Méthodes Mathématiques pour l’Ingénieur

Suite de la boite à outils …

en 5 séances de cours

+ 5 séances de TD

Sommaire

- Vecteurs et valeurs propres des matrices
- Applications aux systèmes d’équations différentielles
- Intégrales curvilignes et multiples

Objectifs – Auto-évaluation

A la fin de la matière, l’étudiant doit pouvoir :

- calculer les valeurs et vecteurs propres d’une matrice de dimension 2 ou 3.
- appliquer la décomposition en éléments propres à la résolution d’un système d’équations différentielles
- calculer des intégrales curvilignes, de surface, de volume avec changement de variables

Vecteurs et valeurs propres des matrices

Introduction

Deux grandes classes de problèmes en algèbre linéaire :

- **Résoudre un système linéaire d'équations**

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

Déjà vu en STE3

- **Trouver les éléments propres d'une matrices**

$$\mathbf{AX} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{X}$$

X: vecteur propre
λ: valeur propre

L'objectif de ce cours

Pourquoi faire ?

- La détermination des éléments propres d’une matrice carrée a de multiples applications: résonnance, traitement d’image, géométrie, recherche sur le web, balançoire, vibration, marché financier, résolution de certaines équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur), des systèmes d’équations différentielles ordinaires (EDO), …

- Voici un exemple concret à partir du système d’EDO suivant …

Exemple introductif

- Système différentiel de taille 2:
- Les inconnues sont les fonctions v(t) et w(t)

$$(S)\begin{cases}\dfrac{dv}{dt} = 4v - 5w \\ \dfrac{dw}{dt} = 2v - 3w\end{cases}$$

- Il s'agit d'un problème aux conditions initiales tel que souvent rencontré en pratique (ex: modèle de type proie-prédateur)
- Ici on prendra v(0)=8 et w(0)=5 et le but du jeu est de trouver v(t) et w(t) pour *t>0*

Exemple introductif

- Ce système peut facilement être écrit sous forme matricielle. On pose pour cela:

$$\mathbf{U(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{v(t)} \\ \mathbf{w(t)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

- Le système différentiel (S) est alors équivalent à:

$$\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{AU}, \quad \mathbf{avec} \qquad \mathbf{U(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

- C’est une équation linéaire du premier ordre pour la nouvelle inconnue U(t)

Exemple introductif

- On sait résoudre cette équation sans problème dans le cas scalaire (U(t)=u(t) est une fonction réelle et plus un vecteur:

$$\frac{du}{dt} = au, \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0$$

- La solution est alors connue:

$$u(t) = u(0)\, e^{at}, \ \text{en fait} : \ u(t) = \mathrm{Re}\left[u(0)\, e^{at}\right] = u(0)\cos(\beta t)\, e^{\alpha t}$$

- Le comportement pour les grandes valeurs de *t* dépend de la valeur du paramètre (éventuellement complexe) $a=\alpha+i\beta$:
  - $\alpha > 0$: solution instable
  - $\alpha < 0$: solution amortie qui tend vers zéro
  - $\beta \neq 0$: solution oscillante amortie, instable ou à amplitude constante

Exemple introductif

- Retour au cas du système: on cherche une solution avec une dépendance exponentielle:

$$\text{solution de (S) cherchée sous la forme } \begin{cases} v(t) = ye^{\lambda t} \\ w(t) = ze^{\lambda t} \end{cases}$$

- En injectant dans (S) on obtient:

$$\begin{cases} \lambda e^{\lambda t} y = 4e^{\lambda t} y - 5e^{\lambda t} z \\ \lambda e^{\lambda t} z = 2e^{\lambda t} y - 3e^{\lambda t} z \end{cases}$$

- Qui se simplifie en

$$\begin{cases} 4y - 5z = \lambda y \\ 2y - 3z = \lambda z \end{cases} \text{ ou en notation matricielle } \mathbf{AX} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{X} \text{ avec } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

Exemple introductif

- On obtient donc le problème aux valeurs propres suivant:

$$\mathbf{AX} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{X}$$

- Si l'on sait résoudre ce problème d'algèbre linéaire, c'est-à-dire déterminer la ou les valeurs propres λ et les vecteurs propres associés $\mathbf{X} = [\mathbf{y} \quad \mathbf{z}]^{\mathbf{t}}$, alors on connait la solution du système différentiel (S):

$$\begin{cases} v(t) = ye^{\lambda t} \\ w(t) = ze^{\lambda t} \end{cases}$$

Résolution de AX=λX

- On remarque tout d'abord que:

$$\mathbf{AX} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{X} \text{ peut s'écrire également : } (\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$$

- On se ramène à un problème de résolution de système linéaire du type :

$$\mathbf{MX} = \mathbf{b} \quad \text{avec : } \mathbf{M} = \mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} \text{ et } \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

- Mais **b=0, X=0** est toujours solution !! Fin de l'histoire ?

- NON bien sûr ! On cherche une solution **X** <u>non nulle</u>

  (pour qu'elle puisse avoir une utilité pour la résolution du système (S) …)

Résolution de AX=λX

- Rappel du cours sur les systèmes linéaires:

$\mathbf{MX} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{M}$ matrice carrée admet :

- 1 solution unique si : $\mathbf{det(M)} \neq \mathbf{0}$

- 0 ou une infinité de solutions si : $\mathbf{det(M)} = \mathbf{0}$

Dans le cas $\mathbf{det(M)} = \mathbf{0}$, on dit que $\mathbf{M}$ est singulière

- Conséquence pour le problème aux valeurs propres:

Puisque $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ est toujours solution de $(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$ et que l'on cherche des solutions $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, on se place dans le cas où $\mathbf{M} = \mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}$ est singulière

Autrement dit on cherche les valeurs propres $\boldsymbol{\lambda}$ de $\mathbf{A}$ en résolvant l'équation :

$$\mathbf{det}(\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

Retour sur l'exemple

- Avec la matrice A de l'exemple on a:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{bmatrix}$$

- Le déterminant de cette matrice de taille 2 se calcule simplement:

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(4-\lambda)(-3-\lambda)-(-5)(2)=\lambda^2-\lambda-2$$

- C'est un polynôme d'ordre 2 (= taille de la matrice de départ). On l'appelle <u>polynôme caractéristique</u> de **A**
- Ses racines annulent le déterminant de **A-λI**; ce sont donc les valeurs propres de **A**

Retour sur l'exemple

- Le polynôme caractéristique de **A** est d'ordre 2; il admet -1 et +2 comme racine

- **A** admet donc 2 valeurs propres que l'on notera :

$$\boxed{\lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = 2}$$

- Le cours sur les systèmes linéaires indique que pour les choix $\lambda=\lambda_1$ ou $\lambda=\lambda_2$ (et uniquement pour ces choix), l'équation **AX**=λ**X** admet des solutions **X** non nulles

Retour sur l'exemple

- Calcul du vecteur propre $\mathbf{X}_1$ associé à λ_1: ses composantes (y_1, z_1) vérifient le système d'équations:

$$\begin{cases} 4y_1 - 5z_1 = (-1)y_1 \\ 2y_1 - 3z_1 = (-1)z_1 \end{cases}$$

- Les deux lignes de ce système sont en fait identiques et équivalentes à :

$$y_1 - z_1 = 0, \text{ vérifiée notamment par } y_1 = z_1 = 1$$

- Par conséquent, tout vecteur non nul proportionnel à $\mathbf{[1,1]^t}$ est vecteur propre de **A** associé à λ_1=-1.

Retour sur l'exemple

- Calcul du vecteur propre $\mathbf{X}_2$ associé à λ_2: ses composantes (y_2, z_2) vérifient le système d'équations:

$$\begin{cases} 4y_2 - 5z_2 = (+2)y_2 \\ 2y_2 - 3z_2 = (+2)z_2 \end{cases}$$

- Les deux lignes de ce système sont en fait identiques et équivalentes à :

$$2y_2 - 5z_2 = 0, \text{ vérifiée notamment par } y_2 = 5 \text{ et } z_2 = 2$$

- Par conséquent, tout vecteur non nul proportionnel à $\mathbf{[5,2]^t}$ est vecteur propre de **A** associé à λ_2=+2.

Résolution de $AX=\lambda X$

- Elle se fait en 3 étapes systématiques:

1. Calcul du déterminant de $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$

2. Détermination des racines du polynôme caractéristique obtenu en écrivant : $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$

3. Pour chaque racine (chaque valeur propre), résoudre le système linéaire $\mathbf{AX}=\lambda\mathbf{X}$ afin de déterminer le ou les vecteurs propres associés.

Re-Retour sur l'exemple

- Deux solutions ont été obtenues pour le problème **AX=λX:**

$$\lambda = -1 \text{ avec } \mathbf{X} \text{ proportionnel à } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda = +2 \text{ avec } \mathbf{X} \text{ proportionnel à } \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Cela correspond à deux solutions pour le système différentiel (S):

$$\mathrm{U(t)} = \mathrm{e}^{\text{-t}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U(t)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Comme le système différentiel (S) est linéaire, toute combinaison linéaire de ces deux solutions est potentiellement solution. La solution générale est alors:

$$\boxed{\mathrm{U(t)} = \mathrm{C_1 e^{\text{-t}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{C_2 e^{2t}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Re-Retour sur l'exemple

- Les constantes C1 et C2 sont à déterminer en utilisant les conditions initiales:

$$\mathrm{U(t=0)} = \mathrm{C}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{C}_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = U(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Cela revient à résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ dont la solution est } \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La solution recherchée pour le système différentiel (S) est finalement:

$$\boxed{\mathrm{U(t)} = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} v(t) = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + 5\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \\ w(t) = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{t}} + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \end{cases}}$$

Eléments propres de quelques matrices simples

- Matrice diagonale:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 3; \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 2; \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Matrice de Projection

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1; \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 0; \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de rotation

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}; \mathbf{X}_1 \text{ non réel} \qquad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}; \mathbf{X}_2 \text{ non réel}$$

Eléments propres de quelques matrices simples

- Matrice défective:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1; \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 1; \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{X}_1 \quad !!$$

- Valeur propre double

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -1; \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2}+1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 1; \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = 1; \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice non normale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1+\sqrt{2}; \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 1-\sqrt{2}; \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{On remarque que} : \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \neq 0$$

Quelques observations

- Le nombre de valeurs propres (éventuellement complexes) est TOUJOURS égal à la taille de la matrice
- Le nombre de vecteurs propres réels PEUT être inférieur à la taille de la matrice qui est alors dite <u>défective</u>
- Une matrice ne peut être défective que si elle admet une <u>valeur propre multiple</u>. Autrement dit, deux valeurs propres distinctes admettent des vecteurs propres distincts
- La <u>somme</u> des valeurs propres d'une matrice est égale à la <u>trace</u> de cette matrice
- Le <u>produit</u> des valeurs propres d'une matrice est égal au <u>déterminant</u> de cette matrice

Diagonalisation des matrices

- Si **A** est une matrice de taille n qui admet n vecteurs propres distincts (linéairement indépendants), alors on dit que **A** est <u>diagonalisable</u>. Si on note **S** la matrice dont les colonnes sont les n vecteurs propres de **A**, alors on montre facilement:

$$\mathbf{AS} = \mathbf{S\Lambda} \quad ; \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} \quad ; \quad \mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$$

- Dans ces trois égalité équivalentes, Λ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de **A**:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{X_1} & \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Au sujet du terme « diagonalisable »

- Si **A** et **B** sont deux matrices carrées de même taille et qu'il existe une matrice **S** inversible telle que

$$\mathbf{AS} = \mathbf{SB} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} \quad ; \quad \mathbf{A} = \mathbf{SBS}^{-1}$$

  alors on dit que **A** et **B** sont <u>semblables</u>.

- **A** est donc <u>diagonalisable</u> si elle est <u>semblable</u> à une matrice <u>diagonale</u>.

Variables caractéristiques

- Si la matrice **A** est diagonalisable**:**

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1} \quad \text{avec } \Lambda \text{ matrice diagonale}$$

- Le système différentiel initial peut s'écrire:

$$\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{AU} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U} \quad \text{soit :} \quad \mathbf{S}^{-1}\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}} = \Lambda\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}$$

- On introduit alors les <u>variables caractéristiques</u>: $\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}$

  qui permettent d'écrire le système sous la forme: $\dfrac{\mathbf{dW}}{\mathbf{dt}} = \Lambda\mathbf{W}$

- On notera dans la suite: $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$

Re-Re-Retour sur l'exemple

- Ecrit à partir des variables caractéristiques, le système différentiel est découplé**:**

$$\frac{\mathbf{dW}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{\Lambda W} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dW_1}{dt} = \lambda_1 W_1 = -W_1 \\ \dfrac{dW_2}{dt} = \lambda_2 W_2 = 2W_2 \end{cases}$$

- Les variables caractéristiques évoluent de manière indépendante l'une de l'autre

$$\begin{cases} W_1(t) = W_1(0)e^{-t} \\ W_2(t) = W_2(0)e^{2t} \end{cases}$$

Re-Re-Retour sur l'exemple

- Les conditions initiales pour les variables caractéristiques s'obtiennent simplement:

$$\mathbf{W} = \mathbf{S^{-1}U} \quad \text{avec} \quad \mathbf{S^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où} \begin{bmatrix} W_1(0) \\ W_2(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v(0) \\ w(0) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Les variables caractéristiques sont finalement égales à

$$\begin{cases} W_1(t) = 3e^{-t} \\ W_2(t) = e^{2t} \end{cases}$$

Re-Re-Retour sur l’exemple

- Connaissant les variables caractéristiques, on peut retrouver les variables <u>primitives</u> *v(t)* et ***w(t):***

$$\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{SW}$$

$$\text{c'est} - \text{à} - \text{dire}: \quad \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

- On retrouve évidemment la même solution que précédemment:

$$\boxed{\begin{cases} v(t) = 3\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{2t} \\ w(t) = 3\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{2t} \end{cases}}$$

Base propre

- Si **A** est une matrice diagonalisable, elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants. Ces vecteurs constituent une base appelée « base propre »

- Les colonnes de la matrice **S** contiennent les composantes des vecteurs propres dans la base canonique: c'est aussi par définition la matrice de passage de la base canonique (base B) à la base propre (base B')

- Si un vecteur admet **X** comme composantes dans la base canonique et **X'** dans la base propre, alors:

ATTENTION !!

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{\mathbf{BB'}}\mathbf{X'} \quad , \quad \mathbf{P}_{\mathbf{BB'}} = \mathbf{S}$$

Changement de base

- Dans le cas d'un système différentiel, cette formule de changement de base permet de passer des variables primitives aux variables caractéristiques et inversement

$$\mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{W}$$

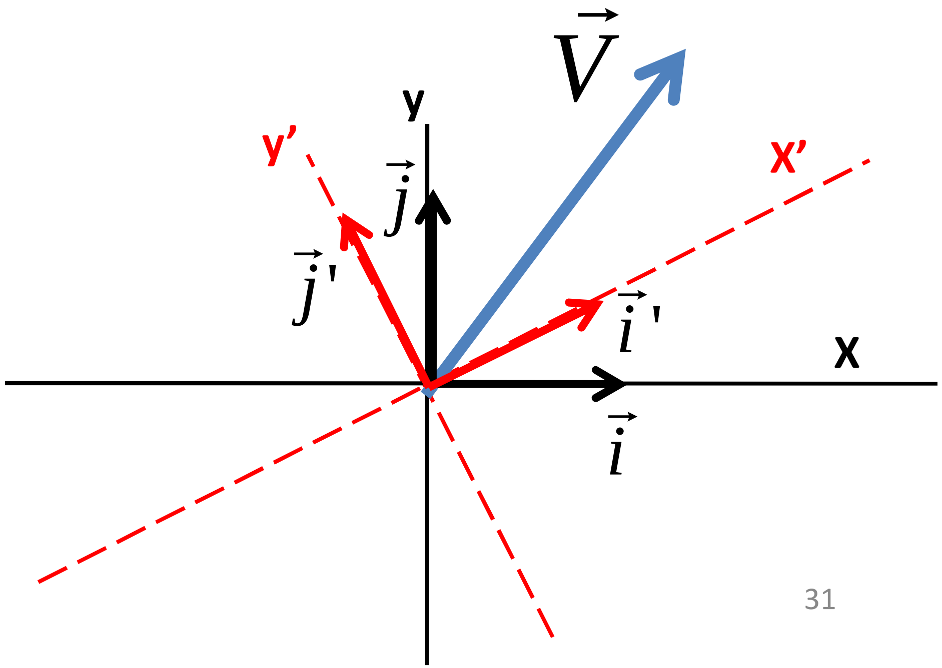
- En géométrie Euclidienne, elle permet de déterminer les composantes d'un même vecteur lorsque représenté dans différentes bases :

$$\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} = V_{x'}\,\vec{i}\,' + V_{y'}\,\vec{j}\,'$$

Les composantes sont liées par :

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}_{\mathbf{BB'}}\mathbf{V'} \text{ avec } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}; \mathbf{V'} = \begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{bmatrix}$$

et les colonnes de $\mathbf{P}_{\mathbf{BB'}}$ contiennent les composantes de $B' = \left(\vec{i}\,', \vec{j}\,'\right)$ exprimées dans la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$



Une application géométrique …

- On s'intéresse à la courbe C d'équation : $\frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy = 1$

$$\text{Sous forme matricielle} : \mathbf{X}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}\mathbf{X} = 1, \text{ avec } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$$

- On montre que **A** est diagonalisable :

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}, \text{ avec } \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

- On remarque que **S** est orthogonale: $\mathbf{SS^t=S^tS=I}$ (ou bien $\mathbf{S^{-1}=S^t}$).

  C'est toujours le cas pour les matrices symétriques ($\mathbf{A^t=A}$) ou même simplement normales ($\mathbf{A^tA=AA^t}$)

- La courbe C admet donc également pour équation:

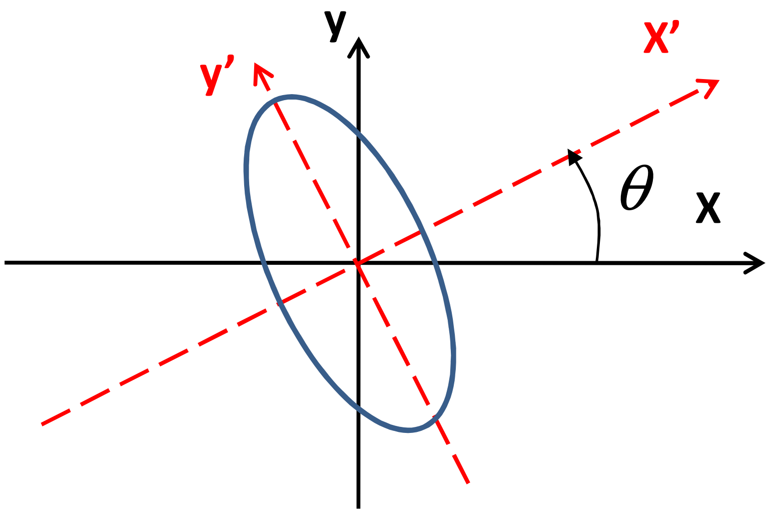
$$\mathbf{X}^{\mathbf{t}}\mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{\mathbf{t}}\mathbf{X} = 1, \text{ ou encore} : \left(\mathbf{S}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\right)^t \Lambda \left(\mathbf{S}^{\mathbf{t}}\mathbf{X}\right) = 1$$

Une application géométrique …

- Exprimée à l'aide des coordonnées **X'=S^{t}X= S^{-1}X**, l'équation de la courbe C devient alors plus simple:

$$\mathbf{X'}^t\,\Lambda\mathbf{X'}=1,\ \text{ou encore}:\quad 2x'^2+y'^2=1$$

- C'est l'équation d'une <u>ellipse</u> de grand axe y' et de petit axe x'



L'analyse en valeurs propres permet de déterminer la bonne base pour observer /décrire la courbe C.
Cette base est la base propre associée à la matrice A.

La formule de changement de base permet de se placer effectivement dans cette base.

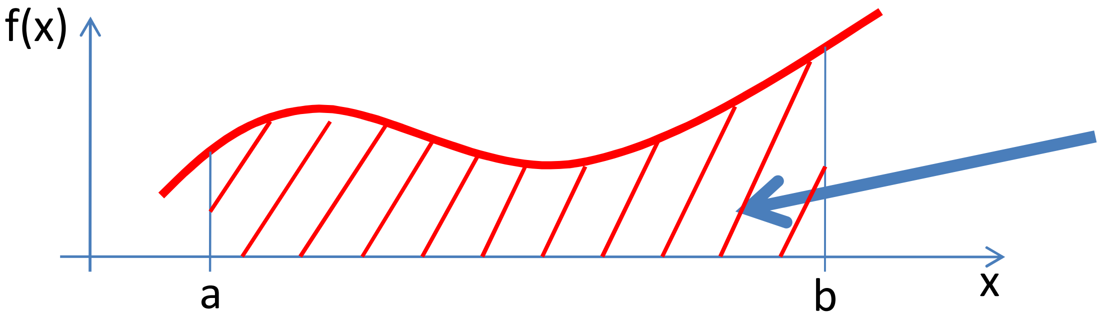
Vecteurs et valeurs propres des matrices

Consulter les notes de cours ‘Algèbre linéaire’ pour plus de propriétés et définitions

Intégrales curvilignes et multiples

Introduction

- Intégrale de Riemann bien connue pour les fonctions numériques à une variable *y=f(x)*:

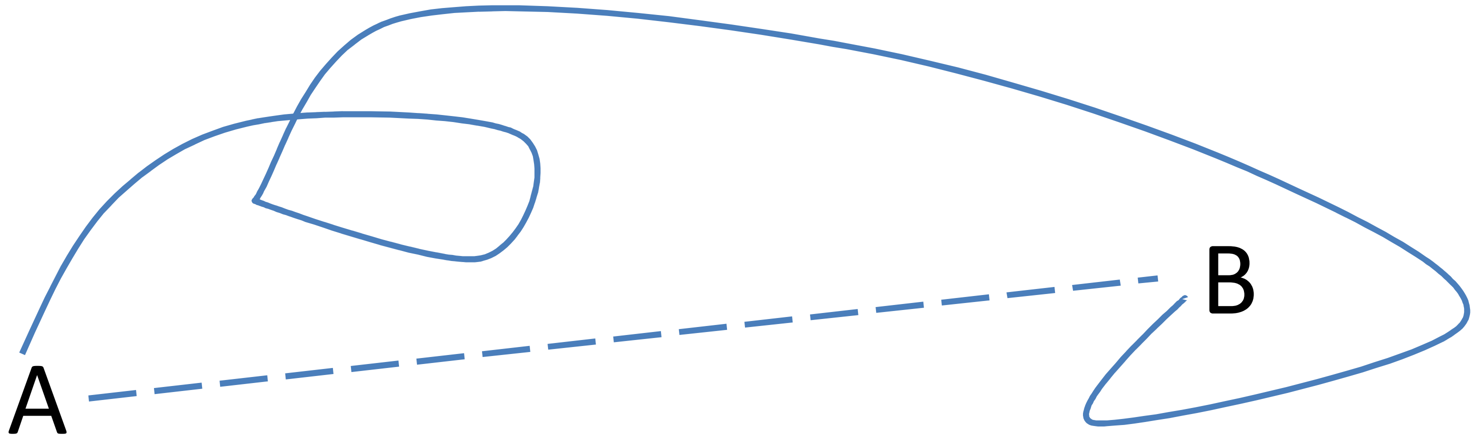


$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx$$

- On a étudié en STE3 les fonctions de plusieurs variables et leur différentiabilité:
  - Dérivée directionnelle, partielle
  - Gradient,
  - Différentielle
  - Matrice Jacobienne et Jacobien
- Dans les sciences de l'ingénieur, il est souvent utile voire indispensable de généraliser la notion d'intégrale aux fonctions de plusieurs variables

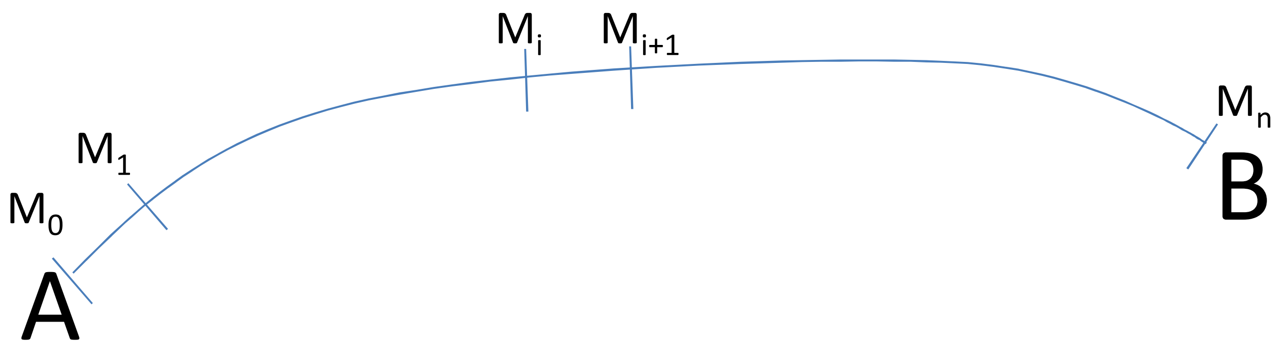
Intégrales curvilignes

- Le domaine d'intégration est une courbe de l'espace (une trajectoire).
- Exemple: la quantité d'énergie dépensée par un véhicule pour aller du point A au point B suivant un itinéraire
- Ne peut pas être représentée par une intégrale de Riemann qui vaut nécessairement zéro lorsque A=B …
- Doit dépendre du chemin parcouru



Intégrales curvilignes

- On se donne une courbe C de R^2 (pourrait être R^3) liant les deux points A et B
- On se donne une suite de points M_0, M_1, …, M_n telle que
  - M_0=A
  - M_n=B
  - toutes les longueurs M_iM_{i+1} sont identiques: $M_0M_1 = M_1M_2 = … = M_iM_{i+1} = … = M_{n-1}M_n$



- On se donne également une fonction f de deux variables:

$$f:(x,y)\mapsto f(x,y)=f(M),$$

où M est le point géométrique de coordonnées (x, y)

Intégrales curvilignes

- On note alors S_n la somme:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) M_i M_{i+1} \ \text{avec}\ M_i M_{i+1} \ \text{la longueur du segment}\ \left[M_i M_{i+1}\right]$$

- Et on définit l'intégrale curviligne de *f* sur le parcours *C* comme la limite suivante:

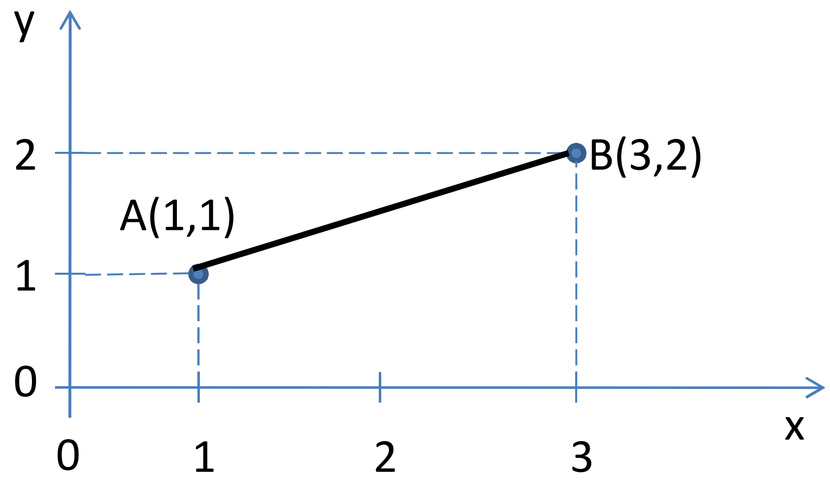
$$\int_C f(x,y)dl = \lim_{n\to\infty} S_n$$

- Remarques:
  - Similarité avec la définition de l'intégrale de Riemann (passage à la limite)
  - 3 ingrédients doivent impérativement être choisis pour définir l'intégrale curviligne: la fonction f, le parcours C, l'élément différentiel dl (ici la longueur de l'élément de parcours dl)
  - Si elle existe, cette intégrale est un nombre (si *f* est une fonction scalaire)

Un exemple concret …

$$\boxed{I = \int_{C:A\to B} (x-y)\,dl = ?}$$

$$\text{Rq}: \quad \text{AB} = \int_{C:A\to B} dl = \sqrt{5}$$



- *dl* est la longueur parcourue sur le parcours *C* lorsque les coordonnées x et y évoluent de dx et dy

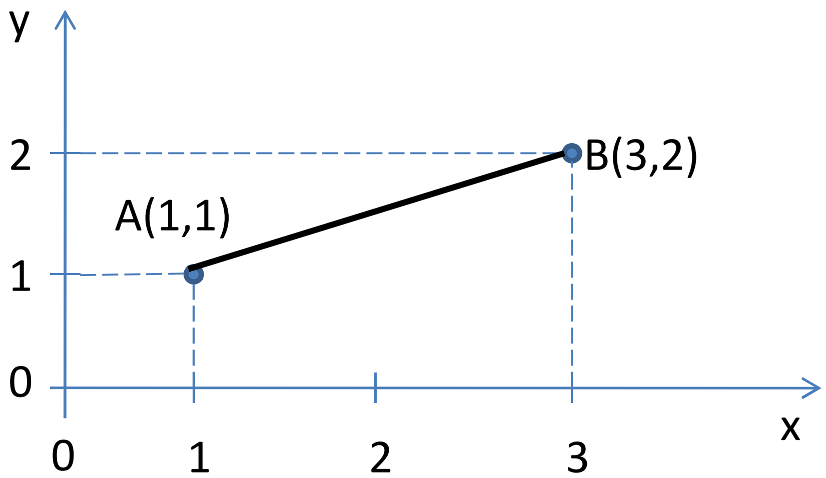
$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

- Le parcours C est le segment de droite [AB]. Son équation est par exemple:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad 1 \leq x \leq 3$$

Un exemple concret …

$$\boxed{I = \int_{C:A\to B} (x-y)\,dl = ?}$$



- Le calcul de l'intégrale curviligne I se fait en la reformulant comme une intégrale de Riemann classique en x

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}dx$$

$$I = \int_{x=1}^{x=3} \left(x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{5}}{2}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - \frac{1}{2}[x]_1^3\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \neq AB$$

Intégrales curvilignes

- On peut définir de manière analogue les intégrales curvilignes suivantes (avec g une fonction vectorielle définie sur C):

$$\int_C f(x,y)\overrightarrow{dl} \ : \ \text{c'est un vecteur}$$

$$\int_C df \ : \text{c'est un scalaire}$$

$$\int_C \vec{g}(x,y)\cdot\overrightarrow{dl} \ : \ \text{c'est un scalaire}$$

$$\int_C \overrightarrow{dg} \ : \text{c'est un vecteur}$$

$$\int_C \vec{g}(x,y)\wedge\overrightarrow{dl} \ : \ \text{c'est un vecteur}$$

...

- Dans le cas où A=B, C est un contour fermé et on note

$$\oint_C \quad \text{au lieu de} \quad \int_C$$

Intégrales curvilignes

- Propriétés: $\int\limits_{C:A\to B} = \int\limits_{C:A\to O} + \int\limits_{C:O\to B}$ avec O un point du parcours C

$$\int\limits_{C:A\to B} = -\int\limits_{C:B\to A}$$

$$\int\limits_{C:A\to B} df = f(B) - f(A) \text{ si } df \text{ est une différentielle exacte de primitive } f$$

$$\oint\limits_{C} df = 0 \text{ si } df \text{ est une différentielle exacte}$$

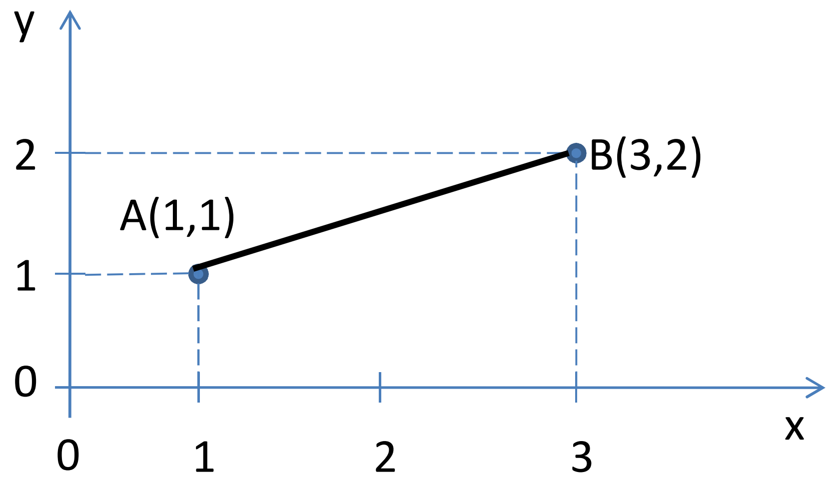
- Calcul pratique: on se ramène à une intégrale de Riemann en utilisant l'équation du parcours C sous une des formes suivantes:

$$y = y(x); \quad x = x(y); \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_A, t_B]$$

Un exemple concret … suite

$$\boxed{I = \int_{C:A\to B} (x-y)\,dl = ?}$$

$$\text{Rq :}\quad \text{AB} = \int_{C:A\to B} dl = \sqrt{5}$$



- Le parcours C est le segment de droite [AB]. Son équation est par exemple:

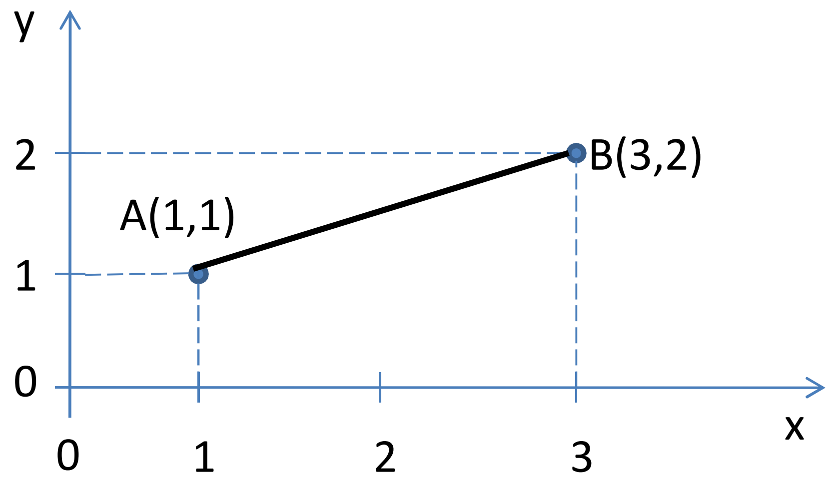
$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \le t \le 1$$

- *dl* est la longueur parcourue sur le parcours *C* lorsque le paramètre *t* évolue *dt*

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{4+1} = \sqrt{5}dt$$

Un exemple concret … suite

$$I = \int_{C:A\to B} (x-y)\,dl = ?$$



- Le calcul de l'intégrale curviligne I se fait en la reformulant comme une intégrale de Riemann classique en t

$$I = \int_{t=0}^{t=1} (2t+1-t-1)\sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \neq AB$$

Intégrales curvilignes

- Exemples:

$$\int_{C:y=y(x)} dl = \int_{x=x_A}^{x=x_B} \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx : \text{longueur du graphe de } f \text{ entre } x_A \text{ et } x_B$$

$$\int_{C:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}} dl = \int_{t=t_A}^{t=t_B} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt : \text{longueur de la courbe paramétrée par t}$$

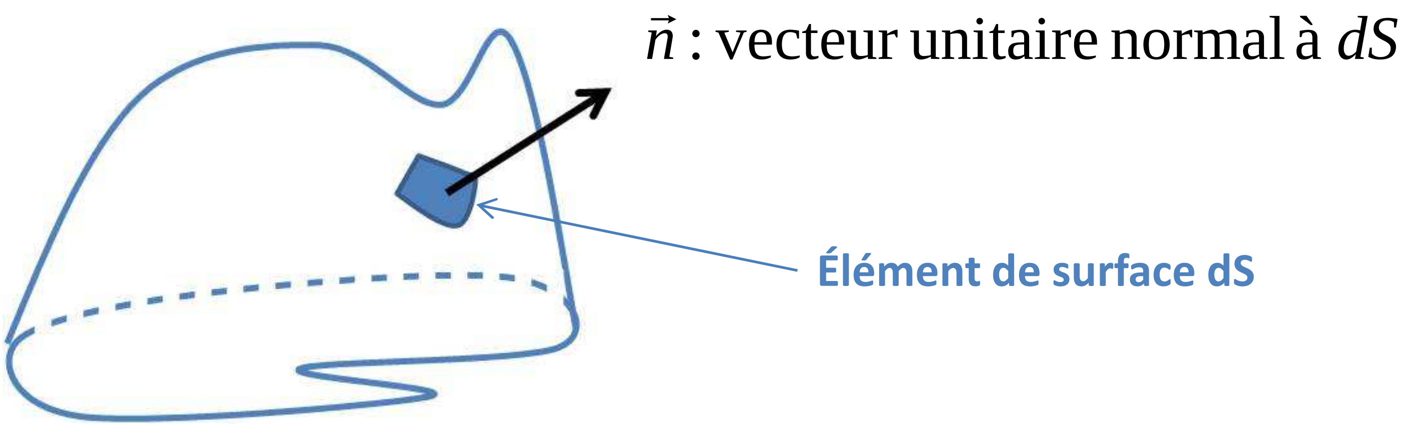
$$\int_C \vec{V}\cdot\overrightarrow{dl} : \text{circulation du champ de vitesse } \vec{V} \text{ le long de } C$$

$$\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\int_{t=t_A}^{t=t_B}\big(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\big)dt$$

aire contenue dans C supposée fermée et parcourue dans le sens anti - horaire

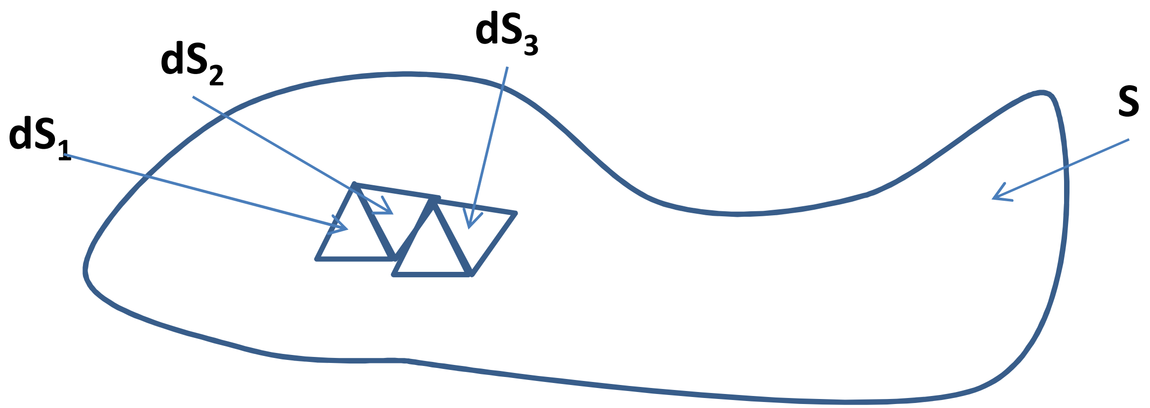
Intégrales de surface

- Le domaine d'intégration est une surface de l'espace
- <u>Exemple</u>: la quantité de pluie qui tombe sur le toit d'une habitation
- La surface est orientée par son vecteur normal unitaire
- Elle peut être ouverte ou fermée



Intégrales de surface

- On se donne une surface S de R^3
- On se donne une famille de N de portions élémentaires de S: dS_0, dS_1, …, dS_n telle que
  - L'intersection des dS_i est nulle (pas de recouvrement)
  - Tout point de S appartient à un unique dS_i (pas de trou)
  - Les aires dA_i des éléments de surface dS_i sont toutes identiques: $dA_1 = dA_2 = … = dA_i = … = dA_N$



- On se donne également une fonction *f* de deux variables:

$$f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = f(M),$$

$$\text{où M est le point géométrique de coordonnées } (x, y, z)$$

Intégrales de surface

- On note alors S_n la somme:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) dA_i \, \vec{n}_i \ \text{ avec } M_i \text{ le centre de l'élément de surface } dS_i$$

- Et on définit l'intégrale de surface de *f* sur la surface S comme la limite suivante:

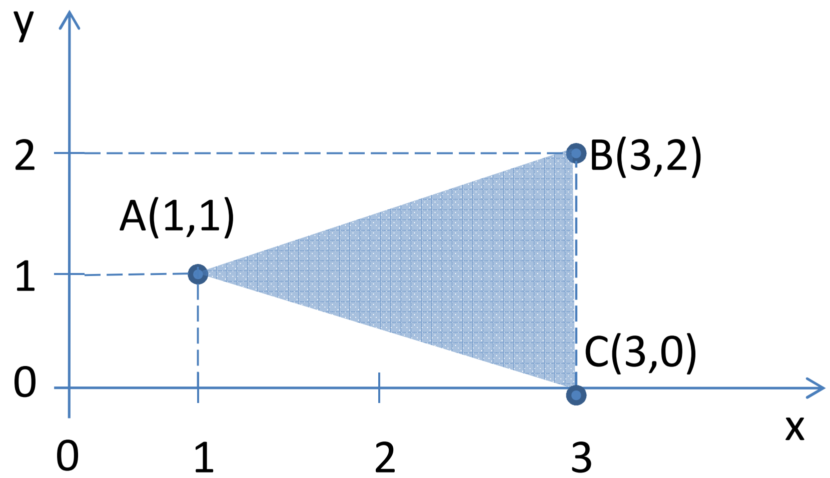
$$\iint_S f(x, y, z) \vec{n} dS = \lim_{n \to \infty} S_n$$

- Remarques:
  - Similarité avec la définition de l'intégrale de Riemann (passage à la limite)
  - 3 ingrédients doivent impérativement être choisis pour définir l'intégrale surfacique: la fonction *f*, la surface orientée S, l'élément différentiel (ici l'aire de l'élément de surface fois le vecteur normal unitaire)
  - Si elle existe, cette intégrale est un vecteur (*f* est une fonction scalaire)

Un exemple concret …

$$I = \iint_{S:\text{triangle ABC}} (x-y)\,dS = ?$$

$$\text{Rq: Aire de ABC} = \iint_{S:\text{triangle ABC}} dS = 2$$



- *dS* est l'élément de surface généré lorsque les coordonnées x et y évoluent de dx et dy

$$dS = dxdy$$

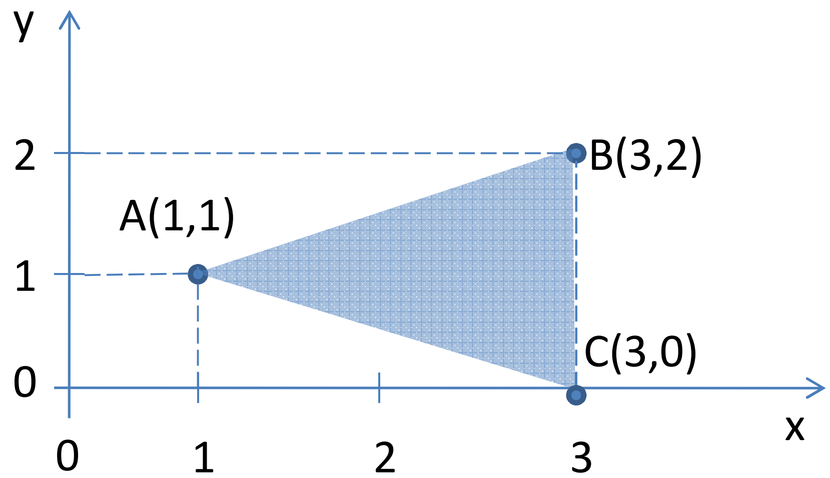
- La surface S est le triangle ABC. Son équation est par exemple:

$$-\frac{x}{2}+\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 \leq x \leq 3$$

Un exemple concret …

$$I = \iint_{S:\text{triangle ABC}} (x-y)\,dS = ?$$

$$\text{Rq : Aire de ABC} = \iint_{S:\text{triangle ABC}} dS = 2$$



- Le calcul de l'intégrale de surface I se fait en la reformulant comme une intégrale de Riemann double classique en x et y

$$I = \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} (x-y)\,dy \right) dx = \int_{x=1}^{3} \left(x[y]_{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} - \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} \right) dx = \int_{x=1}^{3} \left(x(x-1) - \frac{1}{8}(8x-8) \right) dx$$

$$I = \int_{x=1}^{3} (x^2-2x+1)\,dx = \int_{x=1}^{3} (x-1)^2\,dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{8}{3} \neq \text{Aire de ABC}$$

Intégrales de surface

- On peut définir de manière analogue les intégrales de surface suivantes (avec g une fonction vectorielle définie sur *S*):

$$\iint_S f(x,y,z)dS : \text{ c'est un scalaire} \qquad \iint_S d\vec{g}(x,y,z) : \text{ c'est un vecteur}$$

$$\iint_S \vec{g}(x,y,z)dS : \text{ c'est un vecteur} \qquad \iint_S \vec{g}(x,y,z)\wedge\vec{n}dS : \text{ c'est un vecteur}$$

$$\iint_S \vec{g}(x,y,z)\cdot\vec{n}dS : \text{ c'est un scalaire} \qquad \ldots$$

- Dans le cas où S est une surface fermée on note

$$\oiint_S \quad \text{au lieu de} \quad \iint_S$$

Intégrales de surface

- Calcul pratique: on se ramène à une intégrale double de Riemann en utilisant l'équation de la surface S sous une des formes suivantes:

$$x = x(y,z); \quad y = y(x,z); \quad z = z(x,y); \quad \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad \begin{matrix} u \in [u_{\min}, u_{\max}] \\ v \in [v_{\min}, v_{\max}] \end{matrix}$$

- Théorème de Fubini:

$$\text{si a, b, c et d sont des paramètres fixés alors:}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx \right) dy$$

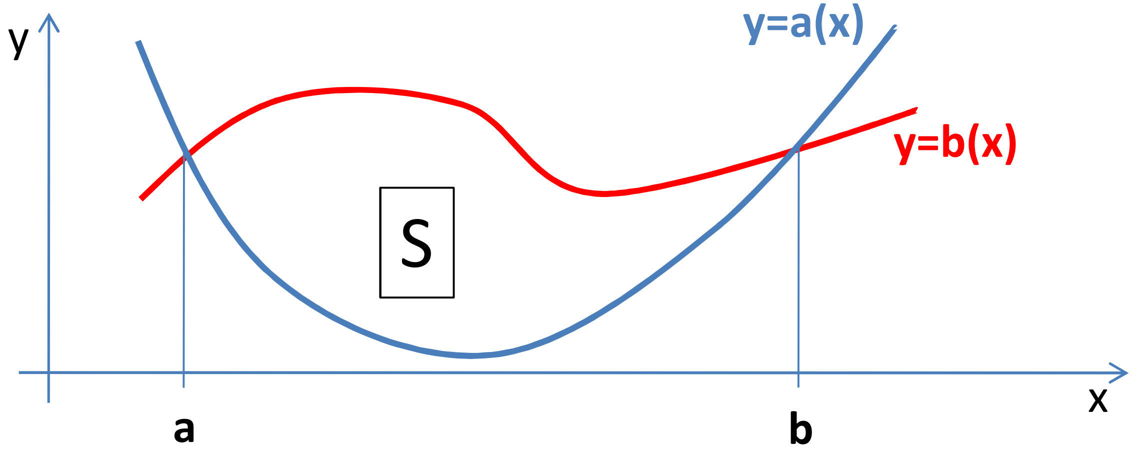
- Et aussi:

$$\text{si a, b, c et d sont des paramètres fixés et si } f(x,y) = g(x)h(y) \text{ alors:}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx \right) dy = \int_{x=a}^{x=b} g(x)dx \times \int_{y=c}^{y=d} h(y)dy$$

Intégrales de surface

- Cas particulier: S est une partie du plan contenue entre les graphes de deux fonctions numériques:



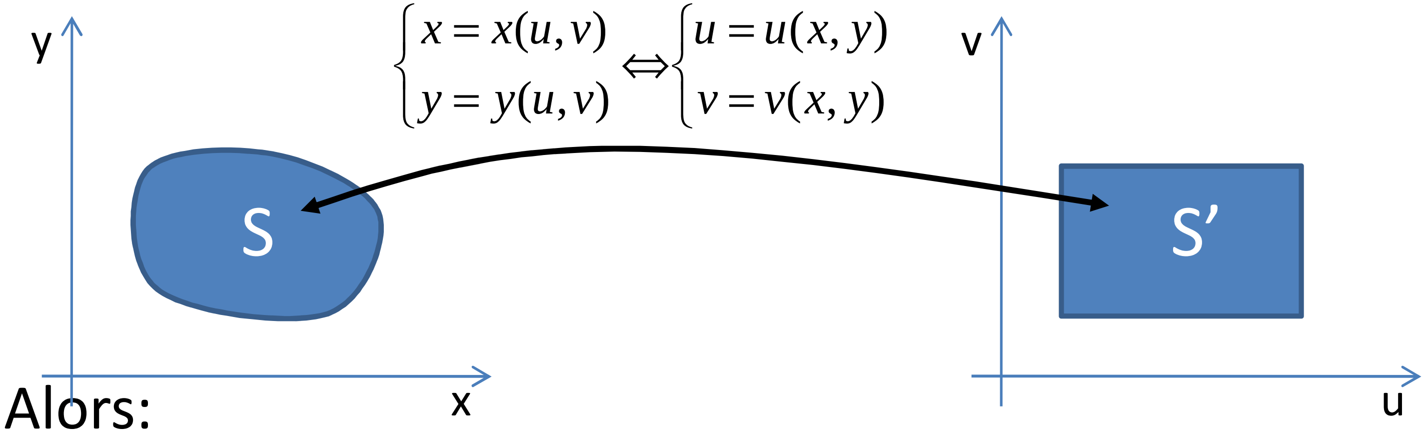
- Alors:

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Intégrales de surface

- <u>Changement de variables</u>:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$



- Alors:

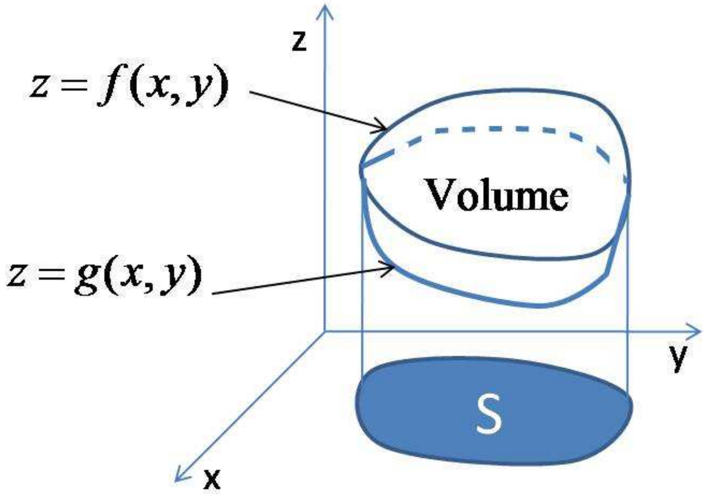
$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_{S'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) J \, dudv$$

$$\text{avec } J \text{ le Jacobien de la transformation : } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

Intégrales de surface

- Exemples:

$$\iint_S dxdy : \text{Aire de } S$$



$$\iint_S \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}\, dxdy :$$

Aire de la surface $z = f(x, y)$ au – dessus de S

$$\iint_S \left[f(x,y) - g(x,y) \right] dxdy :$$

Volume compris entre les surfaces $z = f(x, y)$ et $z = g(x, y)$

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS : \text{Flux du champ de vitesse } \vec{V} \text{ à travers la surface } S$$

Intégrales de volume

- Le domaine d'intégration est une partie (volume) de l'espace
- <u>Exemple</u>: la quantité de nitrate dans une rivière
- On se donne une fonction de l'espace:

$$f:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=f(M),$$

$$\text{où M est le point géométrique de coordonnées } (x,y,z)$$

- Par une construction similaire à celle utilisée pour les intégrales de surface, on définit l'intégrale volumique de *f* sur un domaine Ω de l'espace et on note:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

Intégrales de volume

- La plupart des propriétés énoncées pour les intégrales de surface se généralisent directement pour les intégrales de volume:
  - Théorème de Fubini
  - Changement de variables avec l'aide du Jacobien
- Pour tout domaine Ω de l'espace:

$$\iiint_{\Omega} dxdydz : \text{Volume de } \Omega$$

$$\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dxdydz : \text{Masse de } \Omega \text{ dont la masse volumique est } \rho(x,y,z)$$