# Mathématiques

# Rappels de Base

# 2009

Franck Nicoud

04 67 14 48 46

06 73 05 51 40

nicoud@math.univ-montp2.fr

http://www.math.univ-montp2.fr/~nicoud/

# Sommaire

1- Dérivation

2- Fonctions usuelles

3- Nombres complexes

4- Développements limités

5- Intégration

6- Equations différentielles ordinaires linéaires

7- Eléments de calcul matriciel

8- Systèmes linéaires

Annexe : Réponses aux exercices

**Objectifs pour l'étudiant :**

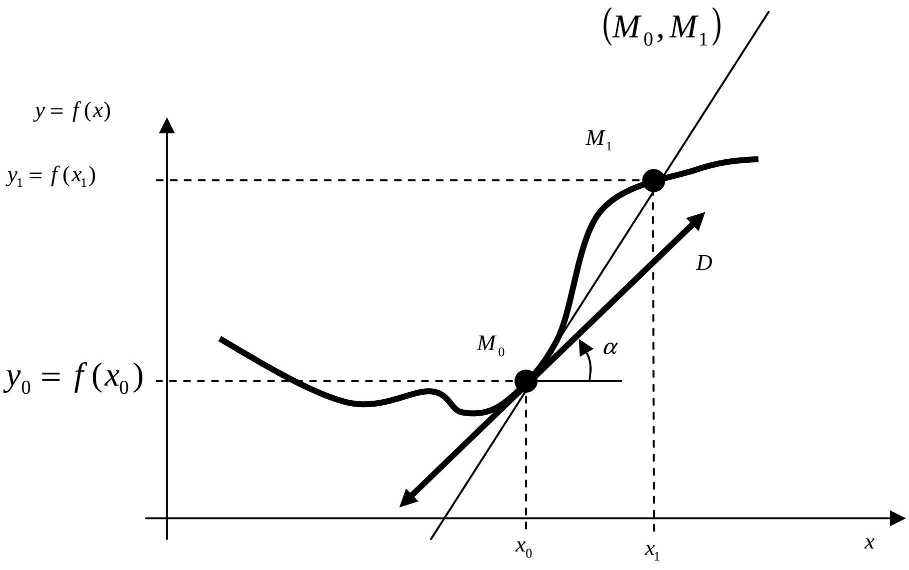
A la fin de la matière, l'étudiant doit pouvoir :

1) dériver et intégrer les fonctions numériques classiques (exp, log, puissance, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques, hyperboliques),
2) reconnaître et manipuler des nombres complexes,
3) résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre et déterminer la constante associée à une condition initiale,
4) résoudre une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants et déterminer les constantes associées à des conditions limites,
5) réaliser un développement limité d'une fonction numérique,
6) réaliser des opérations de base sur les matrices (addition, multiplication, transposition, déterminant, inversion)
7) résoudre un système linéaire d'équations

# 1- DERIVATION

On note **R** l'ensemble des nombres réels et $I$ un intervalle de **R**.

On considère $f$ une fonction continue définie sur $I$ à valeurs réelles. Le graphe de $f$ permet de représenter cette fonction graphiquement :




<u>Remarque</u> : On dit qu'une fonction est continue sur l'intervalle *I* de **R** si elle tend vers sa valeur en tout point c'est-à-dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On note *M0* le point de coordonnées $x_0, f(x_0)$ et *M1* le point de coordonnées $x_1, f(x_1)$. On suppose que la valeur $x_0$ reste fixe et que $x_1$ tend vers $x_0$. La droite ($M_0$, $M_1$) tend alors vers une droite limite *D* appelée tangente au graphe de *f* au point $M_0$. La pente (ou coefficient directeur) de la droite ($M_0$, $M_1$) est égal à $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, celle de la droite D est notée $f'(x_0)$. On l'appelle la dérivée de la fonction *f* au point $x_0$. La droite *D* étant la limite de la droite ($M_0$, $M_1$) lorsque $x_0$ tend vers $x_1$, la dérivée de *f* en $x_0$ est définie par :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

<u>Remarque :</u> La pente de la tangente *D* est aussi égale à la tangente (cf. fonctions circulaires) de l'angle $\alpha$ que forme *D* avec l'horizontale.

L'équation de la droite ($M_0$, $M_1$) s'obtient en disant qu'elle passe par les deux points $M_0$ et $M_1$, soit : $y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$. Par passage à la limite, l'équation de la tangente D du graphe de *f* en $x_0$ est donnée par :

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\times(x - x_0)}$$

Pour le calcul pratique des dérivées, plutôt que la définition ci-dessus, il est plus simple d'utiliser les règles de dérivations classiques ci-dessous (*f* et *g* sont deux fonctions dérivables) :

- Linéarité : $\forall(\alpha,\beta)\in R^2, (\alpha f(x)+\beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
- $[f(g(x))]' = g'(x)\times f'(g(x))$
- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

L'opération de dérivation peut éventuellement être appliquée plusieurs fois consécutivement à la même fonction. On note alors (lorsque celle-ci existe) $f^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de *f* (obtenue en dérivant *k* fois la fonction *f*). Par extension, la notation $f^{(0)}$ sera comprise comme *f* et $f^{(1)}$ comme *f'*.

<u>Exercices :</u>

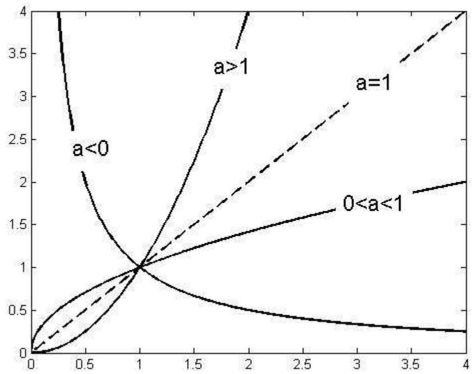
a. Utiliser la définition de la dérivée pour calculer les dérivées de $f(x) = x,\ a\times f(x),\ f(x) = x^2,\ f(x) = x^3$ ,
b. Dessiner le graphe d'une fonction continue, d'une fonction discontinue, d'une fonction croissante dérivable, d'une fonction croissante non dérivable, d'une fonction décroissante non dérivable, d'une fonction non dérivable non monotone,
c. Tracer le graphe d'une fonction dont la dérivée change 3 fois de signe,
d. Utiliser la définition de la dérivée pour montrer que $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ et que $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = \dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$.
e. Etudier (domaine de définition, de dérivabilité, limites, extrema locaux, zéros, comportement asymptotique en l'infini, allure du graphe) les fonctions $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$, $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$.

## 2- FONCTIONS USUELLES

a. Fonction puissance ( $a \in R$ ) : $R^{*+} \to R^{*+}$

$x \mapsto x^a$

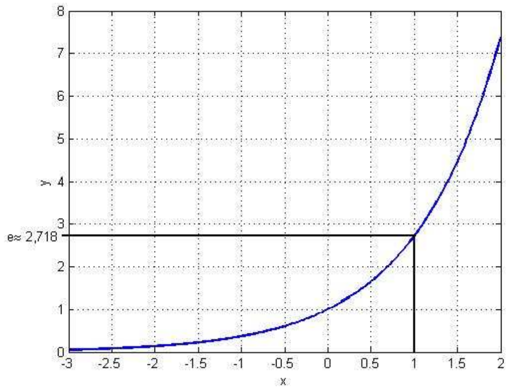
Remarque : Le domaine de définition des fonctions puissance est étendu à l'ensemble des réels tout entier lorsque la puissance *a* est entière (privé de 0 lorsque celle-ci est entière mais négative).




- La fonction puissance est dérivable : $\forall x > 0, \left(x^a\right)' = ax^{a-1}$.
- Les fonctions puissances admettent des fonctions inverses : $\forall a \neq 0, \forall x > 0, \forall y > 0, y = x^a \Leftrightarrow x = y^{1/a}$

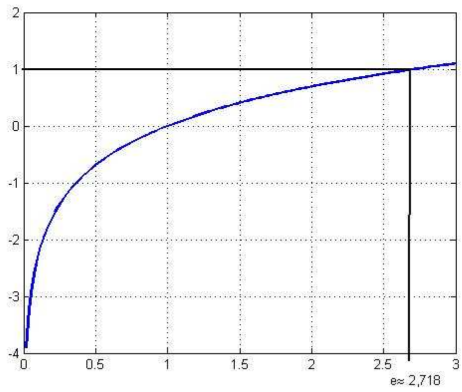
b. Fonction exponentielle : $R \to R^{*+}$

$x \mapsto e^x$ ou $\exp(x)$




- La fonction exponentielle est dérivable : $(e^x)' = e^x$.
- $\forall (x, y) \in R^2, e^{x+y} = e^x e^y$
- $\forall (x, y) \in R^2, (e^x)^y = e^{xy}$
- La fonction exponentielle tend plus vite vers l'infini que n'importe quelle fonction puissance : $\forall a > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$
- La fonction exponentielle admet une fonction inverse : $\forall y > 0, y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

c. <u>Fonction logarithme népérien</u> : $R^{*+} \to R$
$x \mapsto \ln x$



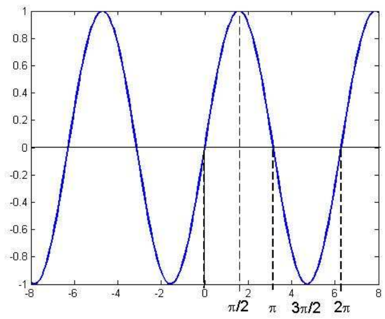
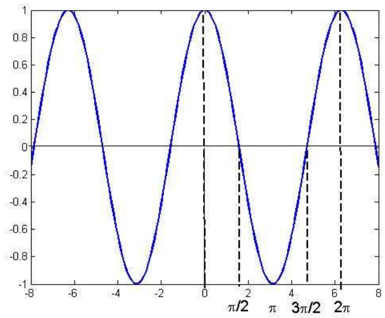
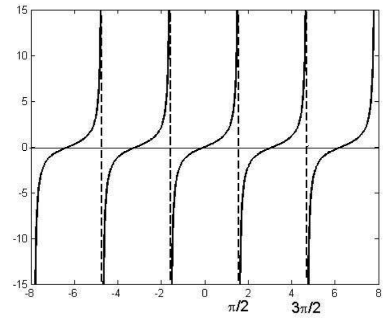

- La fonction logarithme népérien est dérivable : $\forall x > 0, (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $\forall x > 0, \forall y > 0, \ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\forall x > 0, \forall y > 0, \ln(x^y) = y \ln x$

- La fonction logarithme tend plus lentement vers l'infini que n'importe quelle fonction puissance : $\forall a > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$

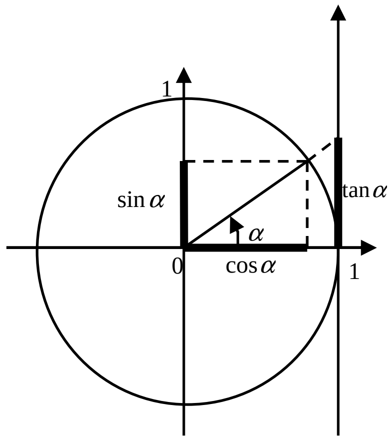
- On définit également le logarithme de base $a > 0$ : $R^{*+} \to R$
$$x \mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

- Les exponentielles de base $a > 0$ sont définies par : $\begin{array}{l} R \to R^{*+} \\ x \mapsto a^x = e^{x \ln a} \end{array}$ et sont les fonctions inverses des logarithmes de base a : $\forall a > 0, \forall y > 0, y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y = \ln y / \ln a$

d. <u>Fonctions trigonométriques</u> :

| | |
|---|---|
| $R \to [-1,1]$<br>$x \mapsto \sin x$ |  |
| $R \to [-1,1]$<br>$x \mapsto \cos x$ |  |
| $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[ \to R$<br>$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ |  |

- Interprétation géométrique à partir du cercle unité :




- Valeurs remarquables :

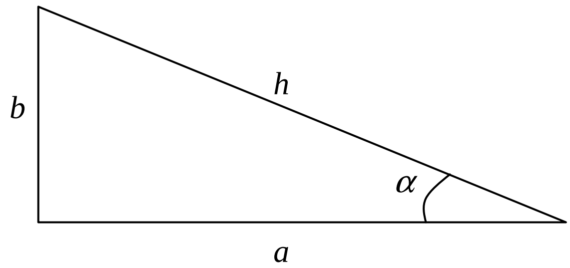
| **Angle** | **cos** | **sin** | **Tan** |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| π/6 | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| π/4 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 |
| π/3 | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}$ |
| π/2 | 0 | 1 | ∞ |

- Quelques propriétés remarquables :
    - Les fonctions cosinus et sinus sont respectivement paire et impaire. Elles sont 2π-périodiques alors que la fonction tangente est π-périodique.
    - $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
    - $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
    - $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
    - $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
    - $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

- Les fonctions trigonométriques sont dérivables sur leur domaine de définition :

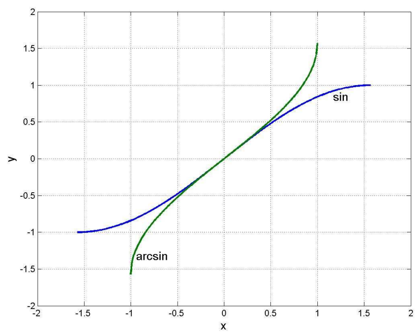
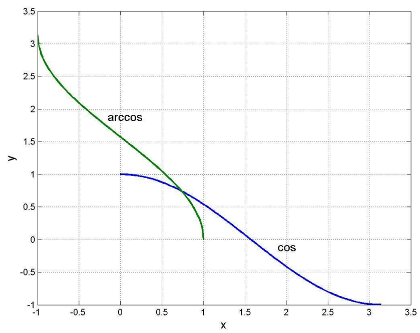
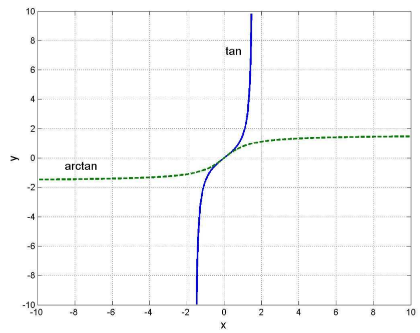
$$\cos' x = -\sin x \quad , \quad \sin' x = \cos x \quad , \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- Triangles rectangles :




$$\cos\alpha = \frac{a}{h} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{h} \qquad \tan\alpha = \frac{b}{a} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

e. <u>Fonctions trigonométriques inverses</u>:

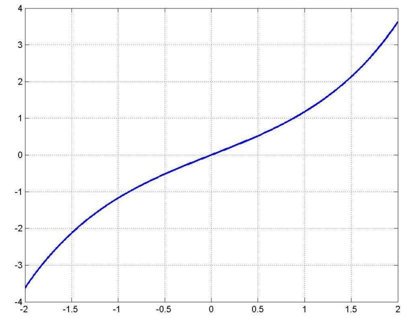
| | |
|---|---|
| $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ <br> $x \mapsto \arcsin x$ |   |
| $[-1,1] \to [0,\pi]$ <br> $x \mapsto \arccos$ |   |
| $R \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ <br> $x \mapsto \arctan x$ |   |

- Les fonctions trigonométriques inverses sont dérivables sur $\left]-1,1\right[$, $\left]-1,1\right[$ et **R** respectivement et :

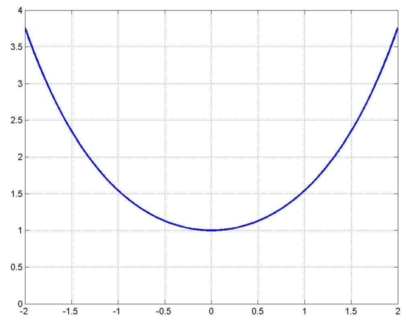
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

f. <u>Fonctions hyperboliques</u> :

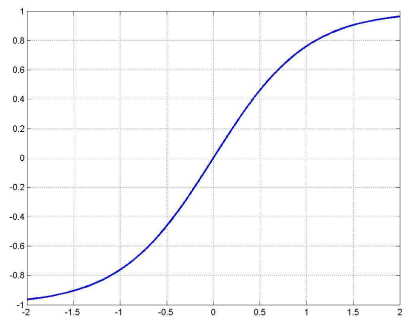
$$R \to R$$
$$x \mapsto shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$




$$R \to \left[1,+\infty\right[$$
$$x \mapsto chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$




$$R \to \left]-1,+1\right[$$
$$x \mapsto thx = \frac{shx}{chx}$$



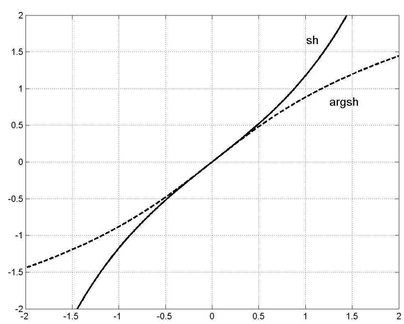

- Valeurs et limites remarquables :

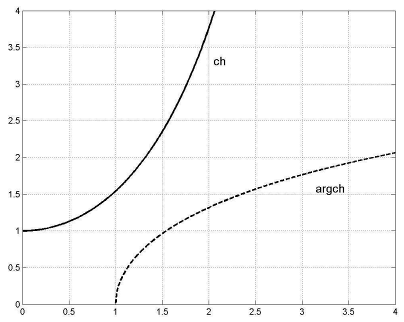
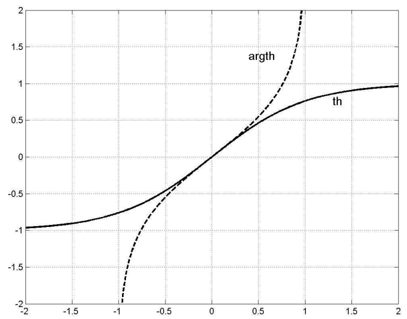
| **Angle** | **ch** | **sh** | **Th** |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\to +\infty$ | $\to +\infty$ | $\to +\infty$ | $\to +1$ |
| $\to -\infty$ | $\to +\infty$ | $\to -\infty$ | $\to -1$ |

- Quelques propriétés remarquables :
    - Les fonctions ch et sh sont respectivement la partie paire et impaire de l'exponentielle : $e^x = \underbrace{ch\,x}_{paire} + \underbrace{sh\,x}_{impaire}$
    - $ch^2x - sh^2x = 1$
    - $sh2x = 2shx\,chx$
    - $ch2x = ch^2x + sh^2x$
    - $ch(a+b) = cha\,chb + shb\,sha$
    - $sh(a+b) = sha\,chb + shb\,cha$

- Les fonctions hyperboliques sont dérivables sur leur domaine de définition : $ch'x = shx \quad , \quad sh'x = chx \quad , \quad th'x = 1 - th^2x = \dfrac{1}{ch^2x}$

g. <u>Fonctions hyperboliques inverses</u>:

| | |
|---|---|
| $R \to R$<br>$x \mapsto \arg sh\,x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ |  |

| | |
|---|---|
| $[1,+\infty] \to R^+$<br>$x \mapsto \arg ch\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ |  |
| $]-1,1[ \to R$<br>$x \mapsto \arg th\, x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ |  |

- Les fonctions hyperboliques inverses sont dérivables sur R, $]1,+\infty[$ et $]-1,1[$ respectivement et :

$$\arg sh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad \arg ch' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad \arg th' x = \frac{1}{1-x^2}$$

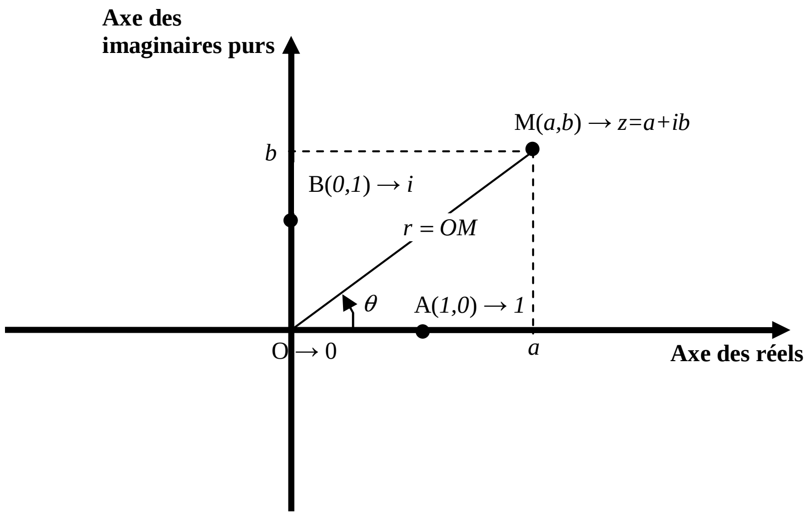
<u>Exercices :</u>

a. Etudier (domaine de définition, de dérivabilité, limites, extrema locaux, zéros, allure du graphe) les fonctions $f(x) = \ln\frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$, $f(x) = \sqrt{e^x - x}$, $f(x) = \cos x + \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

# 3- NOMBRES COMPLEXES

Il est parfois utile de disposer d'un ensemble de nombres plus vaste que l'ensemble des nombres réels. On appelle cet ensemble **C**, ensemble des nombres complexes.

- Interprétation géométrique : on repère le plan euclidien par l'axe des abscisses ou axe des réels et par l'axe des ordonnées ou axe des imaginaires purs. Ainsi à chaque point géométrique M du plan on peut associer un « nombre » qui contient les coordonnées du point selon les axes réels et imaginaire pur (c'est-à-dire l'abscisse et l'ordonnée du point). On appelle affixe de M ce nombre.




- A l'origine O du plan on associe logiquement le nombre *0*. Le nombre réel *1* est l'affixe du point géométrique A de coordonnées (*1,0*) dans le plan. On appelle *i* (ou *j*) l'imaginaire pur qui est l'affixe du point géométrique B de coordonnées (*0,1*). Plus généralement, on associe l'affixe $z=a+ib$ au point géométrique M de coordonnées ($a,b$).
- $a$ et $b$ sont les parties réelle et imaginaire de $z$ respectivement.
- On appelle conjugué de $z = a + ib$ le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - ib$
- La richesse du calcul complexe vient de ce que le carré de l'imaginaire pur $i$ est égal à $-1$ : $i^2 = -1$
- En utilisant les règles classiques du calcul réel, le carré du nombre complexe $z$ est alors lui-même complexe : $z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$
- Introduisant $r$ et $\theta$ les coordonnées polaires du point M, les parties réelles et imaginaires de $z$ peuvent s'exprimer : $a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$

- Le complexe z peut alors s'écrire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou bien encore $z = re^{i\theta}$ où l'on a utilisé la notation « exponentielle complexe» $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. $r = |z|$ est alors le module de $z$ et $\theta = \arg(z)$ est son argument (défini modulo $2\pi$, souvent pris dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$)
- Le conjugué de $z = re^{i\theta}$ est $\bar{z} = re^{-i\theta}$
- Le module et l'argument peuvent être calculés à partir des parties réelles et imaginaires et on a : $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$; $\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan(b/a), a>0 \\ \arctan(b/a)+\pi, a<0 \end{cases}$
- Le module d'un nombre complexe $z$ est aussi tel que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- Les relations d'Euler se déduisent directement de cette notation et permettent d'écrire les fonctions cosinus et sinus à partir d'exponentielles complexes: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ , $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Les règles de calcul classiques connues pour les nombres réels s'appliquent aux nombres complexes. Notamment les identités remarquables suivantes pourront toujours être utilisées :

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
- Les solutions dans **C** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$. On remarque que cette équation admet toujours 2 solutions (éventuellement une solution double) puisque dans **C** la racine carrée d'un nombre négatif existe. Si les coefficients $a,b,c$ sont réels alors les deux racines sont soit réelles soit complexes conjuguées.

<u>Exercices :</u>

a. $z_1$ et $z_2$ étant deux nombres complexes, calculer $\overline{z_1 z_2}$, $\overline{z_1 + z_2}$ en fonction de $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$.

b. Calculer $|z|, \arg(z)$ en fonction de $|\bar{z}|, \arg(\bar{z})$. Calculer $|z|$ en fonction de $z$ et $\bar{z}$.

c. Calculer la racine des nombres complexes suivants : $5e^{i\pi/2}, 4e^{-i2\pi/3}, 4-i, 3+2i$

d. Calculer le module et l'argument de $1-i, 4-i, 1+2i, -1+i$

e. Montrer que si les coefficients $a,b,c$ sont réels et que l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines distinctes, celles-ci sont soit réelles soit complexes conjuguées.

f. Utiliser les formules d'Euler pour exprimer $\cos a\cos b, \sin a\cos b, \sin a\sin b$ sans faire intervenir de produits de fonctions trigonométriques

## 4- DEVELOPPEMENTS LIMITES

Il est parfois utile d'approximer une fonction $f$ au voisinage d'un point $x_0$ de son domaine de définition. On utilise pour cela le développement en série de Taylor (on suppose que $f$ est suffisamment régulière en $x_0$ pour que celui-ci existe) :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)$$

Le reste $o\left((x-x_0)^n\right)$ est une fonction de $x$ qui est négligeable devant $(x-x_0)^n$ c'est-à-dire $\lim_{x\to x_0}\frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n}=0$. Le développement de Taylor ne fournit une approximation utile de la fonction $f$ que lorsque le terme résiduel $o\left((x-x_0)^n\right)$ est négligeable, c'est-à-dire au voisinage de $x_0$.

Si l'on se limite au cas où $x_0=0$, la formule de Taylor devient plus simplement : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$, avec $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$. Par application aux fonctions usuelles simples on obtient les développements limités en 0 suivants :

- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$
- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

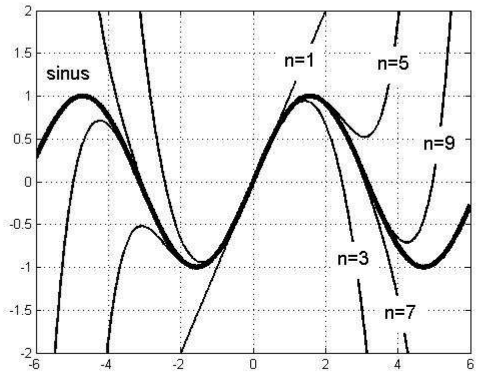
- $chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
- $shx = x + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$

L'ordre d'un développement limité est le degré du dernier terme explicité (par exemple *n* pour le développement de $e^x$ ci-dessus, *2n+1* pour celui de $\sin x$). L'approximation de la fonction est d'autant meilleure que l'ordre est élevé. Un développement limité à l'ordre 1 est une approximation linéaire de la fonction considérée : c'est aussi l'équation de la tangente au graphe de la fonction.

De manière générale, un développement limité en $x_0$ de la fonction composée $f(g(x))$ peut s'obtenir de deux manières différentes :

- en exprimant les dérivées successives de $f(g(x))$ en $x_0$ et en utilisant la formule de Taylor générale donnée plus haut. Les calculs peuvent parfois s'avérer (très) fastidieux,
- en combinant un développement limité de la fonction $g(x)$ en $x = x_0$ et un développement de la fonction $f(u)$ en $u = g(x_0)$. Les ordres des développements des fonctions *f* et *g* doivent alors être choisis judicieusement afin d'atteindre l'ordre d'approximation désiré pour $f(g(x))$ sans multiplier les calculs inutiles. Cette méthode est souvent beaucoup plus efficace.

<u>Exemple</u> : Développements limités successifs de la fonction sinus :




Exercices :

4a : Calculer les développements limités en zéro des fonctions suivantes : $a^x$ (ordre 4) ; $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (ordre 4) ; $\frac{1}{e^x-1}$ (ordre 3) ; $\tanh x$ (ordre 5) ; $\frac{1}{\tanh x}$ (ordre 5) ; $\tan x$ (ordre 5) ; $\arctan x$ (ordre 5) ; $e^{\cos x}$ (ordre 4) ; $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ (ordre 4)

## 5- INTEGRATION

Partant d'une fonction *f*, on note $\int f(x)dx$ une primitive de *f*, c'est-à-dire une *fonction* dont la fonction dérivée est *f*. En utilisant les propriétés de la dérivation, on montre que :

- $\int f(x)dx$ est en fait définie à une constante additive près,
- Linéarité : $\forall\,(\alpha,\beta)\in R^2,\ \int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$
- Intégration par parties : $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$
- Changement de variable : $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt,\ t=g(x)$
- Quelques primitives classiques :

| $f(x)$ | $\int f(x)dx$ | $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|---|---|
| $x^\alpha, \alpha\neq -1$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}, \lvert u(x)\rvert<1$ | $\arcsin(u(x))$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$ | $\mathrm{argsh}(u(x))$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u'(x)u^{\alpha}(x), \alpha \neq -1$ | $\dfrac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ | $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}, \lvert u(x)\rvert > 1$ | $\operatorname{argch}(u(x))$ |
| $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln\lvert u(x)\rvert$ | $\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ | $\arctan(u(x))$ |
| $u'(x)e^{u(x)}$ | $e^{u(x)}$ | $\dfrac{u'(x)}{1-u^2(x)}, \lvert u(x)\rvert \neq 1$ | $\operatorname{argth}(u(x))$ |

Pour l'intégration de fractions du type $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ où $N(x)$ et $D(x)$ sont deux fonctions polynomiales, il est judicieux de simplifier la fonction considérée en réalisant la division Euclidienne de $N(x)$ par $D(x)$, soit $N(x) = Q(x)D(x) + R(x)$ où $Q(x)$ et $R(x)$ sont deux fonctions polynomiales, respectivement le quotient et le reste, le degré de $R(x)$ étant strictement inférieur à celui de $D(x)$.

Ainsi on peut toujours se ramener à une fraction polynomiale $\dfrac{R(x)}{D(x)}$ dans laquelle le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur. Il est alors commode pour intégrer de décomposer cette fonction en *éléments simples*. On factorise pour cela le polynôme $D(x)$ en facteurs de degré au plus égal à 2 : $D(x) = C(x-x_1)^{p_1}\ldots(x-x_r)^{p_r}(x^2+a_1x+b_1)^{q_1}\ldots(x^2+a_sx+b_s)^{q_s}$. On peut alors toujours réécrire la fraction polynomiale $\dfrac{R(x)}{D(x)}$ sous la forme

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{1,p_1}}{(x-x_1)^{p_1}} \ldots + \frac{A_{r,1}}{x-x_r} + \ldots + \frac{A_{r,p_r}}{(x-x_r)^{p_r}}$$
$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+a_1x+b_1} + \ldots + \frac{B_{1,q_1}x + C_{1,q_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{q_1}} + \ldots + \frac{B_{s,1}x + C_{s,1}}{x^2+a_sx+b_s} + \ldots + \frac{B_{s,q_s}x + C_{s,q_s}}{(x^2+a_sx+b_s)^{q_s}}$$

où les $A_{1,1};\ldots;A_{1,p_1};\ldots;A_{r,1};\ldots;A_{r,p_r};B_{1,1};C_{1,1};\ldots;B_{1,q_1};C_{1,q_1};\ldots;B_{s,1};C_{s,1};\ldots;B_{s,q_s};C_{s,q_s}$ sont des coefficients qui peuvent être déterminés par identification en réduisant la forme ci-dessus au même dénominateur $D(x)$.

<u>Exemple</u> : $f(x) = \dfrac{x^4+3x+4}{x^3+2x^2-3}$ peut s'écrire, en remarquant que $x^4+3x+4 = (x-2)(x^3+2x^2-3)+4x^2+6x-2$, sous la forme $f(x) = x-2+\dfrac{4x^2+6x-2}{x^3+2x^2-3}$, ce

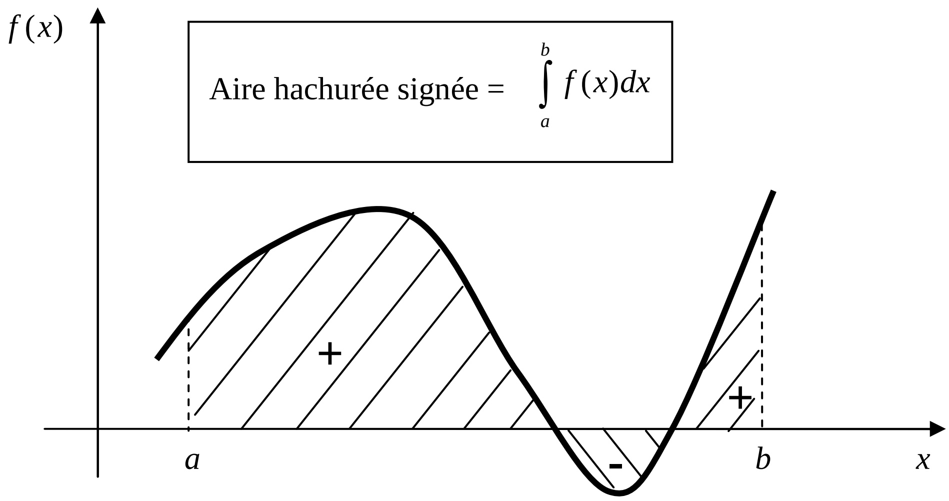
qui permet de simplifier le calcul de la primitive de $f(x)$, soit $\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx$, avec $\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{4x^2+6x-2}{x^3+2x^2-3}$. Le dénominateur $D(x)$ de la fraction polynomiale restante se factorise comme $x^3+2x^2-3 = (x-1)(x^2+3x+3)$ et $\frac{R(x)}{D(x)}$ admet donc une décomposition en éléments simples de la forme $\frac{4x^2+6x-2}{x^3+2x^2-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+3}$. Les coefficients A, B et C se déterminent par identification et on trouve finalement : $\frac{4x^2+6x-2}{x^3+2x^2-3} = \frac{8/7}{x-1} + \frac{20x/7+38/7}{x^2+3x+3}$. Le premier terme s'intègre en $\int \frac{8/7}{x-1}dx = \frac{8}{7}\ln|x-1|$, le deuxième peut se réécrire sous la forme $\frac{10}{7}\frac{2x+3}{x^2+3x+3} + \frac{8/7}{x^2+3x+3}$. Le premier terme s'intègre à son tour comme $\int \frac{10}{7}\frac{2x+3}{x^2+3x+3}dx = \frac{10}{7}\ln\left(x^2+3x+3\right)$ et le deuxième peut être reformulé comme $\frac{8/7}{(x+3/2)^2+3/4}$ ou encore $\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{8}{7}\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2+1}$ qui une fois intégré donne enfin $\frac{16\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{3}/2}\right)$. On trouve finalement le résultat recherché : $\int \frac{x^4+3x+4}{x^3+2x^2-3}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{8}{7}\ln|x-1| + \frac{10}{7}\ln\left(x^2+3x+3\right) + \frac{16\sqrt{3}}{21}\arctan\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{3}/2}\right)$

Remarques :

- les éléments simples irréductibles dont la multiplicité $p$ est supérieure à 2 s'intègrent par parties en faisant apparaître une forme en $u'(x)/u^p(x)$. Par exemple, la primitive $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ se trouve en écrivant $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{2x}dx = -\frac{1}{2x(1+x^2)} - \int \frac{dx}{2x^2(1+x^2)}$. On fait alors une réduction en éléments simples pour trouver finalement $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$.

- Même si la fonction de départ $\frac{R(x)}{D(x)}$ est réelle, on peut réaliser la décomposition en éléments simples en complexe auquel cas tous les facteurs sont du premier ordre. Il est alors nécessaire de regrouper les différents termes obtenus après intégration afin de retrouver l'expression de la primitive réelle recherchée.

La notion de primitive (fonction) est distincte de celle d'intégrale d'une fonction sur un intervalle. Par exemple l'intégrale de Riemann de *f(x)* sur l'intervalle [*a*,*b*], si elle existe, est un *nombre* noté $\int_a^b f(x)dx$. Cette quantité peut être comprise comme la généralisation au cas continu de la notion de somme $\sum_{i=1}^{N} f_i$, où les $f_i$ sont les termes d'une suite de nombres. Dans la notation intégrale, les bornes *a* et *b* jouent le rôle des indices *1* et *N*, le signe intégral $\int$ joue le rôle du signe somme $\sum$, la quantité $f(x)dx$ joue le rôle du terme $f_i$ et la variable d'intégration *x* celui de l'indice muet *i*. C'est d'ailleurs par passage à la limite de sommes discrètes que se définit l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. De cette construction on peut déduire l'interprétation géométrique suivante de l'intégrale de Riemann :



Les bornes d'intégration ne sont pas nécessairement finies. On parle alors d'intégrale impropre et on définit par exemple $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ comme la limite, si elle existe et qu'elle est finie, de la quantité $\int_a^X f(x)dx$ lorsque X devient arbitrairement grand : $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx$.

De manière équivalente on définit $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{X \to -\infty} \int_X^b f(x)dx$ si cette limite existe et qu'elle est finie.

Un lien existe entre l'intégrale d'une fonction *f(x)* et sa primitive $F(x) = \int f(x)dx$ lorsque *f(x)* est continue sur l'intervalle d'intégration : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. On note que toute primitive de *f(x)* étant dérivable sur ce même intervalle, elle est aussi continue.

Quelques propriétés des intégrales:

- Linéarité : $\forall (\alpha, \beta) \in R^2$, $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- Intégration par parties : $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Changement de variable : $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{t=g(a)}^{t=g(b)} f(t)dt$
- La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ admet *f(x)* comme dérivée. C'est donc la primitive de *f(x)* qui s'annule en *x=a*.

Exercices :

5a : Calculer les primitives suivantes : $\int \frac{dx}{x/2+3}$ ; $\int \frac{x^2}{2x+5}dx$ ; $\int \frac{x}{(3x-2)^2}dx$ ; $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$ ;

$\int \frac{x}{2x^2-3}dx$ ; $\int \frac{dx}{x(2x^2-3)}$ ; $\int \frac{1}{5x^2+3}dx$ ; $\int \frac{1}{x^2(2x^2+1)}dx$ ; $\int \frac{x^2}{2x^2+1}dx$ ;

$\int \frac{x}{\sqrt{-2x^2+1}}dx$ ; $\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+1}}dx$ ; $\int \sqrt{2-3x^2}\,dx$ ; $\int \tan(3x)dx$ ; $\int \arcsin 2x dx$ ; $\int \sin^4 2x dx$ ;

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (discuter suivant les valeurs de $a,b,c$)

5b : Calculer les intégrales suivantes : $\int_{x=1}^{2} \frac{dx}{x+1}$ ; $\int_{x=-5}^{2} \frac{dx}{x}$ ; $\int_{x=0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\int_{x=1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ (discuter le résultat en fonction de la valeur du paramètre $\alpha$) ; $\int_{x=0}^{2} f(x)dx$ avec $\begin{cases} f(x)=x, & si \quad x<1 \\ f(x)=x+1, & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ ;

$\int_{x=0}^{2} g(x)dx$ avec $\begin{cases} g(x)=x-1, & si \quad x<1 \\ g(x)=\ln x, & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

## 6- EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES LINEAIRES

Ce sont des équations dont les inconnues ne sont pas des nombres mais des fonctions. Elles sont le plus souvent issues de raisonnements physiques faisant appel à des principes tels que le principe fondamental de la dynamique ou la conservation de la masse. Une équation *différentielle ordinaire* (EDO) ne fait intervenir que des fonctions d'une seule et même variable $x$ (dans le cas contraire on parle d'équation aux dérivées partielles – EDP). Une EDO *linéaire* ne fait intervenir que des termes indépendants de la fonction inconnue $f$ ou bien proportionnels à celle-ci ou à une de ses dérivées successives $f^{(k)}$. L'ordre d'une EDO est le plus haut degré de dérivation apparaissant dans l'équation. La forme générale d'une EDO linéaire d'ordre $n$ est donc :

$$\boxed{f^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x)+...+a_1(x)f'(x)+a_0(x)f(x)=b(x)} \qquad \text{(E)}$$

L'inconnue de (E) est la fonction *f(x)*. Les fonctions $a_{n-1}(x),...,a_1(x),a_0(x),b(x)$ sont des données du problème. Lorsque le second membre (ou forçage) $b(x)$ est nul, l'EDO est dite sans second membre ou homogène.

<u>Conséquence de la linéarité :</u>

A toute équation du type (E) on peut associer l'équation homogène ($E_h$) obtenue en supprimant le terme de droite de (E) :

$$f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) f^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x) f'(x) + a_0(x) f(x) = 0 \qquad (E_h)$$

Supposons désormais connue une solution $f_0(x)$ de (E) et cherchons à caractériser les autres solutions $f(x)$ de (E). Par linéarité de cette équation vis-à-vis de la fonction inconnue, il est clair que la fonction $f_h(x)=f(x)- f_0(x)$ est solution de l'équation homogène ($E_h$). Par suite, trouver l'ensemble des solutions $f(x)$ de (E) revient à déterminer l'ensemble des solutions $f_h(x)$ de ($E_h$) et de rajouter à ces fonctions la solution particulière $f_0(x)$ de (E).

1. EDO linéaire du 1er ordre :

On s'intéresse aux solutions de l'équation générique (E) suivante :

$$f'(x) + a(x) f(x) = b(x) \qquad (E)$$

L'équation homogène associée est

$$f_h'(x) + a(x) f_h(x) = 0 \qquad (E_h)$$

Par suite, $f_h'(x)/ f_h(x) = -a(x)$ et en intégrant on obtient $\ln|f_h(x)| = -\int a(x)dx$ ou bien encore :

$$f_h(x) = C \exp(-A(x)),$$

où $A(x) = \int a(x)dx$ et $C$ est une constante arbitraire.

Connaissant la solution générale de ($E_h$), il est désormais nécessaire de déterminer une solution particulière de (E). On peut utiliser pour cela la technique dite de la « variation de la constante » dans laquelle on cherche la solution particulière sous la forme : $f_0(x) = c(x)\exp(-A(x))$, où $c(x)$ est une fonction à déterminer. Pour ce faire on calcule tout d'abord la dérivée de $f_0(x)$, soit $f_0'(x) = c'(x)\exp(-A(x)) - c(x)a(x)\exp(-A(x))$, puis on injecte les expressions de $f_0(x)$ et $f_0'(x)$ dans (E) pour obtenir : $c'(x) = b(x)\exp(A(x))$ ou encore $c(x) = \int b(x)\exp(A(x))dx$. Finalement la solution particulière recherchée admet pour expression $f_0(x) = \exp(-A(x))\int b(x)\exp(A(x))dx$ et les solutions de (E) s'écrivent toutes sous la forme :

$$\boxed{f(x) = \left(C + \int b(x)\exp(A(x))dx\right)\exp(-A(x))}$$

où $C$ est une constante arbitraire qui peut par exemple être déterminer par la connaissance d'une condition limite ou initiale associée à l'équation (E).

2. EDO linéaire du 2$^e$ ordre à coefficients constants:

On s'intéresse aux solutions de l'équation générique (E) suivante :

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = d(x) \qquad \text{(E)}$$

où $a$,$b$ et $c$ sont des constantes données.

L'équation homogène associée est

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0 \qquad (\mathrm{E_h})$$

La solution générale de cette équation s'écrit comme $f_h(x) = C_1Y_1 + C_2Y_2$, où $C_1$ et $C_2$ sont deux constantes arbitraires et $Y_1$ et $Y_2$ sont deux fonctions non linéairement liées. La détermination de celles-ci passe par la résolution du polynôme caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Le discriminant étant $\Delta = b^2 - 4ac$, on pose $\alpha = -b/2a$ et $\beta = \sqrt{|\Delta|}/2a$ et on trouve que :

i. si $\Delta < 0$ alors $Y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $Y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

ii. si $\Delta > 0$ alors $Y_1 = e^{\alpha x}\operatorname{ch}(\beta x)$ et $Y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sh}(\beta x)$

iii. si $\Delta = 0$ alors $Y_1 = e^{\alpha x}$ et $Y_2 = xe^{\alpha x}$

La notation complexe permet d'écrire la même chose de manière plus compacte en introduisant les deux racines $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ du polynôme caractéristique.

On peut alors choisir $Y_1$ et $Y_2$ comme :

i. si $\Delta \neq 0$ alors $Y_1 = e^{r_1 x}$ et $Y_2 = e^{r_2 x}$

ii. si $\Delta = 0$ alors $Y_1 = e^{r_1 x}$ et $Y_2 = xe^{r_1 x}$

Connaissant la solution générale de ($\mathrm{E_h}$), on peut utilise la technique dite de la « variation de la constante » pour obtenir une solution particulière de (E). On écrit donc $f_0(x) = c_1(x)Y_1(x) + c_2(x)Y_2(x)$, où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont deux fonctions à déterminer. Ayant augmenté de une unité le nombre de fonctions à déterminer (2 au lieu de 1), on a la liberté de se donner une contrainte supplémentaire. Il est judicieux de choisir :

$$c_1'(x)Y_1(x) + c_2'(x)Y_2(x) = 0 \qquad (1)$$

Injectant l'expression de $f_0(x)$ dans l'équation (E) on obtient après simplifications :

$$c_1'(x)Y_1'(x) + c_2'(x)Y_2'(x) = \frac{d(x)}{a} \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) constituent un système linéaire à deux équations dont les inconnues peuvent être déterminées de manière unique dès lors que le déterminant du système est non nul, c'est-à-dire $W(x) = \begin{vmatrix} Y_1(x) & Y_2(x) \\ Y_1'(x) & Y_2'(x) \end{vmatrix} = Y_1(x)Y_2'(x) - Y_2(x)Y_1'(x) \neq 0$.

Cette condition est toujours remplie lorsque $Y_1$ et $Y_2$ sont non linéairement liées. On obtient alors les expressions :

$$c_1'(x) = \frac{-Y_2(x)/a}{W(x)} \qquad\qquad c_2'(x) = \frac{+Y_1(x)/a}{W(x)}$$

Finalement, les solutions de s'écrivent sous la forme générale :

$$\boxed{f(x) = \left(C_1 + \int \frac{-Y_2(x)/a}{W(x)}dx\right)Y_1(x) + \left(C_2 + \int \frac{Y_1(x)/a}{W(x)}dx\right)Y_2(x)}$$

Le développement ci-dessus montre que l'on peut toujours résoudre une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants. L'approche « variation de la constante » n'est cependant en général pas la plus efficace pour déterminer la solution particulière de (E) et il est préférable d'utiliser une forme de $f_0(x)$ adaptée au second membre *d(x)*. Par exemple :

i. si *d(x)* est un polynôme de degré *n* alors on cherchera $f_0(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré *n* (ou *n+1* si *c=0*, ou *n+2* si b=*c=0*),
ii. si *d(x)* est de la forme $e^{\lambda x}$ alors on prendra $f_0(x)$ sous la forme :
    a. $e^{\lambda x}$ si $\lambda$ n'est pas solution du polynôme caractéristique,
    b. $xe^{\lambda x}$ si $\lambda$ est solution simple du polynôme caractéristique,

c. $x^2 e^{\lambda x}$ si $\lambda$ est solution double du polynôme caractéristique,

iii. si *d(x)* est de la forme $A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)$ alors on prendra $f_0(x)$ sous la forme :

a. $C\cos(\lambda x)+D\sin(\lambda x)$ si $\lambda$ n'est pas solution du polynôme caractéristique,

b. $x\left(C\cos(\lambda x)+D\sin(\lambda x)\right)$ si $\lambda$ est solution du polynôme caractéristique,

iv. si *d(x)* est de la forme $A\mathrm{ch}(\lambda x)+B\mathrm{sh}(\lambda x)$ alors on prendra $f_0(x)$ sous la forme :

a. $C\,\mathrm{ch}(\lambda x)+D\,\mathrm{sh}(\lambda x)$ si $\lambda$ n'est pas solution du polynôme caractéristique,

b. $x\left(C\,\mathrm{ch}(\lambda x)+D\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right)$ si $\lambda$ est solution du polynôme caractéristique,

v. si *d(x)* est de la forme $g(x)e^{\lambda x}$ alors on prendra $f_0(x)$ sous la forme $z(x)e^{\lambda x}$ et on résout l'équation obtenue pour *z(x)*,

vi. si *d(x)* est une somme de fonctions $d_1(x)$, $d_2(x)$, $d_3(x)$, …, on cherche les solutions particulières associées à chacun des termes pris séparément et on fait la somme des différentes contributions obtenues

<u>Exercices</u> :

6a : Résoudre les EDO du 1er ordre suivantes :

- $f'(x)+2f(x)=x^2-x+3$
- $f'(x)+\dfrac{6}{x+2}f(x)=\dfrac{2}{(x+2)^2}$
- $xf'(x)-2f(x)=x^2$
- $xf'(x)-f(x)=\dfrac{1}{x}$
- $xf'(x)+(1+x)f(x)=e^x$

- $xf'(x) - 2f(x) = \ln x$
- $f'(x) - \tan x\ f(x) = \cos x$
- $f'(x) - \dfrac{n}{x+1} f(x) = e^x (x+1)^n$
- $x(1-x^2) f'(x) + (2x^2 - 1) f(x) = x^3$
- $f'(x) - g'(x) f(x) = g(x) g'(x), \quad g(x)$ fonction donnée
- $\sqrt{1+x^2}\, f'(x) - f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

6b : Résoudre les EDO du 2ème ordre suivantes :

- $f''(x) + f(x) = e^{2x}$
- $f''(x) - f(x) = x^3 + x^2$
- $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$
- $f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = x$
- $f''(x) + f'(x) + f(x) = e^{-x}$
- $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = \sin x$
- $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = sh^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$
- $f''(x) + 9f(x) = \cos(3x)$
- $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 2x + \mathrm{sh}\, 2x - \sin x$
- $f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = \mathrm{ch}\, x \cos 2x$
- $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^x (1 - 2x)$
- $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = e^{-x} \dfrac{x-1}{x^2}$

## 7- CALCUL MATRICIEL

Une *matrice d'ordre* (ou de dimension) $n \times p$ est un tableau rectangulaire de nombres réels ou complexes constitué de *n* lignes et *p* colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & & & a_{2p} \\ \vdots & a_{ij} & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Si l'élément générique de cette matrice, situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, est $a_{i,j}$ la matrice peut également être notée $A = (a_{i,j})$.

Les matrices sont utiles pour représenter les coefficients des systèmes d'équations linéaires ou pour représenter les applications linéaires.

Cas particuliers :

- Si *p=1*, on parle de matrice colonne (ou de vecteur par abus de language),
- si *n=1* on parle de matrice ligne,
- si *n=p* la matrice est dite *carrée* et son ordre est *n*,
- si tous les éléments $a_{i,j}$ sont nuls, alors *A* est la matrice nulle d'ordre $n \times p$, notée $O_{np}$

Opérations sur les matrices :

- **L 'ADDITION** : L'addition de deux matrices n'est possible que si les deux matrices sont de même dimension. *A* et *B* étant deux matrices de dimension $n \times p$. La matrice *S*, somme des deux matrices est une matrice de même dimension ($n \times p$) telle que :

$$\forall (i, j) \in \{1, n\} \times \{1, p\},\ s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

  - Exemple:

$$A \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- Propriétés:
  - L'addition des matrices est commutative.

$$A + B = B + A$$

  - L'addition des matrices est associative.

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

- **LA MULTIPLICATION SCALAIRE :** Soit une matrice $A$ de dimension $n \times p$ et soit un scalaire $\lambda$. La matrice produit $P = \lambda A$ est une matrice de même dimension telle que :

$$\forall (i, j) \in \{1, n\} \times \{1, p\},\ p_{ij} = \lambda a_{ij}$$

- Exemple:

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

L'addition et la multiplication par un scalaire munissent l'ensemble $M_{np}(R)$ (respectivement $M_{np}(C)$) de toutes les matrices de dimension $n \times p$ à coefficients réels (respectivement complexes) d'une structure d'espace vectoriel de dimension finie $n \times p$.

- Propriété:
  - La multiplication scalaire est commutative.

- **LA MULTIPLICATION** : On peut définir la multiplication matricielle de toute matrice $A$ de dimension $n \times p$ par toute matrice B de dimension $p \times m$. Le résultat est alors une matrice $C = AB$ de dimension $n \times m$ dont les éléments sont donnés par :

$$\forall (i, j) \in \{1, n\} \times \{1, m\},\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

- Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 3+0\times 2+2\times 1) & (1\times 1+0\times 1+2\times 0) \\ (-1\times 3+3\times 2+1\times 1) & (-1\times 1+3\times 1+1\times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- Propriétés :
  - associativité $(AB)C = A(BC)$
  - distributivité : $(A+B)C = AC+BC$ et $C(A+B)=CA+CB$
  - en général, non-commutativité : $AB \neq BA$
  - Si $A$ est une matrice de dimension $n\times p$ alors $AI_p = A$ et $I_n A = A$

Transposition :

- $A$ étant la matrice d'ordre $n\times p$ d'élément générique $a_{i,j}$, on note $A^t$ la matrice *transposée* de $A$. C'est la matrice d'ordre $p\times n$ dont l'élément générique est $a_{j,i}$
- $A$ étant la matrice d'ordre $n\times p$ d'élément générique $a_{i,j}$, on note $A^*$ la matrice *transposée hermitienne* (ou *adjointe*) de $A$. C'est la matrice d'ordre $p\times n$ dont l'élément générique est $\overline{a_{j,i}}$, complexe conjugué de $a_{j,i}$.
- $A$ et $B$ étant deux matrices telles que le produit $AB$ existe, on montre que $(AB)^t = B^t A^t$ et que $(AB)^* = B^* A^*$

Définitions spécifiques aux matrices carrées (n=p) :

- La *diagonale* de $A$ est l'ensemble des éléments dont les indices de ligne et de colonne sont identiques : $a_{i,i}$ , $\forall i \in \{1,n\}$. On appelle *trace* de $A$ la somme des éléments diagonaux de $A$. On la note $tr(A)$,
- si seuls les éléments diagonaux de la matrice sont non nuls, la matrice est dite *diagonale*,
- si les éléments extra-diagonaux sont tous nuls et si les éléments diagonaux sont tous égaux à l'unité, alors $A$ est la matrice *identité* d'ordre $n$. Elle est telle que : $\forall (i,j) \in \{1,n\}\times\{1,n\}, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \wedge \quad i = j \Rightarrow a_{ij} = 1$. On la note $I_n$ ou $I$.

- les éléments placés sous la diagonale d'une matrice *triangulaire supérieure* sont tous nuls : $\forall (i,j) \in \{1,n\} \times \{1,n\}, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- les éléments placés au-dessus de la diagonale d'une matrice *triangulaire inférieure* sont tous nuls $\forall (i,j) \in \{1,n\} \times \{1,n\}, i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

- Si $A$ est une matrice carrée de taille $n$ et s'il existe une autre matrice $B$ de même taille que $A$ telle que $AB = BA = I_n$, alors on dit que $A$ est *inversible* et que $A$ et $B$ sont deux matrices *inverses*. On note $B = A^{-1}$ ou $A = B^{-1}$

- une matrice est *symétrique* si elle est vérifie $A = A^t$, soit $\forall (i,j) \in \{1,n\} \times \{1,n\}, a_{ij} = a_{ji}$
- une matrice est *hermitienne* (ou *auto-adjointe*) si elle est vérifie $A = A^*$, soit $\forall (i,j) \in \{1,n\} \times \{1,n\}, a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Toute matrice symétrique réelle est donc hermitienne.

- une matrice est *anti-symétrique* si elle est vérifie $A = -A^t$, soit $\forall (i,j) \in \{1,n\} \times \{1,n\}, a_{ij} = -a_{ji}$
- une matrice est *anti-hermitienne* si elle est vérifie $A = -A^*$, soit $\forall (i,j) \in \{1,n\} \times \{1,n\}, a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$. Toute matrice anti-symétrique réelle est donc anti-hermitienne.

- une matrice est *orthogonale* si elle est vérifie $AA^t = A^t A = I$
- une matrice est *unitaire* si elle est vérifie $AA^* = A^* A = I$. Toute matrice orthogonale réelle est donc unitaire.

- une matrice est *normale* si elle vérifie $AA^* = A^* A$. Les matrices symétriques, hermitiennes, orthogonales et unitaires sont donc des exemples de matrices normales

<u>Déterminant d'une matrice carrée :</u>

Le déterminant de la matrice carrée $(a_{i,j})$ d'ordre $n$ est le nombre :

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & & & a_{2p} \\ \vdots & a_{ij} & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{np} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\alpha} a_{1,p_1} a_{2,p_2} \ldots a_{n,p_n}$$

où la somme est prise sur toutes les permutations $(p_1, p_2,..., p_n)$ de $(1,2,...,n)$ et $\alpha$ est le nombre d'échanges nécessaires pour transformer la séquence $(p_1, p_2,..., p_n)$ en $(1,2,...,n)$. Avec cette définition, le nombre de permutations étant $n!$, le calcul du déterminant de $A$ nécessite environ $n!$ additions (ou soustractions) et $n \times n!$ produits. Globalement le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires au calcul de $\det(A)$ croît comme $n!$.

- **Cas particuliers** :
  - ***n=1:*** $\det(A) = \det([a_{11}]) = a_{11}$
  - ***n=2 :*** $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
  - ***n=3 :*** $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$

- **Calcul du déterminant** : On peut calculer le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre $n$ par récurrence. Notant $M_{ij}$ la sous-matrice déduite de $A$ en ayant enlevé la ligne $i$ et la colonne $j$ de celle-ci, on montre que :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

Il s'agit du développement du déterminant de $A$ suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne. De manière similaire on peut utiliser le développement suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

On appelle respectivement $\det(M_{ij})$ et $(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ le *mineur* et le *cofacteur* de $a_{ij}$.

Le calcul du déterminant d'une matrice de taille $n$ se ramène donc au calcul de $n$ déterminant de matrices de taille $n$-$1$. La récurrence s'arrête grâce au fait que le déterminant d'une matrice de taille $1$ est égal à l'unique élément de cette matrice, soit $\det([a]) = a$. Cette méthode n'est intéressante que si plusieurs des coefficients $a_{ij}$ sont nuls, ce qui permet de réduire le nombre d'opérations nécessaires par un choix judicieux des lignes ou colonnes suivant lesquelles on développe les différents déterminants à calculer. Dans le cas contraire, on retrouve la croissance en $n!$ du nombre d'opérations nécessaires au calcul d'un déterminant de taille $n$. Il vaut alors mieux utiliser les propriétés de commutation du déterminant afin de se ramener au calcul d'un déterminant d'une matrice triangulaire, ce qui permet d'obtenir $\det(A)$ en un nombre d'opérations qui est proportionnel à $n^3$.

- **Propriétés du déterminant**:
  - en échangeant deux lignes (ou deux colonnes) de $A$, on change le signe de $\det(A)$ mais pas sa valeur absolue (ou module si $A$ est complexe),
  - en multipliant tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) de $A$ par un facteur $\lambda$, on multiplie $\det(A)$ par le même facteur $\lambda$. Par suite, si $A$ est d'ordre $n$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
  - en ajoutant à une ligne (ou une colonne) de $A$ un multiple d'une autre ligne (ou colonne) de $A$, on ne modifie pas $\det(A)$. Par suite :
    - si une ligne (ou colonne) de A ne contient que des éléments nuls alors $\det(A) = 0$,
    - si deux lignes (ou colonnes) de $A$ sont identiques ou proportionnelles alors $\det(A) = 0$,
  - le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes diagonaux de la matrice,
  - le déterminant du produit de deux matrices carrées de même taille est égal au produit des déterminants de ces deux matrices : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
  - le déterminant de la transposée de $A$ est égal au déterminant de $A$ : $\det(A^t) = \det(A)$
  - le déterminant de la transposée hermitienne de $A$ est égal au conjugué du déterminant de $A$ : $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$

<u>Calcul de l'inverse d'une matrice carrée :</u>

Le déterminant d'une matrice *A* tire son importance du fait que *A* est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. De plus on montre que :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

où *C* est la matrice des cofacteurs de *A*.

- **Propriétés** :
  - $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
  - $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$
  - $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
  - $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

- **Cas particulier *n=2***:
  - $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

## 8- APPLICATIONS AUX SYSTEMES LINEAIRES

Un système linéaire de *n* équations et *n* inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$ peut s'écrire sous la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où $a_{11},...,a_{nn},b_1,b_2,...,b_n$ sont des coefficients réels ou complexes fixés. Introduisant la matrice carrée $A=(a_{ij})$ de taille *n* et les matrices colonnes $X=\begin{bmatrix} x \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, il est clair que le système d'équation (S) est équivalent à l'équation matricielle $AX=B$ soit :

$$(S) \Leftrightarrow AX=B$$

La résolution du système dépend alors de la valeur de $\det(A)$ :

- Cas où $\det(A)\neq 0$ :

  La matrice admet alors une matrice inverse $A^{-1}$ et en multipliant la relation $AX=B$ à gauche par $A^{-1}$ on obtient directement la solution de $(S)$ sous la forme $X=A^{-1}B$. Le système admet donc dans ce cas une solution unique,

- Cas où $\det(A)=0$ :

  La matrice n'est alors pas inversible et deux cas peuvent se produire :
  - $(S)$ n'admet pas de solution
  - $(S)$ admet une infinité de solutions

Plusieurs techniques existent pour la résolution des systèmes linéaires :

- Méthode de Cramer : l'inconnue $x_j$ est donnée par :

  $x_j=\dfrac{D_j}{\det(A)}$ où $D_j$ est le déterminant obtenu en remplaçant dans $A$ la $j^{\text{ème}}$ colonne par *B*, soit $D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

- Par inversion directe de la matrice du système : $X=A^{-1}B$
- Méthode de Gauss avec substitution: on triangularise le système (S) pour obtenir un système équivalent de la forme

  $(S')\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \dots a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$ et qui peut être résolu efficacement par substitution, la dernière équation donnant $x_n$, l'avant-dernière donnant $x_{n-1}$ à partir de $x_n$, jusqu'à la première équation qui donne $x_1$ à partir des autres inconnues déjà déterminées $x_n, x_{n-1}, ..., x_2$. La triangularisation se fait par un enchaînement d'opérations simples sur les différentes équations (lignes) de $(S)$ :

- Remplacer la ligne $i$ par la ligne $i$ augmentée d'une combinaison linéaire des autres lignes : $L_i \to L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$
- Echanger la ligne $i$ avec la ligne $k$ (utile afin de conserver des coefficients non nuls sur la diagonale du système triangulaire) : $L_i \leftrightarrow L_k$

- Méthode de Gauss-Jordan : elle consiste à réaliser des combinaisons sur les lignes jusqu'à obtention d'un système équivalent diagonal qui donne directement la solution de $(S)$. Moins rapide que la méthode de Gauss avec substitution la méthode de Gauss-Jordan permet cependant d'obtenir l'inverse de $A$ en plus de la solution du système $(S)$. Par exemple :

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix}}_{A} \ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \ \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right] \to\to\to \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \ \underbrace{\begin{matrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right]$$

- Factorisation $LU$ : On factorise la matrice $A$ comme $A=LU$ où $L$ est triangulaire inférieure et $U$ est triangulaire supérieure. Résoudre $(S)$ revient alors à résoudre deux systèmes triangulaires, ce qui est beaucoup plus efficace que la résolution d'un système non triangulaire : on résout d'abord $LY = B$ puis $UX = Y$. Au final on a bien $X = U^{-1}Y = U^{-1}L^{-1}B = (LU)^{-1}B = A^{-1}B$

Exercices :

7a : Calculer $A+B$, $B+D$, $AB$, $A^tA$, $AA^t$, $E^tE$, $E^*E$ , $CB$, $BC$, $A^{-1}$, $B^{-1}$ et $D^{-1}$

avec $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -5 & 4\\2 & 2 & 5\\3 & 0 & 7\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\-5 & 4\\-3 & 7\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}0 & -5 & 4\\2 & 9 & 8\\3 & 2 & -4\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}1+7i\\2-i\\3\end{bmatrix}$

7b : Montrer que si $A$ est une matrice orthogonale alors $\det(A)=\pm 1$. Montrer que si $A$ est unitaire, alors le module de son déterminant vaut l'unité.

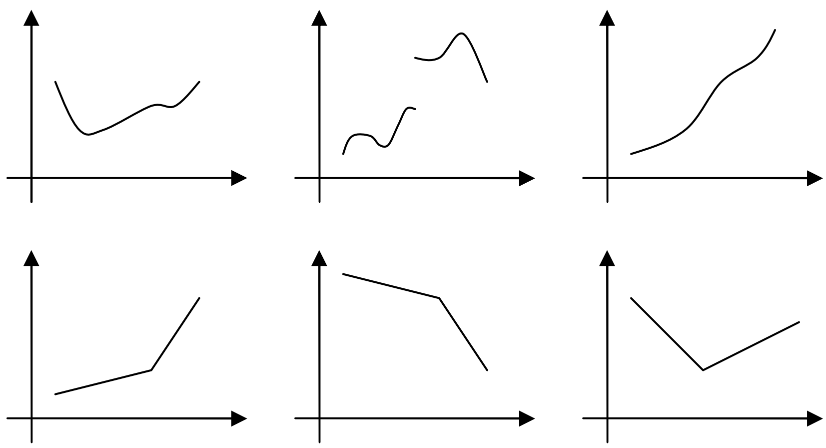
7c : Montrer que pour toute matrice $A$ le produit $AA^t$ est symétrique. Qu'en est-il des produits $A^tA$ et $AA^*$ ?

# REPONSES AUX EXERCICES

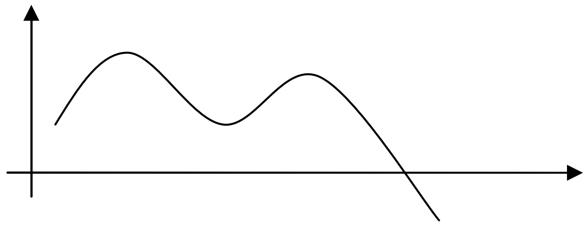
**1-a :**

- (simple) : $x'=1, (af(x))'=af'(x), (x^2)'=2x$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2$

**1b :** dans l'ordre, de gauche à droite et de haut en bas :



**1c :** un exemple parmi tant d'autres :



**1d :**

- $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0} g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
  $$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$$
- $$\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}=-\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0)$$

**1e:**

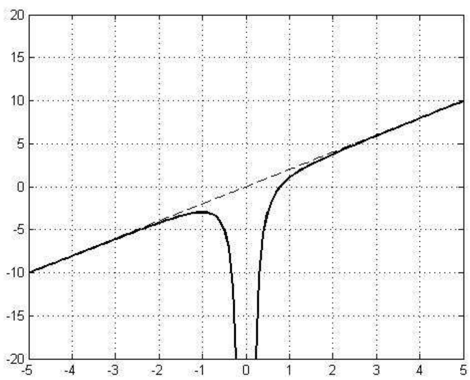
- $\boxed{f(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}}$ :

$$D_f=D_d=R-\{0\};\ f'(x)=2\left(1+\frac{1}{x^3}\right);\ f'=0 \Leftrightarrow x=-1;$$

$$f(-1)=-3;\ f(2^{-1/3})=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$$f(x)\underset{x\to\pm\infty}{\equiv}2x$$



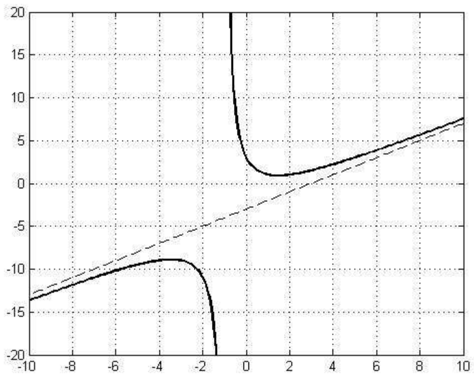

- $\boxed{f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}}$ :

$D_f = D_d = R - \{-1\}$; $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$; $f'=0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{6}$;

$f(-1\pm\sqrt{6}) = -4 \pm 2\sqrt{6}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\equiv} x-3$



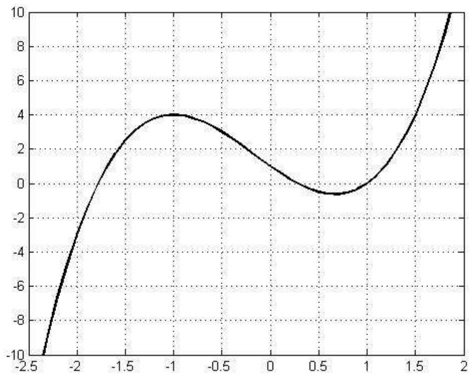
- $\boxed{f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1}$ :

$D_f = D_d = R$; $f'(x) = 6x^2 + 2x - 4$; $f'=0 \Leftrightarrow x = -1 \vee \dfrac{2}{3}$;

$f(-1) = 4$; $f(2/3) = -17/27$; $f(1) = 0$;

$f(x) = (x-1)(2x^2+3x-1)$ donc $f\left(\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

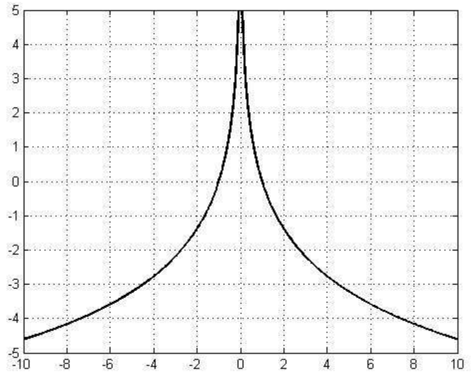


**2a:**

- $\boxed{f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$ : c'est en fait la fonction paire $f(x) = -2\ln|x|$

$D_f = D_d = R - \{0\}$; $f'(x) = -2/x$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

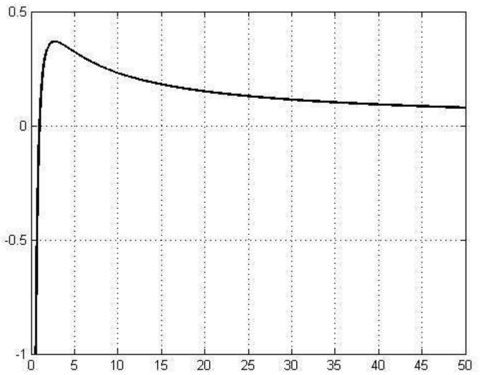



- $\boxed{f(x)=\dfrac{\ln x}{x}}$ :

$D_f = D_d = R^{*+}$; $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $f'=0 \Leftrightarrow x=e$;

$f(e)=1/e$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-0^+} f(x)=-\infty$

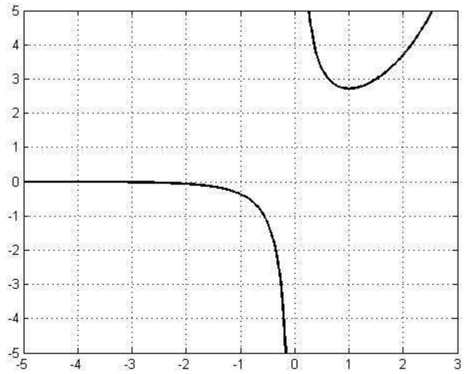



- $\boxed{f(x)=\dfrac{e^x}{x}}$ :

$D_f = D_d = R-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{(x-1)}{x^2}e^x$; $f'=0 \Leftrightarrow x=1$;

$f(1)=e$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-O^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-0^+} f(x)=+\infty$

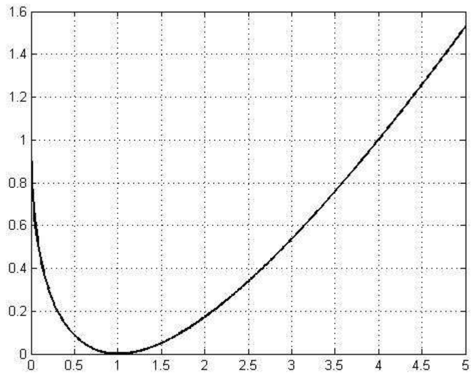



- $\boxed{f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2}$ :

$D_f = R^+ ; D_d = R^{*+} ; f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} ; f' = 0 \Leftrightarrow x = 1;$

$f(1) = 0; f(0) = 1;$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to -0^+} f'(x) = -\infty$



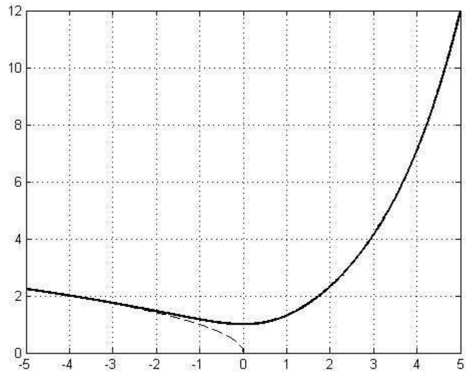

- $\boxed{f(x) = \sqrt{e^x - x}}$ :

$D_f = R; D_d = R; f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}} ; f' = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

$f(0) = 1;$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) \underset{x \to -\infty}{\equiv} \sqrt{-x}$




- $\boxed{f(x) = \cos x + \dfrac{x\sqrt{2}}{2}}$ :

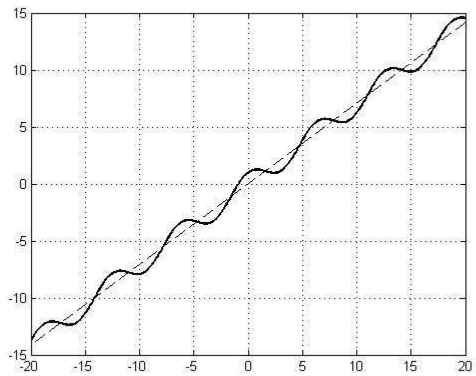
$D_f = D_d = R;\ f'(x) = -\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ f' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in Z)$

$f\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right);\ f\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x)$ n'admet pas d'asymptote en l'infini mais est portée par $y = x\sqrt{2}/2$

$f'(x)$ est périodique de période $2\pi$




**3a :** $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2};\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

**3b :** $|z| = |\overline{z}|;\ \arg(z) = -\arg(\overline{z});\ |z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$ ;

**3c :** $\sqrt{5}e^{i\pi/4}, 2e^{-i\pi/3}$ ;

La racine de $\alpha + i\beta$ se trouve en posant $(a+ib)^2 = \alpha + i\beta$, ce qui conduit à une équation bicarrée en $b$ puis aux solutions possibles $a = \dfrac{\beta}{2b};\ b = \pm\sqrt{\dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}$. Le choix entre ces deux solutions se fait en sélectionnant la valeur dont l'argument est moitié de celui de

$\alpha + i\beta$. Par exemple, on trouve ainsi $\sqrt{4-i} = a + ib$ avec $a = \dfrac{1}{\sqrt{-8+2\sqrt{17}}}; b = -\sqrt{\dfrac{-4+\sqrt{17}}{2}}$ et $\sqrt{3+2i} = a + ib$ avec $a = \sqrt{\dfrac{2}{-3+\sqrt{13}}}; b = +\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}}$

**3d :** Avec $|a+ib| = a^2 + b^2; \arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan(b/a),\ a>0 \\ \arctan(b/a)+\pi,\ a<0 \end{cases}$, on obtient

$$|1-i| = \sqrt{2}; \arg(1-i) = -\pi/4$$
$$|4-i| = \sqrt{17}; \arg(4-i) = \arctan(-1/4) \approx -0.245$$
$$|1+2i| = \sqrt{5}; \arg(1+2i) = \arctan(2) \approx 1.07$$
$$|-1+i| = \sqrt{2}; \arg(-1+i) = \arctan(-1) + \pi = 3\pi/4$$

**3e :** Dans le cas de coefficients réels, le discriminant est soit positif, soit négatif (on écarte la possibilité d'un discriminant nul car l'équation possède deux racines distinctes). Dans le premier cas les racines sont évidemment réelles. Dans le deuxième, on a $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, soit $\Delta = (i\beta)^2$, avec $\beta = \sqrt{-\Delta}$ réel. Finalement les deux racines sont $r_1 = \dfrac{-b+i\beta}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-i\beta}{2a}$ et sont donc bien complexes conjuguées.

**3f :**

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right)$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

**4a :**

- $a^x = 1 + x\ln a + \dfrac{(x\ln a)^2}{2} + \dfrac{(x\ln a)^3}{6} + \dfrac{(x\ln a)^4}{24} + o(x^4)$
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} - \dfrac{5x^3}{16} + \dfrac{35x^4}{128} + o(x^4)$
- $\dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{12} - \dfrac{x^3}{720} + o(x^3)$

- $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$
- $\frac{1}{\tanh x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + o(x^5)$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$
- $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}\right) + o(x^4)$
- $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

**5a :**

- $\int \frac{dx}{x/2+3} = 2\ln\left|x/2+3\right|$
- $\int \frac{x^2}{2x+5}dx = \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{4} + \frac{25}{8}\ln\left|2x+5\right|$ (division euclidienne)
- $\int \frac{x}{(3x-2)^2}dx = -\frac{2}{9(3x-2)} + \frac{1}{9}\ln\left|3x-2\right|$ (éléments simples)
- $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \frac{\sqrt{2x-1}}{3}(x+1)$ (intégration par parties)
- $\int \frac{x}{2x^2-3}dx = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-3\right|$
- $\int \frac{dx}{x(2x^2-3)} = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2}{2x^2-3}\right|$ (éléments simples)
- $\int \frac{1}{5x^2+3}dx = \frac{\sqrt{15}}{15}\arctan\sqrt{\frac{5}{3}}x$
- $\int \frac{1}{x^2(2x^2+1)}dx = -\frac{1}{x} - \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}x$
- $\int \frac{x^2}{2x^2+1}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\sqrt{2}x$
- $\int \frac{x}{\sqrt{-2x^2+1}}dx = -\frac{1}{2}\sqrt{-2x^2+1}$

- $\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+1}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\sqrt{2}x$
- $\int \sqrt{2-3x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{2-3x^2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{\sqrt{6}}{2}x$ (intégration par parties)
- $\int \tan(3x)dx = -\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x)\right|$
- $\int \arcsin 2x dx = x\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$ (intégration par parties)
- $\int \sin^4 2x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 8x}{64}$ (formule d'Euler)
- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right|, & \Delta = b^2-4ac>0 \\ \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, & \Delta = b^2-4ac<0 \\ -\frac{2}{2ax+b}, & \Delta = b^2-4ac=0 \end{cases}$

**5b :**

- $\int_{x=1}^{2} \frac{dx}{x+1} = \ln(3/2)$
- $\int_{x=-5}^{2} \frac{dx}{x} = \ln(2/5)$
- $\int_{x=0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{diverge si } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$
- $\int_{x=1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{diverge si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$
- $\int_{x=0}^{2} f(x)dx = 3$
- $\int_{x=0}^{2} g(x)dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$

**6a :**

- $f(x)=Ce^{-2x}+\frac{x^2}{2}-x+2$
- $f(x)=\frac{C}{(x+2)^6}+\frac{2}{5(x+2)}$
- $f(x)=x^2\left(\ln|x|+C\right)$
- $f(x)=Cx-\frac{1}{2x}$
- $f(x)=C\frac{e^{-x}}{x}+\frac{e^x}{2x}$
- $f(x)=Cx^2-\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}$
- $f(x)=\frac{C+x/2+\sin(2x)/4}{\cos x}$
- $f(x)=\left(C+e^x\right)(x+1)^n$
- $f(x)=Cx\sqrt{1-x^2}+x$
- $f(x)=Ce^{g(x)}-g(x)-1$
- $f(x)=\left(C+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ Rq : $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\operatorname{argsh} x$

**6b :**

- $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^{2x}}{5}$
- $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^3-x^2-6x-2$
- $f(x)=\left(C_1x+C_2+\frac{x^2}{2}\right)e^x$
- $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{x}{3}-\frac{2}{9}$
- $f(x)=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-x/2}+e^{-x}$
- $f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^x+\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$
- $f(x)=(C_1x+C_2)\,e^x-\frac{1}{2}+\frac{e^{-x}}{16}+x^2\,\frac{e^x}{8}$

- $f(x) = C_1 \cos 3x + \left( C_2 + \frac{x}{6} \right) \sin 3x$
- $f(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\, e^{-x} + x - 1 + \frac{e^{2x}}{20} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{2\cos x}{5} - \frac{\sin x}{5}$
- $f(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{x} + \frac{xe^{x} \sin 2x}{8} + \frac{e^{-x}}{40}(\cos 2x - 2\sin 2x)$
- $f(x) = C_1 e^{2x} + (C_2 + x + x^2)\, e^{x}$
- $f(x) = C_1 e^{-2x} + (C_2 + \ln|x|)\, e^{-x}$

**7a :**

- $A + B$ non défini
- $B + D = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 8 \\ 4 & 11 & 13 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
- $AB$ non défini
- $A^t A = 14$
- $AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$
- $E^t E = -36 + 10i$
- $E^* E = 64$
- $CB$ non défini
- $BC = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ -23 & 47 \\ -18 & 55 \end{bmatrix}$
- $A^{-1}$ non défini
- $\det(B) = -15; \quad B^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 14 & 35 & -33 \\ 1 & -5 & 3 \\ -6 & -15 & 12 \end{bmatrix}$

- $\det(D) = -252; \quad D^{-1} = -\dfrac{1}{252}\begin{bmatrix} 52 & 12 & 76 \\ -32 & 12 & -8 \\ 23 & 15 & -10 \end{bmatrix}$

**7b :**

- Si $A$ est orthogonale alors elle est inversible et $A^{-1} = A^t$. On en déduit que $\det(A^{-1}) = \det(A^t)$, et puisque par ailleurs $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ et $\det(A^t) = \det(A)$, on en déduit que $\det^2(A) = 1$ et donc que $\det(A) = \pm 1$.
- Si $A$ est unitaire alors elle est inversible et $A^{-1} = A^* = \overline{A^t}$. On en déduit que $\det(A^{-1}) = \det(A^*)$, et puisque par ailleurs $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ et $\det(\overline{A^t}) = \overline{\det(A^t)} = \overline{\det(A)}$, on en déduit que $|\det(A)|^2 = 1$ et donc que le module de $\det(A)$ vaut l'unité.

**7c :**

- Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$. On note alors $B = A^t = (b_{ij}) = (a_{ji})$ la transposée de *A*. B est de taille $p \times n$ si bien que le produit *AB* est bien défini. On pose $C = AB = AA^t$, matrice carrée de taille *n*. Par définition du produit matriciel, on sait que : $\forall (i, j) \in \{1, n\} \times \{1, n\}, c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} a_{jk}$. En échangeant l'ordre des produits dans la somme sur k, on trouve immédiatement que $\forall (i, j) \in \{1, n\} \times \{1, n\}, c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} a_{ik} = c_{ji}$. La matrice $C = AB = AA^t$ est donc bien symétrique. Une démonstration plus compacte consiste simplement à écrire que $(AA^t)^t = A^{t^t} A^t = AA^t$.
- On trouve de manière similaire que $A^t A$ est une matrice carrée de taille *p* symétrique.
- $(AA^*)^* = A^{**} A^* = AA^*$. Par suite $AA^*$ est une matrice hermitienne qui n'est symétrique que si ses éléments sont réels.