R}^2 . Une représentation pratique de cette fonction consiste à tracer les lignes sur lesquelles la fonction \mathbf{f} est constante :

- Si on choisit $\mathbf{dx} = \mathbf{dx}_1$, tangent à une courbe de niveau, alors

$$df_x(\mathbf{dx}_1) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (\mathbf{dx}_1)} = 0 = \langle \mathbf{grad} \mathbf{f}, \mathbf{dx}_1 \rangle \text{ et le vecteur gradient est donc}$$

orthogonal au vecteur \mathbf{dx}_1 , donc à la ligne de niveau,

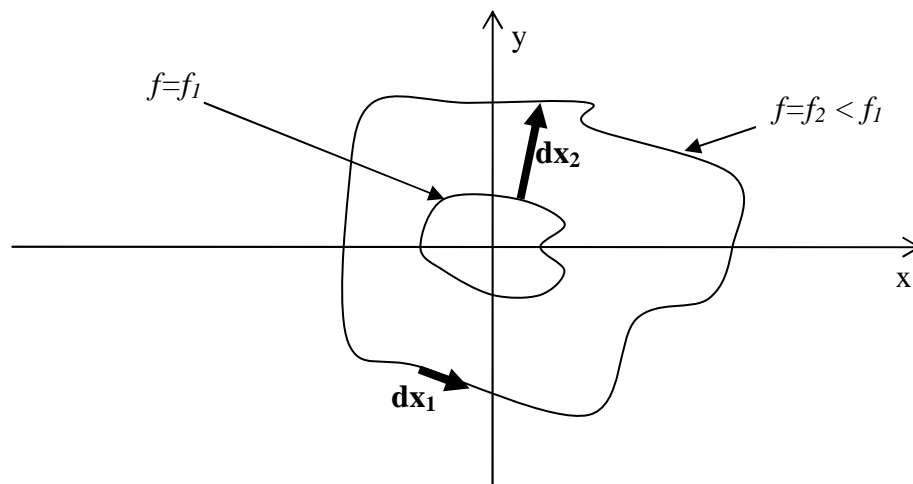
- Si on choisit $\mathbf{dx} = \mathbf{dx}_2$, orthogonal à la ligne de niveau $\mathbf{f} = f_1$, alors

$$\langle \mathbf{grad} \mathbf{f}, \mathbf{dx}_2 \rangle = df_x(\mathbf{dx}_2) \approx f_2 - f_1 < 0 \text{ et le vecteur gradient est colinéaire}$$

au vecteur \mathbf{dx}_2 et de sens opposé. Il est donc bien orienté vers les grandes

valeurs de f puisque l'on a choisi ici $f_1 > f_2$. Bien sur le même résultat est

obtenu lorsque l'on choisit la situation inverse, à savoir $f_1 < f_2$



- **Attention** : L'existence de dérivées partielles dans toutes les directions en \mathbf{x}_0 n'entraîne pas nécessairement la différentiabilité de \mathbf{f} en ce point. Par contre on peut montrer que \mathbf{f} est continûment différentiable en \mathbf{x}_0 si et seulement si \mathbf{f} admet des dérivées partielles continues dans toutes les directions en \mathbf{x}_0 .

Différentielles exactes : Etant donnée une application linéaire de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^p définie par

$$\mathbf{L} : \mathbf{dx} \mapsto \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) dx_i, \text{ il est utile de savoir s'il existe une application } \mathbf{f} \text{ de } \mathbf{R}^n \text{ dans}$$

\mathbf{R}^p dont la différentielle en \mathbf{x} est $\sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) dx_i$. Si tel est le cas on dit que \mathbf{L} est une différentielle exacte dont la primitive est \mathbf{f} .

On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) dx_i$ soit une

différentielle exacte est que $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x_i}$. Pour cela on remarque tout

d'abord que, si i et j sont deux indices fixés, on obtient par identification entre \mathbf{L} et $d\mathbf{f}$:

$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ et $\mathbf{g}_j = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}$. Dérivant ces deux relations par rapport à x_j et x_i respectivement,

on obtient le résultat annoncé en remarquant que $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}$.

Changement de variables :

- On suppose que la variable macroscopique $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ peut être paramétrée et vue comme une fonction d'une variable réelle t . Chaque composante de \mathbf{x} est alors une fonction de t et pour toute application \mathbf{f} de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^p on peut trouver une fonction \mathbf{g} définie de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^p telle que :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \mathbf{g}(t).$$

Si on s'intéresse à la dérivée de \mathbf{g} par rapport à t (on suppose donc que les fonctions $x_i : t \mapsto x_i(t)$ sont dérivables) on peut utiliser la différentielle de \mathbf{f} et écrire :

$$\mathbf{g}'(t) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

où $\frac{dx_i}{dt}$ n'est autre que la dérivée de $x_i : t \mapsto x_i(t)$ par rapport à t .

Exemple : On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
 $(x, y) \mapsto x \cos(y)$ et on suppose que x et y

sont des fonctions de t réel : $x : t \mapsto t^2$ et $y : t \mapsto t^3$. On a alors

$f(x, y) = g(t) = t^2 \cos(t^3)$. La dérivée de g peut s'obtenir en dérivant $g(t) = t^2 \cos(t^3)$ directement (en utilisant les règles de dérivations classiques), soit $g'(t) = 2t \cos(t^3) - 3t^4 \sin(t^3)$. On peut également passer par la différentielle de f , soit $df = \cos(y)dx - x \sin(y)dy$, puis utiliser $x = t^2; \frac{dx}{dt} = 2t$ et $y = t^3; \frac{dy}{dt} = 3t^2$ pour obtenir de même $\frac{df}{dt} = 2t \cos(t^3) - 3t^4 \sin(t^3)$

- Dans le cas plus général, la variable macroscopique $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ne peut pas être paramétrée à l'aide d'une seule variable réelle t . Elle peut par contre être reliée à une autre variable macroscopique $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Chaque composante de \mathbf{x} est alors une fonction des composantes (y_1, y_2, \dots, y_n) de \mathbf{y} :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ x_2 = x_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Pour toute application \mathbf{f} de $U \subset \mathbf{R}^n$ dans \mathbf{R}^p on peut alors exprimer les dérivées partielles par rapport aux variables (x_1, x_2, \dots, x_n) en fonction des dérivées partielles par rapport aux variables (y_1, y_2, \dots, y_n) . C'est encore une fois la différentielle de \mathbf{f} qui permet de faire le lien. Partant de $d\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} dx_i$ et en

« divisant » par ∂y_j on obtient :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

Dans cette relation, l'application \mathbf{g} est définie par $\forall \mathbf{x} \in U \subset \mathbf{R}^n, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{y})$. Il faut noter que bien souvent les physiciens et les ingénieurs ne font pas la distinction entre \mathbf{f} et \mathbf{g} et parle de \mathbf{f} « vue comme une fonction de \mathbf{y} ». Le tout est de bien comprendre ce dont on parle ...

Exemple : On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et on introduit les

coordonnées polaires $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$. La fonction g des variables (r, θ) qui

représente la même quantité physique que f (c'est-à-dire qui est égale à f en tout point du plan) est telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x, y) = g(r, \theta)$. Puisque

$x^2 + y^2 = r^2$ on trouve directement $g(r, \theta) = r^2$. La dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ est

alors évidemment égale à $2r$. Cette dérivée peut également se calculer sans exprimer explicitement la fonction g en écrivant :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = 2x \cos \theta + 2y \sin \theta. \quad \text{En utilisant } \begin{cases} \cos \theta = x/r \\ \sin \theta = y/r \end{cases}, \text{ on}$$

retrouve bien le résultat $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 2r$.

- Les variations des variables macroscopiques sont reliées entre elles par leur Jacobien de la manière suivante :

$$\boxed{dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} dy_1 dy_2 \dots dy_n} \quad (14)$$

Par exemple dans le cas des coordonnées polaires et cartésiennes, on a le résultat classique:

$$dxdy = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} drd\theta = r drd\theta$$

Dans le cas des coordonnées sphériques et cartésiennes, on a un autre résultat classique:

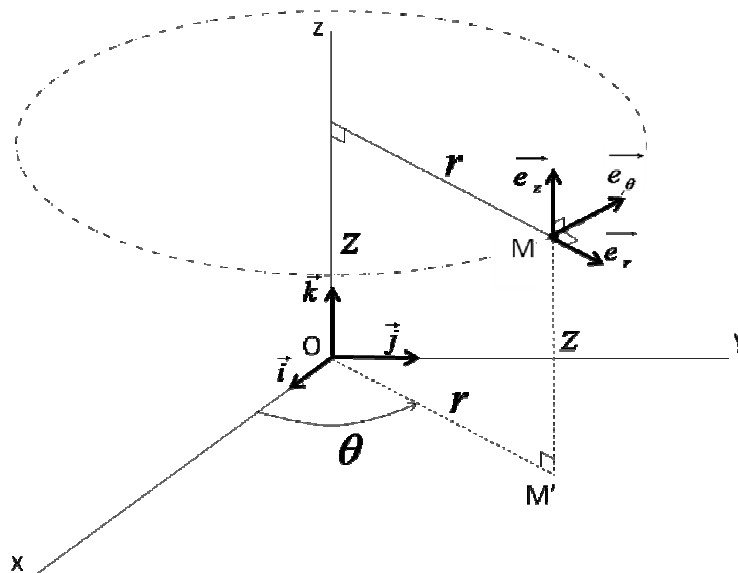
$$dxdydz = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} drd\varphi d\theta = r^2 \sin \varphi drd\varphi d\theta$$

4- COORDONNEES CYLINDRIQUES ET SPHERIQUES

Hormis les coordonnées cartésiennes (notées (x_1, x_2, x_3)) et associées à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées cylindriques et sphériques sont parfois très utiles pour représenter certaines situations physiques. On donne ici la définition de ces systèmes de coordonnées. Dans la suite, les points géométriques O et M sont l'origine du système de coordonnées et le point courant respectivement.

- Coordonnées cylindriques :

Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont représentées dans la figure ci-dessous, en même temps que la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ correspondante :



La distance entre le point courant M et l'axe Oz est notée r alors que le plan (M, Oz) est repéré par l'angle θ qu'il forme avec le plan (Ox, Oz) . L'altitude du point M dans la direction Oz est notée z . Finalement, les coordonnées cylindriques (r, θ, z) [dans cet ordre] varient dans l'ensemble $\mathbf{R}^{*+} \times [0, 2\pi[\times \mathbf{R}$.

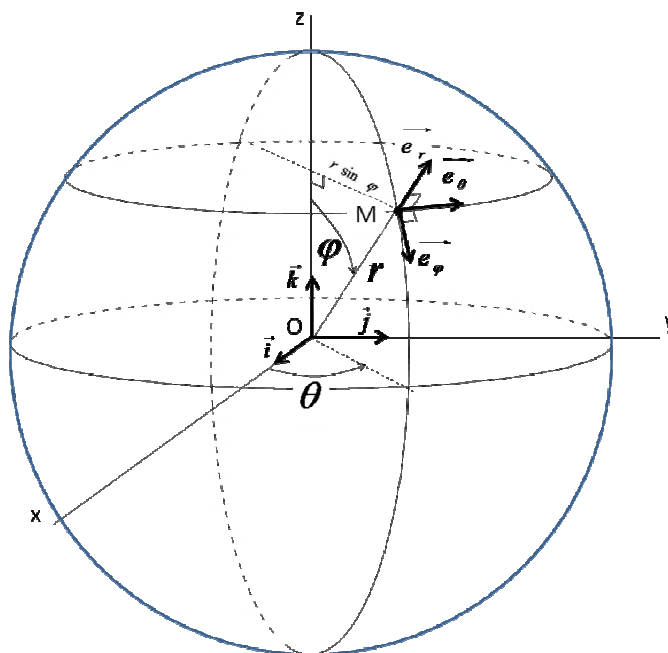
Les relations suivantes peuvent être obtenues à partir de considérations géométriques :

- Vecteur position : $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- Vecteur déplacement : $d\vec{M} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
- Volume élémentaire : $rdrd\theta dz$
- $(x_1, x_2, x_3) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$

- $(r, \theta, z) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \arctan \frac{x_2}{x_1}, x_3 \right)$
- $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) = \left(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}, \vec{k} \right)$
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \left(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta, \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta, \vec{e}_z \right)$

- Coordonnées sphériques :

Les coordonnées sphériques (r, φ, θ) sont représentées dans la figure ci-dessous, en même temps que la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ correspondante :



La distance entre le point courant M et l'origine O est notée r alors que le plan (M, Oz) est repéré par l'angle θ qu'il forme avec le plan (Ox, Oz) . Finalement, le rayon OM est repéré par l'angle φ qu'il forme avec l'axe Oz. Finalement, les coordonnées sphériques (r, φ, θ) [dans cet ordre] varient dans l'ensemble $\mathbf{R}^{*+} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$.

Les relations suivantes peuvent être obtenues à partir de considérations géométriques :

- Vecteur position : $\vec{OM} = r\vec{e}_r$
- Vecteur déplacement : $d\vec{M} = dr\vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + r \sin \varphi d\theta \vec{e}_\theta$
- Volume élémentaire : $r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$

- $(x_1, x_2, x_3) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$
- $(r, \varphi, \theta) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \arccos\left(x_3 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right), \arctan \frac{x_2}{x_1} \right)$
- $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \vec{i} + \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + \cos \varphi \vec{k}, \\ \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + \cos \varphi \sin \theta \vec{j} - \sin \varphi \vec{k}, \\ -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{pmatrix}$
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \vec{e}_r + \cos \varphi \cos \theta \vec{e}_\varphi - \sin \theta \vec{e}_\theta, \\ \sin \varphi \sin \theta \vec{e}_r + \cos \varphi \sin \theta \vec{e}_\varphi + \cos \theta \vec{e}_\theta, \\ \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}$

5- OPERATEURS DIFFERENTIELS

Certains groupements ou combinaisons de dérivées partielles apparaissent souvent à répétition lorsque l'on fait du calcul différentiel. Il est donc utile de nommer ces *opérateurs différentiels* et de bien comprendre leur signification physique.

On se restreindra ici aux applications de trois variables à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{R}^3 . On se dote pour la suite des fonctions suivantes :

- Une fonction vectorielle \mathbf{V} définie de la manière suivante :

$$\mathbf{V} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{x}) = (V_1(\mathbf{x}), V_2(\mathbf{x}), V_3(\mathbf{x}))$$

où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées cartésiennes. Une telle fonction peut par exemple être utilisée pour représenter le vecteur vitesse au sein d'un fluide. Si l'espace est repéré par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) ou sphériques (r, φ, θ) on note respectivement $(V_r(\mathbf{x}), V_\theta(\mathbf{x}), V_z(\mathbf{x}))$ ou $(V_r(\mathbf{x}), V_\varphi(\mathbf{x}), V_\theta(\mathbf{x}))$ les fonctions composantes de \mathbf{V} .

- Une fonction scalaire T définie de la manière suivante :

$$T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto T(\mathbf{x})$$

Une telle fonction peut par exemple être utilisée pour représenter la pression, la température, la concentration en nitrates au sein d'un fluide.

Le gradient:

On a vu précédemment que les dérivées partielles d'une fonction à valeurs réelles ($p=1$) peuvent être combinées pour former le vecteur gradient de cette fonction dont une propriété fondamentale a ensuite été déduite (Eq. 13) :

$$\forall \mathbf{dx} \in \mathbf{R}^n, df = df_x(\mathbf{dx}) = \langle \mathbf{grad} f, \mathbf{dx} \rangle$$

Cette propriété peut en fait être vue comme la définition du vecteur gradient : c'est le vecteur (on montre aisément qu'il est unique) dont le produit scalaire avec tout déplacement \mathbf{dx} , soit $\langle \mathbf{grad} f, \mathbf{dx} \rangle$, est égal à la différentielle de f appliquée à \mathbf{dx} , soit $df_x(\mathbf{dx})$. Cette définition est évidemment indépendante du système de coordonnées utilisé (coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques, ...). Le gradient apparaît alors comme un opérateur intrinsèque ayant ses propriétés propres. On a par exemple déjà vu que le vecteur gradient est orthogonal aux lignes de niveau, dirigé vers les grandes valeurs de la fonction. Ces propriétés en font un outil de choix pour la modélisation de certains phénomènes physiques comme la diffusion. Il s'agit d'un processus moléculaire qui conduit à mélanger les zones chaudes avec les zones froides, ou les régions polluées avec les régions qui le sont moins. D'un point de vue de l'ingénieur, il est utile, voire indispensable, de disposer d'une représentation macroscopique de ce phénomène microscopique ; on utilise pour cela des lois dites « lois gradients ». Par exemple, on modélise le flux de chaleur \mathbf{q}_T lié à la diffusion dans un corps par la loi de Fourier : $\mathbf{q}_T = -\lambda \mathbf{grad} T$ dans laquelle T est la température, λ le coefficient de diffusion et le signe moins indique que la chaleur diffuse du chaud vers le froid. De manière similaire, la loi de Fick permet de modéliser le flux de diffusion \mathbf{q}_C d'une espèce dans un fluide : $\mathbf{q}_C = -D \mathbf{grad} C$, où D est le coefficient de diffusion pour l'espèce considérée, C sa concentration volumique.

Exprimé dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, le vecteur gradient prend respectivement les expressions suivantes :

- Coordonnées cylindriques : $\mathbf{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right]^t$
- Coordonnées sphériques : $\mathbf{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right]^t$

Evidemment, en coordonnées cartésiennes, la relation (3) donne directement la forme bien connue :

$$\mathbf{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]^t \quad (15)$$

La divergence :

C'est un opérateur défini sur \mathbf{R}^3 à valeurs dans \mathbf{R} qui est par définition la **trace** (somme des termes diagonaux) **de la matrice jacobienne** $Df(\mathbf{x})$ définie dans l'équation (1). Cette définition est évidemment intrinsèque et ne dépend pas du système de coordonnées choisi. La divergence revêt une importance capitale en mécanique des fluides en particulier et dans les sciences de l'ingénieur en général ; elle apparaît en effet naturellement lorsque l'on écrit des bilans (de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, ...) sur des éléments de volume de petite taille afin de déduire des équations de conservation. Par exemple, pour un fluide incompressible, le principe de conservation de la masse s'écrit localement sous la forme : $\text{div}(\mathbf{V}) = 0$.

Puisqu'il est défini sur \mathbf{R}^3 , l'opérateur divergence ne peut être appliqué qu'à une fonction à valeurs dans \mathbf{R}^3 telle que la fonction \mathbf{V} définie plus haut. En coordonnées cartésiennes, son expression est la suivante :

$$\text{div}(\mathbf{V}) = \text{tr}(Df(\mathbf{x})) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \quad (16)$$

En coordonnées cylindriques et sphériques on montre que la divergence prend respectivement les formes suivantes :

- Coordonnées cylindriques : $\text{div}(\mathbf{V}) = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial x_z}$
- Coordonnées sphériques : $\text{div}(\mathbf{V}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 V_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_\varphi \sin \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial V_\theta}{\partial x_\theta}$

Le Laplacien :

C'est un opérateur défini sur \mathbf{R} à valeurs dans \mathbf{R} qui est par définition la combinaison des opérateurs divergence et gradient :

$$\Delta T = \text{div}(\mathbf{grad} T) \quad (16)$$

Cette définition est évidemment intrinsèque puisque basée sur les opérateurs divergence et gradient ; elle ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Le Laplacien apparaît naturellement lorsque l'on écrit des bilans de quantités pouvant être éventuellement diffusées. Par exemple, pour la concentration d'un polluant quelconque (notée C par la suite) dilué dans de l'eau, le principe de conservation de la masse de polluant fera intervenir la divergence du vecteur flux de diffusion \mathbf{q}_C . Comme indiqué plus haut, ce type de flux est souvent modélisé à l'aide d'une loi de type gradient (loi de Fick) faisant intervenir le gradient de la concentration en polluant. Au final, on obtient bien la divergence du gradient de la concentration, c'est-à-dire le Laplacien de la concentration.

En combinant les expressions données plus haut pour la divergence et le gradient, on obtient les relations suivantes :

- Coordonnées cartésiennes : $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}$
- Coordonnées cylindriques : $\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$
- Coordonnées sphériques : $\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$

Le Rotationnel :

C'est un opérateur vectoriel défini sur \mathbf{R}^3 à valeurs dans \mathbf{R}^3 qui mesure, dans un fluide, la propension des particules à tourner autour d'un point fixe. Une situation bien connue dans laquelle le rotationnel est non nul est celle d'une tornade ou d'un cyclone ; les particules fluides tournent en effet autour de l'œil du cyclone qui peut être vue comme l'axe de rotation. Noté $\mathbf{rot} \mathbf{V}$, le rotationnel a, comme les opérateurs précédemment décrits, des expressions différentes en fonction du système de coordonnées choisi. Dans le cas des coordonnées cartésiennes, nous donnons ici une écriture mnémotechnique faisant intervenir le déterminant d'une « matrice » de taille 3:

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Exprimé dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, le rotationnel prend respectivement les expressions suivantes :

- Coordonnées cylindriques : $\mathbf{rot} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix}$
- Coordonnées sphériques : $\mathbf{rot} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial \sin \varphi V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial r V_\theta}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r V_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \end{bmatrix}$

On observe pour l'ensemble des opérateurs que les expressions sont plus complexes en coordonnées sphériques (et dans une moindre mesure cylindriques) qu'en coordonnées cartésiennes. Cela est dû au fait que la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est constante alors que les bases $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ dépendent de la position du point courant M (voir par exemple les expressions du vecteur position \overrightarrow{OM} et de sa différentielle, le vecteur déplacement \overrightarrow{dM}).

Propriétés :

On pourra montrer à titre d'exercice les résultats classiques suivants :

- $\text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{V}) = 0$
- $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} T) = 0$
- $\text{div}(T \mathbf{V}) = T \text{div} \mathbf{V} + \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{V}$
- $\mathbf{grad}(TU) = T \mathbf{grad} U + U \mathbf{grad} T$

- $\text{rot}(T\mathbf{V}) = T \text{rot}\mathbf{V} + \text{grad}T \wedge \mathbf{V}$
- $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{V}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{V}) - \Delta\mathbf{V}$ (qui utilise le Laplacien d'un vecteur)

Vecteur symbolique « nabla » :

Dans de nombreux ouvrages les opérateurs différentiels sont écrits à partir du vecteur symbolique « nabla » défini par :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

On vérifie alors aisément en coordonnées cartésiennes que les opérateurs précédents peuvent s'écrire à l'aide de ∇ de la manière suivante :

- $\text{grad} T = \nabla T$
- $\text{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V}$, où \cdot est le produit scalaire
- $\Delta T = \nabla \cdot \nabla T$, noté également : $\Delta T = \nabla^2 T$
- $\text{rot} \mathbf{V} = \nabla \wedge \mathbf{V}$ où \wedge est le produit vectoriel