

**UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC**

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : Mathématiques

Formation Doctorale : Mathématiques et leurs interactions

Ecole Doctorale : Information, Structures, Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

Laurent BENOIT

le 13 juin 2005

Titre :

**PREDICTION DES INSTABILITES
THERMOACOUSTIQUES DANS
LES TURBINES A GAZ**

JURY

M. Franck Nicoud,	Directeur de Thèse
M. Christophe Bailly,	Rapporteur
M. Wolfgang Polifke,	Rapporteur
M. Michel Cazalens,	Examineur
M. Geoffrey Searby,	Examineur
M. Sébastien Ducruix,	Examineur

TH/CFD/05/41

Nomenclature

$(.)'$	Grandeur fluctuante temporelle
$(\bar{\cdot})$	Grandeur moyenne
Δh_f^0	Enthalpie de formation du milieu à la température de référence T_0 du milieu
\dot{Q}	Source volumique de dégagement de chaleur
\dot{q}	Taux de dégagement de chaleur volumique
Φ	Richesse locale du mélange
α^*	Conjugué du nombre complexe α
γ	Coefficient polytropique (rapport des capacités calorifiques à volume et pression constantes)
σ	Tenseur des contraintes
$(\hat{\cdot})$	Grandeur fluctuante fréquentielle : transformée de Fourier
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathcal{M}	Nombre de Mach
$\ x\ _2$	Norme euclidienne du vecteur x
\hat{Q}	Taux de dégagement de chaleur global
$\dot{\omega}_j$	Taux de réaction de l'espèce j
ρ	Masse volumique
\mathcal{T}	Tenseur de viscosité
\vec{V}_j	Vitesse de diffusion de l'espèce j dans le milieu gazeux
\mathbf{u}	Vecteur vitesse
A^H	Matrice complexe conjuguée de la matrice A

4

c	Vitesse du son
c_p	Capacité calorifique massique à pression constante.
D_{th}	Coefficient de diffusivité thermique du milieu
e	Energie interne massique
e_s	Energie interne massique sensible
h	Enthalpie massique
$Im(A)$	Image de la matrice A .
p	Pression
R	Constante des gaz parfaits : $8,314 J.mol^{-1}.K^{-1}$
r	Constante des gaz parfaits réduite
$rg(A)$	Rang de la matrice A .
s	Entropie massique
$Sp(A)$	Spectre de la matrice A
T	Température
W	Masse molaire du milieu gazeux
X_j	Fraction molaire de la j^{ieme} espèce du mélange
Y_j	Fraction massique de la j^{ieme} espèce du mélange

Résumé

Les instabilités thermoacoustiques constituent une catégorie de phénomène impliquée dans des applications aussi diverses que chaudières, moteurs fusées ou turbines à gaz. Dans ce dernier cas, les réglementations environnementales de plus en plus contraignantes ont amené les constructeurs à élaborer des systèmes requérant des mélanges air-carburant très pauvres à la limite de la flammabilité. La susceptibilité de la flamme aux perturbations de l'écoulement s'en trouve alors fortement accrue induisant parfois des oscillations auto-entretenues de toutes les grandeurs physiques pouvant aboutir à des dommages importants. Dans ce contexte, la possibilité de prédire dès la phase de conception l'apparition de ce genre de phénomène s'avère cruciale. Cependant, le recours à des simulations numériques instationnaires classiques ne peut être que limité compte-tenu du coût de calcul encore prohibitif sur de grandes configurations industrielles. Une approche complémentaire réside dans l'utilisation d'outils numériques exclusivement dévolus aux fluctuations acoustiques. Cette thèse s'inscrit dans cette optique et présente deux approches explorées au cours de cette étude :

- un code de type "réseau" évalue les modes propres longitudinaux en discrétisant la configuration en quelques dizaines d'éléments monodimensionnels aux fonctions de transferts connus.
- un code, s'inspirant du formalisme des éléments finis, tridimensionnel et parallèle.

Ces outils, validés sur configurations académiques, ont été appliqués à des configurations expérimentales de turbines à gaz.

PREDICTION OF THERMOACOUSTIC INSTABILITIES IN GAS TURBINES

Abstract

Thermoacoustic instabilities are a major cause of concern in a large variety of devices such as furnaces, rocket engines or gas turbines. Due to stringent environmental legislations, many gas turbines manufacturers strategies consist in operating their systems under very lean conditions. Flammability limit can then be locally reached and flame susceptibility to flow perturbations enhanced. Consequently, self-sustained oscillations of all physical quantities may occur inducing blow up of the flame and even structural damages. In this context, there is a need to better understand combustion

instabilities and to predict them at the design level. Despite constant computational progress, fully unsteady numerical simulation of global industrial devices in a daily use is still out of sight. Nevertheless, tools specifically devoted to acoustic waves can be used. This work presents two kinds of such numerical tools :

- In the first one, the configuration is modelled as a network of monodimensional elements with acoustic transfer functions determined analytically or numerically. Longitudinal eigenmodes evaluation can be performed by using only a few dozens of elements.
- The second one is a parallel and fully three dimensional code based on a finite element method.

Both tools have been validated against analytical results and applied to experimental devices including swirl injectors and annular combustion chambers.

DISCIPLINE : Mathématiques

MOTS CLES : instabilité, thermoacoustique, combustion, acoustique, valeurs propres

LABORATOIRE : CERFACS, 42 avenue Coriolis, 31057 Toulouse, cedex 1

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier MM. Wolfgang Polifke, Christophe Bailly, Sébastien Ducruix, Geoffrey Searby et Michel Cazalens pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de participer au jury.

Je remercie Wolfgang Polifke pour les enseignements que j'ai pu tirer de mon séjour au Lehrstuhl für Thermodynamik au cours de cette étude.

Ma gratitude va également aux membres de l'équipe CSG du CERFACS et à Marie Labadens, secrétaire de l'équipe CFD, pour leur disponibilité et la qualité de leurs services qui m'ont permis de me focaliser sur les aspects scientifiques de mon travail.

Je remercie Thierry Poinsoot pour son soutien et sa confiance dans le projet mené tout au long de cette étude.

J'aimerais remercier également mon directeur de thèse Franck Nicoud pour sa disponibilité, ses conseils, la confiance dont il m'a témoigné sur ce projet et d'une manière générale pour la qualité de l'encadrement dont il m'a fait bénéficier.

Enfin, *last but not least*, j'aimerais exprimer toute ma gratitude à mes différents collègues et aux nombreux thésards qui ont fait partie de l'équipe CFD durant ces quatre dernières années pour l'ambiance de travail chaleureuse qu'ils ont contribué à créer. J'aimerais également remercier les plus proches d'entre eux pour leur soutien précieux lors des moments de doutes qui ont émaillé cette thèse. Ma sympathie et bien au-delà leur est acquise.

Introduction

Dans le contexte environnemental et économique actuel, l'une des principales préoccupations des constructeurs de turbines aéronautiques concerne la réduction drastique des émissions polluantes. Cependant, la plupart des méthodes employées pour atteindre cet objectif présentent l'inconvénient majeur de favoriser les instabilités de combustion et plus particulièrement les instabilités thermoacoustiques. La disposition d'outils permettant l'analyse de ce type d'instabilité dès l'étape de conception se révèle donc particulièrement intéressante. Ce travail s'inscrit dans cette optique à savoir l'élaboration d'outils numériques prédictifs entièrement dévolus à l'étude de ce phénomène. Bien que destinés à être appliqués dans un contexte aéronautique, les méthodes développées dans cette étude demeurent généralisables à d'autres situations dans lesquelles interviennent les instabilités thermoacoustiques.

Le terme d'instabilité thermoacoustique désigne le phénomène par lequel le couplage entre fluctuations de dégagement de chaleur et fluctuations acoustiques engendre des oscillations auto-entretenues, et parfois même s'amplifiant au cours du temps, des différents paramètres de l'écoulement (débit, pression, température, ...). Ce type d'instabilité est particulièrement susceptible d'apparaître dans des situations où une flamme demeure confinée dans une cavité. Etant donné la vaste utilisation de la combustion (87 % de l'énergie mondiale en 1997) cette situation concerne donc une large gamme d'applications telles que fourneaux, chaudières industrielles ou domestiques, moteurs fusées [1], statoréacteurs [2], turbines à gaz industrielles [3, 4] et turbines aéronautiques [5]. Par ailleurs les instabilités thermoacoustiques se rencontrent également dans des systèmes où les variations du dégagement de chaleur ont une origine autre que la combustion. C'est le cas dans certains dispositifs cryogéniques présentant des oscillations de Taconis [6], ou encore dans certains types de prototypes de réfrigérateurs thermoacoustiques [7] dans lesquels les variations en question sont principalement dues aux fluctuations du flux thermique aux parois.

Si, de part leur large diffusion actuelle, les instabilités thermoacoustiques bénéficient d'un important regain d'attention, elles n'en sont pas moins connues depuis plus de deux siècles. Dès 1777, Higgins met en évidence ce phénomène à travers l'exemple de la "flamme chantante". Ce dernier reste toutefois pendant longtemps une curio-

sité scientifique redécouverte par Sondhauss en 1850 et Rijke en 1859 sur laquelle se penche en particulier Lord Rayleigh. A l'aide de l'exemple du tube de Rijke dans lequel une simple grille chauffée placée judicieusement dans un tube ouvert à ses extrémités produit un son (Fig. 1), Rayleigh énonce en 1878 son célèbre critère qui constitue encore aujourd'hui la base fondamentale de la compréhension des instabilités thermoacoustiques [8].

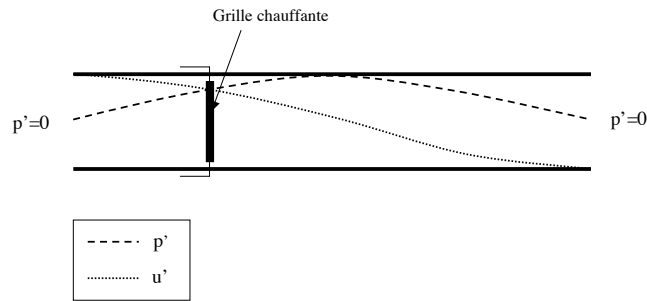


FIG. 1 – Expérience du tube de Rijke : tube ouvert à ses extrémités contenant une grille chauffante placée au quart de sa longueur [9].

Toutefois c'est avec l'apparition de la propulsion à réaction que l'étude des instabilités de combustion commence à se développer. En outre, la première véritable application technique de ce type d'instabilités date de la deuxième guerre mondiale avec la tristement célèbre fusée allemande V1 ("buzz bomb") faisant appel à un réacteur pulsé. Par la suite, le développement des fusées conduit à une étude approfondie des mécanismes de couplages thermoacoustiques menée en particulier par Crocco et Cheng à la fin des années cinquante [10-12]. Dans le cadre de la conquête spatiale, la maîtrise des instabilités thermoacoustiques a constitué un point clé dans la réussite des différents programmes comme l'atteste les travaux menés par Culick au cours des années soixante et soixante-dix [13]. Cet intérêt s'explique en particulier par la très grande concentration de puissance atteinte par les moteurs requis pour cette tâche ; à titre d'exemple, la densité de puissance du moteur F1 des fusées de type Saturn V des missions Apollo s'élevait à environ $146.4 \text{ GW}/\text{m}^3$, la puissance délivrée par les cinq moteurs de ce type correspondait donc, pendant quelques instants, à environ 750 GW soit environ neuf fois la puissance totale du parc électrique français en 2003. On comprend dans ce type d'application l'impérative nécessité de limiter les fluctuations de toute nature dont l'énergie est certes proportionnellement faible en regard de l'énergie totale mise en jeu mais peut néanmoins s'avérer suffisante pour gravement endommager le système.

Dans le contexte des turbines à gaz, aéronautiques ou industrielles, les constructeurs concernés sont depuis la naissance de ce type de propulsion ou de génération d'énergie sensibilisés à ce problème et ont développés un savoir-faire et des ap-

proches largement empiriques permettant d'y remédier. Toutefois, ces dernières montrent depuis une décennie environ leur limite. En effet, sous l'impulsion de réglementations environnementales internationales de plus en plus restrictives, les constructeurs ont été amenés à modifier considérablement les configurations de turbines à gaz avec pour principale conséquence, une amplification de la sensibilité de ces dispositifs aux instabilités de combustion. La plupart de ces modifications font appel à des systèmes de prémélange d'air-carburant fonctionnant en richesse pauvre afin de limiter la consommation et l'apparition de flammes diffusives dont les hautes températures induisent la formation de polluants tels que les oxydes d'azote (NOx) ou le monoxyde de carbone (CO) [14, 15]. Les conséquences de ce type de fonctionnement sont alors les suivantes :

- Du fait du mélange pauvre, les fluctuations de richesse peuvent amener la flamme en de-ça de sa limite de flammabilité aboutissant ainsi à une succession d'extinctions-réallumages favorable à la résonance acoustique [5].
- La faible richesse induit une faible vitesse de flamme rendant cette dernière particulièrement susceptible aux fluctuations de vitesse et donc potentiellement instable.
- Pour obtenir de faibles richesses, il est nécessaire de rediriger, dans le cas de turbines aéronautiques, une partie du flux initialement prévu pour la zone de dilution vers le flux principal d'injection c'est à dire la zone primaire. L'atténuation acoustique conséquente à l'injection d'air par les trous de dilution est donc réduite et par conséquent, les instabilités en sont d'autant plus favorisées [16].

Ainsi, il en résulte une susceptibilité accrue de ces dispositifs aux instabilités thermoacoustiques qui se manifestent concrètement par des fluctuations de pression d'amplitude inacceptable (fatigue du matériel et parfois même dommages structurels) et par une déstabilisation de la flamme éventuellement fatale pour la turbine (phénomène dit de "flashback", voir Fig 2). On comprend donc le regain d'intérêt actuel de la part des constructeurs concernés pour ce type de phénomène.

Deux grandes approches se distinguent pour appréhender ce type de problème :

- Une approche fondée sur le contrôle actif des instabilités[17-19]. Le principe consiste à réduire les phénomènes de résonance acoustique par interférences destructrices ou plus fréquemment en modifiant les fluctuations du dégagement de chaleur par le contrôle de l'injection de carburant notamment [20, 21]. Cette approche repose sur la détection et sur une action suffisamment rapide pour juguler l'instabilité. Elle permet donc a priori de stabiliser une configuration donnée sans pour autant nécessiter une refonte de celle-ci. Compte-tenu du développement constant de l'électronique et de l'informatique cette approche apparaît prometteuse. Néanmoins, la fiabilité et le degré de sécurité requis dans le cas, par exemple, de turbines aéronautiques limitent son application

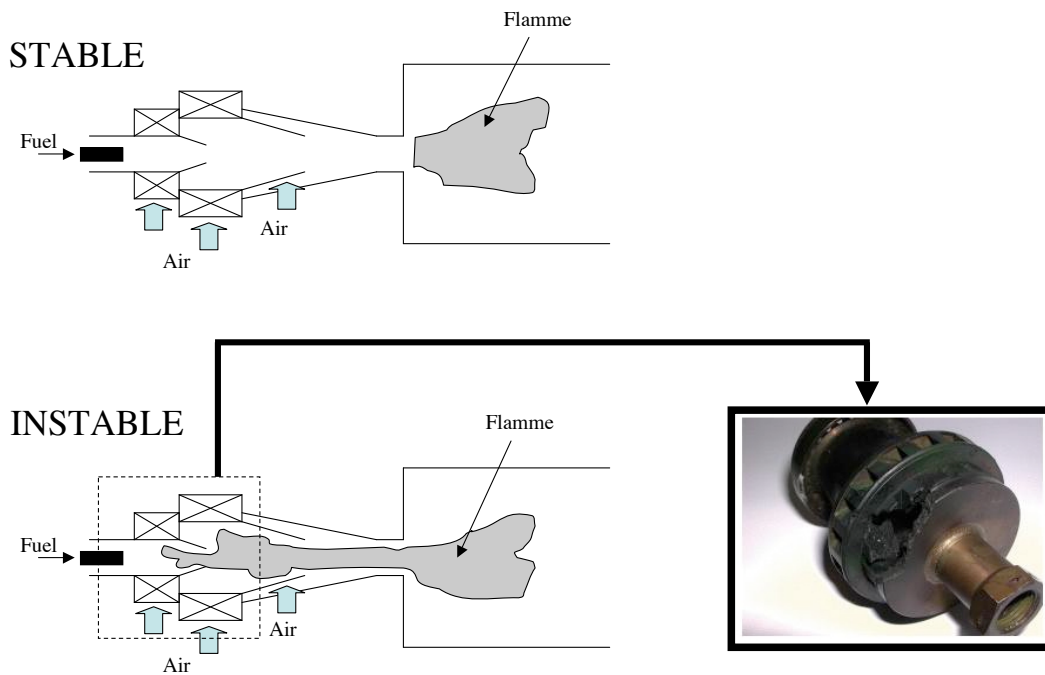


FIG. 2 – Retour de flamme (phénomène de "flashback") induit par les perturbations acoustiques de vitesse et destruction partielle d'un brûleur de turbine aéronautique par échauffement aux parois.

actuelle.

- Une approche fondée sur le contrôle passif des instabilités. Le principe consiste à élaborer des configurations intrinsèquement stables en modifiant leur géométrie, leurs caractéristiques acoustiques ou les caractéristiques du brûleur. Cette phase de conception peut s'avérer longue et coûteuse car elle nécessite encore actuellement un grand nombre de tests expérimentaux et parfois de profondes modifications de la configuration initiale augmentant par la même les délais de mise au point.

L'étude présentée dans ce rapport de thèse s'inscrit dans la seconde approche. On cherche en particulier à développer des outils numériques d'analyse acoustique, mais aussi de prédiction de ces instabilités, suffisamment rapides pour pouvoir tester un grand nombre de configurations industrielles dès la phase de conception. L'originalité de la méthodologie choisie réside dans sa modélisation ainsi que dans son utilisation conjointe avec d'autres techniques telles que la simulation numérique des grandes échelles (LES pour l'acronyme anglais). La description de ces deux aspects s'organise de la manière suivante :

La première partie de cette étude s'attache tout d'abord à préciser la notion d'instabilité thermoacoustique dans le contexte applicatif des turbines à gaz et permet de

mettre en exergue les principales caractéristiques des mécanismes de couplage thermoacoustique. Il apparaît ainsi que le problème posé fait intervenir deux catégories d'échelles bien distinctes : d'une part les fluctuations acoustiques impliquées dans les instabilités en question correspondent aux premiers harmoniques de la configuration, c'est à dire à des longueurs d'onde du même ordre de grandeur que la taille du système lui-même ; d'autre part le couplage thermoacoustique met en jeu des phénomènes tourbillonnaires, turbulents, de mélange ou de variations de surface de flamme caractérisés par des échelles beaucoup plus petites. Ces deux aspects sont pris en compte dans la linéarisation des équations de la mécanique des fluides réactive particularisées au contexte des turbines à gaz. Le cadre de l'étude étant ainsi défini, on s'intéressera également à la modélisation du terme source acoustique inhérent aux fluctuations du dégagement de chaleur, ce dernier constituant le coeur du problème posé.

Dans un deuxième temps, une vue générale des méthodes actuelles permettant de prédire les instabilités thermoacoustiques sera présentée. On montrera l'intérêt mais aussi les limitations des approches de simulations numériques instationnaires classiques telles que les techniques de LES, ces dernières demeurant actuellement encore trop coûteuses pour l'application industrielle recherchée. On s'attachera donc à présenter les possibilités offertes par certaines approches numériques uniquement dévolues aux fluctuations acoustiques. Celles-ci peuvent notamment tirer partie des grandes longueurs d'ondes des modes recherchés et ainsi raisonner sur des maillages beaucoup moins raffinés que ceux utilisés dans les techniques classiques. Deux types d'outils seront présentés : le premier, qualifié de "code réseau", repose sur une discrétisation de la configuration étudiée en nombre limité de blocs élémentaires dans lesquels il est possible d'appliquer des formes de solutions aux fluctuations acoustiques. En reliant entre eux ces différents blocs, il est alors possible d'établir une relation de dispersion caractéristique du problème posé et vérifiée par les modes propres du système ; l'autre type d'outil est moins rapide mais plus précis car il ne suppose aucune forme de solution pour les fluctuations acoustiques. La partie spatiale est alors déterminée par une méthode d'éléments finis.

Faisant suite aux approches précédemment introduites, on s'intéressera ensuite aux méthodes de prédiction des instabilités thermoacoustiques développées au cours de cette étude. L'objectif de ces méthodes est de déterminer la stabilité des modes propres de configurations données et leur fréquence correspondante. L'amplitude des fluctuations accompagnant les instabilités n'est pas recherché par conséquent le recours à des approches linéaires apparaît justifié. Deux types d'outils acoustiques ont été développés au cours de cette étude :

- Un code de type réseau appelé "Soundtube" dont les caractéristiques sont discutées au chapitre trois. Soundtube constitue une forme particulière de ce type de code puisqu'il se restreint aux seules ondes longitudinales tout en prenant

en compte des géométries tridimensionnelles. La simplification des configurations étudiées dans le cadre de la modélisation retenue permet alors d'obtenir rapidement sur un simple ordinateur une première idée de la forme et de la valeur de leur modes propres. Les particularités de cette modélisation seront présentées ainsi que les diverses procédures de recherches des modes propres mises au point.

- Un code tridimensionnel et parallèle appelé "AVSP" présenté au chapitre quatre de ce document. La prise en compte de l'influence de détails géométriques et de la forme du champ moyen à travers une approche réseau apparaissant difficile, une autre méthodologie a été retenue dans AVSP, plus couteuse en temps de calcul mais plus précise. Celle-ci s'inspire du principe des codes acoustiques d'éléments finis introduits au deuxième chapitre mais son originalité réside d'une part dans sa capacité à traiter de grandes configurations grâce à son parallélisme et d'autre part dans sa prise en compte du rôle actif de la flamme sur les instabilités. Cette dernière caractéristique conduit à un problème aux valeurs propres non classique nécessitant l'élaboration de techniques de résolution spécifiques. La première technique mise au point cherche à évaluer les modes propres avec flamme active par un développement asymptotique autour de la situation sans terme source acoustique. L'autre technique développée dans cette étude est fondée sur une méthode de point fixe dans laquelle la dépendance fréquentielle de la fonction de transfert de flamme acoustique est figée à chaque étape du processus itératif.

Les méthodes de détermination des modes propres du code AVSP sont ensuite appliquées à des diverses configurations expérimentales. Le chapitre cinq correspond à un article en cours soumission à la revue *Combustion & flame*. Il montre l'application de AVSP sans flamme active à un dispositif expérimental et permet de mettre en évidence l'origine purement acoustique d'un mode propre rotatif. Le chapitre six présente un rapport technique consécutif à l'application de AVSP à une turbine expérimentale du Lehrstuhl für thermodynamik de Munich. La configuration en question est constituée d'un plenum et d'une chambre de combustion annulaires reliés entre eux par douze injecteurs induisant un mouvement de vrille à l'écoulement ("swirlers"). L'étude montre l'influence de la prise en compte des détails géométriques et de la forme du champ moyen sur la valeur des modes propres. Compte-tenu de la connaissance de la fonction de transfert de flamme déterminée expérimentalement, ce chapitre montre également une application de la méthode asymptotique permettant d'évaluer la stabilité des modes. Enfin le dernier chapitre présente les travaux réalisés durant le Summer Program 2004 du Center of Turbulence Research de Stanford. Ceux-ci ont permis de prédire avec succès le mode le plus instable observé dans la simulation LES d'une chambre de combustion

expérimentale munie d'une injection "swirlée". Ce chapitre décrit l'application de la méthode de point fixe de AVSP à cette configuration avec notamment la détermination de la fonction de transfert de flamme à partir des résultats de la simulation LES.

Table des matières

1	Description des instabilités thermoacoustiques	19
1.1	Description phénoménologique	19
1.1.1	Catégories d’instabilités rencontrées dans les turbines à gaz	19
1.1.2	Mécanismes de couplage thermoacoustique	27
1.2	Mise en équation des instabilités thermoacoustiques	32
1.2.1	Description du milieu	32
1.2.2	Equations bilan	33
1.2.3	Linéarisation des équations	35
1.2.4	Conditions limites	41
1.2.5	Aspect énergétique du problème acoustique	44
1.2.6	Propriétés du formalisme choisi	45
1.3	Modélisation des termes sources thermoacoustiques	49
1.3.1	Modèle $n - \tau$	51
1.3.2	Modèles analytiques de fonction de transfert de flamme . . .	54
2	Méthodes de prédiction des instabilités thermoacoustiques	61
2.1	Méthodes analytiques et de simulation numérique en mécanique des fluides	61
2.1.1	Méthodes analytiques	61
2.1.2	Méthodes de simulations numériques des écoulements fluides	62
2.2	Codes acoustiques de type ”réseau”	65
2.2.1	Principe général	65
2.2.2	Détermination de fonction de transfert	66
2.2.3	Principe de résolution	68
2.3	Codes éléments finis acoustiques	69
2.3.1	Principe général	69
2.3.2	Méthode de ”Galerkin”	70
2.3.3	Approche temporelle	72
3	Calcul des modes propres par une approche 1D	75
3.1	Introduction et description générale du code	75

3.2	Modélisation acoustique	78
3.2.1	Relations de saut dans le cas 1D	78
3.2.2	Relations de saut généralisées au cas 1,5D	81
3.2.3	Conditions limites	82
3.3	Recherche des fréquences propres par méthode modale	83
3.3.1	Principe de la méthode	83
3.3.2	Mise en pratique de la méthode	85
3.4	Recherche des fréquences propres par méthode de forçage	87
3.4.1	Principe du forçage latéral	87
3.4.2	Modélisation du forçage	91
3.4.3	Evaluation des fréquences propres du système par une méthode de forçage	94
3.5	Calcul des modes propres : détermination de la forme spatiale du mode	96
3.6	Validation sur configurations académiques	97
4	Calcul des modes propres par une approche 3D	103
4.1	Introduction	103
4.2	Problème aux valeurs propres sans flamme active	105
4.2.1	Discrétisation de l'équation de Helmholtz	105
4.2.2	Prise en compte des conditions limites	107
4.3	Problème aux valeurs propres avec flamme active	113
4.3.1	Position du problème	113
4.3.2	Prise en compte de la flamme active par un développement asymptotique	114
4.3.3	Prise en compte de la flamme active par une méthode de point fixe	122
4.4	Méthode algébrique de détermination des fréquences propres	129
4.4.1	Méthode de la puissance	129
4.4.2	Méthode QR	133
4.4.3	Méthode de Arnoldi avec réinitialisation implicite	135
5	Modes tournants dans une turbine à gaz	139
5.1	Introduction	140
5.2	Configuration	141
5.2.1	Meshes	142
5.2.2	Boundary conditions	142
5.3	Numerical tools	142
5.3.1	LES solver	142
5.3.2	Helmholtz solver	143
5.4	Non-reacting flow : low-frequency rotating mode	144

5.5	Reacting flow : high frequency rotating mode	145
5.5.1	Analysis of LES results	145
5.5.2	Reconstruction of the rotating mode using acoustic eigenmodes	146
5.5.3	Influence of the rotating mode on the flame shape	147
5.6	Conclusion	148
5.7	Acknowledgments	149
6	Application de la méthode asymptotique	161
6.1	Introduction	162
6.2	Description of the thermo-acoustic code	163
6.2.1	Governing Equations	163
6.2.2	Numerical approach	164
6.2.3	Numerical issue with combustion and asymptotic expansion	165
6.3	Calculation without acoustic flame	166
6.3.1	General features of the experimental configuration tested . .	166
6.3.2	Meshes used in AVSP	168
6.3.3	Influence of the mean flame position	168
6.3.4	Influence of the flame shape	170
6.3.5	Influence of the swirler	171
6.4	Calculation with acoustic flame	174
6.4.1	Flame transfer function characteristics and experimental results	174
6.4.2	Results with a flame transfer function defined by zone . . .	175
6.4.3	Results with a global flame transfer function	178
6.4.4	Sensitivity to the reference point location	178
6.5	Conclusion	179
7	Application de la méthode du point fixe	181
7.1	Introduction	182
7.2	Large Eddy Simulations for reacting flows in complex geometries .	184
7.2.1	Numerical methods for compressible reacting LES	184
7.2.2	Thickened Flame model and chemical scheme	185
7.3	Acoustic solver for the Helmholtz equation	187
7.4	Acoustic energy equation	191
7.5	Configuration	192
7.5.1	Geometry : a swirled premixed combustor	192
7.5.2	Boundary conditions	192
7.6	Results	193
7.6.1	Stable flow	193
7.6.2	Acoustic analysis	194
7.6.3	LES results	195

7.6.4	Growth phase	197
7.6.5	Limit cycle	198
7.6.6	Decay phase	199
7.7	Conclusions	199
Bibliographie		206
A Relations de saut entre 2 éléments du code Soundtube		221
A.1	Relation de saut de vitesse acoustique	221
A.2	Relation de saut de pression acoustique	224
B Exemples de validation du code Soundtube		227
B.1	Simple Tube with a variable reflexion coefficient	227
B.1.1	General features and analytical results	227
B.1.2	Soundtube results and comparison with analytical results	229
B.2	Tube with a thick flame	230
B.2.1	General features and analytical results	230
B.2.2	soundtube results and comparison with analytical results	233
B.3	Three tubes in a “T” configuration without flame	234
B.3.1	General features and analytical results	234
B.3.2	Soundtube results and comparison with analytical results	236
C Rappels d’algèbre		239
C.1	Définitions fondamentales	239
C.1.1	Notations algébriques	239
C.1.2	Problème aux valeurs propres	240
C.2	Transformations matricielles particulières	240
C.2.1	Transformation de Householder	240
C.2.2	Factorisation QR	240
D Modes propres de la turbine annulaire expérimentale		241
D.1	Case without swirler and with a compact passive flame at $x_f = 0.13m$	241
D.1.1	Mean field	241
D.1.2	Eigen frequencies	241
D.1.3	Eigenmodes	242
D.2	Case without swirler and with a compact passive flame at $x_f = 0.1m$	244
D.2.1	Mean field	244
D.2.2	Eigen frequencies	245
D.2.3	Eigenmodes	246
D.3	Case without ac. flame, without swirler and with a flame shape	249
D.3.1	Mean field	249

D.3.2	Eigen frequencies	249
D.3.3	Eigenmodes	250
D.4	Case without ac. flame, with swirler and without a flame shape . . .	252
D.4.1	Mean field	252
D.4.2	Eigen frequencies	253
D.4.3	Eigenmodes	253
D.5	Case with swirler, with an ac. flame divided into 4 zones	256
D.5.1	Geometry and Mean field	256
D.5.2	Flame transfer function features	256
D.5.3	Eigen frequencies	256
D.6	Case with swirler, with a global ac. flame	257
D.6.1	Geometry and Mean field	257
D.6.2	Flame transfer function features	257
D.6.3	Eigen frequencies	257
D.7	Case with ac. flame with swirler, with a $n - \tau$ distrib. and with a ref. point in the injector	257
D.7.1	Geometry and Mean field	257
D.7.2	Flame transfer function features	258
D.7.3	Eigen frequencies	258

Chapitre 1

Description des instabilités thermoacoustiques

1.1 Description phénoménologique

1.1.1 Catégories d'instabilités rencontrées dans les turbines à gaz

Afin de définir le concept d'instabilité thermoacoustique, il convient tout d'abord de décrire le contexte dans lequel celles-ci s'inscrivent à savoir celui des instabilités de combustion. Les instabilités de combustion sont une classe très générale de phénomènes qui concernent l'ensemble des processus susceptibles de rendre une flamme ou le milieu qui la contient instable. Plusieurs types de classement existent selon le critère retenu, ainsi Barrère et Williams [22] s'intéressent au domaine fréquentiel auquel appartiennent les différentes instabilités pour les distinguer. Une autre approche consiste à différencier les principales instabilités (dans le cadre applicatif aux turbines à gaz) par la nature des mécanismes qui interviennent. On distingue ainsi :

- Les instabilités de couplage fluide-structure.
- Les instabilités intrinsèques de flamme.
- Les instabilités hydrodynamiques.
- Les instabilités convectives.
- Les instabilités thermoacoustiques.

Instabilités de couplage fluide-structure

Dans certaines situations, un mode propre vibratoire de la structure peut être excité par les fluctuations de l'écoulement. L'effet Pogo, rencontré dans les moteurs à ergols liquides des lanceurs spatiaux, est une illustration de ce type de phénomène. Le déroulement est le suivant : des fluctuations au niveau de l'injecteur engendrent des variations de la poussée, celles dont la fréquence correspond à un mode propre de la

structure du moteur induisent des vibrations qui peuvent remonter jusqu'à l'injecteur fermant ainsi la boucle d'instabilité. Ce type d'instabilité est généralement de l'ordre de quelques Hertz. Puisque un mode propre de la structure est excité, l'instabilité concerne l'ensemble de la configuration et peut être qualifiée de globale.

Instabilités intrinsèques de flamme

Comme leur dénomination l'indique, ces instabilités ne font intervenir aucun couplage externe à la flamme et sont inhérentes aux mécanismes de combustion. Ce sont des instabilités locales qui concernent le front de flamme. Dans cette famille d'instabilité, on distingue en particulier les instabilités thermodiffusives et les instabilités de Darrieus-Landau. La première apparaît lorsque les effets de la diffusion thermique sont faibles devant ceux de la diffusion moléculaire. Ces deux effets se traduisent par des valeurs caractéristiques du nombre de Lewis Le (rapport de la diffusivité thermique sur la diffusivité moléculaire). On considère un front de flamme perturbé c'est à dire plissé et on cherche à savoir si le plissement va être amplifié ou atténué. Clavin [23] montre qu'au-delà d'une valeur critique Le_{cr} du nombre de Lewis, la gamme de nombres d'onde instables s'élargit considérablement. Autrement dit lorsque les effets thermodiffusifs l'emportent largement, le front flamme est beaucoup plus instable et dégenère en une multitude de cellules de taille égales aux longueurs d'ondes stables.

Dans le cas de l'instabilité de Darrieus-Landau, le phénomène clef est la déviation des lignes de courant au niveau du front de flamme plissé. Son origine provient du fait que seule la composante normale au front de flamme de la vitesse des gaz frais bénéficie de l'accélération imputée au saut de densité, la composante tangentielle au front de la vitesse se conserve à travers la flamme. On peut alors montrer [23] que ce phénomène de déviation va avoir tendance à amplifier le plissement de la flamme et donc la rendre instable. Pour un front de flamme d'épaisseur nulle, la flamme est même inconditionnellement instable.

Les résultats essentiels pour ces deux formes d'instabilité sont récapitulés par à la figure 1.1, extraite d'un ouvrage de R. Borghi [24]. On appelle α la perturbation du front flamme et dans le cas de fluctuations harmoniques on écrit :

$$\alpha(y, t) = \Re(Ae^{\sigma t + iky})$$

Avec $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. La variable σ_r est donc le taux de croissance de l'instabilité.

On notera par ailleurs que ce type d'instabilité ne crée pas de comportement oscillatoire ou pulsatoire ; il n'y a pas de fréquence associée à ce type d'instabilité et par conséquent elle ne constitue pas une source de problème pour les applications de type turbine à gaz.

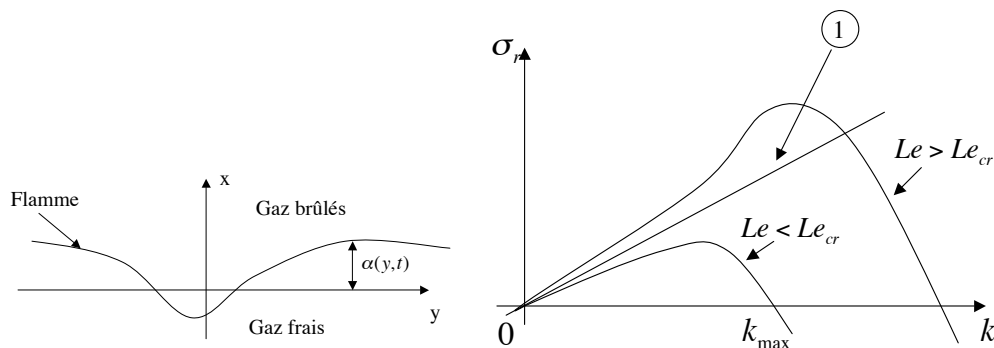


FIG. 1.1 – Instabilités de Darrieus-Landau et thermodiffusive : la figure de gauche illustre la situation, la figure de droite indique les domaines de stabilité [24], la ligne 1 correspond au cas d'un front de flamme infiniment mince pour la seule instabilité de Darrieus-Landau.

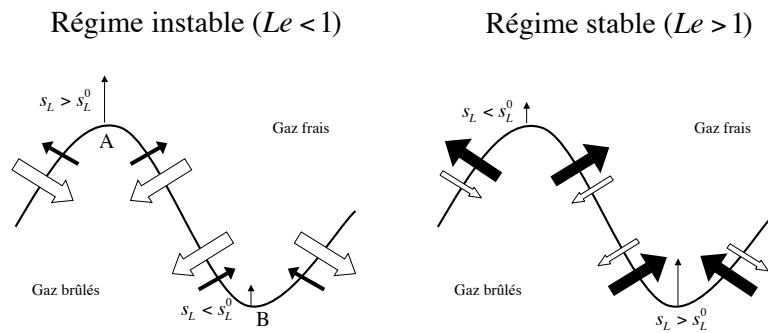


FIG. 1.2 – Instabilités thermodiffusives : compétition entre les flux diffusifs moléculaire (traits pleins) et thermique (traits creux) [25].

Instabilités hydrodynamiques

Les instabilités de nature hydrodynamique sont une autre catégorie de fluctuations potentielles qui concrètement se caractérisent par la formation de structures tourbillonnaires. D'une part ces structures sont en elles-mêmes une source de déstabilisation de l'écoulement et d'autre part elles induisent des zones localisées de combustion périodiques. Dans les diverses configurations expérimentales ou industrielles envisagées dans cette étude, la génération de ces tourbillons peut survenir du fait des cisaillements (instabilités de type Kelvin-Helmholtz) présents dans l'écoulement au niveau de l'admission d'air et de carburant ou du mélange dans la chambre de combustion. En comparaison avec les instabilités d'origine acoustique, les instabilités d'origine hydrodynamique se caractérisent par :

- La localité de leur manifestation : l'instabilité se développe au niveau du jet cisailé et non dans l'ensemble de l'écoulement, par contre les tourbillons générés peuvent se propager loin de leur source et par exemple dans le cas

des turbines à gaz impacter bruyamment à la tuyère de sortie.

- L'étalement des fréquences instables sur une gamme plus ou moins large selon les caractéristiques de la configuration ; ces fréquences ne sont donc pas discrètes.

Dans une configuration classique de deux jets codirectionnels cisailés, la théorie linéaire montre que la fréquence la plus instable f_{hyd} peut être déduite de la valeur du nombre de Strouhal S_t [26] :

$$S_t = \frac{f_{hyd}\theta}{U_1 - U_2} = 0,031$$

Avec θ l'épaisseur de quantité de mouvement du profile ([27]) et $U_1 - U_2$ la différence de vitesse des deux jets. Ce résultat est parfois complexe à mettre en pratique sur des configurations industrielles car il peut être difficile de déterminer les quantités requises. Une autre difficulté réside dans les modifications induites par la combustion. Dans ce cas, la fréquence préférentielle d'apparition de l'instabilité peut être décalée par rapport à la situation non réactive du fait de la présence de gradients de densité [28] et de l'influence de l'expansion thermique sur le champ aérodynamique. Enfin, la théorie classique doit également être modifiée pour prendre en compte des formes différentes d'écoulement en particulier les écoulements vrillés ("swirl" en anglais) [29]. Ce derniers engendrent une dépression suffisante pour créer une zone centrale de recirculation où la faible vitesse de l'écoulement permet à la flamme de se maintenir (Fig. 1.3).

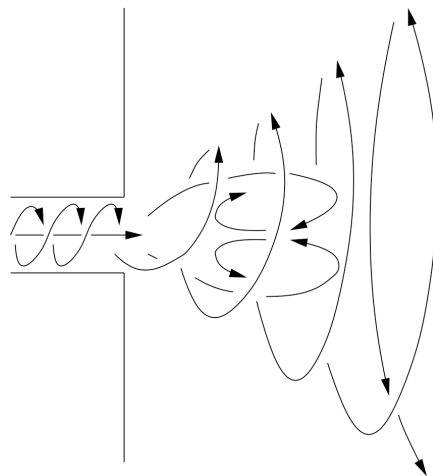


FIG. 1.3 – Ecoulement vrillé présentant une zone de recirculation centrale pouvant jouer le rôle d'accroche-flamme.

Dans ce cas de figure, une nouvelle définition du nombre de Strouhal est requise correspondant à une gamme de fréquences instables différente [30] :

$$0,25 < S_t = \frac{f_{hyd} D}{U_0} < 0,5$$

Avec D le diamètre du jet et U_0 la vitesse moyenne du jet. Même si, de part sa très large diffusion dans l'industrie, ce système d'accroche-flamme se révèle globalement stable [29], il peut présenter sous certaines conditions des instabilités :

- Au-delà d'un certain seuil d'intensité du mouvement de vrille (évalué à travers le nombre de "Swirl" [29]), ce type de structure peut présenter des modes instables axisymétriques et hélicoïdaux [31].
- L'écoulement vrillé peut présenter un mouvement de précession ("Precessing Vortex Core") induisant des perturbations notoires du champ aérodynamique à la fréquence correspondante [32].

Par ailleurs les instabilités hydrodynamiques peuvent aussi être impliquées dans des couplages résonnant avec l'acoustique. Cette situation peut survenir lorsqu'une fréquence propre acoustique de la configuration et la fréquence hydrodynamique préférentielle coïncident [30, 33]. Cependant, cette condition n'est pas toujours nécessaire, du fait des appariements de tourbillons par exemple [34] ; Rogers et Marble [35] ont montré que ce couplage hydro-acoustique pouvait se réaliser également lorsque la fréquence coïncide avec un multiple de la fréquence propre acoustique.

Instabilités convectives

Ce sont des instabilités générées par des ondes se propageant à la vitesse de convection de l'écoulement et que l'on qualifie donc de "convectives". Un des exemples les plus importants concerne l'instabilité de combustion de type "rumble" apparaissant parfois au démarrage des turbines aéronautiques. Cette instabilité fait intervenir un couplage entre ondes convectives de type entropique et ondes acoustiques. Les ondes entropiques se caractérisent avant tout par des fluctuations de température et de densité mais ne génèrent pas de fluctuations de pression tant que l'écoulement demeure homogène. Si celui-ci varie, on peut montrer [36] que, dans le cas d'un écoulement moyen unidirectionnel selon x et de vitesse u , ces deux types d'ondes interagissent à travers la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{u'}{u} \right) + \frac{c^2}{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\gamma p} \right) + \left(2 \frac{u'}{u} - (\gamma - 1) \frac{p'}{\gamma p} \right) \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{s'}{c_p} \quad (1.1)$$

Avec s, p, c respectivement l'entropie, la pression et la vitesse du son locale ; c_p et γ correspondent quant à eux à la capacité calorifique massique à pression constante et au coefficient polytropique respectivement. Les grandeurs munies d'une apostrophe

représentent des fluctuations. Cette situation se rencontre en particulier dans les turbines aéronautiques et est illustrée par la figure 1.4. Le mécanisme est alors le suivant en considérant les grandeurs munies d'un chapeau comme les transformées de Fourier des fluctuations correspondantes dans l'hypothèse d'ondes harmoniques : une perturbation acoustique \hat{p}_1 par l'intermédiaire de la vitesse acoustique correspondante \hat{u}_1 induit au niveau de l'injecteur une inhomogénéité de mélange qui en se consumant au niveau de la flamme provoque la formation d'une fluctuation d'entropie \hat{s}_2 . Cette dernière est reliée par la fonction de transfert de flamme aux fluctuations de vitesse au niveau de l'injecteur. La perturbation d'entropie se propage à la vitesse de l'écoulement indépendamment des ondes acoustiques jusqu'à la tuyère de sortie ($\hat{s}_3 = \hat{s}_2 \exp(i\omega L/u)$) où la forte accélération de l'écoulement moyen induit alors la création de fluctuations acoustiques (\hat{p}_4) par les fluctuations entropiques. L'onde acoustique créée, contrairement, à l'onde entropique de type convective, peut remonter l'écoulement jusqu'à l'injecteur ($\hat{p}_1 = \hat{p}_4 \exp(i\omega L/c)$) bouclant ainsi un cycle potentiellement instable. Le déroulement du phénomène est récapitulé à la figure 1.5. En appelant $\omega\tau_{flam}$, $\omega\tau_{refl}^{inj}$ et $\omega\tau_{refl}^{tu}$ les déphasages respectifs induits par la flamme et les réflexions à l'injecteur et à la tuyère, la fréquence f de l'instabilité doit donc vérifier la relation suivante :

$$\arg(\hat{p}_1) = \arg(\hat{p}_5) \text{ soit } 2\pi f(\tau_{refl}^{inj} + \tau_{flam} + L/u + \tau_{refl}^{tu} + L/c) = n \pmod{2\pi} \quad (1.2)$$

Avec $n \in \mathbb{N}$. Des exemples de ce type de mécanisme sont décrits dans [16] et [37].

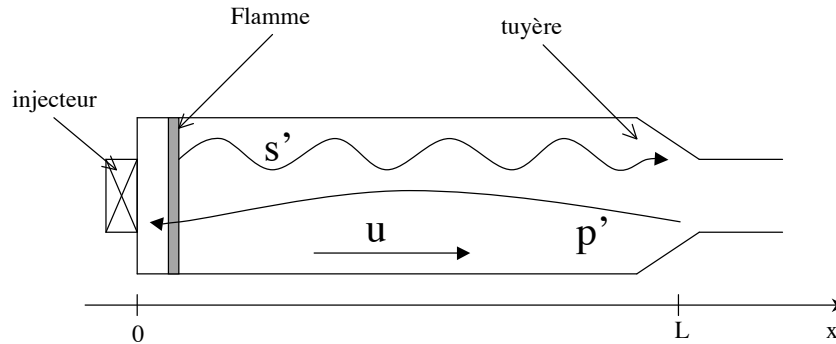


FIG. 1.4 – Instabilité issue du couplage entropique-acoustique dans le cas d'une turbine à gaz aéronautique.

Ce genre d'instabilité est avant tout piloté par le comportement des ondes entropiques. Celles-ci se propageant à la vitesse de l'écoulement, elles sont alors beaucoup plus lentes (d'un facteur égal au nombre de Mach) que les ondes acoustiques. Par conséquent le temps convectif (L/u) est généralement le terme prépondérant dans l'expression de la fréquence de l'instabilité (Eq. 1.2). Par ailleurs, ce phénomène se

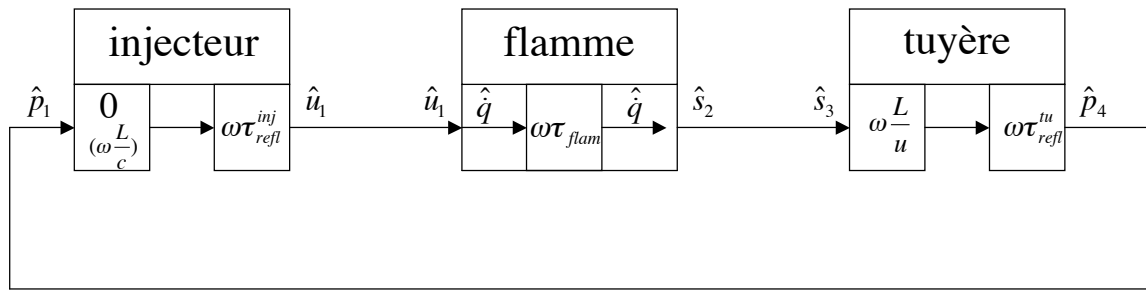


FIG. 1.5 – Boucle d’instabilité d’origine entropique-acoustique dans le cas d’une turbine à gaz avec indication des déphasages induits à chaque étape.

caractérisée par des basses fréquences (entre 50 et 150 Hz) principalement pour deux raisons :

- d’une part, sa vitesse de propagation (u) est faible dans les turbines aéronautiques.
- d’autre part, seules les grandes longueurs d’ondes sont concernées car ce type de fluctuation est particulièrement sensible aux phénomènes dissipatifs de type diffusion thermique qui s’expriment dès que les gradients spatiaux de température deviennent trop importants.

Cette dernière caractéristique a tendance à prévenir également de trop fortes amplitudes de fluctuations entropiques, en outre ces dernières sont directement reliées aux inhomogénéités du mélange génératrices de ”points chauds” [36, 37] et peuvent donc être limitées par les dispositifs de prémélange. Même si ce type d’instabilité peut provoquer de fortes perturbations globales de l’écoulement, elles ne semblent pas les causes premières dans les nouvelles générations de turbines et semblent cantonnées aux phases de démarrage des moteurs aéronautiques. En outre [37] ont montré que des instabilités purement acoustiques peuvent survenir dans la gamme de fréquence attribuée aux perturbations entropiques.

Instabilités thermoacoustiques

Contrairement aux instabilités convectives, les ondes acoustiques assurent la propagation des fluctuations aussi bien au retour qu’à l’aller dans le cas d’instabilités thermoacoustiques. La clef du mécanisme de ce type d’instabilité réside dans le couplage entre les fluctuations du dégagement de chaleur et les fluctuations acoustiques : d’une part les fluctuations de pression influencent les fluctuations du dégagement de chaleur et d’autre part ces dernières génèrent à leur tour des fluctuations de pression d’où la boucle potentiellement instable de la figure 1.6.

Rayleigh en 1878 [8] a énoncé une condition nécessaire pour que cette boucle devienne instable :

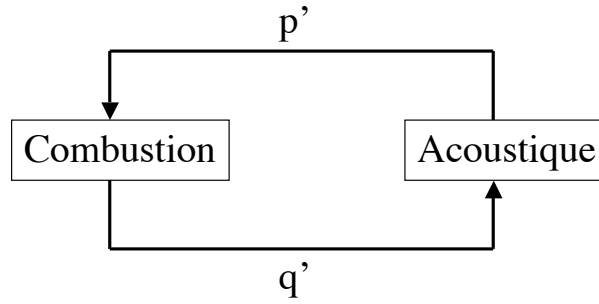


FIG. 1.6 – Boucle du mécanisme thermoacoustique potentiellement instable.

At the phase of greatest condensation heat is received by the air, and at the phase of greatest rarefaction heat is given up from it, and thus there is a tendency to maintain the vibrations.

Ces observations ont donc conduit au critère suivant connu sous le nom de "critère de Rayleigh" :

$$\int_{T_{ac}} \int_{V_{flam}} p'(\vec{x}, t) \dot{q}'(\vec{x}, t) d\vec{x} dt > 0 \implies \text{instabilité favorisée} \quad (1.3)$$

Avec \dot{q}' les fluctuations du dégagement de chaleur, T_{ac} une période acoustique des oscillations en question et V_{flam} le volume occupé par la flamme. Ce critère tel qu'il est écrit constitue une condition nécessaire mais non suffisante à l'instabilité, un critère plus déterminant peut être obtenu [38, 39] en tenant compte des fuites acoustiques aux bords du domaine. Néanmoins, il renseigne sur la valeur du terme source thermoacoustique. D'un point de vue thermodynamique, ce critère peut s'expliquer de la manière suivante [40] : la zone chauffée par la flamme constitue une machine thermoacoustique susceptible de transformer la chaleur reçue en énergie mécanique soit W_{mec} le travail mécanique fournit sur un cycle, c'est à dire sur une période d'oscillation $[0, T_{ac}]$ (voir Figure 1.7) ; comme les grandeurs moyennes sont par définition constantes et que les fluctuations ont les mêmes valeurs initiales et finales sur un cycle, celui-ci s'écrit :

$$W_{mec} = \int_0^{T_{ac}} p dV = \int_0^{T_{ac}} p' dV' = - \int_0^{T_{ac}} p' \frac{d\rho'}{\bar{\rho}^2}$$

Les variables munies d'une apostrophe correspondant encore une fois aux fluctuations acoustiques et celles munies d'une barre aux valeurs moyennes. Sous l'hypothèse des gaz parfaits, la relation suivante peut-être obtenue [41] :

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp'}{dt} - \frac{(\gamma-1)\bar{p}}{c^2} \dot{q}'$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned}
 W_{mec} &= -\frac{1}{2\bar{\rho}^2 c^2} \int_0^{T_{ac}} dp'^2 + \frac{(\gamma-1)}{\bar{\rho} c^2} \int_0^{T_{ac}} p' \dot{q}' dt \\
 &= -\frac{1}{2\bar{\rho}^2 c^2} [p'^2(T_{ac}) - p'^2(0)] + \frac{(\gamma-1)}{\bar{\rho} c^2} \int_0^{T_{ac}} p' \dot{q}' dt \\
 W_{mec} &= \frac{(\gamma-1)}{\bar{\rho} c^2} \int_0^{T_{ac}} p' \dot{q}' dt
 \end{aligned}$$

Finalement, il apparaît que le critère de Rayleigh est directement proportionnel au travail mécanique fourni par le système.

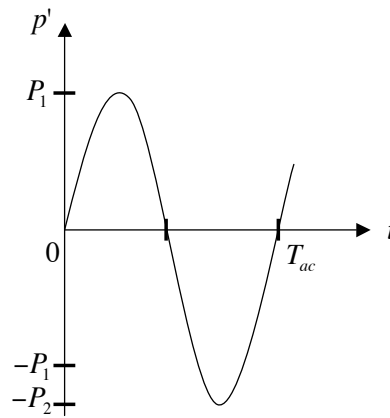


FIG. 1.7 – Fluctuations de pression en un point du système considéré dans le cas d'une instabilité thermoacoustique.

D'un point de vue physique, ce phénomène se comprend également en considérant le pic de pression induit par le dégagement de chaleur de la flamme. Si la fluctuation de pression acoustique incidente sur le front de flamme est en phase avec le pic de pression d'origine thermique, les quantités de pression s'additionnent de manière constructive à chaque période et il en résulte donc une augmentation à chaque cycle des amplitudes correspondantes.

1.1.2 Mécanismes de couplage thermoacoustique

Le critère de Rayleigh pose les conditions nécessaires à la formation des instabilités thermoacoustiques, cependant il n'explique pas la nature des liens entre les fluctuations acoustiques et les fluctuations du dégagement de chaleur. Une liste exhaustive de ces liens est difficile à établir car chaque configuration met en oeuvre des interactions particulières entre acoustique et dégagement de chaleur. On cherche dans cette section à récapituler les principaux mécanismes thermoacoustiques observés

dans le contexte applicatif aux turbines à gaz. Un point crucial commun à tous les mécanismes concerne les divers temps caractéristiques qu'ils induisent entre l'instant où le phénomène perturbateur est généré et l'instant où il atteint la flamme. La valeur de cette durée conditionne le déphasage entre les fluctuations de pression et celle du taux de dégagement de chaleur, par conséquent il détermine le signe et la valeur du critère de Rayleigh, c'est à dire la stabilité de la configuration étudiée. A l'instar de la description phénoménologique réalisée par T. Schuller dans son mémoire de thèse [42], on traite distinctement les deux branches du couplage thermoacoustique (Fig. 1.6).

Actions de l'acoustique sur le dégagement de chaleur

Les principaux mécanismes relatifs à l'influence des perturbations acoustiques sur les fluctuations du dégagement de chaleur sont énumérés par ordre croissant de complexité des situations dans lesquelles ils peuvent intervenir.

- fluctuations purement cinématiques du front de flamme :
On considère la configuration académique d'une flamme plane, parfaitement prémélangée dont l'écoulement laminaire est soumis à des perturbations acoustiques. La fluctuation du taux de dégagement de chaleur en un point donné de la configuration résulte des variations de la position du front de flamme. Même en l'absence d'éventuelles fluctuations de la valeur de la vitesse de flamme, ces variations cinématiques du front de flamme surviennent en raison des variations de la vitesse de l'écoulement au niveau de la flamme. Ceci constitue la situation la plus simple où le dégagement de chaleur varie selon les perturbations acoustiques.
- fluctuations de dégagement de chaleur induites par les fluctuations de température :
Les fluctuations de température associées aux ondes acoustiques peuvent induire de fortes variations du taux de dégagement de chaleur généré par une flamme plane, monodimensionnelle, parfaitement prémélangée. Par ce biais, les fluctuations de pression peuvent directement moduler le taux de dégagement de chaleur. Clavin et al. [43] ont montré sur une configuration académique que la phase entre fluctuations de pression et de dégagement de chaleur issue de ce mécanisme peut effectivement vérifier le critère de Rayleigh.
- fluctuations induites par des variations de la surface de flamme
Les phénomènes acoustiques peuvent induire des perturbations de dégagement de chaleur en modulant la surface de flamme de deux manières différentes :
 - Directement : Searby et al. [44] ont montré sur le cas d'une flamme plane, prémélangée qu'une onde acoustique peut générer des flammes cellulaires pulsantes d'induire une instabilité thermoacoustique.
 - Indirectement : On s'intéresse maintenant à une configuration plus proche de

celle d'une turbine à gaz dans laquelle le système d'injection du prémélange ainsi qu'un élargissement brusque rendent l'écoulement plus complexe (voir figure 1.8). Du fait de l'accentuation du cisaillement par l'acoustique au niveau de l'injecteur, des parois ou encore au niveau d'élargissement brusque de section, on peut assister à une augmentation de la turbulence de petite échelle et à la génération de structures cohérentes. Ces dernières sont alors convectées jusqu'à la flamme où elles peuvent induire une perturbation du front de flamme. Comme la flamme n'est plus nécessairement plane, la déformation est de surcroît différente selon la zone de front de flamme observée. Il en résulte une variation de la surface de la flamme et par voie de conséquence une fluctuation du dégagement de chaleur [45, 46]. Si l'intensité des fluctuations acoustiques est suffisante, les structures tourbillonnaires générées par les perturbations acoustiques peuvent suffisamment étirer la flamme pour l'éteindre localement et périodiquement [47] augmentant ainsi l'instationnarité de la combustion.

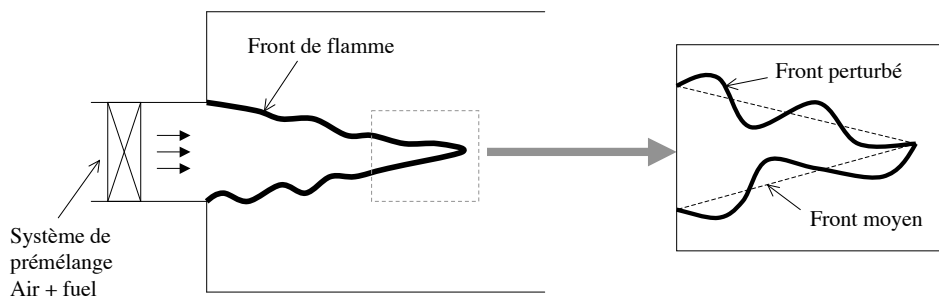


FIG. 1.8 – Fluctuations du dégagement de chaleur par variations de la surface de flamme.

- fluctuations induites par des structures tourbillonnaires

Les structures tourbillonnaires générées par l'acoustique n'induisent pas uniquement des fluctuations du dégagement de chaleur en faisant varier localement la surface de flamme par étirement. Il existe au moins deux autres types d'interaction :

- Lors de leur formation par perturbation de vitesse acoustique, celles-ci peuvent piéger et convecter une poche de carburant qui ne se consomme qu'après un certain délai nécessaire dû, entre autres, aux processus de mélange et de chauffage [26, 48]. La situation est illustré par la figure 1.9.
- Les structures tourbillonnaires peuvent également interagir entre elles périodiquement et induire localement une augmentation de la turbulence de petite échelle. En améliorant localement par exemple le mélange, elles induisent alors une augmentation du dégagement de chaleur et donc une fluctuation de ce dernier [47].

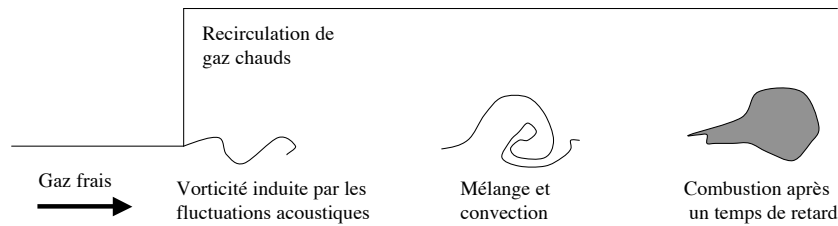


FIG. 1.9 – Fluctuations du dégagement de chaleur induites par des structures tourbillonnaires (image extraite de [26]).

- fluctuation de richesse

Dans les configurations de type turbines à gaz, il est rare d'être dans une situation de flamme parfaitement prémélangée. Les perturbations acoustiques peuvent alors induire des perturbations de richesse. Ce genre de fluctuation apparaît lorsque les lignes d'alimentation en carburant et en air répondent de manières différentes à une perturbation acoustique. La perturbation de richesse est alors convectée jusqu'à la flamme où elle induit une fluctuation du dégagement de chaleur et même une fluctuation de la vitesse de flamme. La figure 1.10 illustre la situation précédemment décrite. Ce phénomène a été étudié entre autres par Keller [49], Lieuwen et al [50] et Flohr et al [51]. Bien qu'il constitue une catégorie importante de couplage thermoacoustique, il est à noter que ce phénomène peut être atténué par les effets de l'agitation turbulente sur les amplitudes des fluctuations de richesse durant leur convection entre l'injecteur et la flamme [52].

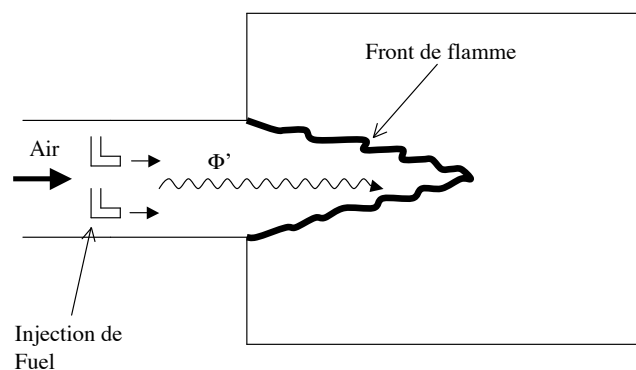


FIG. 1.10 – Fluctuations du dégagement de chaleur par fluctuations de la richesse (Φ').

- fluctuation d'atomisation et de vaporisation des gouttelettes de carburant

Enfin une autre forme de couplage entre acoustique et dégagement de chaleur est inhérente à la nature diphasique du carburant et du comburant parfois uti-

lisés. La situation est illustrée par la figure 1.11. L'influence de l'acoustique sur un jet de carburant liquide est un phénomène complexe difficile à mettre en évidence expérimentalement. La plupart des théories prennent en compte principalement deux types d'influence :

- Influence sur l'atomisation des gouttes : les fluctuations de pression par l'intermédiaire des fluctuations de quantités de mouvement modifient les processus d'atomisation (nombre de Weber modifié) primaires et secondaires ; la taille des gouttes mais aussi la répartition de la taille des gouttes en sont affectées, comme une goutte de carburant plus petite s'enflamme plus rapidement, il apparaît que la modification de l'atomisation peut entraîner des fluctuations de dégagement de chaleur [37].
- Influence sur la vaporisation des gouttes : plusieurs mécanismes interviennent sur ce point. D'une part l'absorption d'énergie par la vaporisation peut avoir un effet stabilisant [53] ; mais d'autre part, dans le domaine des basses fréquences (quelques centaines de Hertz) et pour certaines tailles de gouttes, les temps de relaxation induits par l'inertie thermique de ces dernières peuvent être suffisants pour déphaser les fluctuations du dégagement de chaleur et satisfaire le critère de Rayleigh [54, 55]

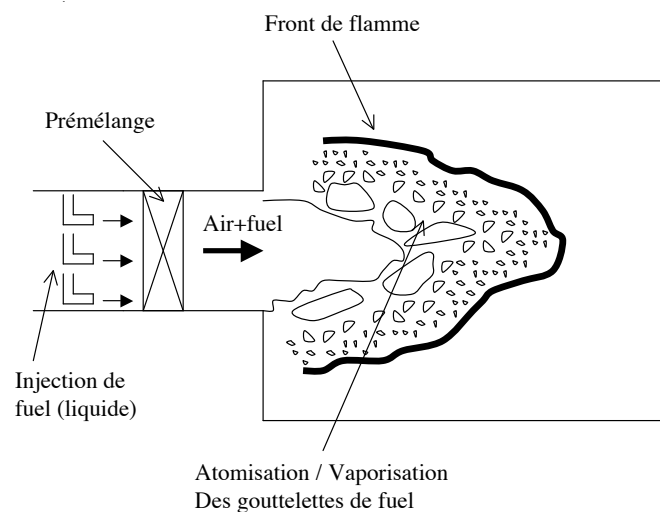


FIG. 1.11 – Fluctuations du dégagement de chaleur en milieu diphasique.

Actions du dégagement de chaleur sur l'acoustique

S'agissant de l'influence du dégagement de chaleur sur l'acoustique, le lien est moins ambigu : le dégagement de chaleur induit une augmentation de pression p' qui vient donc s'ajouter avec la fluctuation de pression acoustique incidente sur la flamme. Dans des dispositifs où le dégagement de chaleur n'est pas forcément assuré

par une flamme (Expérience historique de Rijke avec fil chauffant par effet Joule), on peut envisager des fluctuations du dégagement de chaleur accompagnées par des faibles fluctuations de pression par rapport aux fluctuations de température. Dans ce cas, l'interaction thermoacoustique se fait à travers la température : la fluctuations de température d'origine thermique venant s'ajouter à la fluctuation de température d'origine acoustique.

1.2 Mise en équation des instabilités thermoacoustiques

On cherche dans cette partie à établir les relations nécessaires à la caractérisation des instabilités thermoacoustiques notamment l'équation d'onde régissant les fluctuations acoustiques dans le cas réactif. Celles-ci se déduisent des équations générales de la dynamique des fluides. Cependant, la prise en compte de la combustion requiert à la fois l'utilisation de variables caractérisant les composants du milieu et l'utilisation d'équation supplémentaires par rapport au cas non réactif, en particulier l'équation de l'énergie. Dans le cadre de cette étude, seuls les écoulements monophasiques gazeux sont envisagés.

1.2.1 Description du milieu

Dans le cadre des écoulements fluides réactifs, le milieu est composé de plusieurs espèces. Pour quantifier cette composition, on introduit la notion de fraction massique. On considère N espèces contenues dans un milieu V . On appelle fraction massique de la j^{ieme} espèce, la grandeur Y_j définie par :

$$Y_j = \frac{m_j}{m} \quad (1.4)$$

avec m_j la masse de la j^{ieme} espèce présente dans le volume V et m la masse totale de gaz dans ce volume. Par définition, les fractions massiques vérifient :

$$\sum_{j=1}^N Y_j = 1 \quad (1.5)$$

Par ailleurs, on retient l'hypothèse de modélisation suivante :

Hypothèse 1 : *Le milieu est considéré comme un gaz parfait.*

On en déduit alors l'équation d'état suivante :

$$p = \rho r T \quad (1.6)$$

dans laquelle ρ représente la masse volumique du mélange, T la température et p la pression ; enfin r représente la constante réduite des gaz parfaits défini à l'aide de W

la masse molaire moyenne du mélange et de la constante universelle des gaz parfaits $R = 8.314 J.K^{-1}.mol^{-1}$:

$$r = \frac{R}{W} \quad (1.7)$$

Du fait des différents composants chimiques présents dans le mélange, la masse molaire moyenne se déduit des masses molaires W_j de chaque composant j comme suit :

$$\frac{1}{W} = \sum_{j=1}^N \frac{Y_j}{W_j} \quad (1.8)$$

1.2.2 Equations bilan

La dynamique des écoulements fluides réactifs est régie par les équations de Navier-Stokes :

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1.9)$$

Dans laquelle \mathbf{u} est le vecteur vitesse.

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathcal{T} + \sum_{j=1}^N \rho Y_j \vec{f}_j \quad (1.10)$$

dans laquelle \mathcal{T} représente le tenseur des contraintes visqueuses et \vec{f}_j les forces volumiques associées à chaque espèce. Dans le contexte des turbines à gaz, l'impact des forces volumiques (pesanteur, forces électromagnétiques) demeure très limité et sera donc négligé dans le reste de cette étude (hypothèse 2).

Hypothèse 2 : Les forces volumiques sont négligées : $\sum_{j=1}^N \rho Y_j \vec{f}_j = 0$.

Le présence d'une flamme induit en sus la prise en compte des espèces chimiques mises en jeu dans les diverses réactions. Leur conservation s'exprime à travers les N équations de la forme :

- Conservation de l'espèce j

$$\frac{\partial \rho Y_j}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho Y_j (\mathbf{u} + \vec{V}_j)] = \dot{\omega}_j \quad (1.11)$$

avec \vec{V}_j la vitesse de diffusion de l'espèce j et $\dot{\omega}_j$ le taux de réaction de cette espèce. La vitesse de diffusion peut être reliée à la fraction de mélange Y_j et plus précisément à la fraction molaire $X_j = Y_j W / W_j$ à l'aide d'une loi d'une modélisation de type Hirshfelder-Curtiss. Le taux de réaction $\dot{\omega}_j$, quant à lui, est relié à l'avancement des différentes réactions chimiques mises en jeu. De

plus amples descriptions sur ces sujets sont fournies par Poinsot et Veynante [26] mais celles-ci n'entrent pas directement dans le cadre de cette étude. Du fait de l'Eq. 1.5 et de la contrainte $\sum_j Y_j \vec{V}_j = 0$, la somme des N équations de conservation de chaque espèce (Eq. 1.11) aboutit à l'équation de conservation de la masse (Eq. 1.9).

Dans le cas des écoulements réactifs, la prise en compte du dégagement de chaleur issu de la combustion se fait à travers l'équation de conservation de l'énergie qui, dans le cas de l'énergie interne massique e , s'écrit :

- Conservation de l'énergie interne :

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \nabla e = \nabla \cdot (\rho c_p D_{th} \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + \dot{Q} \quad (1.12)$$

Dans cette équation, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes dont l'expression est $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathcal{T}_{ij}$, \dot{Q} représente le terme source d'énergie, D_{th} le coefficient de diffusivité thermique et c_p la capacité calorifique massique à pression constante. \dot{Q} ne représente en aucuns cas le dégagement de chaleur issu de la combustion mais une source volumique externe au milieu qui, par exemple, correspondrait à l'apport d'énergie issue d'un faisceau laser. Ce type de source peut être négligé dans le contexte applicatif aux turbines à gaz sans perte de généralité pour les équations obtenues (hypothèse 3).

Hypothèse 3 : Les termes source de chaleur volumiques dans l'équation 1.12 sont négligés : $\dot{Q} = 0$.

Sous cette forme, le dégagement de chaleur issu de la combustion n'apparaît pas dans l'équation 1.12 puisqu'il ne provient pas d'un apport énergétique extérieur mais de la conversion de l'énergie potentielle sous forme chimique contenue dans le milieu en énergie interne. Pour le faire apparaître, on introduit les notions d'énergie interne sensible e_s et d'enthalpie massique de formation Δh_f^0 ([26],[56]), l'énergie interne massique étant la somme de ces deux composantes :

$$e = \underbrace{\sum_{j=1}^N Y_j \int_{T_0}^T c_{p,j} dT - Y_j RT / W_j}_{e_s} + \underbrace{\sum_{j=1}^N Y_j \Delta h_{f,j}^0}_{\Delta h_f^0} \quad (1.13)$$

Compte-tenu de ces notations, on définit le taux de dégagement de chaleur \dot{q} par :

$$\dot{q} = - \sum_{j=1}^N \Delta h_{f,j}^0 \dot{\omega}_j \quad (1.14)$$

On en déduit donc l'équation suivante pour l'énergie sensible e_s :

- Conservation de l'énergie interne sensible

$$\rho \frac{De_s}{Dt} = \dot{q} + \nabla \cdot (\rho c_p D_{th} \nabla T) - \nabla \cdot \left(\rho \sum_{j=1}^N \int_{T_0}^T Y_j c_{p,j} dT \vec{V}_j \right) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \quad (1.15)$$

Dans le cadre d'application de notre étude, on peut supposer le mélange suffisamment homogène pour négliger le flux de chaleur issus des phénomènes de diffusion moléculaire ce qui amène à l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4 : *L'homogénéité du mélange est suffisante pour négliger le terme $\nabla \cdot (\rho \sum_{j=1}^N \int_{T_0}^T Y_j c_{p,j} dT \vec{V}_j)$ devant les autres termes dans l'Eq.1.15*

Grâce à cette dernière, il est possible d'obtenir une équation de conservation pour l'entropie massique s . Celle-ci est obtenue à l'aide de l'équation de Gibbs :

$$T ds = de_s - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (1.16)$$

En utilisant conjointement les équations 1.9 et 1.15, on obtient finalement :

- Equation de l'entropie

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{r}{p} \left(\dot{q} + \nabla \cdot (\rho c_p D_{th} \nabla T) + \mathcal{T} : \nabla \mathbf{u} \right) \quad (1.17)$$

1.2.3 Linéarisation des équations

Les équations précédemment dérivées sont maintenant particularisées aux fluctuations thermoacoustiques. Dans le cadre de cette étude on ne considérera que la situation suivante :

Hypothèse 5 : *Les perturbations d'origine acoustique sont prépondérantes devant les perturbations issues des autres phénomènes, en particulier devant les fluctuations de nature turbulente.*

Par ailleurs, dans toute la suite de ce document, on conservera la notation suivante : une variable surmontée d'une barre et celle munie d'une apostrophe représentent respectivement la valeur moyenne et la fluctuation acoustique de la grandeur associée. Compte-tenu de l'hypothèse 4 on en déduit donc les relations suivantes :

$$p = \bar{p} + p' \quad (1.18)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (1.19)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (1.20)$$

Cette étude est focalisée avant tout sur la détermination des modes propres thermoacoustiques mais non sur la détermination de la valeur réelle et observable des amplitudes de ces modes. En particulier l'évaluation de cycles limites éventuels accompagnant les instabilités thermoacoustiques n'est pas considérée dans cette étude. On

ne s'intéresse donc qu'à la phase de croissance linéaire des instabilités thermoacoustiques, c'est à dire la phase qui prévaut dans les premiers instants de l'établissement d'une instabilité. La pertinence de cette approche est alors fondée sur l'hypothèse que les modes les plus instables correspondent aux modes présentant les taux de croissance les plus grands durant la phase linéaire. Ainsi, on ne s'intéresse pas aux instabilités générées par interaction entre différents modes, c'est à dire par couplage non-linéaire. Ce type de phénomène est susceptible d'apparaître dans les configurations de type moteur fusée [59] où, compte-tenu de la densité de puissance mise en jeu, l'intensité des fluctuations induisent fréquemment des couplages non-linéaires entre modes. Dans le cas des turbines à gaz cette situation est plus rare ou en tous cas a rarement été répertoriée du fait en partie de densité de puissance moindre que dans le cadre spatial. On pose donc l'hypothèse fondamentale suivante, appelée hypothèse d'acoustique linéaire :

Hypothèse 6 : *Les fluctuations acoustiques sont considérées petites devant les grandeurs caractéristiques de l'écoulement, en particulier :*

$$p'/\bar{p} \ll 1 \quad (1.21)$$

$$\rho'/\bar{\rho} \ll 1 \quad (1.22)$$

$$|\mathbf{u}'|/c \ll 1 \quad (1.23)$$

Une autre hypothèse permet de simplifier la linéarisation des équations, elle consiste à considérer les vitesses des écoulements faibles devant la vitesse du son :

Hypothèse 7 : *L'écoulement considéré est à bas nombre de Mach \mathcal{M} :*

$$\mathcal{M} = \frac{|\mathbf{u}|}{c} \ll 1 \quad (1.24)$$

Cette assertion est bien vérifiée dans les configurations de type turbine à gaz sauf éventuellement dans les tuyères de sortie, l'idée est d'alors d'arrêter le domaine de calcul en amont de ce type d'élément et d'en évaluer son comportement acoustique en calculant, par exemple, son impédance équivalente [36, 60].

Cette nouvelle hypothèse autorise des simplifications dans les dérivées totale de fluctuation acoustique [61]. En effet, soit f' une fluctuation acoustique quelconque, on appelle T_{ac} le temps d'une période acoustique et L_{ac} la longueur d'onde associée tels que $L_{ac} = cT_{ac}$. On en déduit alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{Df'}{Dt} &= \frac{\partial f'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f' \propto f' \left(\frac{1}{T_{ac}} + \frac{|\mathbf{u}|}{L_{ac}} \right) \\ &\propto \frac{f'}{T_{ac}} (1 + \mathcal{M}) \end{aligned}$$

Ainsi, compte-tenu de l'hypothèse 7, on admet que $\frac{Df'}{Dt} \simeq \frac{\partial f'}{\partial t}$.

Muni de ces hypothèses, la linéarisation au premier ordre de l'équation de conservation de la masse (Eq.1.9) s'écrit :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} + \rho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho' = 0 \quad (1.25)$$

Cette équation peut encore se simplifier, en particulier au niveau du dernier terme de celle-ci :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho' &\propto \frac{|\bar{\mathbf{u}}|}{L_{ac}} \rho' \\ &\propto \frac{\mathcal{M}}{T_{ac}} \rho' \end{aligned} \quad (1.26)$$

De même, l'ordre de grandeur du premier terme de l'Eq. 1.25 se déduit de la relation suivante :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} \propto \frac{\rho'}{T_{ac}} \quad (1.27)$$

Compte-tenu de l'hypothèse 7, il est donc clair que :

$$\left| \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right| \gg |\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho'| \quad (1.28)$$

Par ailleurs, il est possible de pousser plus loin encore les simplifications en précisant quelque peu l'hypothèse 7. L'écoulement moyen présente de fortes variations au niveau de la flamme ce qui ne permet pas a priori de négliger le troisième terme de l'Eq. 1.25 faisant intervenir le gradient de $\bar{\rho}$ et le quatrième terme faisant intervenir le gradient de $\bar{\mathbf{u}}$. On peut toutefois montrer que ce dernier reste faible devant le premier terme de l'Eq. 1.25 pourvu que le nombre de Mach vérifie une condition supplémentaire. En appelant δ_{flam} l'épaisseur de flamme, on montre que :

$$\begin{aligned} \rho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} &\propto \rho' \frac{|\bar{\mathbf{u}}|}{\delta_{flam}} \\ &\propto \rho' \mathcal{M} \frac{c}{\delta_{flam}} \\ &\propto \rho' \frac{\mathcal{M}}{T_{ac}} \frac{L_{ac}}{\delta_{flam}} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ainsi, compte-tenu de la relation 1.27, la condition suivante doit être requise pour négliger le troisième terme de l'Eq. 1.25 devant les autres :

$$|\rho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}| \ll \left| \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right| \iff \mathcal{M} \ll \frac{\delta_{flam}}{L_{ac}} \quad (1.30)$$

Cette condition précise donc l'hypothèse 7 et quantifie la valeur du Mach permettant de s'affranchir des caractéristiques de la vitesse moyenne de l'écoulement. Sur un cas réaliste, la longueur d'onde acoustique est typiquement de l'ordre de la dimension de la turbine $L_{ac} \sim 1 \text{ m}$ tandis que l'épaisseur des flammes prises en compte est telle que $\delta_{flam} \sim 10 \text{ cm}$ (flamme turbulente). Par ailleurs une valeur typique de la vitesse du son c dans les configurations étudiées est de l'ordre de 500 m.s^{-1} . Par conséquent, dans un cas réaliste, le résultat suivant est obtenu :

$$\mathcal{M} \ll \frac{\delta_{flam}}{L_{ac}} \iff \mathcal{M} < 0,02 \quad (1.31)$$

la condition associée à la relation 1.30 apparaît donc réaliste. Par ailleurs si cette condition permet de négliger dans l'Eq. 1.25 le terme faisant intervenir le gradient de $|\bar{\mathbf{u}}|$, elle ne présume en rien de l'ordre de grandeur du terme faisant intervenir le gradient de $\bar{\rho}$. En particulier, on peut montrer que $|\rho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}| \ll |\mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho}|$ du fait que $\rho' / \bar{\rho} \ll |\mathbf{u}'| / |\bar{\mathbf{u}}|$ car la valeur de référence des fluctuations de vitesse n'est pas $|\bar{\mathbf{u}}|$ mais c (cf Eq. 1.23). En effet, avec $\bar{\mathbf{u}} \sim 1 \text{ m.s}^{-1}$ et $\bar{\rho} \sim 1 \text{ kg.m}^{-3}$, une fluctuation acoustique de pression $p' \sim 1 \text{ Pa}$ engendre respectivement $|\mathbf{u}'| \sim p' / (\bar{\rho} c) \sim 2 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et $\rho' \sim p' / c^2 \sim 4 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^{-3}$. D'où le rapport suivant :

$$\frac{|\mathbf{u}'| \bar{\rho}}{|\bar{\mathbf{u}}| \rho'} \sim \frac{2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-6}} \sim 500 \quad (1.32)$$

Ainsi, en prenant en compte ces dernières simplifications, l'équation de conservation de la masse linéarisée au premier ordre s'écrit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} = 0} \quad (1.33)$$

Dans la suite de cette étude on va considérer une nouvelle hypothèse simplificatrice sur les fluctuations acoustiques : on peut aisément montrer que les principaux phénomènes diffusifs (viscosité, diffusion thermique et diffusion moléculaire) n'influencent pas la catégorie d'onde acoustique qui nous intéresse à savoir les ondes de moyennes et basses fréquences. Pour y parvenir, on peut déterminer l'ordre de grandeur de L_{th} , L_{vis} , L_{mol} , les épaisseurs respectives de diffusion thermique, de viscosité et de diffusion moléculaire par rapport à la longueur d'onde acoustique caractéristique L_{ac} de notre problème. Comme on l'a vu précédemment, $L_{ac} \sim 1 \text{ m}$, et, compte-tenu de la vitesse du son caractéristique de l'ordre de 500 m.s^{-1} , $T_{ac} \sim 2 \times 10^{-3} \text{ s}$. Le coefficient de diffusion thermique de l'air à 1600 K valant typiquement $D_{th} \sim 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, on en déduit donc que :

$$L_{th} = \sqrt{D_{th} T_{ac}} \sim 8 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Sachant que les valeurs des nombres de Prandtl $Pr = \nu/D_{th}$ et Lewis $Le = D_{th}/D_{mol}$ sont de l'ordre de l'unité dans le contexte étudié, il apparaît donc que :

$$(L_{th}, L_{vis}, L_{mol}) \ll L_{ac}$$

d'où l'hypothèse suivante :

Hypothèse 8 : *Les phénomènes diffusifs (viscosité, diffusion thermique, diffusion moléculaire) associés aux fluctuations acoustiques sont négligeables devant ceux associés aux grandeurs caractéristiques.*

Dans ces conditions, la linéarisation au premier ordre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement prend la forme suivante :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{u}' + (\bar{\rho} \mathbf{u}' + \rho' \bar{\mathbf{u}}) \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla p' \quad (1.34)$$

Compte-tenu de l'hypothèse 7, on en déduit le résultat suivant :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{u}' \approx \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \quad (1.35)$$

En tenant compte de l'ordre de grandeur du rapport issu de la relation 1.32, on montre que $|\bar{\rho} \mathbf{u}'| \gg |\rho' \bar{\mathbf{u}}|$. Ainsi l'Eq. 1.34 se simplifie comme :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\rho} \mathbf{u}' \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla p' \quad (1.36)$$

Enfin, en appliquant au nombre de Mach une condition similaire à celle de l'Eq. 1.30, l'équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée au premier ordre prend finalement la forme suivante :

$$\boxed{\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p'} \quad (1.37)$$

Hypothèse 9 : *Les fluctuations acoustiques r', γ', W', c'_p sont négligées devant les fluctuations acoustiques des autres grandeurs.*

D'où le résultat suivant obtenu en linéarisant au premier ordre l'Eq. 1.17.

$$\frac{Ds'}{Dt} = \frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{s} = \frac{r}{\bar{p}} \left(\dot{q}' + \bar{T} : \nabla \mathbf{u}' \right) \quad (1.38)$$

Le lien entre les fluctuations de pression et de densité dans le cas général (c'est à dire non nécessairement isentropique comme dans le cas de la combustion) est obtenu à partir de l'expression même de la densité en écrivant $\rho = \rho(p, s)$ d'où le résultat suivant [41, 57] :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{Ds}{Dt} \quad (1.39)$$

Dans le cas d'un gaz parfait $\partial\rho/\partial s)_p = -\rho/c_p$, par conséquent la linéarisation de l'Eq. 1.39 s'écrit :

$$\frac{Ds'}{Dt} = \frac{c_p}{\bar{\rho}c^2} \frac{Dp'}{Dt} - \frac{c_p}{\bar{\rho}} \frac{D\rho'}{Dt} \quad (1.40)$$

En utilisant cette relation dans l'Eq. 1.38, il vient :

$$\frac{c_p}{\bar{\rho}c^2} \left[\frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{p} \right] - \frac{c_p}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} \right] = \frac{r}{\bar{p}} \left(\dot{q}' + \bar{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{u}' \right) \quad (1.41)$$

Cette équation peut encore se simplifier en admettant, dans le contexte applicatif aux turbines à gaz, l'hypothèse suivante :

Hypothèse 10 : La pression moyenne \bar{p} varie suffisamment faiblement pour négliger les termes faisant intervenir les gradients de celle-ci.

Par ailleurs, en faisant appel aux ordres de grandeurs des différentes variables impliquées, on montre aisément que le terme faisant intervenir la viscosité de l'écoulement moyen est lui aussi négligeable dans les situations étudiées et qu'en particulier $|(\bar{\mathcal{T}} : \nabla \mathbf{u}')r/\bar{p}| \ll |c_p \partial p' / (c^2 \bar{\rho} \partial t)|$. Dans ces conditions, l'Eq. 1.41 prend la forme suivante :

$$\frac{c_p}{\bar{\rho}c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{c_p}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} \right] = \frac{r}{\bar{p}} \dot{q}' \quad (1.42)$$

A l'aide de l'équation de conservation de la masse linéarisée (Eq. 1.33), et en utilisant la définition de la vitesse du son $c^2 = \gamma \bar{p} / \bar{\rho}$, l'Eq. 1.42 s'écrit :

$$\frac{1}{\gamma \bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}' = \frac{r}{c_p \bar{p}} \dot{q}' \quad (1.43)$$

Ainsi, en combinant la dérivée temporelle de cette équation et la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée (Eq.1.37), on obtient finalement l'équation d'onde suivante :

$$\boxed{\nabla \cdot (c^2 \nabla p') - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -(\gamma - 1) \frac{\partial \dot{q}'}{\partial t}} \quad (1.44)$$

Dans laquelle, l'expression $c_p = \gamma r / (\gamma - 1)$ a été utilisée dans le cadre de l'hypothèse de gaz parfait.

L'équation d'onde ainsi obtenue possède deux caractéristiques importantes et inhérentes au problème thermoacoustique posé :

- Elle rend compte des fortes variations de la vitesse du son issues des importants gradients de température au niveau du front de flamme. Cette situation est physiquement très différente d'une variation continue de c dans laquelle les ondes acoustiques ne sont pratiquement pas réfléchies. Au contraire, ici,

on cherche à déterminer les déphasages inhérents aux réflexions associées à ce changement brusque de caractéristique du médium qui modifient le mode et sa fréquence propre.

- Elle comprend un terme source induisant une inhomogénéité particulière. En effet, comme mentionné à la section 1.1.2, le terme source n'est pas indépendant des fluctuations acoustiques qu'il génère. La forme de cette dépendance, discutée dans les sections suivantes, rend en particulier le problème aux valeurs propres difficile à appréhender par les méthodes classiques.

Dans le cadre de l'approche linéaire choisie dans cette étude, l'interaction entre modes n'est pas prise en compte. Cette situation se prête donc particulièrement bien à une modélisation sous forme d'ondes harmoniques dans laquelle chaque onde, associée à une fréquence f donnée, est traitée indépendamment des autres. Ainsi, dans ce formalisme, les fluctuations de pression $p'(\vec{x}, t)$ se mettent sous la forme suivante :

$$p'(\vec{x}, t) = \Re(\hat{p}(\vec{x})e^{-i\omega t}) \quad (1.45)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation du mode associé à la fréquence complexe f et $\hat{p}(\vec{x})$, également complexe, constitue la partie spatiale du champ de pression complexe. La partie réelle $\Re(f)$ de la fréquence représente le nombre de périodes ou pseudo-périodes par seconde. La partie imaginaire quant à elle renseigne sur la stabilité du mode et plus exactement sur son taux de croissance. Compte-tenu de la convention choisie, le mode en question est :

- **stable** si $\Im(f) < 0$
- **instable** si $\Im(f) > 0$
- **marginalelement stable** si $\Im(f) = 0$

En appliquant ce formalisme à l'équation d'onde 1.44, on obtient une équation de type Helmholtz permettant de mettre le problème aux valeurs propres considéré sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{c}^2 \nabla \hat{p} + \omega^2 \hat{p} = i\omega(\gamma - 1)\hat{q} & \text{dans } \Omega \\ + \text{Conditions Limites} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.46)$$

Avec Ω le domaine de la configuration étudiée et Γ ses frontières associées.

1.2.4 Conditions limites

Les conditions limites acoustiques rendent compte des réflexions au bord du domaine. Le plus souvent ces réflexions sont caractérisées soit par des rapports de fluctuations acoustiques soit par l'annulation d'une de ces quantités. En revanche, la

valeur des fluctuations acoustiques n'est généralement pas imposée (sauf si la valeur à imposer est la valeur nulle) en particulier dans une approche linéaire où les grandeurs acoustiques sont évaluées à une constante multiplicative près.

Notion d'impédance et de coefficient de réflexion

La caractérisation acoustique la plus générale d'une condition limite réside dans la valeur de son impédance réduite Z ([62, 63]) définie comme :

$$Z = \frac{\hat{p}}{\bar{\rho}c\hat{\mathbf{u}}\cdot\vec{n}} \quad (1.47)$$

Dans cette relation, \vec{n} représente la normale au bord orientée vers l'intérieur du domaine. Les grandeurs \hat{p} et $\hat{\mathbf{u}}$ étant complexes, l'impédance est elle aussi une grandeur complexe. De plus, il est possible de relier cette grandeur au concept d'onde incidente et réfléchie. Pour se faire, considérons la situation au voisinage d'un bord du domaine de normale intérieure \vec{n} . Cette zone est suffisamment mince pour y considérer la vitesse du son constante, et on admet que la flamme ne touche pas le bord en question. Dans cette partie du domaine, l'équation d'onde 1.44 prend donc la forme classique suivante :

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (1.48)$$

Dans ces conditions, on montre que, dans la direction de la normale \vec{n} , p' s'écrit sous la forme d'une superposition d'une onde \mathcal{A}^+ se propageant dans le sens de \vec{n} et d'une onde \mathcal{A}^- se propageant dans le sens opposé [26, 62] :

$$p'(\vec{x}\cdot\vec{n}, t) = \mathcal{A}^+(t - \vec{x}\cdot\vec{n}/c) + \mathcal{A}^-(t + \vec{x}\cdot\vec{n}/c) \quad (1.49)$$

De même pour la vitesse acoustique :

$$\mathbf{u}'(\vec{x}\cdot\vec{n}, t)\cdot\vec{n} = \frac{1}{\bar{\rho}c} \left(\mathcal{A}^+(t - \vec{x}\cdot\vec{n}/c) - \mathcal{A}^-(t + \vec{x}\cdot\vec{n}/c) \right) \quad (1.50)$$

La situation est illustrée par la figure 1.12. L'onde \mathcal{A}^+ est alors qualifiée d'onde réfléchie et \mathcal{A}^- d'onde incidente par rapport à la normale \vec{n} . Compte-tenu du formalisme utilisé, on définit $\mathcal{A}^+(t - \vec{x}\cdot\vec{n}/c) = \Re(\hat{\mathcal{A}}^+(\vec{x}\cdot\vec{n})e^{-i\omega t})$. Ainsi, l'impédance Z_B au point B dans la situation de la figure 1.12 s'écrit :

$$Z_B = \frac{\hat{p}(\vec{x}_B)}{\left((\bar{\rho}c\hat{\mathbf{u}})(\vec{x}_B) \right) \cdot \vec{n}} = \frac{\hat{\mathcal{A}}^+(\vec{x}_B) + \hat{\mathcal{A}}^-(\vec{x}_B)}{\hat{\mathcal{A}}^+(\vec{x}_B) - \hat{\mathcal{A}}^-(\vec{x}_B)} \quad (1.51)$$

L'impédance est fréquemment utilisée en acoustique car les fluctuations de pression et de vitesse sont des grandeurs directement mesurables. Toutefois, elle ne rend pas

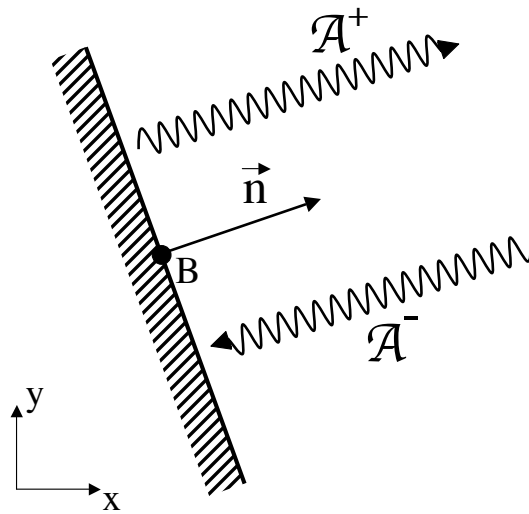


FIG. 1.12 – Reflexion des ondes acoustiques au niveau d'un bord de normale \vec{n} orientée vers l'intérieur du domaine.

compte aisément des phénomènes de réflexion au point où elle s'applique. Pour cela, on utilise plutôt le concept de coefficient de réflexion R qui, dans notre situation, est défini comme le rapport de l'onde réfléchie sur l'onde incidente :

$$R = \frac{\hat{\mathcal{A}}^+}{\hat{\mathcal{A}}^-} \quad (1.52)$$

R est donc aussi complexe et sa relation avec l'impédance s'écrit :

$$R = \frac{Z + 1}{Z - 1} \quad (1.53)$$

Impédances particulières

On s'intéresse aux valeurs prises par l'impédance (et le coefficient de réflexion) dans certaines situations fréquemment rencontrées :

- Dans le cas d'un **mur**, la vitesse normale au mur est nulle $\hat{\mathbf{u}} \cdot \vec{n} = 0$. En utilisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée (Eq. 1.37), on peut montrer que cette condition limite est de type von Neumann sur la pression :

$$\nabla \hat{p} \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.54)$$

On appelle alors Γ_N la partie de la frontière du domaine où s'applique ce type de condition limite. Compte-tenu de la définition de l'impédance (Eq. 1.47), cette dernière prend donc une valeur infinie dans le cas présent :

$$Z_{mur} = \infty \quad (1.55)$$

Enfin, d'après les relations 1.50 et 1.52, le coefficient de réflexion prend alors la valeur :

$$R_{mur} = 1 \quad (1.56)$$

- Dans le cas d'une **ouverture sur l'atmosphère**, l'inertie acoustique de cette dernière impose :

$$\hat{p} = 0 \quad (1.57)$$

Ce qui correspond à une condition limite de type Dirichlet sur la pression. La frontière où celle-ci s'applique est appelée Γ_D . Par ailleurs, elle induit les valeurs suivantes d'impédance et de coefficient de réflexion :

$$Z_{atm} = 0 \quad \text{et} \quad R_{atm} = -1 \quad (1.58)$$

- Dans le cas d'un **bord absolument non réfléchissant**, cela signifie qu'à son niveau, il n'y a pas création d'une onde réfléchie. Ainsi, $\hat{\mathcal{A}}^+ = 0$ implique que :

$$Z_{nrfl} = -1 \quad \text{et} \quad R_{nrfl} = 0 \quad (1.59)$$

A l'aune de ces valeurs particulières de l'impédance, on considérera donc trois types de situations différentes aux frontières du domaine :

- Le cas d'une condition limite de von Neumann s'appliquant sur la frontière Γ_N du domaine.
- Le cas d'une condition limite de Dirichlet s'appliquant sur la frontière Γ_D du domaine.
- Pour le reste de la frontière appelé Γ_Z , une condition limite générale d'impédance. Ainsi, le bord Γ du domaine Ω considéré se compose en trois parties vérifiant :

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_Z \quad (1.60)$$

1.2.5 Aspect énergétique du problème acoustique

On définit en tout point \vec{x} du domaine Ω de recherche des solutions et à chaque instant t l'énergie acoustique $e'(\vec{x}, t)$ comme suit [26] :

$$e'(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \bar{\rho} \mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\bar{\rho} \bar{c}^2} \quad (1.61)$$

Une équation de bilan d'énergie acoustique peut alors être dérivée en multipliant par p' la forme linéarisée de l'Eq. 1.43 et en multipliant par \mathbf{u}' l'Eq. 1.37. En sommant les deux équations obtenues, il vient :

$$\frac{\partial e'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} p' \dot{q}' \quad (1.62)$$

Avec $\mathbf{f} = p'\mathbf{u}'$, le flux acoustique local.

L'énergie acoustique globale E' du domaine d'étude Ω est alors obtenue en intégrant cette équation sur l'ensemble du domaine et à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, il vient :

$$\frac{\partial E'}{\partial t} + F' = S' \quad (1.63)$$

Avec F' , le flux au bord Γ du domaine et S' le terme source acoustique global. Ces deux grandeurs sont respectivement définies comme :

$$F' = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot (-\vec{n}) dS \quad (1.64)$$

$$S' = \int_{\Omega} \frac{\gamma-1}{\gamma\bar{p}} p' \dot{q}' dV \quad (1.65)$$

Le signe négatif dans la relation 1.64 s'explique par le fait que les normales considérées au niveau d'une condition limite sont orientées vers l'intérieur du domaine. Ainsi, dans le cas particulier où les conditions limites correspondent uniquement à des murs ou des ouvertures sur l'atmosphère, $F' = 0$ puisque, aux niveaux bords, $\mathbf{u}' \cdot \vec{n} = 0$ ou $p' = 0$. De plus, si le système ne comporte pas de flamme active alors $S' = 0$ et donc d'après l'Eq. 1.63, l'énergie acoustique reste constante au cours du temps et par conséquent le mode est marginalement stable.

L'équation 1.63 fournit également un nouveau cadre explicatif au critère de Rayleigh introduit au paragraphe 1.1.1. En effet, dans le contexte des turbines à gaz, il est rare que les flux acoustiques aux bords du domaine injectent de l'énergie dans le domaine car les conditions limites ont généralement un caractère dissipatif. Par conséquent, en intégrant l'équation 1.63 sur une période acoustique T_{ac} , on voit qu'une condition nécessaire pour que s'instaure une instabilité (c'est à dire une augmentation de l'énergie acoustique globale d'une période à une autre) s'écrit :

$$\int_{T_{ac}} \int_{\Omega} \frac{\gamma-1}{\gamma\bar{p}} p' \dot{q}' dV dt > 0 \implies \text{Instabilité} \quad (1.66)$$

en admettant que $(\gamma-1)/(\gamma\bar{p})$ est à peu près constant dans la zone de combustion, on retrouve donc le critère de Rayleigh. On comprend également que sans la prise en compte des effets dissipatifs aux bords, le critère de Rayleigh classique ne peut offrir qu'une condition nécessaire mais pas suffisante pour que s'établisse l'instabilité.

1.2.6 Propriétés du formalisme choisi

On cherche dans cette partie à expliciter le lien entre les fluctuations réelles des différentes grandeurs et leurs fluctuations spatiales complexes associées. On prendra

comme exemple les fluctuations de pression p' mais les raisonnements appliqués (excepté ceux concernant le déphasage entre la pression et les composantes de la vitesse acoustiques) seront également valables pour les fluctuations des autres grandeurs. Enfin, on s'intéressera également aux situations dans lesquelles les modes propres sont orthogonaux.

Propriétés de $|\hat{p}|$ et de $arg(\hat{p})$

D'après le formalisme choisi, on a : $p'(\vec{x}, t) = \Re(\hat{p}(\vec{x})e^{-i\omega t})$. Le lien entre la fluctuation réelle de pression p' et celui de sa composante spatiale et complexe \hat{p} peut s'écrire sous une autre forme parfois plus explicite :

$$\begin{aligned} p' &= e^{\omega t} \Re(|\hat{p}(\vec{x})| e^{i(arg(\hat{p}(\vec{x})))} e^{-i\omega t}) \\ p'(\vec{x}, t) &= e^{\omega t} |\hat{p}(\vec{x})| \cos(\omega t - arg(\hat{p}(\vec{x}))) \end{aligned} \quad (1.67)$$

Sous cette forme, on voit donc que la phase temporelle de p' est équivalente à l'argument de la partie spatiale des fluctuations complexes \hat{p} . On voit également que les noeuds de pression seront déterminés par $|\hat{p}| = 0$ et que ceux-ci sont fixes au cours du temps. Par contre le mode associé à ces fluctuations de pression sera véritablement stationnaire uniquement si $arg(\hat{p}(\vec{x}))$ est constant dans le domaine considéré puisque dans le cas contraire on peut écrire :

$$\cos(\omega t - arg(\hat{p}(\vec{x}))) = F(g(t) + h(\vec{x}))$$

On obtient donc une onde instationnaire qui, par définition, se propage à la vitesse a dans la direction \vec{n} telle que, si $h(x)$ n'est pas constant :

$$a(\vec{x}) = \frac{\frac{dg(t)}{dt}}{\frac{dh(x)}{dx}} = \frac{\omega_r}{-\nabla arg(\hat{p}(\vec{x})) \cdot \vec{n}} \quad \text{si } \nabla arg(\hat{p}(\vec{x})) \cdot \vec{n} \neq 0 \quad (1.68)$$

sinon $a = 0$.

Il est donc intéressant de regarder dans quelles situations les modes propres de configuration bornées se comportent vraiment en ondes stationnaires.

Cas particuliers où la phase est constante

Dans le cas sans flamme active et avec conditions limites purement réfléchissantes, on peut montrer que $arg(\hat{p}) = cste \pmod{\pi}$ et que par conséquent le mode est vraiment stationnaire. En effet dans ce cas, il a été démontré à la section 1.2.5 que le taux de croissance du mode est nul. Par conséquent, $\omega = \omega_r$ et le problème à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{c}^2 \nabla \hat{p} + \omega_r^2 \hat{p} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \hat{p} \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ \hat{p} = 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases}$$

En développant \hat{p} , il apparait que $\Re(\hat{p})$ et $\Im(\hat{p})$ vérifient deux problèmes symétriques :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{c}^2 \nabla \Re(\hat{p}) + \omega_r^2 \Re(\hat{p}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \Re(\hat{p}) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ \Re(\hat{p}) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{c}^2 \nabla \Im(\hat{p}) + \omega_r^2 \Im(\hat{p}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \Im(\hat{p}) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ \Im(\hat{p}) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases}$$

Si la fréquence propre n'est associée qu'à un seul mode propre (ce qui est souvent le cas sauf dans le cas de configurations à symétrie particulière telle que section parfaitement carrée ou cylindrique) alors le sous-espace vectoriel associé à cette fréquence est de dimension un et donc :

$$\forall \vec{x} : \Im(\hat{p}(\vec{x})) = \alpha \Re(\hat{p}(\vec{x})) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Par conséquent l'argument de \hat{p} se restreint aux valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \arg(\hat{p}) = \arctan(\alpha) & \text{si } \Re(\hat{p}) \geq 0 \\ \arg(\hat{p}) = \arctan(\alpha) + \pi & \text{si } \Re(\hat{p}) < 0 \end{cases}$$

Cette propriété de l'argument de \hat{p} n'est valable que dans le cas sans flamme active et avec des conditions limites purement réfléchissantes. L'utilisation d'une impédance, par exemple, brise la symétrie du problème sur $\Im(\hat{p})$ et $\Re(\hat{p})$ et alors $\arg(\hat{p})$ devient véritablement une fonction de l'espace.

Caractéristiques du déphasage entre \hat{p} et $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$

On va s'intéresser au déphasage entre \hat{p} et \hat{u}_x mais les raisonnements effectués pourront être étendus aux autres composantes de la vitesse acoustique.

D'après l'équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée (Eq.1.37), il vient :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = i\omega \bar{\rho} \hat{u}_x \quad (1.69)$$

D'où le résultat suivant :

$$\arg\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}\right) = \pi/2 + \arg(\omega) + \arg(\hat{u}_x) \quad (1.70)$$

Ainsi, **dans le cas général, il est possible d'établir un lien direct entre l'argument de \hat{u}_x et l'argument de $\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}$ mais pas avec l'argument de \hat{p}** car les opérateurs d'argument et de dérivée ne commutent pas. Néanmoins, comme dans le cas précédemment étudié d'une configuration sans flammes actives et avec conditions limites purement réfléchissantes, un lien simple entre $arg(\hat{p})$ et $arg(\hat{u}_x)$ existe. Dans cette situation, $\omega = \omega_r$ et $\Im(\hat{p}) = \alpha \Re(\hat{p})$ donc :

$$\hat{p} = (1 + i\alpha)\Re(\hat{p}) \quad (1.71)$$

Et par conséquent :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = (1 + i\alpha) \frac{\partial \Re(\hat{p})}{\partial x} \quad (1.72)$$

On en déduit donc que, dans ce cas, $arg(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}) = arg(\hat{p}) = arg(1 + i\alpha) \pmod{\pi}$ et en utilisant l'équation 1.70, il vient :

$$arg(\hat{p}) - arg(\hat{u}_x) = \pi/2 \quad (1.73)$$

On retrouve donc en particulier des résultats classiques obtenus sur les tubes simples aux extrémités ouvertes ou fermées [26] à savoir que la pression acoustique et la vitesse acoustique longitudinale sont en quadrature de phase.

Orthogonalité des modes

Dans le cadre de l'acoustique pure (sans termes sources thermoacoustiques), l'orthogonalité des modes est une propriété fréquemment mise en évidence. De plus, celle-ci peut conditionner l'emploi de méthodes de Green ([2, 59]) pour évaluer les modes propres. On cherche donc à déterminer les situations dans lesquelles cette orthogonalité des modes propres est effective. On introduit ainsi le produit scalaire de l'espace $L^2(\mathbb{C})$ défini comme suit pour deux modes quelconques \hat{p}_n et \hat{p}_m correspondant respectivement aux n^{ieme} et m^{ieme} harmoniques :

$$\langle \hat{p}_n, \hat{p}_m \rangle = \frac{1}{V_\Omega} \int_{V_\Omega} \hat{p}_n \hat{p}_m^* dV \quad (1.74)$$

Avec \hat{p}_m^* le conjugué de \hat{p}_m .

Les modes \hat{p}_n et \hat{p}_m vérifient, par définition, le problème 1.46 par conséquent le produit scalaire de ces deux modes s'écrit :

$$V_\Omega \langle \hat{p}_n, \hat{p}_m \rangle = \int_{V_\Omega} \frac{-\nabla \cdot c^2 \nabla \hat{p}_n}{\omega_n^2} \hat{p}_m^* dV + \int_{V_\Omega} \frac{i(\gamma-1)\hat{q}(\hat{p}_n)}{\omega_n} \hat{p}_m^* dV$$

A l'aide d'une intégration par partie sur le premier terme de droite de cette équation, il vient :

$$V_{\Omega} \langle \hat{p}_n, \hat{p}_m \rangle = - \int_{\Gamma} \hat{p}_m^* \frac{c^2}{\omega_n^2} \nabla \hat{p}_n \cdot \vec{dS} + \int_{V_{\Omega}} \frac{c^2}{\omega_n^2} \nabla \hat{p}_n \cdot \nabla \hat{p}_m^* dV + \int_{V_{\Omega}} \frac{i(\gamma-1)\hat{q}(\hat{p}_n)}{\omega_n} \hat{p}_m^* dV$$

Il est clair que l'intégrale de bord s'annule sur Γ_D et Γ_N , par conséquent en utilisant une nouvelle intégration par partie sur le deuxième terme de droite, on obtient :

$$V_{\Omega} \langle \hat{p}_n, \hat{p}_m \rangle = - \int_{\Gamma_Z} \hat{p}_m^* \frac{c^2}{\omega_n^2} \nabla \hat{p}_n \cdot \vec{dS} + \int_{\Gamma_Z} \hat{p}_n \frac{c^2}{\omega_n^2} \nabla \hat{p}_m^* \cdot \vec{dS} - \int_{V_{\Omega}} \hat{p}_n \frac{\nabla \cdot c^2 \nabla \hat{p}_m^*}{\omega_n^2} dV + \int_{V_{\Omega}} \frac{i(\gamma-1)\hat{q}(\hat{p}_n)}{\omega_n} \hat{p}_m^* dV$$

D'où finalement,

$$\left(1 - \frac{\omega_m^{2*}}{\omega_n^2}\right) V_{\Omega} \langle \hat{p}_n, \hat{p}_m \rangle = - \int_{\Gamma_Z} \hat{p}_m^* \frac{c^2}{\omega_n^2} \nabla \hat{p}_n \cdot \vec{dS} + \int_{\Gamma_Z} \hat{p}_n \frac{c^2}{\omega_n^2} \nabla \hat{p}_m^* \cdot \vec{dS} \quad (1.75) + \int_{V_{\Omega}} \frac{i(\gamma-1)\hat{q}(\hat{p}_m)}{\omega_m^*} \hat{p}_n dV + \int_{V_{\Omega}} \frac{i(\gamma-1)\hat{q}(\hat{p}_n)}{\omega_n} \hat{p}_m^* dV$$

Ainsi, dans le cas général, **les modes propres solutions du problème 1.46 ne sont pas orthogonaux entre eux**. Ceci est dû non seulement aux termes sources thermoacoustiques mais aussi aux conditions limites d'impédance. Afin de déterminer le cadre le plus général où l'orthogonalité des modes est vérifiée, on se place dans le cas sans termes sources ($\hat{q} = 0$ sur Ω) et on cherche à exprimer le type d'impédance le plus général compatible avec la propriété d'orthogonalité en question. Compte-tenu de la définition 1.47 de l'impédance, la relation suivante est obtenue :

$$- \int_{\Gamma_Z} \hat{p}_m^* \frac{c^2}{\omega_n^2} \nabla \hat{p}_n \cdot \vec{dS} + \int_{\Gamma_Z} \hat{p}_n \frac{c^2}{\omega_n^2} \nabla \hat{p}_m^* \cdot \vec{dS} = \int_{\Gamma_Z} \hat{p}_n \hat{p}_m^* \left(\frac{-i\omega_m^*}{cZ^*(\omega_m)} + \frac{-i\omega_n}{cZ(\omega_n)} \right) dS \quad (1.76)$$

Dans le cas d'une impédance du type : $Z(\omega) = i\alpha\omega$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, le terme de droite de la relation 1.76 s'annule. Ainsi, la condition suffisante la plus générale où l'orthogonalité des modes propres est vérifiée s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{q}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega \\ + \\ \text{Conditions Limites :} \\ \hat{p} = 0 \text{ ou } \hat{\mathbf{u}} \cdot \vec{n} = 0 \text{ ou } Z(\omega) = i\alpha\omega \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right. \implies \langle \hat{p}_n, \hat{p}_m \rangle = 0 \quad (1.77)$$

1.3 Modélisation des termes sources thermoacoustiques

Pour résoudre le système 1.46 une relation entre les fluctuations du dégagement de chaleur et acoustiques est nécessaire afin de fermer le problème. La relation en

question constitue la fonction de transfert de flamme notée \mathcal{H} . Dans sa forme la plus générale, cette fonction s'écrit :

$$\hat{q} = \mathcal{H}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \vec{n}, \hat{p}) \quad (1.78)$$

Compte-tenu des mécanismes d'interaction thermoacoustiques présentés à la section 1.1.2, la flamme est particulièrement sensible aux perturbations acoustiques longitudinales, on introduit donc la normale \vec{n} portée par la direction en question afin de ne faire dépendre la fonction de transfert des seules fluctuations de vitesse longitudinales et de pression. Compte-tenu des hypothèses de modélisation (voir section 1.2.3) retenues, on rappelle que **les phénomènes non-linéaires ne sont pas prise en compte** dans la présente formulation. En particulier, l'influence de l'amplitude des fluctuations de vitesse sur les fluctuations du dégagement de chaleur ne sera pas abordée ; pour plus d'informations à ce sujet, se référer par exemple à [64].

Par ailleurs, chaque mécanismes présentés à la section 1.1.2 induit sa propre forme de fonction de transfert, comme les configurations réelles sont une composé particulière de ces divers mécanismes, il n'existe pas d'expression universelle pour \mathcal{H} . En outre l'obtention d'une expression analytique pour cette fonction n'est possible que pour des géométries simplifiées ne mettant en jeu qu'un des mécanismes en question. En revanche dans le cas général, les phénomènes à prendre en compte peuvent être tridimensionnels et les géométries de brûleur très complexes. De plus, comme on l'a vu à la section 1.1.2, le lien entre les fluctuations acoustiques et de dégagement de chaleur fait intervenir des phénomènes de petites échelles telles que les structures tourbillonnaires, la turbulence locale et le plissement du front de flamme. Il est n'est donc pas rare d'observer sur des configurations du type turbine à gaz qu'une modification d'un détail géométrique du brûleur conduise à une modification importante de la réponse acoustique de la flamme et de la stabilité de tout le système. La qualité de l'évaluation de la fonction de transfert de flamme est donc cruciale pour une prédiction correcte de la stabilité thermoacoustique d'une configuration donnée. Ainsi, compte-tenu de la complexité du milieu et de la précision requise, la détermination analytique de fonction de transfert de configuration industrielle est souvent difficile. Deux recours apparaissent : mesurer expérimentalement cette fonction de transfert, ce qui peut s'avérer coûteux, ou la mesurer à l'aide d'une simulation numérique, ce qui avec les développements récents de cette activité devient de nos jours réaliste.

Cette section présente diverses formes de fonction de transfert de flamme ainsi que les hypothèses de modélisation qu'elles supposent. On s'intéresse d'abord à une forme simple et générale de fonction de transfert dont la connaissance pourra être obtenue par mesures expérimentales ou numériques. Des formes de fonctions de transfert analytiques adaptées à la représentation de mécanismes thermoacoustiques particuliers sur des configurations simplifiées seront ensuite abordées.

1.3.1 Modèle $n - \tau$

Formulation globale

Les premières formes de fonctions de transfert de flamme acoustiques ont été introduites par Crocco [65] dans le cadre de l'étude de la stabilité des moteurs fusée. L'idée est alors d'exprimer une relation globale entre le débit massique de gaz brûlés \dot{m}_b et le débit massique de carburant et comburant injectés \dot{m}_i [66] :

$$\dot{m}_b(t) = \dot{m}_i(t - \tau) \quad (1.79)$$

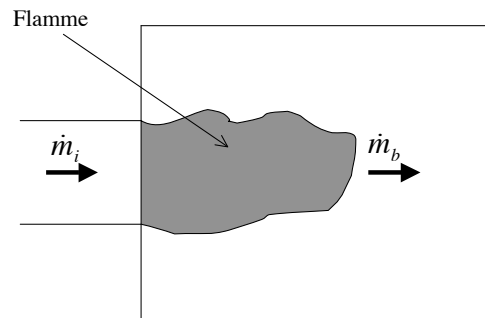


FIG. 1.13 – Fluctuations du débit massique de carburant en entrée et des gaz brûlés.

La situation est illustrée à la figure 1.13. Le concept de temps de retard τ est alors introduit. Celui-ci est destiné à rendre compte des phénomènes physiques énoncés à la section 1.1.2, il est donc en particulier destiné à représenter le temps d'acheminement d'une perturbation quelconque induite par l'acoustique entre le point d'injection et la zone de flamme. En adaptant cette formulation à notre contexte d'étude, on voit donc que l'on est amené à préciser la localisation du point d'injection qui constitue le point de référence pour les perturbations de l'écoulement induisant les fluctuations de dégagement de chaleur. Dans le cas d'une configuration semblable à la figure 1.13 c'est à dire avec un tube d'injection simple débouchant sur une chambre de combustion, le point de référence est naturellement l'abscisse correspondant à l'élargissement brusque car la plupart des structures cohérentes perturbant la flamme sont générées en ce point. Cependant dans le cas, d'injection plus complexe, notamment multiple et séparées pour l'air et le carburant, le choix de la localisation et du nombre de points de référence du modèle sera une caractéristique essentielle à préciser. Ainsi en reliant le débit massique de gaz brûlés au dégagement de chaleur et celui du mélange air/carburant aux fluctuations de vitesse et de pression, l'équation

1.79 nous amène à l'expression générale suivante :

$$\frac{\hat{Q}}{\bar{Q}} = \sum_j n_j(\omega) e^{i\omega\tau_j(\omega)} \frac{\hat{\mathbf{u}}(\bar{x}_{ref}^j) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ref}^j}{\bar{\mathbf{u}}(\bar{x}_{ref}^j) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ref}^j} + n_{p,j}(\omega) e^{i\omega\tau_{p,j}(\omega)} \frac{\hat{p}(\bar{x}_{ref}^j)}{\bar{p}_{ref}} \quad (1.80)$$

Dans cette relation \hat{Q} représente le dégagement de chaleur globale de la flamme, ce qui implique que dans cette formulation la flamme est considérée compacte c'est à dire que ces dimensions sont faibles devant les longueurs d'ondes acoustiques considérées. De plus, n et τ représente respectivement l'amplitude et la phase de la dépendance en vitesse de la fonction de transfert de flamme, n_p et τ_p étant leur équivalents pour la dépendance en pression. Les indices *ref* correspondent aux grandeurs évaluées aux points de référence. Une caractéristique importantes des ces paramètres de la fonction de transfert de flamme concerne leur dépendance fréquentielle : la flamme ne répond pas de la même manière à toutes les fréquences acoustiques. Enfin, dans le cadre de notre approche linéaire, on ne considèrera pas les variations des ces paramètres en fonction de l'amplitude des fluctuations acoustiques, par conséquent on ne considèrera pas les effets de saturation du dégagement de chaleur apparaissant lorsque la valeur des fluctuations de vitesse acoustique sont du même ordre que celle de la vitesse de flamme [64].

Dans le cadre de cette étude, une forme simplifiée de l'expression 1.80 sera utilisée. Tout d'abord on considèrera que la réponse acoustique de la flamme ne dépend que d'un seul point de référence, ensuite la dépendance en pression de la fonction de transfert sera négligée. Concrètement cette dernière hypothèse n'est véritablement justifiée que si la distance du point de référence à la zone de flamme est suffisamment faible devant pas les longueurs d'onde acoustiques ([67]) et si les mécanismes thermoacoustiques ne font pas intervenir les fluctuations de richesse. En effet, comme on l'a vu à la section 1.1.2, ce type de phénomène provient d'une différence de réponse acoustique des lignes d'alimentation de carburant et d'air. Le carburant étant injecté sous forme liquide, le débit massique de celui-ci est avant tout piloté par le saut entre la pression d'injection et la pression dans la zone de la configuration où débouche l'alimentation en carburant. Il apparaît alors que la fluctuation de quantité de carburant injecté dépend principalement des fluctuations de pression au point de référence en question [40, 50]. Sous ces hypothèses et compte-tenu de la situation illustrée à la figure 1.14, un modèle $n - \tau$ global comme introduit par Poinot et Veynante [26] peut être utilisé sous la forme suivante :

$$\frac{\gamma-1}{\gamma\bar{p}} \hat{Q} = S_{ref} n(\omega) e^{i\omega\tau(\omega)} \hat{\mathbf{u}}_{ref} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ref} \quad (1.81)$$

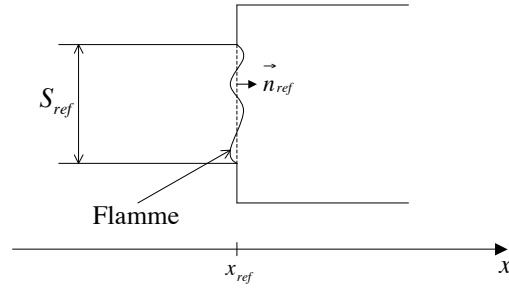


FIG. 1.14 – Flamme compacte par rapport aux longueurs d’ondes acoustiques étudiées.

Formulation locale

Le modèle issu de l’équation 1.81 peut prendre en compte des flammes de tailles comparables aux longueurs d’ondes acoustiques en subdivisant ces flammes en plusieurs zones ayant chacune leur propre fonction de transfert [68, 69]. Cependant, compte-tenu du problème 1.46, la formulation recherchée doit être intrinsèquement locale puisque \hat{q}' représente une densité volumique de puissance. L’idée est donc d’appliquer un modèle $n - \tau$ local reliant le dégagement de chaleur en chaque point à la vitesse acoustique en un point de référence donné :

$$\hat{q}'(\vec{x}) = \eta(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau(\vec{x}, \omega)} \hat{\mathbf{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \quad (1.82)$$

Ainsi, l’amplitude de la fonction de transfert local s’écrit désormais η et n’est plus adimensionnelle ($[W.m^{-4}.s]$).

Comme indiqué précédemment, une des conséquences de l’utilisation de cette modélisation est de s’affranchir totalement de l’hypothèse de flamme acoustiquement mince.

Relation entre modélisation locale et globale dans le cas d’une flamme mince

On considère la situation de la figure 1.14 dans laquelle la flamme sera suffisamment compacte pour que ses paramètres locaux η et τ soit constants sur le volume occupé par la flamme V_{flam} . Dans ce cas, l’équation 1.81 permet d’écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-1}{\gamma\bar{p}} \hat{Q} &= n e^{i\omega\tau} \hat{\mathbf{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} S_{ref} \\ &= \int_{V_{flam}} \frac{(\gamma-1)}{\gamma\bar{p}} \hat{q}' dV \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma\bar{p}} V_{flam} \eta e^{i\omega\tau} \hat{\mathbf{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \end{aligned}$$

D’où le résultat suivant en introduisant la notion de longueur de flamme $l_{flam} =$

V_{flam}/S_{ref} :

$$\eta = \frac{n\gamma\bar{p}}{(\gamma-1)l_{flam}} \quad (1.83)$$

Une autre approche, plus mathématique et qui ne fait intervenir ce concept de longueur de flamme, consiste à considérer le dégagement de chaleur d'une flamme mince comme ponctuel au point de référence :

$$\frac{\gamma-1}{\gamma\bar{p}}\hat{Q} = e^{i\omega\tau}\hat{u}(x_{ref})S_{ref}\int_{-\infty}^{\infty}n\delta(x-x_{ref})dx$$

Dans ce cas, on obtient l'expression suivante pour l'indice locale d'interaction :

$$\eta = \frac{n\delta(x-x_{ref})\gamma\bar{p}}{(\gamma-1)} \quad (1.84)$$

1.3.2 Modèles analytiques de fonction de transfert de flamme

Le modèle $n - \tau$ introduit à la partie précédente reste volontairement général. Lorsqu'il est appliqué à une configuration industrielle, ses paramètres sont généralement évalués numériquement ou expérimentalement. Toutefois, dans certaines situations expérimentales simplifiées ne faisant intervenir qu'un mécanisme thermoacoustique, une dérivation analytique des paramètres n et τ est possible.

Flamme soumise à des perturbations cinématiques

On s'intéresse au cas d'une flamme conique parfaitement prémélangée soumise à des perturbations cinématiques, les effets des fluctuations de richesse ne sont donc pas considérées. Ce type de configuration ou des formes similaires ont été étudiées notamment par [70-72]. A l'aide d'un formalisme similaire, [42] s'intéresse à des perturbations convectives c'est à dire fluctuant durant leur cheminement jusqu'au front de flamme. On présente dans cette section le résultat issu de cette étude.

On considère la situation de la figure 1.15. Dans cette configuration la fonction de transfert de flamme recherchée s'écrit :

$$H = \frac{\dot{Q}'/\bar{Q}}{v'_{ref}/\bar{v}_{ref}} \quad (1.85)$$

Cette dernière peut prendre une forme particulière dans le contexte présent. Dans le cas d'une flamme de prémélange très pauvre, il vient [26] :

$$\dot{Q} = \rho_f\Phi_S L Q_{reac} A \quad (1.86)$$

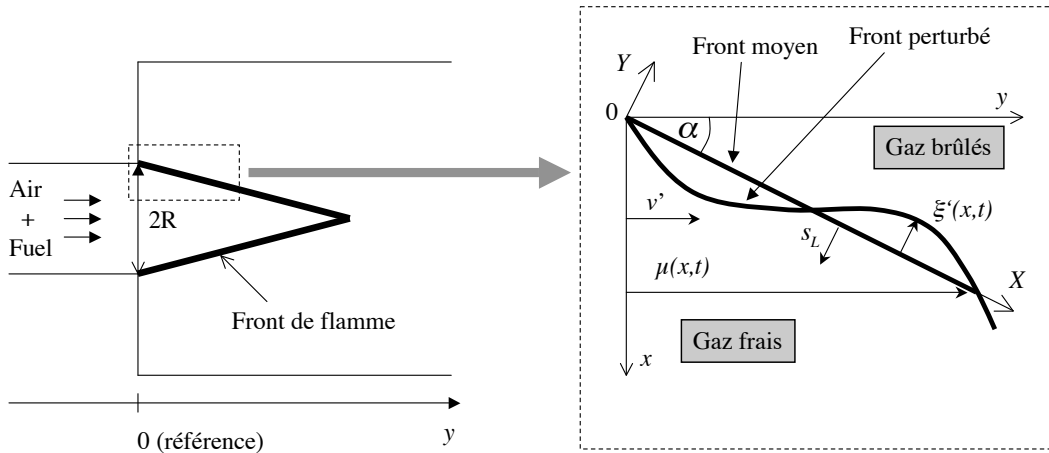


FIG. 1.15 – Flamme de prémélange conique soumise à des perturbations cinématiques.

Avec ρ_f et Φ respectivement la densité et la richesse des gaz frais, s_L la vitesse de flamme et A la surface de flamme. Q_{reac} représente l'énergie libérée par unité de masse. La linéarisation de la relation 1.86 donne :

$$\frac{\dot{Q}'}{\bar{Q}} = \frac{\rho'_f}{\bar{\rho}_f} + \frac{\Phi'}{\bar{\Phi}} + \frac{s'_L}{\bar{s}_L} + \frac{A'}{\bar{A}} \quad (1.87)$$

Dans le cas de figure étudié, les fluctuations de richesse ne sont pas prises en compte de même que les fluctuations de la valeur de la vitesse de flamme. Les fluctuations de la surface de flamme sont directement reliées aux fluctuations de vitesse au niveau du front de flamme. Par conséquent dans le cadre de l'hypothèse de faible nombre de Mach, les fluctuations de densité sont négligeables devant les fluctuations de la surface de flamme. Dans ces conditions la fonction de transfert de flamme recherchée s'écrit :

$$H = \frac{A'/\bar{A}}{v'_{ref}/\bar{v}_{ref}} \quad (1.88)$$

La surface de flamme peut elle-même être reliée aux fluctuations de la position du front de flamme. D'après la figure 1.15, on appelle μ la position axiale d'un point du front de flamme et ξ l'écart du front de flamme à sa position moyenne dans la direction normale au front moyen. Il est clair que dans le cas d'une flamme conique inclinée d'un angle α , $\bar{\mu}(x) = x/\tan(\alpha)$ et $\mu'(x,t) = \xi(x,t)/\sin(\alpha)$. Compte-tenu de l'axisymétrie de la configuration, on peut écrire :

$$A(t) = 2\pi \int_0^R (R-x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2} dx \quad (1.89)$$

Avec R le rayon du cône dessiné par la flamme moyenne. La linéarisation au premier ordre de cette relation s'écrit (avec comme condition au bord $\xi(x=0,t)=0$) :

$$\begin{aligned} A'(t) &= 2\pi \int_0^R (R-x) \frac{d\bar{\mu}/dx}{\sqrt{1+(d\bar{\mu}/dx)^2}} \frac{\partial \mu'}{\partial x} dx \\ A'(t) &= \frac{2\pi}{\tan(\alpha)} \int_0^R \xi(x,t) dx \end{aligned} \quad (1.90)$$

On cherche donc à relier les fluctuations ξ de la position de la flamme aux perturbations v'_{ref} de la vitesse au point de référence c'est à dire au niveau de l'élargissement brusque caractérisé par $y_{ref}=0$. On considère une perturbation de vitesse (v'_{ref}) purement longitudinale générée à l'abscisse de référence et convectée à la vitesse \bar{v} jusqu'à un point du front de flamme de coordonnée (x,y) ; le lien entre la fluctuation de vitesse en ce point et celle au niveau de l'abscisse de référence s'écrit :

$$v'(x,y,t) = v'_{ref}(x,0,t-\tau) \quad (1.91)$$

Avec comme expression pour le temps de retard τ :

$$\tau = \frac{y}{\bar{v}} = \frac{x}{\bar{v}} \tan(\alpha) \quad (1.92)$$

Pour relier v' à ξ , un nouveau repère de coordonnées (X,Y) est introduit lié au référentiel de la flamme moyenne (voir figure 1.15). Dans ce repère, une perturbation de vitesse longitudinale v' au niveau de la flamme a pour nouvelles coordonnées (U,V) . Dans ces conditions la relation suivante est obtenue [42, 45] :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \xi}{\partial X} = V'(X,t) \quad (1.93)$$

Avec $\bar{U} = \bar{v} \cos(\alpha)$ et $V' = v' \sin(\alpha)$. Dans le cas de perturbations harmonique telles que $\xi(X,t) = \Re(\hat{\xi}(X) \exp(-i\omega t))$ et $V'(X,t) = \Re(\hat{V}(X) \exp(-i\omega t))$, la précédente équation aboutit au résultat suivant :

$$\hat{\xi} = \frac{e^{i\omega X/\bar{U}}}{\bar{U}} \int_0^X \hat{V}(X') e^{i\omega X'/\bar{U}} dX' \quad (1.94)$$

Compte-tenu des relations 1.91 et 1.92, on obtient finalement :

$$\hat{\xi}(x) \frac{\cos \alpha}{R} = \frac{\hat{v}_{ref}}{\bar{v}} \frac{1}{i\omega_*} \frac{1}{1 - \cos^2(\alpha)} \left[\exp(i\omega_* \frac{x}{R}) - \exp(i\omega_* \frac{x}{R} \cos^2 \alpha) \right] \quad (1.95)$$

Avec $\omega_* = \omega R / (s_L \cos \alpha)$. Dans ces conditions la fonction de transfert recherchée (Eq. 1.88) s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{2}{\omega_*^2} \frac{1}{1 - \cos^2(\alpha)} \left[1 - \exp(i\omega_*) + \frac{\exp(i\omega_* \cos^2 \alpha) - 1}{\cos^2 \alpha} \right] \quad (1.96)$$

Flamme soumise à des perturbations de richesse

On considère la situation de la figure 1.16, dans laquelle les fluctuations du dégagement de chaleur sont principalement induites par des perturbations de richesse. Les autres types de mécanismes thermoacoustiques décrits à la section 1.1.2 ne seront donc pas pris en compte permettant ainsi d'obtenir une expression analytique pour la fonction de transfert de flamme.

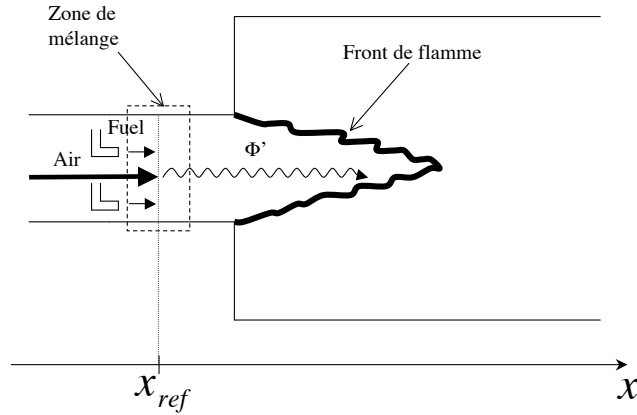


FIG. 1.16 – Flamme de prémélange soumise à des fluctuations de richesse.

Dans ces conditions, la linéarisation de l'équation 1.86 s'écrit :

$$\frac{\dot{Q}'}{\bar{Q}} = \frac{\rho'_f}{\bar{\rho}_f} + \frac{\Phi'}{\bar{\Phi}} + \frac{s'_L}{\bar{s}_L} \quad (1.97)$$

Une possible relation entre les fluctuations de richesse et les fluctuations acoustiques prend la forme suivante [40] :

$$\frac{\Phi'}{\bar{\Phi}} = -\frac{p'_{ref}}{2\Delta p} - \frac{u'_{ref}(t - \tau)}{u_{ref}} \quad (1.98)$$

Cette relation exprime le fait que la richesse est directement fonction du débit de carburant \dot{m}_{fuel} et du débit d'air \dot{m}_{air} :

- le premier terme de droite de l'équation 1.98 rend compte des fluctuations de débit de carburant. Cette dépendance en pression des fluctuations du débit de carburant provient d'observations expérimentales [50] mais peut également s'expliquer simplement. En effet, il est possible d'admettre en première approximation que le carburant liquide dans la buse d'injection vérifie l'équation de Bernoulli (voir figure 1.17) :

$$p_0 = p_{ref} + \frac{1}{2}\zeta\rho_{ref}u_{ref}^2 \quad (1.99)$$

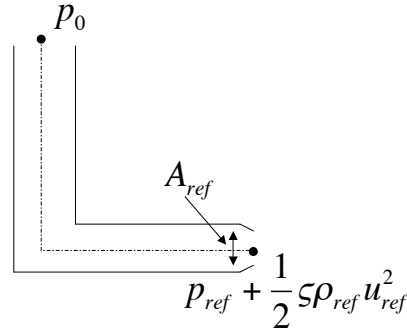


FIG. 1.17 – Approximation de Bernoulli dans l’injecteur de carburant.

Avec p_0 la pression du réservoir et ζ un coefficient de perte de charge. Généralement on peut considérer la pression du réservoir comme imposée donc $p'_0 = 0$ et les fluctuations de densité du carburant sont quasi nulles car le liquide peut être considéré incompressible d’où le résultat suivant :

$$-p'_{ref} = \zeta \bar{\rho}_{ref} u'_{ref} \bar{u}_{ref} = \zeta \bar{m}'_{fuel} A_{fuel} \quad (1.100)$$

En posant $\Delta p = \zeta \bar{\rho}_{ref} u_{ref}^2 / 2 = \zeta \bar{m}_{fuel} A_{fuel}$, on en déduit la relation 1.98.

- le deuxième terme de droite de l’équation 1.98 rend compte des fluctuations de débit d’air. En effet, compte-tenu de l’hypothèse de faible nombre de Mach les fluctuations du débit massique d’air sont directement proportionnelles aux fluctuations de vitesse longitudinale ; $\dot{m}_{air} = \bar{\rho}_{air} u'_{ref} A_{ref}$. Par ailleurs le signe moins devant le terme en u'_{ref} s’explique par le fait que la richesse est minimale quand la quantité d’air injectée est maximale.

La relation 1.97 fait aussi intervenir les fluctuations de vitesse de flamme. En effet, la vitesse de flamme est dépendante de la valeur de richesse du prémélange [26], par conséquent si les fluctuations de richesses sont suffisamment grandes, celles-ci peuvent induire des perturbations sur la valeur vitesse de flamme. [40] admettent pour cette dernière la dépendance en richesse suivante $s_L \sim \Phi^a$, avec a dépendant notamment du type de carburant, d’où

$$\frac{s'_L}{\bar{s}_L} = a \frac{\Phi'}{\bar{\Phi}} \quad (1.101)$$

Enfin, l’approximation de faible nombre de Mach permet une nouvelle fois de négliger les fluctuations de densité devant les autres perturbations dans la relation 1.97. Par conséquent, la fonction de transfert de flamme recherchée s’écrit donc :

$$\frac{\dot{Q}'}{\bar{Q}} = -(1+a) \left(\frac{p'_{ref}(t-\tau)}{2\Delta p} + \frac{u'_{ref}(t-\tau)}{u_{ref}} \right) \quad (1.102)$$

Dans le cas présent, le temps de retard τ est le même pour les fluctuations de pression et de vitesse puisqu’il rend compte du temps de cheminement d’une perturbation

de richesse de la zone de prémélange (zone de référence) jusqu'à la flamme. Pour évaluer ce temps de cheminement, on peut soit reprendre l'approximation convective adoptée dans l'équation 1.92 ou alors réalisée une simulation numérique simplifiée de type RANS (description à la section 2.1.2) ciblée seulement sur la zone séparant la flamme de section de référence [51].

Chapitre 2

Méthodes de prédiction des instabilités thermoacoustiques

2.1 Méthodes analytiques et de simulation numérique en mécanique des fluides

2.1.1 Méthodes analytiques

Le problème aux valeurs propres hérité (Eq. 1.46) est donc directement relié à la résolution de l'équation de Helmholtz avec terme source thermoacoustique. C'est une équation aux dérivées ordinaires mais tridimensionnelle et inhomogène. Dans le cas général, il n'existe pas de forme de solution analytique pour cette équation. Ceci justifie donc l'aspect numérique de cette étude. Néanmoins, on peut s'intéresser aux situations où une solution analytique peut être obtenue afin que celle-ci serve de référence sur des cas test aux codes thermoacoustiques. D'un point de vue mathématique comme la solution à une équation différentielle requiert systématiquement la solution de sa forme homogène, nous allons aborder en premier lieu la situation sans flamme active et ensuite seulement le cas avec flamme active.

Sans flamme active

Même lorsque la géométrie de la configuration étudiée reste simple, typiquement une géométrie à section constante, l'équation du problème 1.46 sans terme source peut s'avérer difficile en raison des variations spatiales éventuelles de la vitesse du son c . Dans ce genre de problème, les techniques analytiques classiquement employées sont la méthode WKB et la théorie radiale [57, 58]. Cependant ces deux approches sont applicables aux situations où c varie lentement dans l'espace et plus particulièrement aux cas où les fluctuations varient spatialement beaucoup plus fortement que c . Dans le contexte applicatif aux turbines à gaz, la situation est le plus

souvent l'exact opposée : les fronts de flamme génèrent des gradients très importants de vitesse du son et les fluctuations acoustiques considérées présentent des longueurs d'onde très grandes (du même ordre que les dimensions de la configuration). L'utilisation de ce type de méthode est donc caduque et seules les configurations très basiques (section constante, température homogène) peuvent être appréhender analytiquement.

Avec flamme active

Pour obtenir une forme de solution dans le cas avec flamme active, il est nécessaire de connaître la forme des solutions du problème sans terme source thermoacoustique correspondant. Par conséquent, les conclusions précédentes inhérentes à la situation sans flamme active demeurent valables avec en plus des difficultés supplémentaires liées à la forme de la fonction de transfert de flamme. Généralement cette dernière ne permet pas de trouver une solution particulière. On est donc restreint aux cas élémentaires où la solution analytique existe pour le cas sans terme source (configuration homogène et à section constante) et où la flamme perturbe faiblement l'acoustique de la configuration. Plus, précisément lorsque l'amplitude de la fonction de transfert est faible, il est possible d'évaluer les modes propres avec flamme active à partir d'un développement limité autour des modes sans flamme active [17, 18, 26].

2.1.2 Méthodes de simulations numériques des écoulements fluides

Le but de ce type de méthode est de simuler le comportement des écoulements fluides quelque soit le type de phénomène auquel ils sont soumis. Elles ne nécessitent donc pratiquement aucune modélisation acoustique, si ce n'est dans l'élaboration de certains types de conditions limites [73], et reposent sur la résolution des équations de la mécanique des fluides compressibles (Eq. 1.9, 1.10, 1.12). Il existe trois grandes catégories de simulation numérique des écoulements :

- La simulation directe des équations de Navier-Stokes (DNS en anglais), qui ne suppose aucune modélisation de la turbulence, cependant le nombre de points requis est tel que cette approche est restreinte à des configurations académiques. En l'état actuel des possibilités informatiques, en aucuns cas elle ne peut constituer une solution envisageable pour la conception et l'analyse acoustique d'une turbine à gaz industrielle.
- La simulation à l'aide des équations de Navier-Stokes moyennées (RANS en anglais). Dans cette approche, on cherche à résoudre l'écoulement moyen en modélisant l'influence de la turbulence sur l'écoulement moyen à l'aide de relations entre le tenseur de Reynolds et les grandeurs moyennes caractéristiques de l'écoulement [74]. Dans le cas de l'étude des instabilités acoustiques, ce type d'approche n'est généralement pas retenue pour deux raisons principales :

d'une part cette approche n'est pas par nature instationnaire et nécessite alors des modifications pour prendre en compte les phénomènes acoustiques (on parle de "Unsteady"-RANS) ; d'autre part la trop forte viscosité induite par sa modélisation a tendance à trop atténuer les perturbations acoustiques et ainsi à limiter la qualité de la réponse acoustique du système étudié. Cette approche n'apparaît donc pas susceptible de prédire correctement les instabilités thermoacoustiques.

- La simulation aux grandes échelles de l'écoulement (LES en anglais) est un compromis entre les méthodes de DNS et de RANS. Dans le cas de la LES, les grandes échelles, c'est à dire supérieures à une taille de l'ordre de la maille, sont calculées explicitement et seules les échelles de sous-maille de l'écoulements sont modélisées [74]. Cette méthode est donc intrinsèquement instationnaire. De plus, les fluctuations acoustiques qui nous intéressent faisant partie des grandes échelles en question, elles ne sont donc pas atténuées par la viscosité turbulente issue de la modélisation de sous-maille. Ainsi, à l'heure actuelle, ce type d'approche apparaît la mieux adaptée à l'étude des instabilités acoustiques dans des configurations industrielles, comme l'atteste ses multiples applications récentes [26, 30, 32, 75].

L'approche est par définition générale par conséquent tous les phénomènes sont potentiellement pris en compte : hydrodynamique (turbulence, vorticité, ...), thermodynamique, thermochimie, acoustique. Ce type de méthode est donc à même de rendre compte des différents mécanismes à l'origine des instabilités thermoacoustiques (voir section 1.1.2). Son utilité est particulièrement évidente dans l'évaluation de la fonction de transfert de flamme (voir section 1.3) sur des configurations complexes. Toutefois, cette méthode demeure encore à l'heure actuelle coûteuse en temps et requiert notamment l'utilisation de super-calculateurs. Une première explication quant à l'origine du coût calcul réside dans le principe même de la méthode : l'approche est temporelle d'où la nécessité d'attendre que tous les temps caractéristiques du problème soient atteints. Ainsi, une simulation pertinente doit être menée au-delà des temps caractéristiques suivants [76] :

- Temps acoustique T_{ac} soit le temps correspondant à plusieurs périodes acoustiques des modes recherchés, soit typiquement $T_{ac} = L/c$ avec L la longueur de la configuration et c la vitesse moyenne du son.
- Temps convectif T_{conv} soit le temps que les grandeurs liées à l'hydrodynamique s'établissent en particulier l'écoulement moyen, typiquement $T_{conv} = L/u$ avec u la vitesse moyenne de convection.
- Temps de résidence pour l'enflamment du mélange.
- Temps caractéristique des zones de recirculation et d'établissement de mouvements de précession de centre de tourbillons (structures dites de "Precessing

Vortex Core”) [29] observées dans le cas d’injection swirlée.

Par ailleurs, les maillages requis pour simuler l’écoulement réactif d’une configuration de type industriel est généralement constitué de plusieurs millions de noeuds en raison du détail de certaines parties d’injecteur ou encore des forts gradients des grandeurs caractéristiques induites par la flamme. De plus, ce type de maillage correspond généralement à une portion de dispositif industriel, une turbine à gaz entière par exemple nécessiterait au bas mot plusieurs centaines de millions de noeuds.

Enfin, un dernier élément d’explication du coût calcul de ce type de simulation concerne le nombre de variables à prendre en compte et donc le nombre d’équations à résoudre. Généralement, le système se compose d’au moins cinq variables telles que la densité, les composantes de la vitesse, l’énergie interne, auxquelles s’ajoutent les espèces chimiques mises en jeu dans les réactions de combustion. Le nombre totale d’inconnues à évaluer est donc de l’ordre d’une dizaine de fois le nombre de noeuds du maillage.

Une autre difficulté inhérente à cette méthode concerne la prise en compte de conditions limites élaborées. Celles-ci requièrent un soin tout particulier dans le cadre de l’étude des instabilités thermoacoustiques [73]. Si les conditions limites se révèlent trop réfléchissantes, les fuites acoustiques sont quasi inexistantes, les méthodes LES étant peu dissipatives, une instabilité trop forte et susceptible de faire dégénérer le calcul peut survenir. Au contraire, si les conditions sont trop peu réfléchissantes, l’instabilité thermoacoustique recherchée n’apparaît jamais car les fluctuations acoustiques sont trop atténuées aux bornes du domaine. En outre, il est difficile d’imposer une impédance de valeur quelconque sur une conditions limite dans une approche temporelle [2]. En effet, ce type de condition limite induit un déphasage entre les ondes acoustiques incidentes et réfléchies. L’état de l’onde réfléchie dépend alors de l’état de l’onde incidente à un temps précédent dont le délai correspond au déphasage en question. Autrement dit, une telle condition limite nécessite le stockage d’un grand nombre de solutions aux itérations précédentes.

Ainsi, si cette méthode demeure indispensable pour la compréhension des instabilités, elle ne peut toutefois pas raisonnablement être utilisée pour tester plusieurs configurations par jour dans le cadre de la conception de turbines à gaz à l’heure actuelle. De plus, ce type d’approche ne permet pas toujours aisément de déterminer la nature de l’instabilité (hydrodynamique, acoustique) lorsqu’elle se manifeste. Pour toutes ces raisons, une méthode complémentaire à ce type de simulation apparaît utile à l’analyse acoustique de configurations industrielles.

2.2 Codes acoustiques de type "réseau"

2.2.1 Principe général

Puisque les approches générales précédentes apparaissent trop coûteuses ou inapplicables sur les configurations d'étude, on cherche à développer une autre méthodologie permettant de tirer partie des hypothèses de modélisation acoustique associées au contexte des turbines à gaz afin de simplifier au maximum le problème. Cette approche repose donc sur les hypothèses suivantes :

- Les inconnues sont les fluctuations thermoacoustiques de l'écoulement en particulier les fluctuations de pressions p' et les fluctuations de vitesse \mathbf{u}' . Les champs moyens sont donc connus en tout point et sont considérés comme des paramètres d'entrée du code.
- Les fluctuations temporelles sont harmoniques de pulsation $\omega \in \mathbb{C}$.
- On ne s'intéresse qu'aux premières harmoniques de la configuration, soit des fluctuations acoustiques de grandes longueurs (typiquement de l'ordre des dimensions de la configuration).

Compte-tenu de ces hypothèses, l'approche est alors "fréquentielle" et, dans sa forme basique, linéaire. Par cette dernière caractéristique, le couplage entre modes propres est donc ignoré ce qui permet d'étudier le problème à une fréquence donnée. Par ailleurs, une autre grande caractéristique réside dans sa modélisation, celle-ci consiste en une représentation de la configuration sous la forme d'une succession d'éléments au comportement acoustique connu. Plus précisément, ces éléments sont généralement orientés dans le sens de l'écoulement moyen si bien que les fluctuations thermoacoustiques amont et aval à chaque élément peuvent être reliées entre elles par la fonction de transfert acoustique de l'élément en question. Dans sa forme la plus élaborée [77-79], les fluctuations thermoacoustiques comprennent non seulement les variables acoustiques p', \mathbf{u}' mais aussi les fluctuations de nature entropiques s' et de vorticité v' . Ainsi, en appelant M la matrice représentant la fonction de transfert de l'élément, les fluctuations amont indicées 1 et les fluctuations aval indicées 2 vérifient :

$$\mathbf{M}(\omega) \cdot \begin{pmatrix} p'_1 \\ u'_{1,x} \\ u'_{1,y} \\ u'_{1,z} \\ s'_1 \\ v'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_2 \\ u'_{2,x} \\ u'_{2,y} \\ u'_{2,z} \\ s'_2 \\ v'_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Par la suite, par soucis de simplification, on ne considérera que les fluctuations acoustiques p', \mathbf{u}' comme variables inconnues. Ainsi, cette modélisation, dont un

élément type est schématisée à la figure 2.1, permet de prendre en compte une très grande variété de composants de turbine à gaz.

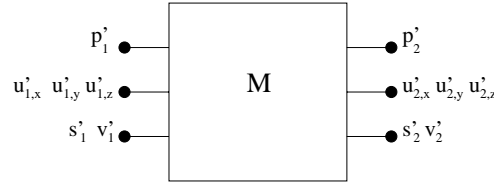


FIG. 2.1 – Élément de code réseau de fonction de transfert M .

2.2.2 Détermination de fonction de transfert

Lorsque la complexité de l'élément le permet, la fonction de transfert de celui-ci peut se déduire analytiquement. Ainsi, la forme la plus simple correspond à une conduite de section constante, de milieu homogène (Température moyenne constante, composition chimique constante, ...) ne contenant pas de flamme, à faible nombre de Mach et dans lequel seules les ondes longitudinales sont considérées. Dans cette situation, illustrée à la figure 2.2, la fonction de transfert ne fait que rendre compte du déphasage des fluctuations entre l'entrée et la sortie.

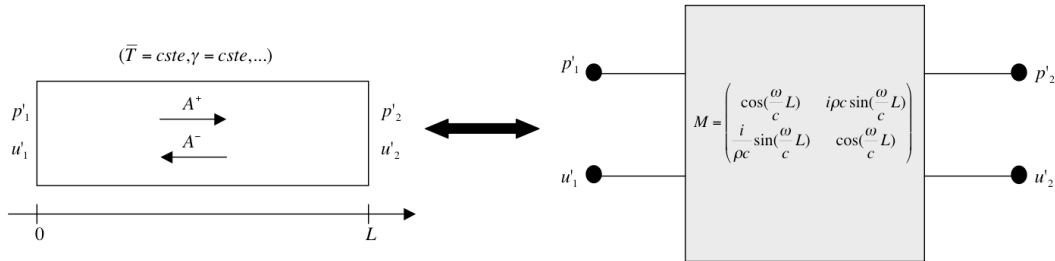


FIG. 2.2 – Fonction de transfert acoustique d'un tube simple à bas nombre de Mach, à section et champ moyen constants dans lequel seules les ondes longitudinales sont considérées

Dans ce cas particulier, les fluctuations acoustiques s'expriment à partir des invariants de Riemann et prennent la forme suivante [62] :

$$p'(x, t) = e^{-i\omega t} \left[A^+ e^{i(\frac{\omega}{c}x)} + A^- e^{-i(\frac{\omega}{c}x)} \right] \quad (2.2)$$

$$u'(x) = \frac{e^{-i\omega t}}{\rho c} \left[A^+ e^{i(\frac{\omega}{c}x)} - A^- e^{-i(\frac{\omega}{c}x)} \right] \quad (2.3)$$

Par conséquent, la matrice de transfert a pour expression :

$$\begin{pmatrix} p'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega}{c}L) & i\rho c \sin(\frac{\omega}{c}L) \\ \frac{i}{\rho c} \sin(\frac{\omega}{c}L) & \cos(\frac{\omega}{c}L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p'_1 \\ u'_1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

D'autres éléments plus complexes peuvent également être pris en compte à l'aide d'une fonction de transfert obtenue analytiquement. C'est le cas notamment d'éléments correspondants à un cylindre évidé siège d'onde longitudinales et azimuthales (voir Fig .2.3). Ce type d'élément permet par exemple de représenter de manière simplifiée un plenum ou une chambre de combustion annulaire de turbine à gaz [80].

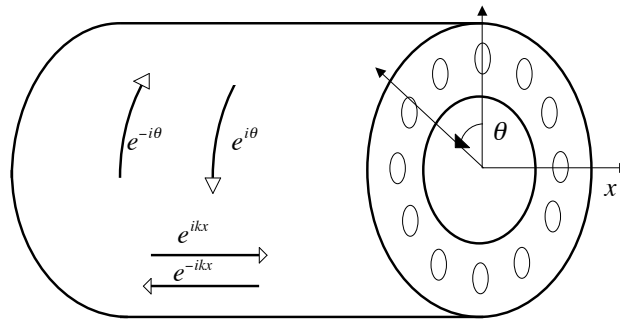


FIG. 2.3 – Element de type plenum ou chambre de combustion simplifiée dans un code réseau

Les variations de section, qu'elles soient brusques ou continues, constituent un autre de type d'élément fréquemment utilisé dans ce type de code. La fonction de transfert associée à ce genre d'élément est alors également déterminable analytiquement [26, 62]. Cette approche peut aussi être appliquée à des éléments plus complexes tels que certaines flammes particulières (cf section 1.3.2). Cependant la fiabilité de la fonction de transfert de ce type d'élément est généralement cruciale pour évaluer la stabilité d'une configuration réaliste, on préfère donc avoir recours à une mesure de cette fonction de transfert. Deux options sont possibles :

- Mesurer sur un dispositif expérimental la fonction de transfert de la flamme, et ce, à différentes fréquences. [68]
- Mesurer numériquement cette fonction de transfert [81-84]

Dans le cadre de l'élaboration d'outils de conception de turbines à gaz, la première approche, expérimentale, est justement la phase que l'on cherche à limiter le plus possible car la réalisation de mesures fiables dans un milieu aussi extrême qu'une flamme et ses environs se révèlent relativement coûteuses. Par conséquent, la seconde option, numérique, sera privilégiée dans notre contexte.

D'une manière générale, la mesure de la fonction de transfert d'un élément est effectuée chaque fois que l'évaluation de cette dernière se révèle trop incertaine analytiquement. Néanmoins ce recours demeure couteux en temps de calcul et s'il devait se généraliser à un grand nombre d'éléments ferait tendre l'approche "code réseau" vers une approche de type "simulation numérique" pure et simple de l'écoulement. Par conséquent l'intérêt de la méthode utilisée dans les codes réseau est de limiter la mesure de fonction de transfert à quelques éléments clés de la configuration tels que la zone de flamme, un brûleur ou un injecteur.

2.2.3 Principe de résolution

L'ensemble des fonctions de transfert de chaque élément connectées entre elles aboutissent à une relation matricielle globale qui, dans le cas d'une configuration à n éléments, sous sa forme la plus générale s'écrit :

$$\mathbf{G}(\omega) \cdot \begin{pmatrix} p'_1 \\ u'_{1,x} \\ u'_{1,y} \\ u'_{1,z} \\ s'_1 \\ v'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p'_n \\ u'_{n,x} \\ u'_{n,y} \\ u'_{n,z} \\ s'_n \\ v'_n \end{pmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

Par conséquent, suivant les propriétés de la matrice globale G , on en déduit un critère de détermination des fréquence propre qui prend généralement la forme d'une annulation de fonctionnelle $\mathcal{F}(\omega)$:

$$\mathcal{F}(\omega_{propre}) = 0 \quad (2.6)$$

Le temps de calcul requis par les algorithmes de recherche des zéros de \mathcal{F} sont généralement très dépendants du nombre d'éléments utilisés et ce, pour deux raisons principales :

- Plus ce nombre augmente et plus le nombre de zéros à trouver est important.
- Plus le nombre d'éléments augmente plus le nombre d'opérations matricielles requises par l'algorithme augmente

Par contre, si les formes classiques de dépendance fréquentielle des fonctions de transfert de flamme et des conditions limites modifient quelque peu la régularité de \mathcal{F} , elles ne la bouleversent pas pour autant. Ceci signifie donc qu'une grande complexité de fonction de transfert, et par conséquent véritablement représentatif de la réponse acoustique réelle d'un élément complexe, peut être utilisée dans ce type de code.

L'efficacité des algorithmes de ce type de méthode étant liée au nombre d'éléments utilisés, cette approche sera donc particulièrement utile dans des configurations où relativement peu d'éléments sont requis. Dans le cas de la recherche de modes propres de grandes longueurs d'ondes (typiquement de l'ordre des dimensions de la configuration), ce critère est plus facilement atteint. En effet, dans ce cas de figure, le détail géométrique n'influence que modérément la valeur des fréquences propres. Par conséquent en raisonnant sur des géométries simplifiées, il est possible de modéliser la configuration en question de manière suffisamment précise avec peu d'éléments. Typiquement un turbine munie d'un plenum, reliée à une chambre de combustion par une dizaine de brûleurs ne requiert que quelques dizaines d'éléments là où une discrétisation classique de simulation numérique nécessite au bas mots plusieurs centaines de milliers de mailles. Sur une telle configuration, le temps de calcul d'un code de type de réseau pour trouver les premières harmoniques est alors de l'ordre de la dizaine de minutes sur un simple PC. Cette approche est donc particulièrement attrayante pour un dimensionnement rapide de turbine ou pour connaître les tendances du comportement acoustique d'une turbine dans le cadre d'études paramétriques. Le lien entre l'efficacité de ce type d'approche et la focalisation sur l'étude des grandes longueurs d'ondes est tel que l'on qualifie également l'approche "réseau" de modélisation aux premiers ordres ("Low order modelling"). Enfin on rappelle que afin de limiter les calculs annexes de simulation numérique, les situations utilisant peu d'éléments nécessitant une mesure directe de fonction de transfert de flamme concourront à la souplesse de cette approche.

2.3 Codes éléments finis acoustiques

2.3.1 Principe général

Comme dans l'approche précédente, ce type de code ne s'intéresse qu'aux seules fluctuations acoustiques par conséquent le système à résoudre se réduit à une équation d'onde (une forme similaire de l'équation 1.44) au lieu de l'ensemble des relations de conservation des grandeurs de l'écoulement dans le cas d'une simulation numérique classique (section 2.1.2). Par ailleurs, les fluctuations acoustiques étudiées étant caractérisées par de grandes longueurs d'ondes (de l'ordre de la taille de la configuration), les maillages requis pour leur modélisation sont beaucoup plus petits que les

maillages de simulation numérique classique de type LES ou RANS (le facteur est de l'ordre de 50 ou 100). Ces deux caractéristiques expliquent l'intérêt d'une approche acoustique pure : pour un coût de calcul modique comparativement aux méthodes de simulations classiques, cette approche permet de déterminer les modes propres sur un nombre assez large de cas.

La principale différence avec l'approche acoustique de type "réseau" réside dans la modélisation spatiale des modes recherchés. Dans l'approche de type "réseau", on cherche d'une part à utiliser le moins possible d'éléments en faisant par exemple des hypothèses d'axisymétrie sur la configuration d'étude (Fig. 2.3) et d'autre part, on cherche à utiliser le plus possible des fonctions de transfert d'élément déterminées analytiquement. Ceci induit généralement des hypothèses sur la forme spatiale des fluctuations acoustiques recherchées (Eq. 2.3). Ainsi, avec l'approche de type réseau, il est difficile de prendre en compte des géométries très générales et des champs moyens variables continuellement et véritablement tridimensionnels. Pour y remédier, on cherche une méthode sans aucune hypothèse sur la forme des fluctuations spatiales avec comme contre-partie, un coût de calcul un peu plus élevé que pour l'approche de type réseau.

2.3.2 Méthode de "Galerkin"

L'objectif principal de cette méthode est de déterminer la stabilité des modes de configurations avec flamme active. On cherche donc avant tout à connaître le taux de croissance des modes en question. La particularité de cette méthode réside dans la forme retenue des fluctuations acoustiques à déterminer. Cette approche a été développée notamment par Culick [59] dans le contexte des moteurs fusées. Bien que ce dernier ait étendu la méthode en question au domaine non linéaire, seule l'approche linéaire sera développée dans cette section. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{c}^2 \nabla p' - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -(\gamma - 1) \frac{\partial q'}{\partial t} & \text{dans } \Omega \\ p' = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \nabla p' \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.7)$$

La méthode proposée par Culick consiste à chercher les solutions à ce problème en la projetant sur une base orthogonale constituée par les modes propres solution de l'équation de Helmholtz homogène. On recherche donc les fluctuations acoustiques sous la forme suivante :

$$p'(\vec{x}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(t) \Psi_m(\vec{x}) \quad (2.8)$$

Avec ψ_m les solutions de :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{c}^2 \nabla \psi_m + (\omega_0^m)^2 \psi_m = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi_m = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \nabla \psi_m \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.9)$$

La pulsation propre du problème sans flamme active s'écrit ω_0^m pour le mode m . Compte-tenu des conditions limites retenues, ω_0^m est réelle et les fonctions ψ_m forment une base orthogonale de $L^2(\Omega)$ (voir section 1.2.6) :

$$\int_{V_\Omega} \psi_m(\vec{x}) \psi_j(\vec{x}) dV = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq j \\ E_j^2 & \text{si } m = j \end{cases} \quad (2.10)$$

La détermination des modes ψ_m et de ω_0^m est un problème en soit que l'on abordera notamment au chapitre 4. Dans le cas présent, avec des conditions limites simples et si le nombre de noeuds du maillage n'est pas trop grand (de l'ordre de quelques milliers), il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des méthodes algébriques trop complexes. Le problème ne présente donc pas de difficultés théoriques majeures et c'est à cette étape qu'une méthode d'éléments finis [85] peut être utilisée pour calculer ces fonctions ψ_m [57, 86, 87]. Une fois ces fonctions connues et compte-tenu de la formulation 2.8, l'équation d'onde du problème 2.7 s'écrit :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \mu_m(t)}{dt^2} + (\omega_0^m)^2 \mu_m(t) \right) \psi_m(\vec{x}) = (\gamma - 1) \frac{\partial \dot{q}'}{\partial t} \quad (2.11)$$

En multipliant cette équation par ψ_j et en l'intégrant sur le domaine Ω , il vient, compte-tenu de l'orthogonalité des modes (relation 2.10) :

$$\frac{d^2 \mu_j(t)}{dt^2} + (\omega_0^j)^2 \mu_j(t) = - \frac{(\gamma - 1)}{E_n^2} \int_{V_\Omega} \psi_j(\vec{x}) \frac{\partial \dot{q}'}{\partial t} dV \quad (2.12)$$

Une forme de fonction de transfert de flamme (voir section 1.3) est alors requise pour relier $-\partial \dot{q}' / \partial t$ à p' . En posant $\mu_j(t) = \hat{\mu}_j \exp(-i\omega^j t)$ et en appelant $\hat{H}(\vec{x}, \omega)$ la fonction de transfert en question, la pulsation propre ω^j avec flamme active peut être déduite de l'équation 2.12 par la relation suivante :

$$(\omega^j)^2 = (\omega_0^j)^2 + \frac{(\gamma - 1)}{E_n^2} \int_{V_\Omega} \psi_j(\vec{x}) \hat{H}(\vec{x}, \omega) dV \quad (2.13)$$

Ce type de procédure a été appliquée dans l'étude de la stabilité des fusées à combustible solide de l'US Air force [59]. Par ailleurs, plusieurs remarques apparaissent à la lumière de ces développements :

- L'application de cette procédure à des conditions limites de type impédance nécessite des aménagements conséquents. En effet, d'une part les fonctions ψ_m ne sont plus orthogonales (voir section 1.2.6) ce qui induit une relation plus

difficile à dériver que la relation 2.12, et d'autre part le calcul de la fréquence propre du problème sans terme source n'est pas trivial car la condition limite exprimée en pression fait intervenir la fréquence propre recherchée (Eq. 1.47 combinée à Eq. 1.37).

- Cette méthode est particulièrement utile pour déterminer la stabilité du mode (signe du taux de croissance). Pour obtenir la valeur exacte de la fréquence propre avec flamme active, Dowling [58] a montré que cette méthode pouvait présenter des problèmes de précisions dans le cas où la réponse de la flamme active est forte (grande valeur de l'amplitude de la fonction de transfert de flamme).

2.3.3 Approche temporelle

Dans l'approche précédente, le calcul des modes ainsi que le taux de croissance sont obtenus à travers une analyse fréquentielle du problème (Eq. 2.9 et Eq. 2.13). Dans cette section, on présente une approche légèrement différente en cherchant à résoudre l'équation d'onde (Eq. 1.44) dans le domaine temporel. Une approche similaire a été appliquée par C. Pankiewicz du Lehrstuhl für thermodynamik de l'université de Munich en réécrivant l'Eq. 1.44 sous la forme de deux équations aux dérivées premières en temps correspondant aux formes linéarisées des équations de conservation de masse et de quantité de mouvement [88] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{p} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla p' + \gamma p' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \gamma \bar{p} \nabla \cdot \mathbf{u}' &= (\gamma - 1) \dot{q}' \\ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \frac{p'}{\bar{\rho} c^2} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \end{aligned} \quad (2.14)$$

Un modèle de fonction de transfert de flamme reliant \dot{q}' aux fluctuations acoustiques est comme toujours requis pour fermer le problème. Dans l'exemple de [88], le modèle suivant utilisé par [64] a été choisi :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{d\dot{q}'}{dt} + \dot{q}' = \eta f(u'_{ref}(t - \tau)) \quad (2.15)$$

La pulsation ω_0 représente une fréquence de coupure. La variable u' représente la fluctuation de la vitesse longitudinale. La fonction f est destinée à rendre compte des non linéarités de la flamme en considérant un effet de saturation du dégagement de chaleur au-delà d'une amplitude trop grande des fluctuations de vitesse. Pour la partie linéaire, f est une simple fonction affine. Dans le cadre de la description de cette approche, la caractéristique importante de la fonction de transfert de flamme réside dans le temps de retard τ .

Une méthode d'élément finis est utilisée pour discrétiser spatialement le système en (p', u') de l'équation 2.14. L'initialisation est assurée par une perturbation de pression à la répartition spatiale aléatoire. Pour des raisons de commodité d'écriture, on va considérer la situation où seules les fluctuations longitudinales sont recherchées (le cas tridimensionnel pouvant se déduire facilement) ; l'équation 2.14 peut se mettre sous forme matricielle en introduisant le vecteur $[v]$:

$$[v] = \begin{bmatrix} p' \\ u' \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

d'où la mise en forme suivante de l'équation 2.14 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} [v] + \begin{bmatrix} \bar{u} & \gamma \bar{p} \\ 1/\bar{\rho} & \bar{u} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} [v] + \begin{bmatrix} \gamma d\bar{u}/dx & d\bar{p}/dx \\ \bar{u}d\bar{u}/(\bar{\rho}c^2)dx & d\bar{u}/dx \end{bmatrix} [v] = \begin{bmatrix} (\gamma-1)\dot{q}' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Des conditions limites de type $u' = 0, p' = 0$ et également des formes simples d'impédance sont adjointes au système d'équation précédent.

L'intégration temporelle se fait en deux étapes : à chaque itération, le terme source acoustique est évalué à l'aide de l'équation 2.15, puis cette valeur est utilisée dans le système 2.17 pour en déduire la valeur de $[v]$ à l'itération suivante.

L'avantage de l'approche temporelle réside dans sa capacité à prendre en compte les non-linéarités. Il suffit d'appliquer une fonction de transfert de flamme non linéaire (la fonction f de l'Eq. 2.15) pour que, à partir d'un certain nombre de périodes, l'instabilité aboutisse à un cycle limite. Le revers de l'approche temporelle réside éventuellement sur les temps de calcul longs si l'instabilité tarde à s'exprimer (si la taux de croissance est faible). Une autre difficulté concerne le stockage nécessaire des données. En particulier, pour évaluer le terme source thermoacoustique les fluctuations acoustiques à un instant retardé de τ sont nécessaires ; de même des conditions limites de type impédance quelconque requièrent la connaissance des fluctuations à des instants antérieurs au niveau des bords concernés. Enfin, cette méthode permet de déterminer avant tout le mode le plus instable mais il est parfois utile de connaître aussi les autres modes de la configuration dans le cadre d'une analyse complète.

Chapitre 3

Calcul des modes propres thermoacoustiques par une approche monodimensionnelle

3.1 Introduction et description générale du code

De par sa rapidité, l'approche de type "réseau" est particulièrement adaptée à l'étude des instabilités thermoacoustiques de basses et moyennes fréquences de configurations industrielles. On cherche donc à appliquer cette méthodologie pour créer un outil capable de fournir une évaluation pertinente et rapide (quelques minutes sur un simple PC) des premières harmoniques de configurations de type turbine à gaz en raisonnant sur des géométries simplifiées. L'idée sous-jacente étant de pouvoir tester un grand nombre de configurations grâce à la rapidité de calcul et ainsi étudier l'influence sur la valeurs des modes propres de paramètres caractéristiques de la configuration.

On se propose dans cette partie de décrire le code de type "réseau" développé initialement par Andre Kaufmann [89] et dont l'élaboration a été poursuivie au cours de cette étude. Ce code est appelé "Soundtube". On rappelle dans un premier temps les hypothèses fondamentales liées à l'approche de type "réseau" décrite à la section 2.2 :

- Les inconnues sont les fluctuations acoustiques des grandeurs de l'écoulement en particulier les fluctuations de pressions p' et les fluctuations de vitesse \mathbf{u}' . Les champs moyens sont donc connus en tout point et sont considérés comme des paramètres d'entrée du code.
- Les fluctuations temporelles sont harmoniques de pulsation $\omega \in \mathbb{C}$.
- La configuration étudiée est subdivisée en une succession d'éléments au comportement acoustique déterminé c'est à dire dont la fonction de transfert

est connue.

Dans le cadre de ces hypothèses, il est a priori possible de prendre en compte une grande variété de configurations. Néanmoins la méthodologie de type de "réseau" atteint ces limites quand il s'agit de représenter une configuration dans laquelle la géométrie, le champ moyen et les fluctuations acoustiques varient de manière non identique dans les trois directions de l'espace. Cette situation ne peut pas, par exemple, se modéliser à l'aide d'un élément de type "plenum" (voir Fig .2.3) puisque celui-ci, de par la forme retenue des ondes azimutales, suppose une axisymétrie au moins partielle du problème. Dans une telle situation, l'utilisation d'un grand nombre d'éléments caractérisés par des fluctuations acoustiques tridimensionnelles aboutirait à un système d'équations trop important pour être résolu raisonnablement par les algorithmes de ce type de méthode. Pour ces situations véritablement tridimensionnelles, on décide d'appliquer une autre stratégie que celle de type réseau, cet aspect sera traité dans le chapitre 4. Compte-tenu des limitations intrinsèques à la méthodologie, on décide d'adapter la modélisation de type réseau dans Soundtube en ne considérant que deux grandes familles d'éléments, à savoir :

- Des portions de configurations homogènes c'est à dire à **section constante et à champ moyen constant** (température, composition chimique, ...) dans lesquelles **seules les ondes longitudinales sont considérées**.
- Des connexions de plusieurs portions homogènes avec éventuellement présence d'une flamme et variation de section.

Le premier point signifie que, en l'absence d'ondes transverses, la forme de la section d'une portion élémentaire de configuration est, dans Soundtube, sans aucune incidence sur la forme des modes propres ou la valeur des fréquence propres. Pour parler de ce type d'élément on parlera par abus de langage tout simplement de "tube".

Le deuxième point signifie qu'une flamme sera vue comme une interface réactive entre plusieurs tubes élémentaires. Par conséquent la flamme est considérée infiniment mince dans notre approche, plus précisément la taille de la flamme est considérée petite devant les longueurs d'onde considérées qui, on le rappelle, sont de l'ordre des dimensions de la configuration. Dans le cas où la flamme s'étale sur une zone de taille non négligeable par rapport aux longueurs d'ondes en question, il est néanmoins possible de prendre en compte ce genre de configuration à l'aide d'une succession de flammes minces. Cet aspect sera développé dans les sections suivantes.

Compte-tenu des hypothèses de modélisation énoncées au chapitre 1, l'écoulement dans un tube élémentaire vérifie donc en plus :

- nombre de Mach faible,

- fluctuations uniquement acoustiques et de faibles amplitudes devant les grandeurs caractéristiques (acoustique linéaire),
- fluctuations purement isentropiques,

dans ces conditions, l'équation d'onde homogène s'applique à l'intérieur d'un tube :

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Et on en déduit l'expression classique [26] des fluctuations de pression et de vitesse longitudinale à l'aide des invariants de Riemann :

$$p'(x,t) = \Re \left(A^+ e^{ikx-i\omega t} + A^- e^{-ikx-i\omega t} \right) \quad (3.2)$$

$$u'(x,t) = \frac{1}{\bar{\rho}\bar{c}} \Re \left(A^+ e^{ikx-i\omega t} - A^- e^{-ikx-i\omega t} \right) \quad (3.3)$$

Avec k le nombre d'onde qui, en l'absence de phénomènes dispersifs, vérifie :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \quad (3.4)$$

La figure 3.1 illustre la modélisation dans Soundtube d'une chambre de combustion aéronautique.

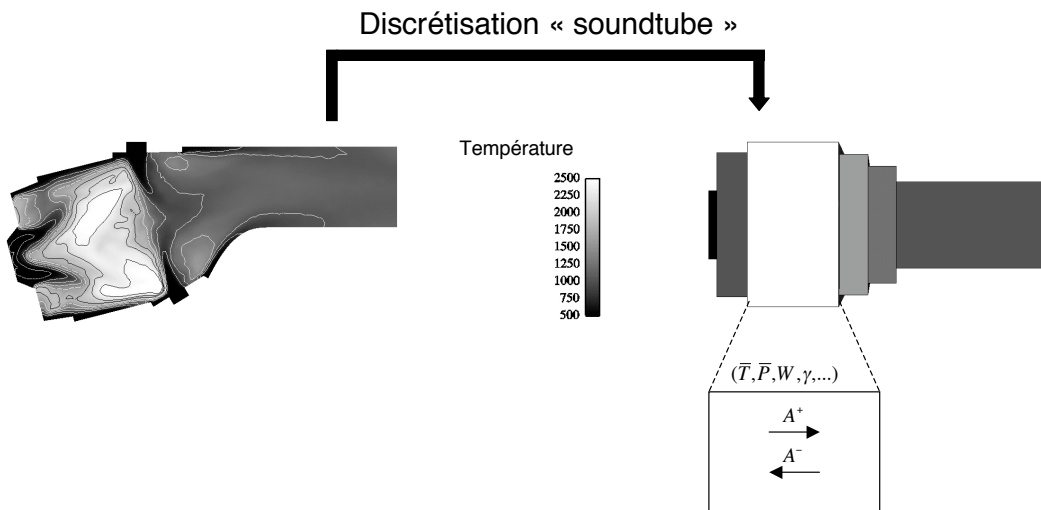


FIG. 3.1 – Exemple de discrétisation utilisée dans le code Soundtube d'une chambre de combustion aéronautique

Bien que seules les ondes longitudinales soient considérées, ce type de modélisation ne cantonne pas forcément Soundtube à l'étude des seules géométries mono-dimensionnelles. Il est possible de représenter dans Soundtube, une géométrie

tridimensionnelle par un réseau de tubes élémentaires comme le montre la figure 3.2. L'approche permettant d'appréhender des géométries tridimensionnelles tout en gardant une modélisation monodimensionnelle du point de vue ondulatoire est alors qualifiée "d'approche 1,5D". On notera que, par définition, cette approche ne peut pas déterminer des modes "mixtes" composés à la fois de fluctuations longitudinales et transverses en un point donné de la configuration. La détermination de ce type de mode requiert alors l'utilisation d'une approche véritablement tridimensionnelle telle que celle décrite au chapitre 4.

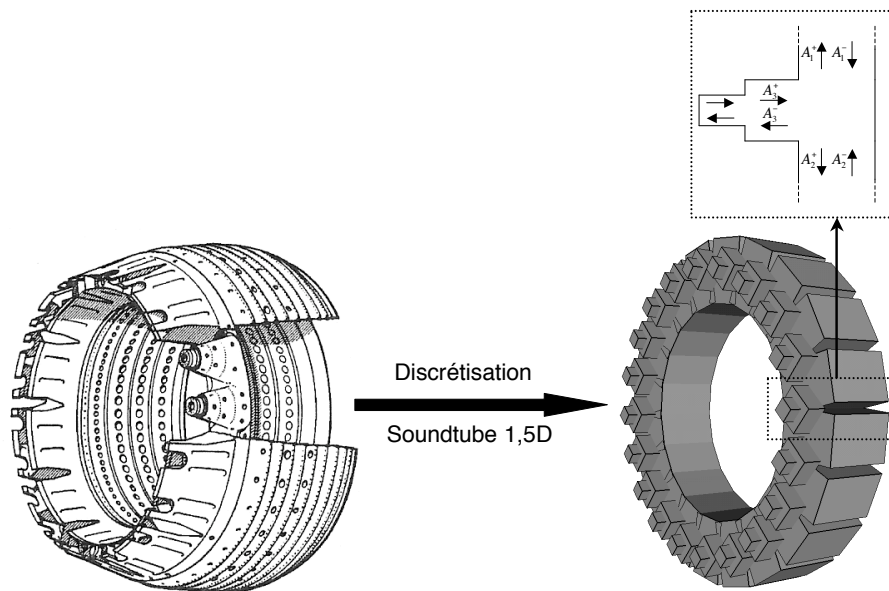


FIG. 3.2 – Exemple d'application de l'approche 1,5D à une chambre de combustion annulaire : configurations 3D en et modélisation ondulatoire 1D dans chaque tube élémentaire.

3.2 Modélisation acoustique

3.2.1 Relations de saut dans le cas 1D

Cas d'une interface non réactive

On s'intéresse dans un premier temps au cas d'une interface sans flamme connectant deux tubes élémentaires de sections différentes (voir Fig. 3.3). Pour

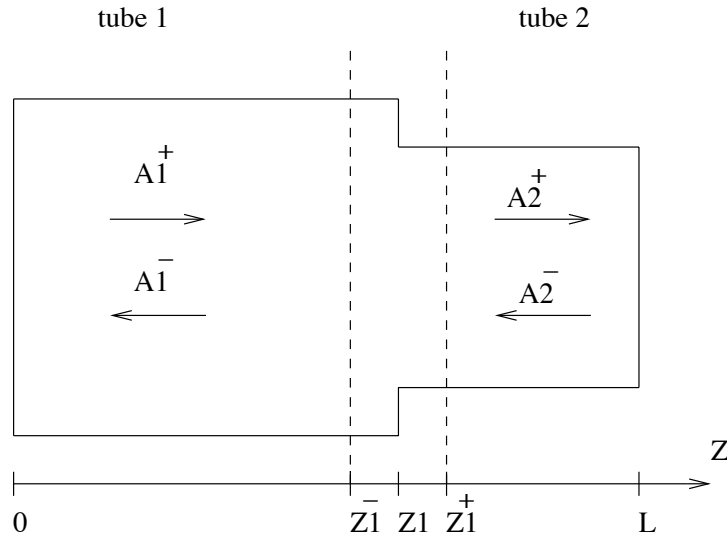


FIG. 3.3 – Intersection entre deux tubes de sections différentes

relier les fluctuations acoustiques des deux tubes au niveau de cette interface, on réalise un bilan de masse et de quantité de mouvement au niveau de l'interface à partir des équations de conservation linéarisées concernées. On montre ainsi (voir annexe A) que dans la configuration décrite à la figure 3.3, les relations de saut suivantes sont obtenues :

$$S_2 u'(z_1^+) = S_1 u'(z_1^-) \quad (3.5)$$

$$p'(z_1^+) = p'(z_1^-) \quad (3.6)$$

De part et d'autre de l'interface, le fluide est homogène et la section uniforme par conséquent la forme des solutions y régnant correspond aux équations 3.3. Les relations de saut précédentes se mettent donc sous la forme :

$$\frac{S_2}{\bar{\rho}_2 c_2} (A_2^+ - A_2^-) = \frac{S_1}{\bar{\rho}_1 c_1} (A_1^+ e^{ik_1 z_1} - A_1^- e^{-ik_1 z_1}) \quad (3.7)$$

$$A_2^+ + A_2^- = A_1^+ e^{ik_1 z_1} + A_1^- e^{-ik_1 z_1} \quad (3.8)$$

Cas d'une interface réactive

On s'intéresse maintenant au cas d'une interface réactive c'est à dire, à la situation décrite à la figure 3.4. Par un raisonnement identique au cas sans flamme et décrit en annexe A, les relations de saut suivantes sont obtenues :

$$S_2 \hat{u}_z(z_1^+) = S_1 \hat{u}_z(z_1^-) + \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \hat{Q} \quad (3.9)$$

$$\hat{p}(z_1^+) = \hat{p}(z_1^-) \quad (3.10)$$

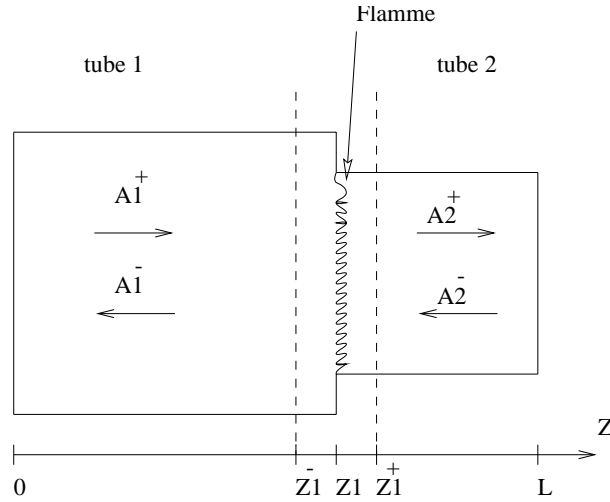


FIG. 3.4 – Intersection entre deux tubes de sections différentes avec flamme

Avec $\hat{Q} = \int_{V_{flam}} \hat{q} dV$ le dégagement de chaleur instationnaire de l'ensemble de la flamme. Sachant que de part et d'autre de l'intersection réactive, les ondes acoustiques sont de la forme des relations 3.3, les relations de saut précédentes s'écrivent donc :

$$\frac{S_2}{\bar{\rho}_2 c_2} (A_2^+ - A_2^-) = \frac{S_1}{\bar{\rho}_1 c_1} (A_1^+ e^{ik_1 z_1} - A_1^- e^{-ik_1 z_1}) + \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \hat{Q} \quad (3.11)$$

$$A_2^+ + A_2^- = A_1^+ e^{ik_1 z_1} + A_1^- e^{-ik_1 z_1} \quad (3.12)$$

La fermeture des relations de saut dans le cas d'une interface réactive requiert l'utilisation d'un modèle de fonction de transfert de flamme. Le plus simple est le modèle $n - \tau$ décrit à la section 1.3.1 et qui, particularisé au cas étudié, relie les fluctuations de dégagement de chaleur aux fluctuations de vitesse en un point de référence z_{ref} donné de la configuration :

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \dot{Q}' = n S(z_{ref}) u'(z_{ref}, t - \tau) \quad (3.13)$$

Le paramètre n représente la force de la réponse de la flamme à une perturbation acoustique de pulsation $\omega = 2\pi f$ et le paramètre τ représente le temps de retard de la réponse de la flamme à l'excitation acoustique qui la sollicite. La réponse acoustique de la flamme est généralement fonction de la fréquence, cet aspect est pris en compte dans Soundtube à travers la forme de dépendance fréquentielle retenue des paramètres n et de τ :

$$n(f) \text{ ou } \tau(f) = \frac{\sum_{j=0}^N \alpha_j f^j}{\sum_{j=0}^M \beta_j f^j} \quad (3.14)$$

L'utilisateur fixe lui-même l'ordre N et M des polynômes au numérateur et dénominateur et peut ainsi interpoler un grand nombre de fonction de transfert de flamme. Par ailleurs, il est possible d'utiliser dans Soundtube des modélisations acoustiques de flamme plus générales c'est à dire avec une influence de la pression acoustique :

$$\frac{\gamma-1}{\gamma\bar{p}}\dot{Q}' = nS(z_{ref})u'(z_{ref}, t - \tau) + n_p S(z_{ref})p'(z_{ref}, t - \tau_p) \quad (3.15)$$

La dépendance fréquentielle des paramètres n_p, τ_p est prise en compte dans Soundtube via une fonction de transfert du type de l'équation 3.14. En ce qui concerne le point de référence z_{ref} celui-ci peut correspondre à n'importe quelle section de la configuration. Pour des raisons de clareté d'exposé, on va considérer dans l'exemple de la figure 3.4 que ce point correspond à $z_{ref} = z_1$. Dans ce cas, les relations de saut 3.12 au niveau de la flamme s'écrivent de la façon suivante avec la forme la plus générale de fonction de transfert de flamme :

$$\frac{S_2}{\bar{\rho}_2 c_2}(A_2^+ - A_2^-) = \frac{S_1}{\bar{\rho}_1 c_1} \left((1 + ne^{i\omega\tau} + \bar{\rho}_1 c_1 n_p e^{i\omega\tau_p}) A_1^+ e^{ik_1 z_1} - (1 + ne^{i\omega\tau} - \bar{\rho}_1 c_1 n_p e^{i\omega\tau_p}) A_1^- e^{-ik_1 z_1} \right) \quad (3.16)$$

$$A_2^+ + A_2^- = A_1^+ e^{ik_1 z_1} + A_1^- e^{-ik_1 z_1} \quad (3.17)$$

3.2.2 Relations de saut généralisées au cas 1,5D

Dans le cas 1,5D, la conservation du débit volumique acoustique au niveau d'une interface fait intervenir la notion d'orientation de chaque tube élémentaire. Comme le montre la figure 3.5, la situation est analogue à celle d'un circuit électrique dans lequel le rôle de la différence de potentiel est dévolue à la pression acoustique et celui de l'intensité au débit volumique acoustique. En conséquence les relations de saut apparaissent comme une généralisation des lois de Kirchoff aux fluctuations acoustiques. Celles-ci impliquent donc la conservation de la pression acoustique au niveau de l'interface c'est à dire l'égalité entre chacunes des pressions régnant dans les tubes connectés. Les relations de saut dans le cas 1,5D assurent également la conservation du débit volumique acoustique au niveau de l'interface, toutefois la notion de débit entrant et sortant au niveau du point de connexion doit être précisée. Dans le cas purement 1D (voir Fig. 3.3) l'orientation est tacite car l'entrée et la sortie de chaque interface et du système sont clairement identifiées. Dans un cas 1,5D, l'orientation consiste à déterminer un sens à l'écoulement acoustique au niveau de chaque interfaces de manière compatible au niveau global. Pour se

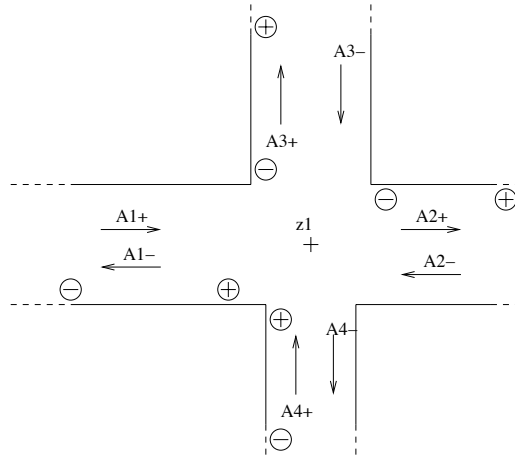


FIG. 3.5 – Intersection de configuration 1,5D composée de quatre tubes

faire, on introduit la notion d'orientation des tubes. Au niveau d'une interface, on appelle m_j l'indice d'orientation du j^{ieme} tube connecté tel que :

$$\begin{aligned} m_j = -1 &\iff \text{tube } j \text{ connecté à l'interface par sa face -} \\ m_j = +1 &\iff \text{tube } j \text{ connecté à l'interface par sa face +} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ainsi, dans le cas d'une intersection à k tubes au niveau du point z_1 (dans le cas de la figure 3.5, $k=4$), les relations de saut s'écrivent :

$$\hat{p}_1(z_1) = \hat{p}_j(z_1) \forall j \in [1, k] \quad (3.19)$$

$$m_1 \cdot S_1 \hat{u}_1(z_1) + m_2 \cdot S_2 \hat{u}_2(z_1) + \dots + m_k \cdot S_k \hat{u}_k(z_1) = 0 \quad (3.20)$$

Dans le cas d'une intersection "1,5D" réactive avec, par exemple, z_1 comme point de référence pour le modèle de flamme, la relation s'écrit :

$$m_1 \cdot S_1 \hat{u}_1(z_1) (1 + ne^{i\omega\tau}) + \bar{\rho}_1 c_1 n_p e^{i\omega\tau_p} S_1 \hat{p}_1(z_1) + \dots + m_k \cdot S_k \hat{u}_k(z_1) = (3.21)$$

A partir des expressions 3.3, les relations précédentes peuvent être reformulées à l'aide des invariants de Riemann.

Il est à noter que l'orientation des tubes est arbitraire et ne change pas le système global. Encore une fois l'analogie avec l'orientation du courant électrique est directe.

3.2.3 Conditions limites

Dans Soundtube les conditions limites correspondent à des coefficients de réflexion R définis comme suit selon l'abscisse locale z d'un tube donné :

$$R = \frac{A^+}{A^-} e^{i2kz} \quad (3.22)$$

Cette définition suppose donc que, pour rendre compte du déphasage entre les ondes acoustiques se propageant en sens opposé, l'origine locale est fixée à la face - du tube.

R est dans le cas général complexe mais il peut aussi être dépendant de la fréquence. Le comportement fréquentiel de celui-ci est pris en compte dans Soundtube de la même manière que dans les fonctions de transfert de flamme c'est à dire à l'aide de la relation 3.14.

3.3 Recherche des fréquences propres par méthode modale

3.3.1 Principe de la méthode

Les fréquences propres d'un dispositif donné correspondent aux fréquences satisfaisant les conditions limites fixées ainsi que les relations de saut entre les différents tubes qui composent le dit dispositif.

L'ensemble des relations de sauts et des conditions limites aboutissent à la relation matricielle globale suivante dans le cas d'un dispositif à n tubes :

$$\mathbf{M}(\omega) \cdot \begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_1^- \\ \vdots \\ A_n^+ \\ A_n^- \end{pmatrix} = 0 \quad (3.23)$$

On obtient donc un système linéaire paramétré par les fréquences propres et dont les inconnues sont les amplitudes des ondes acoustiques dans chacun des tubes de la configuration.

Les seules solutions physiquement admissibles, c'est à dire non nulles, vérifient donc :

$$\det(\mathbf{M}(\omega)) = 0 \iff \omega = \omega_{propre} \quad (3.24)$$

Dans la suite, on qualifiera cette équation de relation caractéristique et on définit \mathcal{F} tel que :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto \mathcal{F}(\omega) = \det(\mathbf{M}(\omega)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

La détermination de la fréquence propre, sa partie réelle et sa partie imaginaire (taux de croissance du mode), correspond à la recherche des zéros de \mathcal{F} dans

le plan complexe. Les techniques classiques telles que Newton-Raphson ou dichotomie ne peuvent être appliquées que dans une zone du plan complexe ne contenant qu'un seul zéro sous peine de non convergence des algorithmes. On ne peut donc appliquer ces techniques directement à toute une partie du plan complexe contenant plusieurs fréquences propres. De plus, les techniques de type "boule pesante" [90] requièrent l'évaluation préalable du gradient de \mathcal{F} dans la zone étudiée du plan complexe ce qui induit un coût de calcul trop lourd. L'approche retenue est fondée sur une procédure numérique décrite dans la thèse de Philippe Le Helley [61] faisant appel aux résultats d'analyse complexe. Son implémentation dans Soundtube a été réalisée par André Kaufmann [89]. Son principe est basé sur la propriété suivante, soit un contour C du plan complexe alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{\mathcal{F}'(\omega)}{\mathcal{F}(\omega)} d\omega = N - P \quad (3.26)$$

Avec \mathcal{F}' la dérivée de \mathcal{F} , N et P respectivement le nombre de zéros et de pôles à l'intérieur du contour C . Dans le cas présent, étant donné les relations de sauts utilisées dans Soundtube (Eq. 3.17) ainsi que le type de condition limite (Eq. 3.22), la dépendance fréquentielle des coefficients de \mathbf{M} est donc de forme exponentielle. Par conséquent, le déterminant de la matrice \mathbf{M} , comme produit de fonctions exponentielles de la fréquence, n'admet pas de pôles. Ainsi $P = 0$ dans la relation 3.26 et cette dernière renseigne donc uniquement sur les zéros de \mathcal{F} . La relation 3.26 peut se démontrer de la manière suivante : encore une fois, compte-tenu de la dépendance fréquentielle des coefficients de \mathbf{M} son déterminant peut être considéré holomorphe dans tout le plan complexe et par conséquent analytique [91]. En conséquence, à l'intérieur du contour C du plan complexe, \mathcal{F} peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{F}(\omega) = \prod_{j=1}^N (\omega - \omega_j) \mathcal{G}(\omega) \quad (3.27)$$

Avec ω_j le j^{ieme} zéro (ou fréquence propre) de \mathcal{F} et \mathcal{G} une fonction holomorphe n'admettant ni zéros ni pôles dans C . On en déduit donc que le rapport \mathcal{G}'/\mathcal{G} est aussi une fonction holomorphe dans C et que par conséquent l'intégrale de l'équation 3.26 s'écrit :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{\mathcal{F}'(\omega)}{\mathcal{F}(\omega)} d\omega = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{1}{\omega - \omega_j} d\omega + \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{\mathcal{G}'(\omega)}{\mathcal{G}(\omega)} d\omega}_0 \quad (3.28)$$

En appliquant le théorème de Cauchy [91] à cette équation, on en déduit directement le résultat issu de la relation 3.26.

3.3.2 Mise en pratique de la méthode

La mise en pratique de la méthode consiste à tout d'abord se fixer la zone du plan complexe correspondant aux gammes de fréquences propres recherchées. Cette zone est ensuite découpée en contours rectangulaires sur lesquels est appliquée la relation 3.26. Chacun de ces contours est redécoupé jusqu'à obtenir des contours rectangulaires d'une dizaine de Hertz de largeur au maximum ne contenant qu'une seule fréquence propre. L'encadrement des zéros permet leur détermination précise à l'aide d'une procédure de minimisation de $|\mathcal{F}(\omega)|$. Cette dernière est basée sur l'algorithme de Müller [92] qui constitue une formulation quadratique de l'algorithme de Newton-Raphson.

En ce qui concerne le calcul effectif de l'intégrale de l'Eq. 3.26, celui-ci est réalisé directement à l'aide d'une primitive de la fonction intégrée. En effet, soit un chemin Ch quelconque du plan complexe ; en définissant l'argument d'un nombre complexe z comme :

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi \quad (3.29)$$

et sous la condition que

$$\arg(\mathcal{F}(\omega)) \neq \pi \forall \omega \text{ sur le chemin } Ch \quad (3.30)$$

l'écriture suivante est licite :

$$\int_{Ch} \frac{\mathcal{F}'(\omega)}{\mathcal{F}(\omega)} d\omega = \left[\ln|\mathcal{F}(\omega)| \right]_{Ch} + i \left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{Ch} \quad (3.31)$$

On applique donc ce résultat aux différents chemins constituant le contour C pour évaluer l'intégrale en question. En outre, lorsque la fonction \mathcal{F} atteint la valeur critique π en un point z_j du contour C , on remplace l'intégration sur le contour fermé par l'intégration sur un contour excluant le point z_j à l'aide de la propriété suivante :

$$\lim_{[z_j^-, z_j^+] \rightarrow 0} \left(\int_{C-[z_j^-, z_j^+]} \frac{\mathcal{F}'(\omega)}{\mathcal{F}(\omega)} d\omega \right) = \oint_C \frac{\mathcal{F}'(\omega)}{\mathcal{F}(\omega)} d\omega$$

Compte-tenu de l'holomorphic de $\ln|\mathcal{F}|$ sur C , on en déduit le résultat suivant :

$$\lim_{[z_j^-, z_j^+] \rightarrow 0} \left(\int_{C-[z_j^-, z_j^+]} \frac{\mathcal{F}'(\omega)}{\mathcal{F}(\omega)} d\omega \right) = \underbrace{\lim_{[z_j^-, z_j^+] \rightarrow 0} \left[\ln|\mathcal{F}(\omega)| \right]_{C-[z_j^-, z_j^+]}}_0 + \lim_{[z_j^-, z_j^+] \rightarrow 0} i \left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{C-[z_j^-, z_j^+]}$$

D'un point de vue numérique, l'intégration précédente est donc réalisée en scindant le contour C en segments $[z_k, z_{k+1}]$ et en sommant les valeurs $\left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_k}^{z_{k+1}}$

obtenus sur ces derniers. A priori, cette procédure n'est pas valable lorsque $\arg(\mathcal{F}(\omega)) = \pi$ sur le segment $[z_k, z_{k+1}]$ (Eq. 3.30). En pratique, cette condition est équivalente à une condition de continuité de l'argument sur chaque segment. Plus précisément, on sait que la fonction argument n'admet pas une unique définition, chacune de ces définitions diffèrent d'une constante dont la valeur est liée au point de référence choisi dans la définition en question de l'argument. Par conséquent, pour évaluer correctement $\left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_k}^{z_{k+1}}$, il faut et il suffit que la même définition d'argument soit employée pour tous les points du chemin $[z_k, z_{k+1}]$. Or ceci n'est possible que si les variations de $\arg(\mathcal{F}(\omega))$ sur le chemin en question ne sont pas trop importantes. Afin de clarifier cette notion de variabilité de l'argument, la figure 3.6 montre deux exemples comparant la validité du calcul de $\left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_j}^{z_k}$. Dans ce cas de figure, bien que la fonction $\arg(\mathcal{F}(\omega))$ soit discontinue sur le chemin $[z_1, z_2]$ avec la définition 3.29, il est possible de redéfinir l'argument pour que :

$$\left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{C_2} = \left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_1}^{z_2} = \alpha$$

Par contre, compte-tenu des variations de $\arg(\mathcal{F}(\omega))$ dans la situation de la figure 3.6, l'évaluation de $\left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{C_4}$ ne peut plus être obtenue directement par les valeurs de l'argument en z_1 et z_4 uniquement :

$$\left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{C_4} = \alpha + 2\pi \neq \left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_1}^{z_4} = \alpha$$

Pour calculer correctement la différence d'argument, il est nécessaire de faire intervenir les points intermédiaires z_2 et z_3 :

$$\left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{C_4} = \left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_1}^{z_2} + \left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_2}^{z_3} + \left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_3}^{z_4}$$

Autrement dit la méthode modale, pour correctement déterminer le nombre de fréquences propres du systèmes dans une zone donnée du plan complexe, nécessite un nombre suffisant de points intermédiaires z_k sur le contour de la zone en question afin d'assurer la continuité de l'argument sur chaque segment ainsi créé. Ce nombre de points dépend donc de la variabilité de $\arg(\mathcal{F}(\omega))$, toutefois cette dernière est impossible à connaître a priori car cette variabilité dépend non seulement de la complexité de la configuration (taille de \mathbf{M} , c'est à dire du nombre de tubes élémentaires utilisés) mais également de la proximité d'une fréquence propre du point de calcul. Sur des cas courants de quelques dizaines de tubes, un nombre suffisant de points de calcul sur un contour est de l'ordre d'une quarantaine. Il est possible d'avoir recours à une plus grande segmentation des contours mais la rapidité des calculs peut en être affectée. En effet chaque calcul de $\arg(\mathcal{F}(\omega))$ requiert le calcul du déterminant de \mathbf{M} .

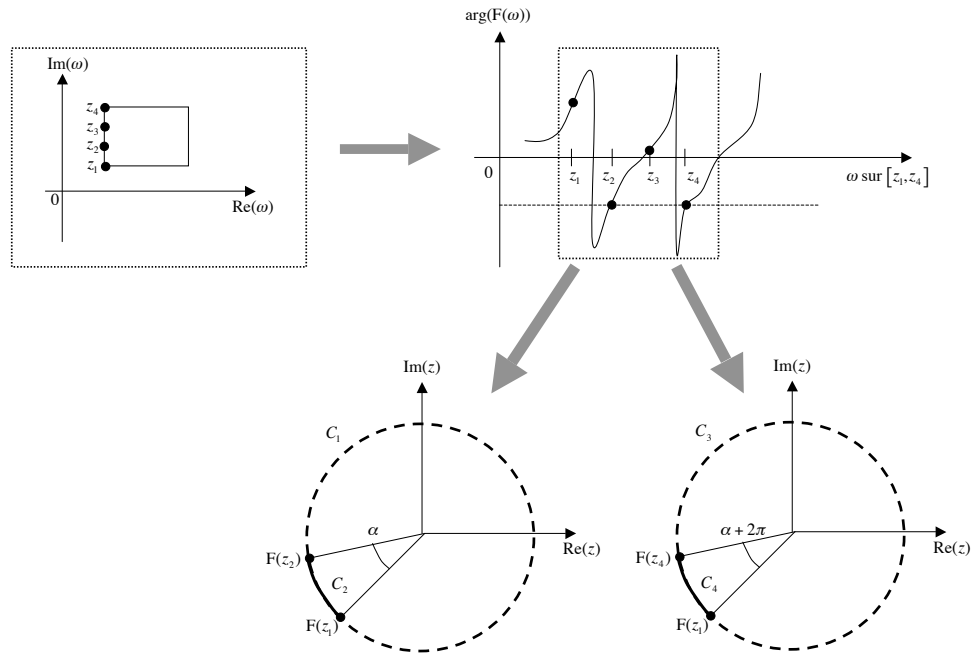


FIG. 3.6 – Dépendance de l'évaluation de $\left[\arg(\mathcal{F}(\omega)) \right]_{z_j}^{z_k}$ en fonction des variations de $\arg(\mathcal{F}(\omega))$.

3.4 Recherche des fréquences propres par méthode de forçage

3.4.1 Principe du forçage latéral

Une alternative à la méthode modale réside dans l'utilisation de méthode de forçage. Ce dernier consiste à imposer au fluide d'une configuration donnée des oscillations de fréquence fixée. La détection des modes propres de cette configuration est alors basée sur le comportement remarquable de certaines grandeurs acoustiques caractéristiques lorsque la fréquence d'excitation atteint une fréquence de résonance. Il convient donc, dans la description de cette méthode, de préciser le dispositif, la grandeur choisie et le critère de détection sélectionné.

Choix du dispositif de forçage

Le choix de l'instrument de forçage s'est porté sur un haut-parleur modélisé comme une source volumique sinusoïdale. Celui-ci va donc imposer une fréquence d'oscillation au fluide via les fluctuations de vitesse.

Etant donné le type de configuration étudié, succession de tubes monodimensionnels, deux possibilités de placement du haut-parleur apparaissent :

- La plus évidente consiste à placer le haut-parleur à l'entrée du dispositif. Toutefois les fréquences de résonance ainsi détectées ne correspondront pas obligatoirement aux fréquences propres de la même configuration sans forçage. En effet, le fait de placer le haut-parleur à l'entrée supprime la condition limite à ce niveau du dispositif et la remplace par une condition de type "vitesse imposée". On ne peut donc pas obtenir directement les fréquences propres de n'importe quelle configuration par cette manière.
- La deuxième possibilité consiste à placer le haut-parleur sur le côté, à une abscisse quelconque autre qu'à l'entrée ou la sortie. Ainsi les conditions aux bornes du dispositif sont respectées, et on peut donc espérer obtenir les fréquences de résonance directement.

Le deuxième choix a été retenu, pour son aspect pratique mais aussi parce que les résultats obtenus pourront être plus facilement confronter le cas échéant aux données expérimentales qui sont elles-mêmes issues de configurations similaires.

Choix de la grandeur mesurée

Lorsque la fréquence de forçage est égale à une fréquence propre du système, il y a superposition constructive de toutes les ondes produites et réfléchies par les bornes du système. Les amplitudes des fluctuations de vitesse et de pression sont alors maximales, sinon infinies, à cette fréquence. Quelque soit la grandeur acoustique, le phénomène semble donc détectable. Pourtant certaines grandeurs peuvent être plus pertinentes que d'autres. Le choix est basé sur les critères suivant : d'une part, la grandeur doit être maximale à la résonance quelque soit la configuration du système ; d'autre part la grandeur doit si possible varier différemment à la résonance selon le signe du taux de croissance du mode.

Plusieurs grandeurs acoustiques candidates peuvent a priori convenir :

- Fluctuations de vitesse ou de pression :
Celles-ci étant variables dans le temps il faut donc raisonner sur leur moyenne sur une période. De plus c'est la valeur absolue des amplitudes qui nous intéresse donc, le plus judicieux est de raisonner sur le carré de ces fluctuations. Cela revient finalement à utiliser non pas la vitesse ou la pression

acoustique mais l'énergie acoustique e' .

- Impédance acoustique : D'après sa définition (Eq. 1.47), l'impédance acoustique est une grandeur locale, on voit donc que la détection ne pourra s'effectuer lorsque, pour le mode propre recherché, un noeud de pression correspondra à la position où cette impédance est calculée. De plus, elle peut prendre une valeur infinie sans même que la fréquence corresponde à une fréquence propre si la vitesse est nulle à la position où cette impédance est calculée.
- Energie acoustique globale :
L'énergie acoustique globale (Eq. 1.63) n'est pas tributaire du point de mesure du fait de son caractère globale. A travers sa composante de vitesse et de pression, elle admet une valeur infinie à la fréquence de résonance. Elle constitue donc une grandeur possible pour la détection des fréquences propres par forçage.

- Flux acoustique :
Le flux acoustique a pour expression $\mathbf{f}' = p' \mathbf{u}'$. C'est aussi une grandeur locale. Cependant, calculée au niveau du haut-parleur, cette grandeur change de signe selon la stabilité du mode propre excité. Cette grandeur est en effet positive pour les modes instables et négative pour les modes stables. Si on appelle H l'amplitude du débit volumique injecté par le haut-parleur et S la section du tube où il s'applique alors l'expression du flux acoustique instantané pris en compte au niveau de l'abscisse z_H du haut-parleur est la suivante :

$$f'_{HP} = \hat{p}(z_H) \cdot \frac{H}{S} \quad (3.32)$$

Cette expression correspond au flux acoustique **provenant du haut-parleur uniquement**. Cette grandeur, une fois moyennée sur une période, est maximale à la résonance par l'intermédiaire de $p'(z_H)$ dans les cas où l'abscisse z_H du haut-parleur ne correspond pas à un noeud de pression du mode propre excité. De plus, cette grandeur est en effet positive pour les modes instables et négative pour les modes stables. En fait, le flux acoustique moyenné du haut-parleur quantifie l'énergie acoustique insufflée ou extraite dans le système afin de maintenir constante l'énergie acoustique totale de ce système. L'énergie acoustique totale est constante car les solutions sont cherchées sous forme **stationnaire**. Physiquement cela signifie que ces solutions correspondent aux solutions en régime établi dans le cas d'un forçage. Ainsi, quand globalement les conditions limites (flamme et conditions de réflexion entrée/sortie) sont dissipatives, le haut-parleur injecte de l'énergie pour maintenir constante l'énergie acoustique totale. Le mode correspondant est stable puisque, sans l'aide du haut-parleur, les fluctuations déclinent. Quand les conditions limites sont globalement amplificatrices, le haut-parleur doit prélever

de l'énergie au système, le mode est instable. Le signe du flux acoustique du haut-parleur varie donc selon le cas. D'après les diverses conventions choisies au chapitre 1 (notamment concernant les conditions de réflexion, relation 1.52), le flux acoustique est :

- **Positif** quand le mode instable.
- **Négatif** quand le mode est stable.

Pour démontrer cette propriété du flux du haut-parleur, il convient de raisonner à partir de l'équation de conservation de l'énergie acoustique dont on rappelle ici l'expression :

$$\frac{\partial e'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}' = s'_{ac}$$

Avec $s'_{ac} = (\gamma - 1)p'\dot{q}'/(\gamma\bar{p})$, source locale d'énergie acoustique qui ici correspond à la production d'énergie acoustique due à une flamme. En intégrant cette équation locale sur le volume V_Ω du système, on obtient :

$$\int_{V_\Omega} \frac{\partial e'}{\partial t} dV + \int_A \mathbf{f}' \cdot \vec{n} dA = \int_{V_\Omega} s'_{ac} dV$$

Les bornes du système forcé par lesquels le flux acoustique est injecté sont l'entrée, la sortie mais aussi la section $S(z_H)$ au niveau du haut-parleur. En appelant \vec{n} le vecteur unitaire orienté positivement sur l'axe z et \vec{n}' le vecteur unitaire opposé, nous allons évaluer les contributions des flux de chaque borne du dispositif de la figure 3.7.

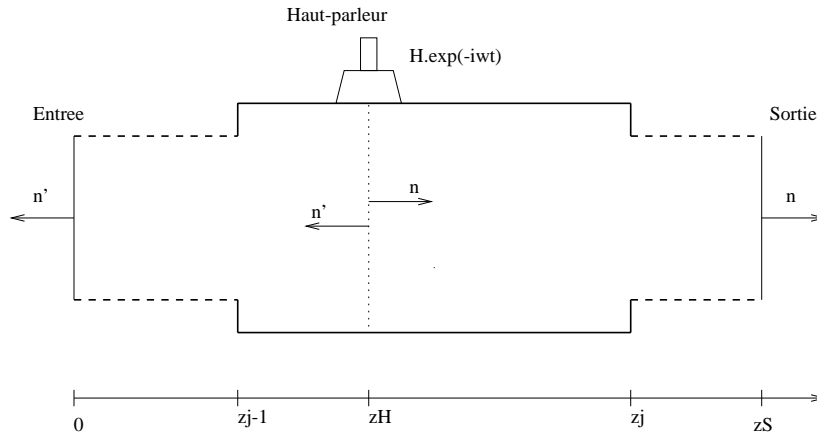


FIG. 3.7 – dispositif avec haut-parleur latéral dans le cas général 1D

Les flux d'entrée et sortie peuvent être regroupés dans un flux global f_{ES} :

$$\int_S \mathbf{f}'_{ES} \cdot \vec{n} dA = \int_{S_{entree}} \mathbf{f}' \cdot \vec{n}' dA + \int_{S_{sortie}} \mathbf{f}' \cdot \vec{n} dA$$

Au niveau du haut-parleur, l'injection d'énergie acoustique dans le système se fait de part et d'autre de la frontière que constitue la section $S(z_H)$. Sans

la présence du haut-parleur, les flux injectés à gauche et à droite de la section seraient exactement opposés. La résultante de cette somme dans notre cas correspond justement à la contribution f_{HP} du haut-parleur .

$$\int_{S(z_H)} f'_{HP} dA = \int_{S(z_H)_{gauche}} \mathbf{f}' \cdot \vec{n}' dA + \int_{S(z_H)_{droite}} \mathbf{f}' \cdot \vec{n} dA$$

Finalement le bilan énergétique devient :

$$\int_V \frac{\partial e'}{\partial t} dV + \int_S \mathbf{f}'_{ES} \cdot \vec{n} dA + \int_{S(z_H)} f'_{HP} dt dA = \int_V s'_{ac} dV$$

Le haut-parleur impose un régime sinusoïdale de période T_{ac} . Par conséquent les grandeurs prises en compte ne doivent pas être instantanées mais moyennées sur cette période afin de correctement interpréter leur contribution. Par ailleurs, on cherche les solutions p' et u' sous forme d'ondes stationnaires dans le cas forcé. Le qualificatif "stationnaire" est employé dans le sens où l'on considère la situation dans le dispositif lorsque le régime établi est atteint. Ce dernier est sinusoïdal, donc localement instationnaire, mais du point de vue de l'énergie globale, il n'évolue plus. Par conséquent, dans le régime forcé considéré, l'énergie acoustique vérifie :

$$\frac{1}{T_{ac}} \int_V \int_{T_{ac}} \frac{\partial e'}{\partial t} dt dV = 0$$

Le bilan énergétique se résume donc en régime forcé à :

$$\frac{1}{T_{ac}} \int_{S(z_H)} \int_{T_{ac}} f'_{HP} dt dA = \frac{1}{T_{ac}} \int_V \int_{T_{ac}} s'_{ac} dt dV - \frac{1}{T_{ac}} \int_S \int_{T_{ac}} \mathbf{f}'_{ES} \cdot \vec{n} dt dA$$

Sur cette dernière équation, il apparaît que la conservation de l'énergie acoustique dans le cas du forçage résulte de l'équilibre entre les dissipations ou les amplifications dans le système (terme \mathbf{f}'_{ES} et terme s'_{ac}) et l'apport du haut-parleur (terme f'_{HP}). Dans notre cas, les dissipations ou les amplifications proviennent des flammes (terme s dans le bilan) ainsi que des réflexions en entrée et sortie (terme \mathbf{f}'_{ES} dans le bilan). On voit donc que le flux du haut-parleur change bien de signe selon l'amplification ou la dissipation globale du système. Par contre s'il n'y a ni amplification ni dissipation, ce flux est nul et ne peut pas détecter les fréquences propres.

Finalement, les grandeurs retenues pour évaluer les fréquences propres par forçage sont donc l'énergie acoustique globale et le flux acoustique au niveau du haut-parleur.

3.4.2 Modélisation du forçage

On considère le dispositif forçant de la figure 3.8.

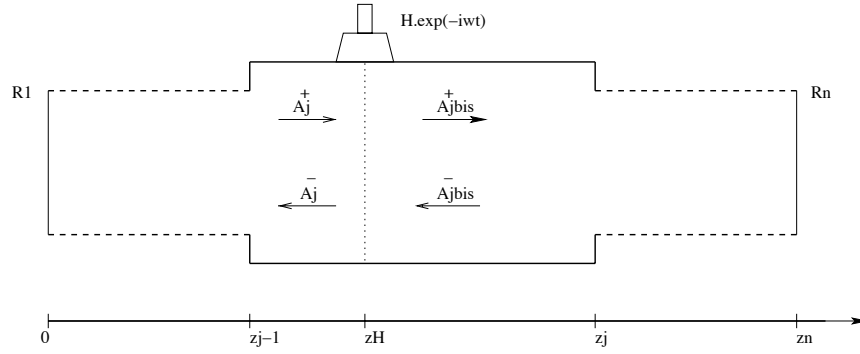


FIG. 3.8 – dispositif avec haut-parleur latéral dans le cas général 1D

Le haut-parleur étant modélisé comme une source volumique, celui-ci induit un saut de vitesse au niveau de l'interface en z_H (abscisse du haut-parleur). D'où les relations de continuité suivantes en ce point :

- Continuité de la pression en z_H :

$$A_j^+ e^{ik_j(z_H - z_{j-1})} + A_j^- e^{-ik_j(z_H - z_{j-1})} = A_{jbis}^+ + A_{jbis}^- \quad (3.33)$$

- Continuité du débit volumique en z_H :

$$\frac{S_j}{\rho_j c_j} A_j^+ e^{ik_j(z_H - z_{j-1})} - \frac{S_j}{\rho_j c_j} A_j^- e^{-ik_j(z_H - z_{j-1})} = \frac{S_j}{\rho_j c_j} A_{jbis}^+ - \frac{S_j}{\rho_j c_j} A_{jbis}^- + H \quad (3.34)$$

A partir de ces relations, on en déduit la matrice de passage T en z_H sur les amplitudes :

$$\begin{pmatrix} A_{jbis}^+ \\ A_{jbis}^- \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix} + \frac{H \rho_j c_j}{2S_j} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Avec comme expression pour T :

$$T = \begin{pmatrix} e^{ik_j(z_H - z_{j-1})} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j(z_H - z_{j-1})} \end{pmatrix}$$

Quelque soit la grandeur acoustique retenue pour détecter la fréquence de résonance, celle-ci requiert le calcul des amplitudes des ondes se propageant positivement ou négativement. Pour se faire, la relation 3.35 est introduite dans le système d'équation représentant l'ensemble des relations de saut et de condi-

tions limites (matrice $\mathbf{B}(\omega)$) :

$$\mathbf{B}(\omega) \cdot \begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_1^- \\ \vdots \\ A_j^+ \\ A_j^- \\ A_{jbis}^+ \\ A_{jbis}^- \\ \vdots \\ A_{n+1}^+ \\ A_{n+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -H\rho_j c_j / (2S_j) \\ H\rho_j c_j / (2S_j) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

La résolution, pour chaque fréquence forcée, du système linéaire 3.36 permet ainsi d'accéder aux amplitudes des ondes dans chaque tube élémentaire et par la même, d'évaluer n'importe quelle grandeur acoustique.

Calcul du flux acoustique du haut-parleur et de l'énergie acoustique totale

- Flux du haut-parleur :

Pour évaluer ces grandeurs, on utilise la propriété suivante :

La moyenne temporelle sur une période T_{ac} du produit des grandeurs harmoniques $p' = \Re(\hat{p} \times \exp(-i\omega t))$ et $u' = \Re(\hat{u} \times \exp(-i\omega t))$ peut s'obtenir comme suit [26] :

$$\frac{1}{T_{ac}} \int_{T_{ac}} p' \cdot u' dt = \frac{1}{2} \Re(\hat{p} \hat{u}^*)$$

Une fois le système 3.36 résolu, le flux f_{HP} moyenné sur une période T_{ac} de la fréquence forcée peut donc être évalué à l'aide des amplitudes complexes A_{jbis}^+ et A_{jbis}^- du tube j :

$$\frac{1}{T_{ac}} \int_{T_{ac}} f_{HP}' dt = \frac{1}{2} \Re(A_{jbis}^+ + A_{jbis}^-) \cdot \frac{H}{S} \quad (3.37)$$

- Energie acoustique totale :

L'énergie acoustique E_m d'un tube m quelconque du dispositif peut être calculée de la même manière. Soit l_m , la longueur de ce tube et S_m sa section :

$$\frac{1}{T_{ac}} \int_{T_{ac}} E_m dt = \frac{1}{2} \frac{l_m S_m}{\rho_m c_m^2} \Re(A_m^+ \cdot A_m^{+*} + A_m^- \cdot A_m^{-*}) \quad (3.38)$$

Pour obtenir l'énergie acoustique totale E , il suffit de sommer les énergies de chaque tube :

$$\frac{1}{T_{ac}} \int_{T_{ac}} E dt = \sum_{m=1}^{m=s} \frac{1}{T_{ac}} \int_{T_{ac}} E_m dt \quad (3.39)$$

3.4.3 Evaluation des fréquences propres du système par une méthode de forçage

Le principe des méthodes de forçage est de repérer les fréquences propres par leur pic de résonance. Théoriquement le forçage à la fréquence propre induit une réponse acoustique infinie (en acoustique linéaire) de la configuration mais dans le cas général cette propriété n'est vérifiée qu'à la fréquence propre f complexe et non à une fréquence correspondant seulement à $\Re(f)$. Ceci conduit à introduire deux types de forçage :

- Un forçage "réel". Celui-ci est équivalent au forçage classique réalisé expérimentalement consistant à balayer l'axe des fréquences réelles sur une gamme fixée par l'utilisateur.
- Un forçage "complexe". Concrètement, il consiste à évaluer la réponse acoustique du système (flux acoustique du haut-parleur ou énergie acoustique totale) à une fréquence quelconque du plan complexe. D'un point de vue physique, forcer le système à la fréquence $f = \Re(f) + i\Im(f)$ signifie induire un signal sinusoïdal de période $1/\Re(f)$ dont l'amplitude augmente à chaque seconde d'un facteur $\exp(\Im(f))$. Numériquement, ce concept ne pose pas de problèmes particuliers par contre sa mise en pratique réelle dans un cadre expérimental serait assurément difficile.

Utilisation d'un forçage réel

Le forçage réel consiste à se déplacer selon l'axe des réels du plan complexe et à déceler les pics de résonance (voir Figure 3.9). Le repérage des fréquences d'occurrence de ces pics permet d'accéder à la partie réelle des fréquences propres mais pas à leur partie imaginaire correspondante. Si la grandeur résonante correspond au flux acoustique du haut-parleur, il est possible de connaître la stabilité du mode mais même dans ce cas la valeur exacte du taux de croissance demeure inconnue. En outre le véritable pic de résonance n'apparaissant qu'à la fréquence propre complexe, les modes fortement atténués ou amplifiés (avec un taux de croissance de plusieurs dizaines de Hertz en valeur absolue) sont difficiles à déceler depuis l'axe des réels car alors les pics correspondant sont largement étalés et relativement faibles. De surcroît, la mesure de la hauteur d'un pic de résonance ne renseigne pas directement sur la valeur de la partie imaginaire de la fréquence et ce, principalement pour deux raisons :

- La réponse acoustique du système, et donc la hauteur des pics de résonance, dépend de la localisation du haut-parleur dans la configuration. Typiquement si pour un mode propre donné, le haut-parleur est proche d'un noeud de vitesse ou de pression, la réponse acoustique du système à cette fréquence sera

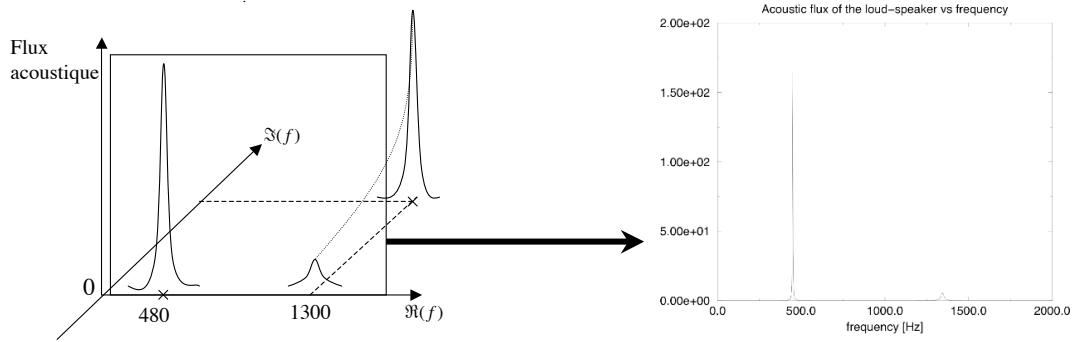


FIG. 3.9 – Résultat d'un forçage sur l'axe des réels dans le cas d'un mode fortement instable.

plus faible que pour une autre fréquence propre d'où un pic de résonance moins prononcé.

- Lorsque deux fréquences propres sont proches dans le plan complexe (lorsque la distance les séparant est du même ordre que leur partie imaginaire), les maxima de la réponse acoustique n'apparaissent pas clairement.

En conséquence, un forçage réel ne suffit pas à lui seul pour déterminer les fréquences propres d'une configuration donnée.

Utilisation d'un forçage complexe

Compte-tenu des limitations précédemment décrites, le recours à un forçage complexe semble nécessaire. L'approche la plus évidente consiste à réaliser un balayage entier de la zone en question mais celui-ci requiert des temps de calcul beaucoup trop importants (dans le cadre d'une utilisation sur un simple ordinateur personnel). Typiquement, un tel forçage global réalisé sur une gamme de fréquence comprise entre 0 et 2000Hz pour $\Re(f)$ et $-100Hz$ et $+100Hz$ pour $\Im(f)$ nécessiterait plusieurs dizaines de milliers de calculs correspondant chacun à une résolution de système de taille égale au nombre de tubes élémentaires utilisés. Afin de réduire le temps de calcul en question, on cherche donc à ne forcer que sur certains axes privilégiés du plan complexe selon la stratégie suivante :

1. On cherche dans premier temps à connaître la partie réelle des fréquences propres. Pour cela, on réalise un forçage classique sur l'axe réelle. Toutefois celui-ci ne peut suffire à lui seul, car les modes trop atténués ou trop amplifiés risqueraient d'être non décelés. On procède donc en plus à des forçages sur plusieurs autres axes d'ordonnée fixe ($\Im(f)$ fixe) découpant ainsi le plan complexe en plusieurs zones. Afin de limiter le nombre de calculs sans risque d'oublier une fréquence propre, l'écart entre deux axes

délimitant les zones en question a été fixé à 20Hz environ. La figure 3.10 illustre cette première étape de la procédure.

2. A ce stade, les parties réelles $\Re(f_0)$ des fréquences propres recherchées sont connues et une première idée de la valeur des parties imaginaires correspondantes $\Im(f_0)$ est également disponible en connaissant la zone d'appartenance des fréquences propres. Pour déterminer avec exactitude les taux de croissance des modes propres, des forçages sont réalisés sur les axes d'abscisse correspondant aux parties réelles des fréquences propres précédemment évaluées (Voir figure 3.10).

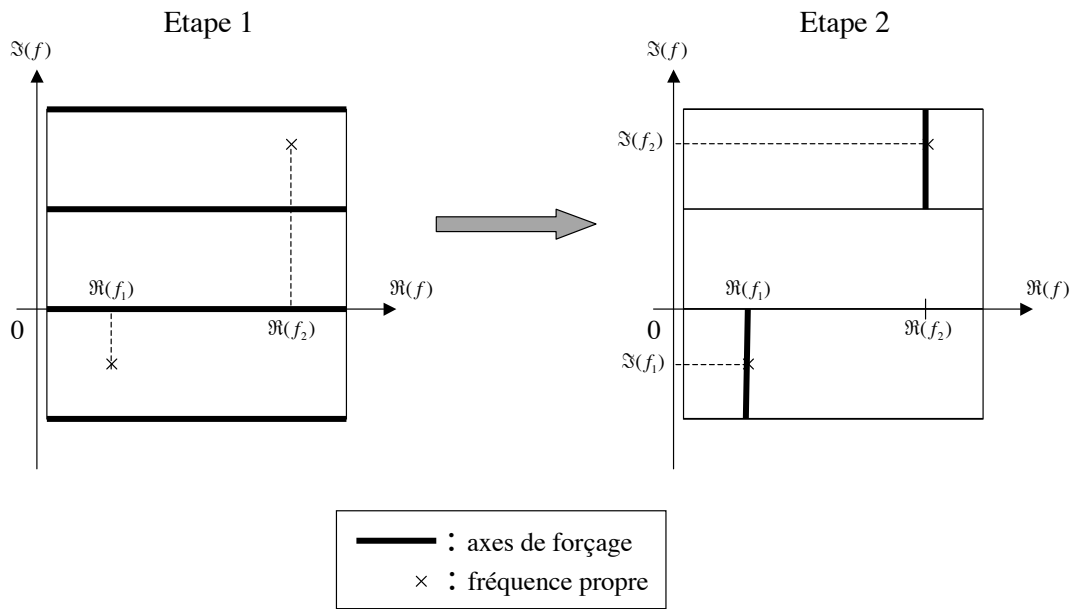


FIG. 3.10 – Principe de la méthode de forçage complexe

Ces deux étapes ainsi que la détection des pics de résonance sont automatisées permettant à l'utilisateur une utilisation simplifiée de cette méthode.

3.5 Calcul des modes propres : détermination de la forme spatiale du mode

Le calcul des modes propres consiste dans notre approche à déterminer les amplitudes A^+ , A^- de chaque tube. La valeur de ces amplitudes est définie arbitrairement à une constante près, par contre le rapport des valeurs des amplitudes appartenant aux différents tubes est fixe et caractéristique du mode. Dans la méthodologie suivie dans le code Soundtube, le calcul de la structure spatiale des modes propres est séparé du calcul des fréquences propres. En effet, si

ω est une pulsation propre de la configuration déterminée par la méthode modale ou la méthode de forçage, la relation matricielle 3.23 n'est pas inversible, le système ne peut donc être résolu et par voie de conséquence l'évaluation des amplitudes impossible. ainsi, en pratique, on procède de la manière suivante pour calculer les amplitudes de chaque tube :

1. On se donne la valeur (complexe) de la fréquence propre dont on cherche le mode. Soit ω la pulsation propre associée.
2. On fixe arbitrairement la valeur d'une des amplitudes d'un des tubes à la valeur unité. Par souci de généralité, on choisit $A_1^+ = 1, 0 + 0, 0 \times i$, on rappelle que les amplitudes sont des grandeurs complexes.
3. A ce stade, pour une configuration à n tubes, le système matriciel comporte donc $2n$ relations de saut et conditions limites pour $2n - 1$ inconnues (amplitudes des ondes dans chaque tube). Le système est donc sur-défini. Une des relations est alors arbitrairement supprimée, en l'occurrence la relation de conservation du débit volumique de la première intersection. En appelant $\mathbf{M}_{bis}(\omega)$ la matrice de taille $2n - 1$ correspondant à la matrice $\mathbf{M}(\omega)$ dans laquelle on a supprimé la relation de conservation du débit volumique de la première intersection et dans laquelle on a supprimé les contributions de A_1^+ dans toutes les relations de saut et conditions limites pour les regrouper dans un vecteur b , on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{M}(\omega) \cdot \begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_1^- \\ \vdots \\ A_n^+ \\ A_n^- \end{pmatrix} = 0 \iff \mathbf{M}_{bis}(\omega) \cdot \begin{pmatrix} A_1^- \\ \vdots \\ A_n^+ \\ A_n^- \end{pmatrix} = b \quad (3.40)$$

4. On résout le système avec la matrice $\mathbf{M}_{bis}(\omega)$ issue de la relation 3.40 afin de déterminer le vecteur $(A_1^-, \dots, A_n^-)^H$. Etant donné, la taille des matrices retenues ($n < 50$), la résolution du système est réalisé par une méthode de décomposition LU [93].

3.6 Validation sur configurations académiques

Cette section montre un exemple de validation du code Soundtube dans une situation où une solution analytique est dérivable. Dans le cas d'une configuration avec flamme active suffisamment simple, une solution analytique peut être obtenue à partir des résultats sans terme source c'est pourquoi ce dernier cas est tout d'abord envisagé. D'autres exemples de validation sont disponibles en annexe (Annexe B) mettant en jeu différentes caractéristiques du code.

Tube simple avec saut de température et sans flamme active

On considère le cas d'un tube simple de longueur L , de section S constante, fermé à son entrée et ouvert en sortie. Celui-ci contient également une flamme plane en son centre considérée dans un premier temps comme passive acoustiquement : on entend par ce terme que la flamme induit un saut de température moyenne mais ne répond cependant pas aux fluctuations acoustiques du milieu (les paramètres de sa fonction de transfert sont nuls). En amont de l'interface, la température est considérée uniforme est égale à 300 K et en aval, la température s'élève à 1200 K . La figure 3.11 illustre la situation en question.

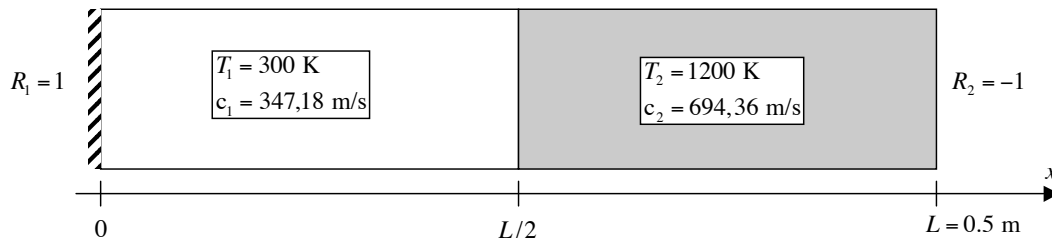


FIG. 3.11 – Tube simple sans flamme active

Suivant le formalisme introduit dans ce chapitre et au chapitre 1, la fréquence propre $f = \omega/(2\pi)$ se déduit des deux relations de réflexion et des relations de sauts de pression et de vitesse au niveau de la flamme :

- Condition de réflexion en entrée :

$$R_1 = 1 \implies A_1^+ = A_1^- \quad (3.41)$$

- Condition de réflexion en sortie :

$$R_2 = -1 \implies A_2^+ e^{i.k.L/2} = -A_2^- \quad (3.42)$$

- Relation de saut en pression au niveau de la flamme passive :

$$\hat{p}_1(L/2) = \hat{p}_2(L/2) \implies A_1^+ . e^{i.k.L/2} + A_1^- . e^{-i.k.L/2} = A_2^+ + A_2^- \quad (3.43)$$

- Relation de saut en vitesse au niveau de la flamme passive :

$$S . \hat{u}_1(L/2) = S . \hat{u}_2(L/2) \implies \Theta . (A_1^+ . e^{i.k.L/2} - A_1^- . e^{-i.k.L/2}) - A_2^+ + A_2^- = 0 \quad (3.44)$$

Avec, dans cette section, $k = \omega/c_1$ le nombre d'onde dans les gaz frais et $\Theta = (\rho_1 c_1)/(\rho_2 c_2) = 1/2$. En combinant ces quatre relations, on obtient finalement la fonction caractéristique suivante :

$$\cos\left(\frac{k.L}{4}\right) \left(-3\cos^2\left(\frac{k.L}{4}\right) + 2 \right) = 0 \quad (3.45)$$

Les fréquences propres sans flamme active $f_0 = \omega_0/(2\pi) = k_0 c_1/(2\pi)$ vérifient donc :

$$\cos\left(\frac{k.L}{4}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos^2\left(\frac{k.L}{4}\right) - \frac{2}{3} = 0 \quad (3.46)$$

Compte-tenu des caractéristiques de la configuration en question, les quatre premiers modes propres longitudinaux déterminés analytiquement et par Soundtube sont fournis au tableau 3.1. Etant donné les conditions limites purement réfléchissantes choisies et l'absence de flamme active, tous les modes sont marginalement stables c'est à dire que leur taux de croissance est nul.

	Analytique	Soundtube (méthode modale)	Soundtube (méthode forçage)	Structure modale
1^{er} mode	272,069	$272.074 - 10^{-14}i$	$272.074 - 2 \times 10^{-14}i$	Fig. 3.12
2^{ième} mode	694,361	$694,374 + 5 \times 10^{-15}i$	$694,374 + 7 \times 10^{-15}i$	Fig. 3.13
3^{ième} mode	1116,653	$1116,673 + 1 \times 10^{-14}i$	$1116,673 - 3 \times 10^{-15}i$	Fig. 3.14
4^{ième} mode	1660,791	$1660,821 + 3 \times 10^{-15}i$	$1660,821 - 10^{-14}i$	Fig. 3.15

TAB. 3.1 – Fréquences propres (en Hz) dans le cas d'un tube simple sans flamme active

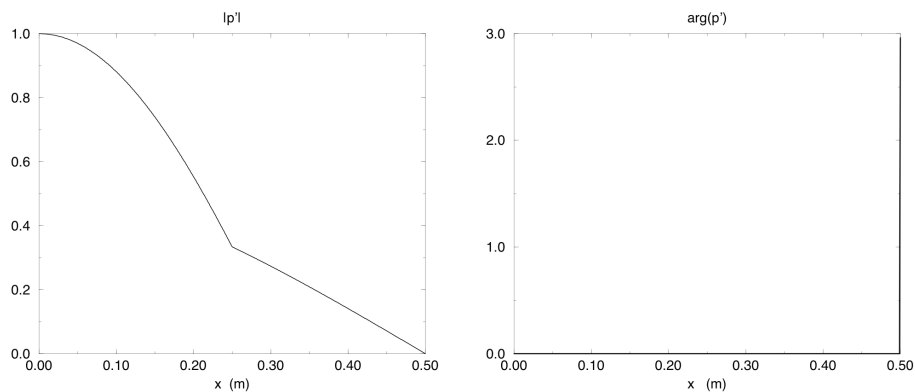


FIG. 3.12 – Structure du premier mode propre ($f = 272 Hz$) du tube simple sans flamme active, module de la pression (figure de gauche) et argument (figure de droite).

Tube simple avec saut de température et avec flamme active

On considère la même configuration que précédemment avec cette fois-ci une flamme active séparant les gaz frais des gaz chauds, la situation correspond alors à celle de la figure 3.16. Dans un souci de simplicité, la fonction de trans-

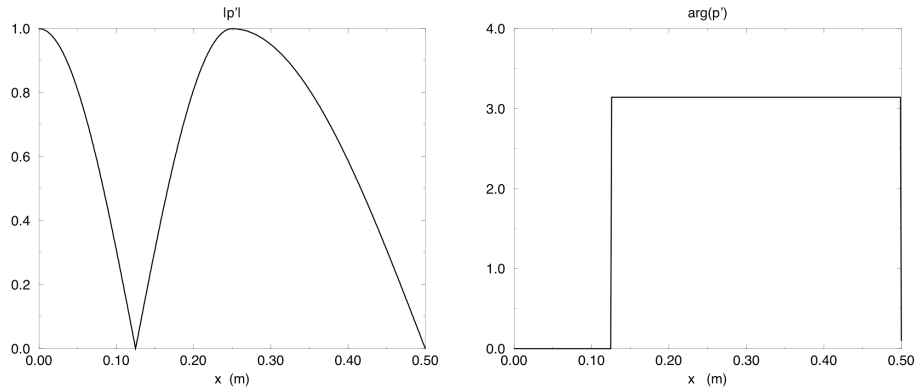


FIG. 3.13 – Structure du deuxième mode propre ($f = 694 \text{ Hz}$) du tube simple sans flamme active, module de la pression (figure de gauche) et argument (figure de droite).

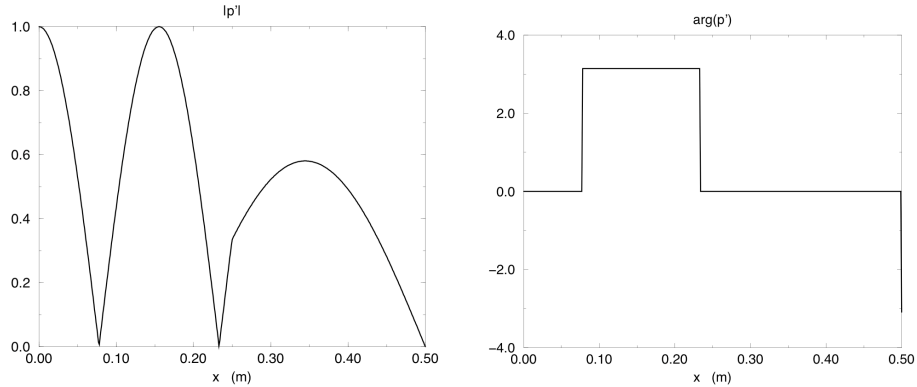


FIG. 3.14 – Structure du troisième mode propre ($f = 1117 \text{ Hz}$) du tube simple sans flamme active, module de la pression (figure de gauche) et argument (figure de droite).

fert de flamme choisie ne sera dépendante que de la vitesse acoustique. Dans ces conditions, seules la relation de saut sur la vitesse acoustique (Eq. 3.44) sera modifiée. Compte-tenu du formalisme introduit à la section 3.2, la relation de saut de vitesse acoustique au niveau de la flamme s'écrit :

$$S.\hat{u}_1(L/2) + \frac{\gamma-1}{\gamma\bar{p}}\hat{Q} = S.\hat{u}_2(L/2) \implies \frac{1}{2}(1 + ne^{i\omega\tau}).(A_1^+ . e^{i.k.L/2} - A_1^- . e^{-i.k.L/2}) - A_2^+ + A_2^- = 0 \quad (3.47)$$

Cette dernière équation combinée aux relations 3.41, 3.42 et 3.43 permet d'aboutir à la fonction caractéristique suivante :

$$\cos\left(\frac{k.L}{4}\right)\left(ne^{i.\omega.\tau}\sin^2\left(\frac{k.L}{4}\right) - 3\cos^2\left(\frac{k.L}{4}\right) + 2\right) = 0 \quad (3.48)$$

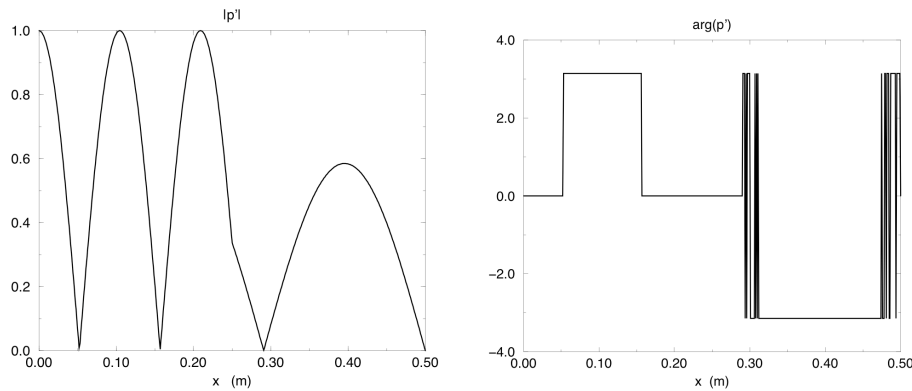


FIG. 3.15 – Structure du quatrième mode propre ($f = 1660 \text{ Hz}$) du tube simple sans flamme active, module de la pression (figure de gauche) et argument (figure de droite).

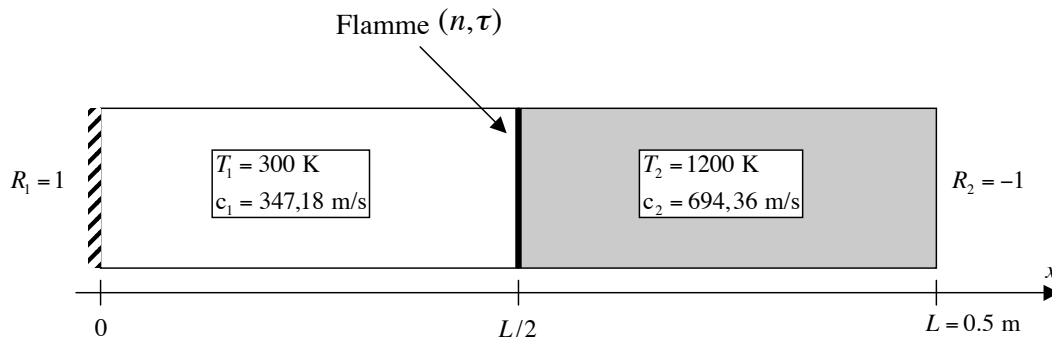


FIG. 3.16 – Tube simple avec flamme active

Il apparaît que deux familles de modes propres vérifient cette équation :

- Une première famille de modes qui n'est pas influencée par la fonction de transfert de flamme et dont les fréquences sont déterminées par la relation suivante :

$$\cos\left(\frac{k.L}{4}\right) = 0 \quad (3.49)$$

- Une deuxième famille de modes propres reliés à la fonction de transfert de flamme. La détermination analytique de ces modes peut être obtenue par la méthodologie introduite par [17] et décrite par [26, 94]. On se place donc dans le cas d'une flamme dont la réponse acoustique est très faible (c'est à dire avec un indice d'interaction $n \ll 1$). Les fréquences propres avec flamme active f se déterminent alors à partir d'un développement limité de la relation 3.48 autour des fréquences propres sans terme source f_0 . En appelant δf le décalage fréquentiel induit par la flamme active ($f = f_0 + \delta f$),

on obtient dans ces conditions les relations suivantes :

$$\Re(\delta f) = \frac{-n.c_1}{9\pi L} \cdot \frac{\cos(\omega_0\tau)}{\sin(\frac{\omega_0 L}{4c_1}) \cdot \cos(\frac{\omega_0 L}{4c_1})} \quad (3.50)$$

$$\Im(\delta f) = \frac{-n.c_1}{9\pi L} \cdot \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\sin(\frac{\omega_0 L}{4c_1}) \cdot \cos(\frac{\omega_0 L}{4c_1})} \quad (3.51)$$

Dans le cas présent, les valeurs des paramètres de la fonction de transfert de flamme retenues sont :

- $n(\omega) = n = 0.01$
- $\tau(\omega) = \tau = 2,7 \times 10^{-3} \text{ s}$

Dans ces conditions, la comparaison des fréquences propres obtenues analytiquement à l'aide des relations 3.50 et 3.51 et des fréquences obtenues par les différentes méthodes de Soundtube est fournie au tableau 3.2.

	Analytique	Soundtube (méthode modale)	Soundtube (méthode forçage)
1^{er} mode	272,126 + 0,519i	272,124 + 0,514i	272,124 + 0,514i
2^{ieme} mode	694,377 + 0,0i	694,377 + 2 × 10 ⁻¹⁴ i	694,377 + 3 × 10 ⁻¹⁵ i
3^{ieme} mode	1117,198 + 0,049i	1117,196 + 0,053i	1117,196 + 0,053i
4^{ieme} mode	1661,348 - 0,052i	1661,351 - 0,047i	1661,351 - 0,047i

TAB. 3.2 – Fréquences propres (en Hz) dans le cas d'un tube simple avec flamme active

Autres exemples de validations

Se reporter à l'annexe B.

Chapitre 4

Calcul des modes propres thermoacoustiques par une approche tridimensionnelle

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de décrire le code de calcul de modes propres thermoacoustiques tridimensionnels appelé AVSP. L'extension de l'approche réseau à des configurations tridimensionnelles générales apparaît difficile sans perdre les qualités de souplesse et rapidité de celle-ci. On choisit d'opter pour une approche différente sur ce type de configuration en revenant à la résolution du problème aux valeurs propres associé à l'équation de Helmholtz (Eq. 1.46). Cette équation étant locale et ne supposant aucunes formes de solutions particulières pour le champ \hat{p} , l'approche sera par essence tridimensionnelle. La discrétisation utilisée plus "classique" de cette équation induit l'utilisation d'un maillage plus important qu'un maillage de type "réseau" - typiquement quelques dizaines de milliers de points au lieu de quelques dizaines de tubes élémentaires - et en conséquence les calculs seront plus longs. Néanmoins, dans cette approche comme dans l'approche "réseau", on ne se focalise que sur les fluctuations acoustiques correspondant aux premières harmoniques du système étudié ; autrement dit, l'hypothèse de grandes longueur d'ondes (c'est à dire de même ordre de grandeur que les dimensions de la configuration étudiée) est conservée et par conséquent le maillage requis sera toujours considérablement moins dense qu'un maillage de simulation LES ou U-RANS. Typiquement, une configuration correspondant à une turbine à gaz entière nécessitera quelques dizaines de milliers de points dans l'approche développée dans cette section au lieu de plusieurs millions, et même plusieurs dizaines de millions, dans le cas

d'une simulation instationnaire réactive classique. Toutefois, dans le cadre du développement d'outils de conception de turbines à gaz, la lenteur relative, en comparaison de l'approche réseau, de cette méthodologie pourrait limiter son intérêt. Pour y remédier, on décide de développer un code capable de résoudre numériquement **en parallèle** le problème aux valeurs propres posé. Le gain de temps généré permettra alors d'étudier le comportement acoustique de configurations industrielles en quelques dizaines de minutes, au plus en quelques heures. Pour parvenir à développer ce type d'outil en un temps raisonnable, son architecture parallèle emprunte celle du code LES développé au CER-FACS appelé AVBP [95]. En ce qui concerne la prise en compte de la combustion, celle-ci aboutit dans la nouvelle approche à s'intéresser à un problème aux valeurs propres impossible à résoudre directement par les méthodes classiques. En effet, les différentes fonctions de transfert abordées à la section 1.3 montrent que la réponse acoustique d'une flamme à un mode donné dépend à la fois de la forme de celui-ci mais également de sa fréquence ce qui se traduit par une modélisation du type $\hat{q}(\omega, \hat{p}) = \mathcal{H}(\omega, \hat{p})$. Par conséquent le terme source thermoacoustique dans l'équation de Helmholtz 1.46 s'écrit dans sa forme la plus générale comme :

$$\begin{aligned} i\omega(\gamma - 1)\hat{q} &= i\omega(\gamma - 1)\mathcal{H}(\omega, \hat{p}) \\ &= \mathcal{N}(\omega, \hat{p}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

En appelant \mathcal{L} le principal opérateur de l'équation de Helmholtz 1.46 :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \hat{p} &\longmapsto \mathcal{L}(\hat{p}) = \nabla \cdot (c^2 \nabla \hat{p}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

le problème aux valeurs propres associé s'écrit donc

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \mathcal{N}(\omega))\hat{p} = -\omega^2 \hat{p} \\ + \text{Conditions Limites} \end{cases}$$

Dans sa forme discrétisée, ce problème se traduit par la recherche des valeurs propres $\lambda = -\omega^2$ et vecteurs propres d'une matrice M elle-même fonction des valeurs propres recherchées :

$$\mathbf{M}(\lambda)\tilde{p} = \lambda\tilde{p} \quad (4.3)$$

Avec \tilde{p} la forme discrétisée du champ \hat{p} . La dépendance en fréquence de l'opérateur \mathcal{N} n'étant pas polynomiale, le problème aux valeurs propres ainsi posé est alors difficilement soluble par les méthodes classiques d'algèbre comme on le verra à la section C.

On va considérer dans un premier temps le problème sans flamme active et s'intéresser notamment à sa discrétisation et à la prise en compte des conditions limites. Puis, on abordera la prise en compte de la flamme en tant que terme source thermoacoustique, celle-ci étant principalement fondée sur deux approches différentes :

- une prise en compte à l'aide d'un développement asymptotique autour de l'état sans flamme active.
- une prise en compte par réduction du problème sous forme algébrique "classique".

4.2 Problème aux valeurs propres sans flamme active

4.2.1 Discrétisation de l'équation de Helmholtz

On considère le problème aux valeurs propres 1.46 sans terme source :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{c}^2 \nabla \hat{p} + \omega^2 \hat{p} = 0 & \text{dans } \Omega \\ + \text{Conditions Limites} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.4)$$

L'équation concernée est donc une équation aux dérivées ordinaires dont l'opérateur principal est l'opérateur \mathcal{L} défini à la relation 4.2. La discrétisation de cet opérateur est réalisée par une méthode de volumes finis d'ordre 2 de type "cell-vertex" c'est à dire une méthode dans laquelle les inconnues sont évaluées aux noeuds du maillage. Cette méthode est empruntée aux schémas numériques du code LES appelé AVBP[95, 96] et utilisé au laboratoire CERFACS. Les maillages pris en compte sont non structurés et le type de maille utilisé tétraédrique en trois dimensions et triangulaire en deux dimensions.

Méthode de discrétisation

La méthode s'intéresse à la discrétisation de l'opérateur principal du problème aux valeurs propres étudié soit $\mathcal{L}(\hat{p}) = \nabla \cdot (c^2 \nabla \hat{p})$. Concrètement dans la méthode numérique retenue, il s'agit, pour un champ de pression acoustique connu \hat{p} , d'approcher en tout point j du maillage la valeur $\mathcal{L}(\hat{p})_j$ par \mathbf{L}_{Ω_j} ce qui s'écrit, à l'aide d'une intégration de Gauss :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\Omega_j} &= \frac{1}{V_{\Omega_j}} \int_{V_{\Omega_j}} \nabla \cdot (c^2 \nabla \hat{p}) dV \\ &= \frac{1}{V_{\Omega_j}} \int_{\partial \Omega_j} (c^2 \nabla \hat{p}) \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dans cette relation, Ω_j représente une cellule de contrôle centrée autour du point j tandis que V_{Ω_j} et $\partial\Omega_j$ représentent respectivement le volume et la surface de la cellule. Enfin, le vecteur \vec{n} est le vecteur normal à la surface de la cellule orienté vers l'intérieur. L'évaluation numérique $\tilde{\mathbf{L}}_j$ de \mathbf{L}_j est réalisée en sommant les flux $\vec{F}_{\Sigma_m} = (c^2 \nabla \tilde{p})_{\Sigma_m}$ issus de chaque paroi m constituant la surface $\partial\Omega_j$; chacune de ces parois possède une surface $|\vec{d}\Sigma_m|$ et une normale $\vec{d}\Sigma_m/|\vec{d}\Sigma_m|$ intérieure à la cellule. D'où la formulation suivante :

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_j} = \frac{1}{V_{\Omega_j}} \sum_{m \in \partial\Omega_j} \vec{F}_{\Sigma_m} \cdot \vec{d}\Sigma_m \quad (4.6)$$

Compte-tenu de l'approche "cell-vertex" retenue, le flux au niveau de chaque face m n'est pas directement disponible et doit donc être calculé à partir des ses valeurs $\vec{F}_{\mathbf{v}_k}$ aux différents noeuds \mathbf{v}_k . Cette opération est réalisée en considérant que la valeur de chacune des composantes de ce flux évoluent linéairement sur les faces. En appelant M le nombre total de face m de la cellule Ω_j entourant le noeud \mathbf{v}_k de cette cellule, on définit alors le vecteur $d\vec{\Sigma}_{\mathbf{v}_k}$ comme :

$$d\vec{\Sigma}_{\mathbf{v}_k} = \sum_{m=1}^M \vec{d}\Sigma_m \quad (4.7)$$

On vérifie alors que $\sum_{k \in \Omega_j} d\vec{\Sigma}_{\mathbf{v}_k} = 0$ avec $k \in \Omega_j$ l'ensemble des noeuds appartenant à la cellule Ω_j . Dans ces conditions, la relation 4.6 s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_j} = \frac{1}{N_d V_{\Omega_j}} \sum_{k \in \Omega_j} \vec{F}_{\mathbf{v}_k} \cdot d\vec{\Sigma}_{\mathbf{v}_k} \quad (4.8)$$

où N_d est la dimension du problème étudié ; ce coefficient apparaît avec l'hypothèse d'évolution linéaire du flux sur les faces de la cellule. La figure 4.1 illustre le calcul de $\tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_1}$ au noeud 1 sur un maillage bidimensionnel.

Il apparaît donc que le calcul de $\tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_j}$ nécessite la connaissance du vecteur flux $c^2 \nabla \tilde{p}$ aux noeuds de la cellule en question. L'évaluation requise du gradient de \tilde{p} se fait de la même manière que le calcul de la divergence de $c^2 \nabla \tilde{p}$. Cependant, dans la méthode numérique utilisée par AVSP, les noeuds \mathbf{v}_k de la cellule Ω_j au niveau desquels le vecteur flux est calculé ne correspondent pas aux points du maillage mais aux centres des mailles entourant le point j . Ceci implique que la cellule Ω_j ne constitue donc pas une maille. La situation est illustrée à la figure 4.2. Le calcul de $(\nabla \tilde{p})_{\mathbf{v}_k}$ au centre de la maille $\Omega_{\mathbf{v}_k}$ s'écrit donc :

$$(\nabla \tilde{p})_{\mathbf{v}_k} = \frac{1}{N_d V_{\Omega_{\mathbf{v}_k}}} \sum_{l \in \Omega_{\mathbf{v}_k}} \tilde{p}_{\Sigma_l} \vec{d}\Sigma_l \quad (4.9)$$

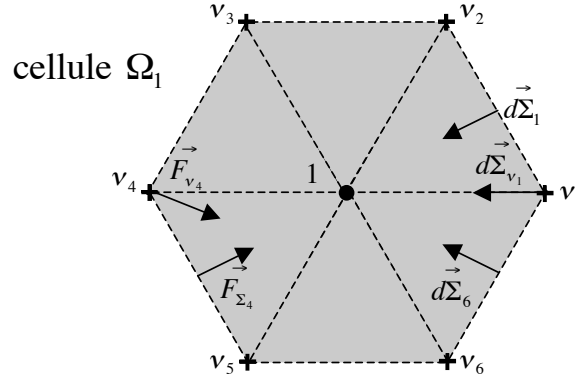


FIG. 4.1 – Calcul de $\tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_1}$ au noeud d'indice 1 à partir des flux aux noeuds v_k .

Avec $l \in \Omega v_k$ l'ensemble des noeuds l constituant la maille Ωv_k . De plus, le calcul des flux aux centres v_k nécessite également la valeur c_{v_k} de la vitesse du son déterminée comme la moyenne des valeurs aux noeuds de la maille :

$$c_{v_k} = \frac{1}{N_{\Omega v_k}} \sum_{l=1}^{N_{\Omega v_k}} c_l \quad (4.10)$$

Avec $N_{\Omega v_k}$, le nombre de noeuds constituant la maille Ωv_k . Une fois ces grandeurs connues, les flux aux noeuds de la cellule Ω_j peuvent être calculés comme $\vec{F}_{v_k} = c_{v_k}^2 (\nabla \tilde{p})_{v_k}$.

Par analogie au cas monodimensionnel dans lequel δ est le pas de discrétisation du maillage, la méthode numérique d'AVSP utilise donc un stencil à 2δ . Ceci permet d'éviter le calcul de modes propres purement numériques, et donc non acoustiques, appelés "wiggle" qui surviennent avec l'utilisation d'un stencil à 4δ . Ce terme désigne une fluctuation non nulle, du champ discrétisé, à l'intérieur du stencil d'un point donné et qui a la caractéristique d'être indiscernable, pour l'opérateur numérique, d'une fluctuation uniformément nulle.

4.2.2 Prise en compte des conditions limites

Dans le cas le plus général, une condition limite acoustique s'écrit sous la forme d'une impédance réduite Z (voir Eq. 1.47). Néanmoins, pour certaines valeurs particulières de cette dernière, il est plus commode, numériquement et physiquement parlant, d'utiliser une expression simplifiée. En appelant \vec{n} la normale intérieure du bord considéré, trois types de conditions limites peuvent alors lui être appliqué dans AVSP (voir section 1.2.4) :

- $\hat{p} = 0$ au bord Γ_D .

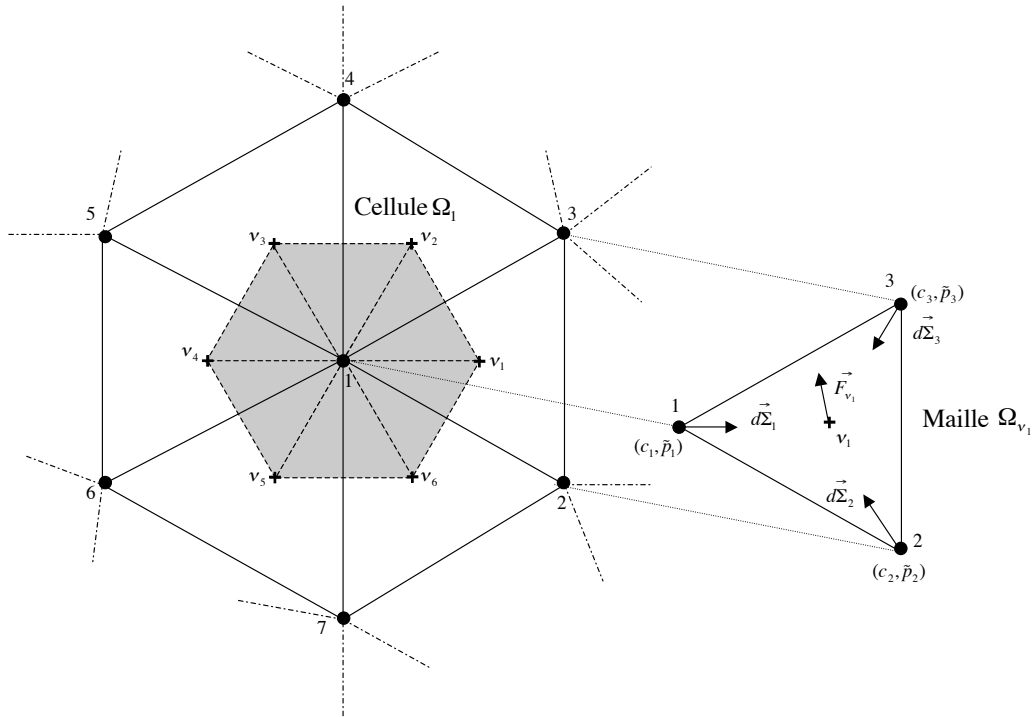


FIG. 4.2 – Calcul du flux F_{v_1} au point v_1 à partir des valeurs aux noeuds de la maille Ω_{v_1}

- $\hat{u} \cdot \vec{n} = 0$ au bord Γ_N .
- $1/Z = \bar{\rho} c \hat{u} \cdot \vec{n} / \hat{p}$, qui correspond à une admittance générale de valeur quelconque, au bord Γ_Z . L'emploi d'une admittance sera préféré à celui d'une impédance uniquement pour des raisons de simplicité de formulation du problème.

Condition limite de type $\hat{p} = 0$

Cette condition limite peut-être vue comme une impédance nulle (Eq. 1.58), cependant il est beaucoup plus pratique numériquement de la considérer comme une condition de Dirichlet sur la pression. En effet, l'objectif du code AVSP est de déterminer les modes propres de la configuration étudiée c'est à dire connaître en tout point du maillage la valeur des modes à travers le champ de pression acoustique. Or au niveau de la frontière Γ_D où s'applique la condition de Dirichlet, cette valeur est par définition connue, et en l'occurrence nulle. Par conséquent le domaine de recherche Ω dans lequel les modes sont recherchés peut-être restreint à la zone $\Omega - \Gamma_D$, en particulier le calcul de $\tilde{\mathbf{L}}$ n'est donc pas nécessaire au niveau des noeuds de Γ_D . Ainsi si on appelle N le nombre de noeuds du maillage de Ω et N_D le nombre de noeuds sur la frontière Γ_D

correspondant aux N_D premiers noeuds du maillage, alors :

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 = 0 \\ \vdots \\ \tilde{p}_{N_D} = 0 \\ \tilde{p}_{N_D+1} \\ \vdots \\ \tilde{p}_N \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{L}}(\tilde{p}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{L}}(\tilde{p})_{N_D+1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{L}}(\tilde{p})_N \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Le champ de pression évalué sur le domaine $\Omega - \Gamma_D$ est alors appelé $\tilde{p}_{\Omega - \Gamma_D}$. On remarquera également que l'évaluation de $\tilde{\mathbf{L}}$ au niveau des noeuds voisins du bord Γ_D nécessite la valeur de \tilde{p} aux noeuds de ce même bord. Par conséquent, au-delà de la réduction du domaine de calcul, la condition limite de type Dirichlet est effectivement prise en compte à travers le calcul de l'opérateur $\tilde{\mathbf{L}}$. Ainsi, en appelant $A \in \mathbb{C}^{(N-N_D)^2}$ la matrice représentant l'opérateur $\tilde{\mathbf{L}}$, le problème numérique aux valeurs propres avec conditions limites de Dirichlet s'écrit :

$$A\tilde{p}_{\Omega - \Gamma_D} = -\omega^2 \tilde{p}_{\Omega - \Gamma_D} \quad (4.12)$$

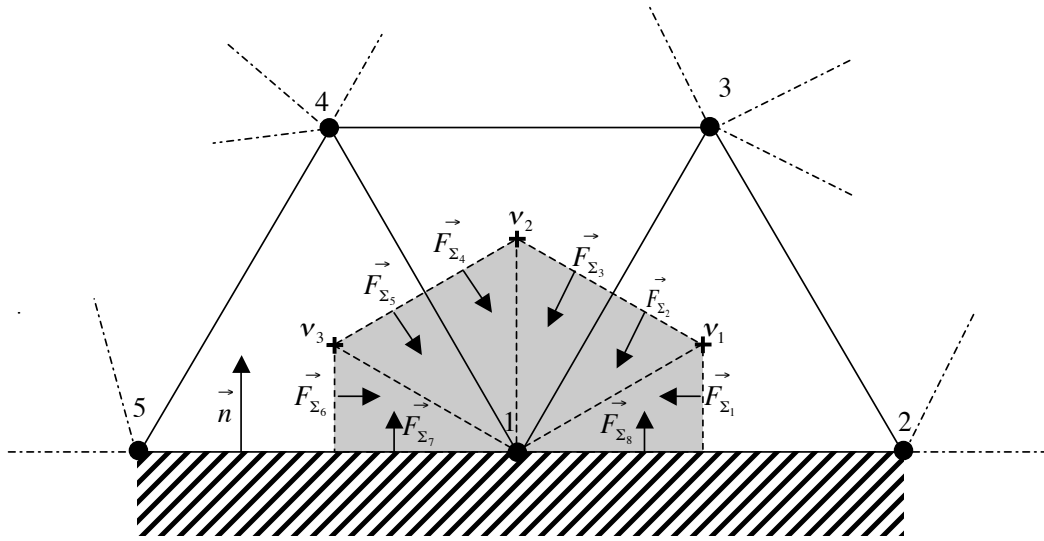
Condition limite de type $\hat{u} \cdot \vec{n} = 0$

Cette condition limite équivaut à une impédance infinie (Eq. 1.58), ce qui bien sûr n'est pas modélisable comme tel numériquement. L'équation 1.54 montre que, dans ce cas, on peut substituer à cette dernière une condition limite de type von Neumann sur la pression $\nabla \hat{p} \cdot \vec{n} = 0$. Ce type de condition limite est pris en compte naturellement par la méthode numérique utilisée dans AVSP qui ignore les flux à la paroi. Cet aspect est illustré par l'exemple de la figure 4.3. Dans ce cas bidimensionnel, le calcul de $\tilde{\mathbf{L}}$ au niveau de la cellule Ω_1 , ayant pour centre le noeud 1 situé sur un bord, s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_1} = \frac{1}{V_{\Omega_1}} \left(\underbrace{\vec{F}_{\Sigma_1} \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \vec{F}_{\Sigma_2} \cdot d\vec{\Sigma}_2}_{\frac{1}{2} \vec{F}v_1 \cdot d\vec{\Sigma}v_1} + \underbrace{\vec{F}_{\Sigma_3} \cdot d\vec{\Sigma}_3 + \vec{F}_{\Sigma_4} \cdot d\vec{\Sigma}_4}_{\frac{1}{2} \vec{F}v_2 \cdot d\vec{\Sigma}v_2} + \underbrace{\vec{F}_{\Sigma_5} \cdot d\vec{\Sigma}_5 + \vec{F}_{\Sigma_6} \cdot d\vec{\Sigma}_6}_{\frac{1}{2} \vec{F}v_3 \cdot d\vec{\Sigma}v_3} + \underbrace{\vec{F}_{\Sigma_7} \cdot d\vec{\Sigma}_7 + \vec{F}_{\Sigma_8} \cdot d\vec{\Sigma}_8}_{\text{flux à la paroi}} \right)$$

Donc dans le cas d'une condition limite de von Neumann sur la pression, cette relation devient :

$$\tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_1} = \frac{1}{2V_{\Omega_1}} \left(\sum_{j=1}^3 c_{v_j}^2 \nabla \tilde{p}_{v_j} \cdot d\vec{\Sigma}v_j + c_{\Sigma_7}^2 \underbrace{\nabla \tilde{p}_{\Sigma_7} \cdot \vec{n}}_0 |d\vec{\Sigma}_7| + c_{\Sigma_8}^2 \underbrace{\nabla \tilde{p}_{\Sigma_8} \cdot \vec{n}}_0 |d\vec{\Sigma}_8| \right) \quad (4.13)$$

FIG. 4.3 – Calcul à la paroi de $\tilde{\mathbf{L}}$ au noeud d'indice 1.

Le flux aux parois n'étant pas pris en compte par la méthode numérique, la condition limite de type von Neumann est donc appliquée par défaut lors du calcul de $\tilde{\mathbf{L}}$ sur un noeud de bord. Par conséquent, le problème aux valeurs propres matriciel à résoudre s'écrit toujours :

$$A\tilde{p}_{\Omega-\Gamma_D} = -\omega^2 \tilde{p}_{\Omega-\Gamma_D}$$

Pour des raisons de commodité, on considérera par la suite A comme une matrice de taille N dont les N_D premières lignes sont identiquement nulles et on étendra son application au vecteur \tilde{p} . Dans ces conditions, la matrice A représente donc l'opérateur $\tilde{\mathbf{L}}$ sur l'ensemble des noeuds de $\Omega - \Gamma_Z$ et par la même, les conditions limites de Dirichlet et von Neumann. Le problème aux valeurs propres matriciel s'écrit donc pour les noeuds en question :

$$A\tilde{p} = -\omega^2 \tilde{p} \quad (4.14)$$

Condition limite de type admittance

Du point de vue numérique cette condition limite signifie que, au niveau d'un point de la frontière Γ_Z , un flux $c^2 \nabla \hat{p} \cdot \vec{n}$ provenant de la paroi existe et que celui-ci est relié à la valeur de la pression en ce point. Ce lien apparait en reformulant l'expression de l'impédance (Eq. 1.47) à l'aide de l'équation de conservation de quantité de mouvement linéarisée (Eq.1.37) :

$$\frac{1}{Z} = \frac{c \nabla \hat{p} \cdot \vec{n}}{i \omega \hat{p}} \quad (4.15)$$

Ainsi, le flux en question au niveau de la paroi de normale intérieure \vec{n} s'écrit :

$$c^2 \nabla \hat{p} \cdot \vec{n} = \frac{i\omega c \hat{p}}{Z} \quad (4.16)$$

Pour une cellule centrée sur le noeud j , ce flux de paroi sera évalué par la formule 4.16, à partir de la valeur de la pression uniquement au noeud j . Autrement dit, on considère la pression constante sur les faces de la cellule contigües à la paroi. Si l'on reprend l'exemple de la figure 4.3, l'équation 4.13 s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_1} &= \frac{1}{2V_{\Omega_1}} \left(\sum_{j=1}^3 c_{v_j}^2 \nabla \tilde{p}_{v_j} \cdot d\vec{\Sigma}_{v_j} + c_{\Sigma_7}^2 \nabla \tilde{p}_{\Sigma_7} \cdot \vec{n} |d\vec{\Sigma}_7| + c_{\Sigma_8}^2 \nabla \tilde{p}_{\Sigma_8} \cdot \vec{n} |d\vec{\Sigma}_8| \right) \\ &= \frac{1}{2V_{\Omega_1}} \left(\sum_{j=1}^3 c_{v_j}^2 \nabla \tilde{p}_{v_j} \cdot d\vec{\Sigma}_{v_j} + \frac{\omega}{Z} i c_1 \tilde{p}_1 \cdot (|d\vec{\Sigma}_7| + |d\vec{\Sigma}_8|) \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Les implications de la prise en compte de l'admittance sur la nature du problèmes aux valeurs propres posé sont très importantes car la résolution de ce problème suppose la connaissance du flux des parois de Γ_z qui lui-même est paramétré par la valeur propre recherchée. Pour contourner cette difficulté, il convient d'exprimer ce flux de manière globale afin de l'inclure dans le problème matriciel à résoudre. Pour cela, la dépendance fréquentielle du flux de bord doit être spécifiée. En effet, dans le cas général, l'impédance, et donc l'admittance, est une fonction de la fréquence ; or la nature de cette fonction va conditionner la rapidité sinon l'existence de la méthode de résolution du problème aux valeurs propres modifié. Dans un premier temps, nous allons considérer l'impédance constante (mais toujours complexe) $Z(\omega) = Z$ puis, compte-tenu de la méthode choisie nous chercherons à étendre son application à des formes de $1/Z(\omega)$ particulières. Dans ce cas l'extension de l'équation 4.17 à l'ensemble des noeuds du maillage induit la relation suivante :

$$\underbrace{A\tilde{p}}_{\tilde{\mathbf{L}} \text{ issu de } \Omega \cup (\Gamma - \Gamma_Z)} + \underbrace{\omega B_Z \tilde{p}}_{\tilde{\mathbf{L}} \text{ issu de } \Gamma_Z} + \omega^2 \tilde{p} = 0 \quad (4.18)$$

Avec $B_Z \in \mathbb{C}^{N \times N}$ une matrice diagonale au niveau des noeuds de Γ_Z et identiquement nulle ailleurs :

$$(B_Z)_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ i c_j |d\vec{\Sigma}_j| / Z & \text{si } j = k \text{ et } j \in \Gamma_Z \end{cases}$$

Le problème aux valeurs propres matriciel obtenu s'exprime donc sous la forme d'une fonction de ω . Cette fonction étant polynomiale, il existe des techniques de résolution [97] permettant de résoudre le problème aux valeurs

propres associé . Celles-ci requierent notamment le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \begin{pmatrix} \omega\tilde{p} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} -B_Z & -A \\ I & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Alors l'équation 4.18 peut se mettre sous la forme d'un problème aux valeurs propres "classique" :

$$M\tilde{t} = \omega\tilde{t} \quad (4.20)$$

En fait, il est possible de généraliser cette technique pour tout problème aux valeurs propres polynômial d'ordre n , la taille du système matriciel obtenu est alors $n \times N$. Le coût de calcul pour un doublement du système reste raisonnable mais il pourrait s'avérer rédibitoire au-de là. On va donc s'intéresser à des formes de $1/Z(\omega)$ aboutissant à un problème aux valeurs propres polynômial demeurant d'ordre 2 au plus. Compte-tenu du lien entre admittance et flux à la paroi (Eq.4.16), l'admittance envisagée s'écrit sous sa forme la plus générale :

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{\alpha}{\omega} + \frac{1}{Z_{cst}} + \beta\omega \quad (4.21)$$

Avec $(\alpha, Z_{cst}, \beta) \in \mathbb{C}^3$. Dans le cas particulier de la figure 4.3, l'équation 4.17 devient donc :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}}_{\Omega_1} &= \frac{1}{2V_{\Omega_1}} \left(\sum_{j=1}^3 c_{v_j}^2 \nabla \tilde{p}_{v_j} \cdot d\vec{\Sigma}_{v_j} + i\alpha c_1 \tilde{p}_1 \cdot (|d\vec{\Sigma}_7| + |d\vec{\Sigma}_8|) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega}{Z_{cst}} ic_1 \tilde{p}_1 \cdot (|d\vec{\Sigma}_7| + |d\vec{\Sigma}_8|) + \omega^2 i\beta c_1 \tilde{p}_1 \cdot (|d\vec{\Sigma}_7| + |d\vec{\Sigma}_8|) \right)\end{aligned}\quad (4.22)$$

Par conséquent, le problème aux valeurs propres matriciel s'écrit sous sa forme la plus générale comme :

$$(A + B_{Z_\alpha})\tilde{p} + \omega B_{Z_{cst}}\tilde{p} + \omega^2 (I + B_{Z_\beta})\tilde{p} = 0 \quad (4.23)$$

Avec I la matrice identité de taille N et $(B_{Z_\alpha}, B_{Z_{cst}}, B_{Z_\beta}) \in (\mathbb{C}^{N \times N})^3$ les matrices associées respectivement au premier, second et troisième terme de droite de l'expression 4.21. En appelant $\Gamma_{Z_\alpha}, \Gamma_{Z_{cst}}, \Gamma_{Z_\beta}$ les frontières où s'appliquent (par correspondance de notation) les trois termes en question, les définitions de ces matrices sont les suivantes :

$$(B_{Z_\alpha})_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ ic_j |\vec{d}\vec{\Sigma}_j| \alpha & \text{si } j = k \text{ et } j \in \Gamma_{Z_\alpha} \end{cases} \quad (4.24)$$

$$(B_{Z_{cst}})_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ ic_j |\vec{d}\vec{\Sigma}_j| / Z_{cst} & \text{si } j = k \text{ et } j \in \Gamma_{Z_{cst}} \end{cases} \quad (4.25)$$

$$(B_{Z_\beta})_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ ic_j |\vec{d}\vec{\Sigma}_j| \beta & \text{si } j = k \text{ et } j \in \Gamma_{Z_\beta} \end{cases} \quad (4.26)$$

Compte-tenu de la définition de B_{Z_β} , on en déduit que la matrice $I + B_{Z_\beta}$ est non seulement diagonale mais aussi inversible, sous la condition $\forall j \quad \beta \neq -1/(ic_j |\vec{d}\vec{\Sigma}_j|)$. La matrice $(I + B_{Z_\beta})^{-1}$ est donc une matrice diagonale dont les éléments sont les inverses des éléments diagonaux de $(I + B_{Z_\beta})$. Ainsi en multipliant à gauche l'équation 4.23 par $(I + B_{Z_\beta})^{-1}$, on obtient un problème de forme similaire à celui de l'équation 4.20 :

$$M_{bis} \tilde{t} = \omega \tilde{t} \quad (4.27)$$

Avec toujours la même définition pour \tilde{t} et pour la matrice $M_{bis} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ l'expression suivante :

$$M_{bis} = \begin{pmatrix} -(I + B_{Z_\beta})^{-1} B_{Z_{cst}} & -(I + B_{Z_\beta})^{-1} (A + B_{Z_\alpha}) \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Ainsi, pour certains types de variation fréquentielle de l'admittance, le problème aux valeurs propres obtenus est réductible sous forme "classique" et peut donc être résolu efficacement.

4.3 Problème aux valeurs propres avec flamme active

4.3.1 Position du problème

On considère maintenant le problème 1.46 dans son ensemble. Comme énoncé dans les sections précédentes, la difficulté de résolution de ce problème réside dans la dépendance fréquentielle du terme source thermoacoustique, en l'occurrence la fonction de transfert de flamme. Pour des raisons de simplicité de mise en oeuvre, les méthodes de prise en compte de cette fonction développées dans cette étude ne seront appliquées qu'à la forme la plus basique de fonction de transfert de flamme à savoir le modèle $n - \tau$ (voir section 1.3.1). Celui-ci relie les fluctuations du taux de dégagement de chaleur d'une flamme aux

fluctuations de vitesse en un point de référence particulier, ce dernier étant généralement choisi au niveau de l'injection de carburant [12]. Néanmoins, les méthodes développées dans cette section peuvent être étendues sans difficultés théoriques apparentes à des fonctions de transfert plus générales afin de prendre en compte l'influence des fluctuations de pression. Compte-tenu du formalisme retenu dans cette étude, le modèle $n - \tau$ "classique" [26] prend donc la forme suivante :

$$\int_{V_{flam}} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma \bar{p}} \hat{q} dV = n(\vec{x}) e^{i\omega\tau(\vec{x})} \hat{\mathbf{u}}_{ref} \cdot \vec{n}_{ref} S_{ref} \quad (4.29)$$

Avec $\hat{\mathbf{u}}_{ref}$ et \vec{n}_{ref} respectivement la vitesse acoustique au point de référence et la normale de référence. Cette relation étant "globale", il convient d'adapter ce modèle au problème aux valeurs propres local qui nous intéresse :

$$\hat{q}(\vec{x}) = \eta(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau(\vec{x}, \omega)} \hat{\mathbf{u}}_{ref} \cdot \vec{n}_{ref} \quad (4.30)$$

sous cette forme, le paramètre local d'interaction η de la flamme n'est pas adimensionné . On introduit donc le paramètre n_l défini comme suit :

$$\frac{\hat{q}(\vec{x})}{\bar{q}(\vec{x})} = n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau(\vec{x}, \omega)} \frac{\hat{\mathbf{u}}_{ref} \cdot \vec{n}_{ref}}{\bar{\mathbf{u}}_{ref} \cdot \vec{n}_{ref}} \quad (4.31)$$

Ainsi $\eta = n_l \bar{q} / (\bar{\mathbf{u}}_{ref} \cdot \vec{n}_{ref})$.

Quelque soit la forme de fonction de transfert utilisée, à l'aide de l'Eq. 1.37 reliant les fluctuations de vitesse aux fluctuations de pression, le problème aux valeurs propres avec terme source modélisé prend donc la forme suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{c}^2 \nabla \hat{p} - \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})} \eta(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau(\vec{x}, \omega)} (\nabla \hat{p})(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} + \omega^2 \hat{p} = 0 & \text{dans } \Omega \\ + \text{Conditions Limites} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.32)$$

Ici, contrairement à la situation avec admittance, le type de non-linéarité en ω n'est pas polynomiale. Le problème aux valeurs propres ainsi obtenu ne peut donc pas être résolu directement par des méthodes algébriques classiques comme celles développées dans les sections précédentes. On se propose donc dans cette section d'explorer deux alternatives permettant d'appréhender la situation avec flamme acoustiquement active.

4.3.2 Prise en compte de la flamme active par un développement asymptotique

Une première approche consiste à considérer l'influence de la flamme active sur l'acoustique de la configuration comme une perturbation de l'état sans

source thermoacoustique. Cette hypothèse s'appuie notamment sur diverses observations expérimentales dans lesquelles la présence de la flamme modifie avant tout, du point de vue acoustique, la stabilité des modes sans pour autant bouleverser leur structure spatiale ni la partie réelle des fréquences propres associées. En pratique, cela signifie que les fréquences et les modes propres (ω, \hat{p}) du problème 4.32 sont recherchés sous la forme d'un développement asymptotique autour des modes sans flamme active (ω_0, \hat{p}_0) avec un petit paramètre ε directement relié à l'intensité de la réponse acoustique de la flamme. Le grand avantage de cette approche réside dans sa rapidité. La détermination des fréquences propres par l'application de la formule analytique résultante requiert le calcul des modes sans flamme active mais pratiquement aucun calculs supplémentaires. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne peut offrir qu'une approximation des modes sans combustion solution du problème 4.32 et que, bien entendu, la qualité de cette approximation sera fonction de la valeur du petit paramètre utilisé.

La suite de cette section est rédigée en anglais et a donné lieu à un article en cours de publication dans la revue *International Journal for Numerical Methods in Fluids* [98]. Cette section constitue un exemple de validation de la méthode de calcul des modes propres avec flamme active à l'aide d'un développement asymptotique (section 4.3.2). Le cas test envisagé est un tube simple, contenant une flamme plane infiniment mince localisée au milieu de la configuration. La flamme induit non seulement un saut de température moyen mais constitue également un terme source thermoacoustique. Ici, les résultats de AVSP sont comparés à des résultats analytiques. Le choix de la fonction de transfert de flamme ne correspond pas à une configuration expérimentale particulière, par contre, plusieurs valeurs de l'amplitude de la fonction de transfert de flamme (qui pilote directement la précision des résultats de la méthode en question à travers la définition de ε) sont testées et notamment des valeurs de configuration réalistes [67].

abstract

A new methodology to assess the effect of the flame/acoustics coupling on the stability of the modes without combustion is presented. An asymptotic method is used to account for the acoustic flame transfer function. The efficiency and accuracy of the approach is demonstrated on an academic case similar to a Rijke tube configuration.

INTRODUCTION

It has been known for a long time that the coupling between acoustic waves and flames in industrial systems can lead to high amplitude instabilities [8, 38, 99]. In addition to inducing oscillations of all physical quantities (pressure, velocities, temperature, etc ...), these instabilities can increase the amplitude of the flame motion and, in extreme cases destroy part of the burner due to large heat transfer in the premixing tube. Since the equivalence ratio oscillates when instabilities are present, there is a general trend for combustors to be more unstable when operating in the lean regime (more air injected than necessary to burn the amount of fuel injected). Besides, due to new international constraints, pollutant emissions must be reduced and many gas turbine manufacturers strategies consist in operating their systems under leaner and leaner conditions. Consequently, there is a need to better understand combustion instabilities and to predict them at the design level. The objective of this paper is to present a methodology to predict unstable/stable thermo-acoustic modes of a combustor. Since no assumptions about the geometry are required, this method can be applied to realistic configurations [100]. The equations of linear acoustics are first written in the case of three dimensional reactive flows and the problem is closed by using flame transfer functions (which can be evaluated with Large Eddy Simulation calculations on realistic configurations [94]). An asymptotic expansion method is then developed in order to recover a classical eigenvalues problem from these equations. Finally, the methodology is tested by computing an academic example whose theoretical solution is known.

METHODOLOGY

Governing Equations

A suitable description of the thermo-acoustic instabilities can be derived by making use of the perfect gas law and classical equations of fluid mechanics, i.e. equations of mass, momentum and energy conservation. Besides, assumptions of constant mean pressure and low Mach number appear reasonable from gas turbines observations. Moreover, since eigenmodes exhibited in practical systems lie in the low/medium frequency domain, viscosity as well as thermodiffusivity may moreover be neglected. Under these assumptions, a wave equation for small pressure perturbations may be derived [26] and reads :

$$\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla p') - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -(\gamma - 1) \frac{\partial \bar{q}'}{\partial t} \quad (4.33)$$

where primed and overbarred variables stand for the thermo-acoustic perturbation and mean variables respectively whereas p , c and \bar{q} stand for pressure,

sound speed and rate of heat release. Note that the specific heat ratio γ has been assumed constant for deriving this equation but the flow field fluctuations are not supposed isentropic. Eq. 6.1 is thus relevant to any large scale of small amplitude pressure fluctuations. Solving this equation requires a model for the rate of heat release fluctuations \dot{q}' in order to close the problem. As suggested by the seminal studies of Crocco [10, 11] the flame is modeled as a purely acoustic element, neglecting the effects of local turbulence, chemistry or heat losses. The simplest model reads :

$$\frac{\dot{q}'(\vec{x}, t)}{\bar{q}(\vec{x})} = n_l(\vec{x}) \frac{\mathbf{u}'(\vec{x}_{ref}, t - \tau(\vec{x})) \cdot \vec{n}_{ref}}{\bar{\mathbf{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}} \quad (4.34)$$

where $n_l(\vec{x})$ is a local interaction index and $\tau(\vec{x})$ stands for a time lag between the local unsteady heat release $\dot{q}'(\vec{x}, t)$ and the acoustic velocity \mathbf{u}' at a reference position \vec{x}_{ref} and direction \vec{n}_{ref} . The other variables introduced are the local mean rate of heat release $\bar{q}(\vec{x})$ and the mean speed at the reference point $\bar{\mathbf{u}}(\vec{x}_{ref})$. This formulation generalizes the $n - \tau$ model [10, 11] used in the framework of one dimensional configurations with infinitely thin flames [26] to the case of three dimensional flows with distributed combustion. Assuming harmonic fluctuations of small amplitudes, $p' = \Re(\hat{p}(\vec{x})e^{-i\omega t})$, with $i^2 = -1$, equations 6.1 and 6.2 can be combined with the linearized momentum equation $i\omega\bar{\rho}\bar{\mathbf{u}} = \nabla\hat{p}$ to give :

$$\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \hat{p}) + \omega^2 \hat{p} = \frac{(\gamma - 1) \bar{q}(\vec{x}) \bar{\rho}(\vec{x}_{ref}) \bar{\mathbf{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}}{n_l(\vec{x})} e^{i\omega\tau(\vec{x})} \nabla \hat{p} \cdot \vec{n}_{ref}(\vec{x}_{ref}) \quad (4.35)$$

This latter equation together with proper boundary conditions constitutes the eigenvalue problem satisfied by the harmonic fluctuations \hat{p} in the flow domain Ω bounded by the surface $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_{VN} \cup \partial\Omega_Z$. Three types of boundary conditions have been considered :

- A Dirichlet condition $\hat{p} = 0$ on $\partial\Omega_D$.
- A Neumann condition $\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{n} = 0$, \vec{n} the outward normal unit vector on $\partial\Omega_N$.
- An admittance type condition on $\partial\Omega_Z$ which implies :

$$\frac{1}{Z} = \frac{-i\bar{c}\nabla\hat{p} \cdot \vec{n}}{\omega\hat{p}} \quad (4.36)$$

where Z is the reduced impedance $Z = \hat{p}/(\bar{\rho}\bar{c}\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{n})$.

Numerical approach

At first, the problem without source term is considered. This corresponds to the case of an acoustically passive flame with zero unsteady heat release \dot{q}' . Note

however that the mean heat release \bar{q} is not necessary zero. Consistently, the mean temperature and speed of sound may still be functions of space. Using the classical Galerkin finite element method to discretize the problem and assuming $1/Z = \alpha_1/\omega + \alpha_2 + \alpha_3\omega$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, complex constants, one ends up with the finite dimension problem

$$[A][P] + \omega[B][P] + \omega^2[P] = 0 \quad (4.37)$$

where the matrix $[A]$ of size m represents the $\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla)$ operator and $[B]$ represents the boundary terms. $[P]$ is the column vector whose components are the values of \hat{p} at the m nodes of the finite element mesh. The resulting problem is not linear anymore (with respect to ω^2) but this difficulty can be overcome by using a suitable variable transformation [97]. A classical eigenvalue problem of size $2 \times m$ can then be recovered and solved by an Arnoldi method [101].

Accounting for the unsteady combustion

The eigenvalue problem associated with Eq. 6.4 can not be solved directly by classical methods developed for linear algebra. In the present approach, the flame is considered as an element which slightly modifies the eigenmode without combustion. Specifically, a global energy form of Eq. 6.4 is first derived by multiplying this equation by \hat{p} and integrating over Ω :

$$\int_{\Omega} \hat{p} [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \hat{p}) + \omega^2 \hat{p}] dV = \int_{\Omega} \frac{(\gamma - 1) \bar{q}(\vec{x})}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref}) \bar{\mathbf{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ref}} n_l(\vec{x}) e^{i\omega\tau(\vec{x})} \hat{p} \nabla \hat{p} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ref}(\vec{x}_{ref}) dV \quad (4.38)$$

We then define the expansion parameter $\varepsilon = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} n_l(\vec{x}) dV$ and seek for the eigenmodes (ω, \hat{p}) of Eq. 6.4 as a first order expansion around the modes without combustion (ω_0, \hat{p}_0) :

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + o(\varepsilon^2) \quad (4.39)$$

$$\hat{p} = \hat{p}_0 + \varepsilon \hat{p}_1 + o(\varepsilon^2) \quad (4.40)$$

Introducing these relations in Eq. 6.8 and keeping only first order terms give the following equation :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{p}_0 [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \varepsilon \hat{p}_1) + \omega_0^2 \varepsilon \hat{p}_1] dV &= -2\varepsilon \int_{\Omega} \hat{p}_0^2 \omega_0 \omega_1 dV \\ &+ \int_{\Omega} \frac{(\gamma - 1) \bar{q}(\vec{x}) (\nabla \hat{p}_0 \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ref})(\vec{x}_{ref})}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref}) \bar{\mathbf{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ref}} n_l(\vec{x}) e^{i\omega_0 \tau(\vec{x})} \hat{p}_0 dV \end{aligned} \quad (4.41)$$

The LHS term can be simplified by using a reduction order method [102] in which $\hat{p}_1 = \hat{p}_0 F_1$, F_1 being a spatial derivable function. Thanks to this relation,

the LHS term of Eq. 6.12 becomes :

$$\int_{\Omega} \hat{p}_0 [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \varepsilon \hat{p}_1) + \omega_0^2 \varepsilon \hat{p}_1] dV = \varepsilon \int_{\partial\Omega} \bar{c}^2 \hat{p}_0^2 \nabla F_1 \cdot \vec{dS} \quad (4.42)$$

which is obviously null on $\partial\Omega_D$ since $\hat{p}_0 = 0$. Moreover the eigenmodes with flame (ω, \hat{p}) and without flame (ω_0, \hat{p}_0) verify the same boundary conditions, one can show that $\nabla F_1 \cdot \vec{dS} = 0$ on $\partial\Omega_N$ and that the following relation is valid at the first order in ε on $\partial\Omega_Z$,

$$\nabla F_1 \cdot \vec{dS} = \frac{i\omega_1}{\bar{c}Z(\omega_0)} \left(1 - \frac{1}{Z(\omega_0)} \frac{\partial Z}{\partial \omega}(\omega_0) \right) dS \quad (4.43)$$

Consequently, by introducing this relation in the RHS term of Eq. 6.13, an expression for the perturbation $\varepsilon\omega_1$ can be obtained :

$$\varepsilon\omega_1 = \frac{\int_{\Omega} \bar{q}(\vec{x}) \hat{p}_0 n_l(\vec{x}) e^{i\omega_0 \tau(\vec{x})} (\gamma - 1) (\nabla \hat{p}_0 \cdot \vec{n}_{ref})(\vec{x}_{ref}) dV}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref}) \vec{u}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \left[2\omega_0 \int_{\Omega} \hat{p}_0^2 dV + \int_{\partial\Omega_Z} \frac{i\bar{c}\hat{p}_0^2}{Z(\omega_0)} \left(1 - \frac{1}{Z(\omega_0)} \frac{\partial Z}{\partial \omega}(\omega_0) \right) dS \right]} \quad (4.44)$$

In the case where the denominator of Eq .4.44 is not null, this equation provides a simple way to check whether an eigenmode without combustion (ω_0, \hat{p}_0) is made stable ($\Im(\omega_0 + \varepsilon\omega_1) < 0$) or unstable ($\Im(\omega_0 + \varepsilon\omega_1) > 0$) by the coupling with the unsteady flame.

ACADEMIC EXAMPLE OF APPLICATION

Description of the configuration and theoretical solution

The aforementioned method is tested on the configuration illustrated by Fig. 4.4. It deals with a two dimensional tube with a closed inlet, an opened outlet and a mean temperature jump induced by a flame located at its middle. Since the flame thickness is much smaller than the typical wave length, the flame is considered as infinitely thin. Following the methodology of Poinsot and Veynante [26], suitable jump relations across the flame provide a characteristic relation matched by the pulsation ω of the longitudinal modes,

$$\cos\left(\frac{kL}{4}\right) \left[n e^{i\omega\tau} \sin^2\left(\frac{kL}{4}\right) - 3\cos^2\left(\frac{kL}{4}\right) + 2 \right] = 0 \quad (4.45)$$

where $k = \omega/c_1$ stands for the wave number in the fresh gases. With the formalism chosen in the second section, an eigenmode is unstable whenever $\Im(\omega)$ is positive. Besides, the classical one dimensional $n - \tau$ model [26] used in Eq. 4.45 can be related to the model in Eq. 6.2 and :

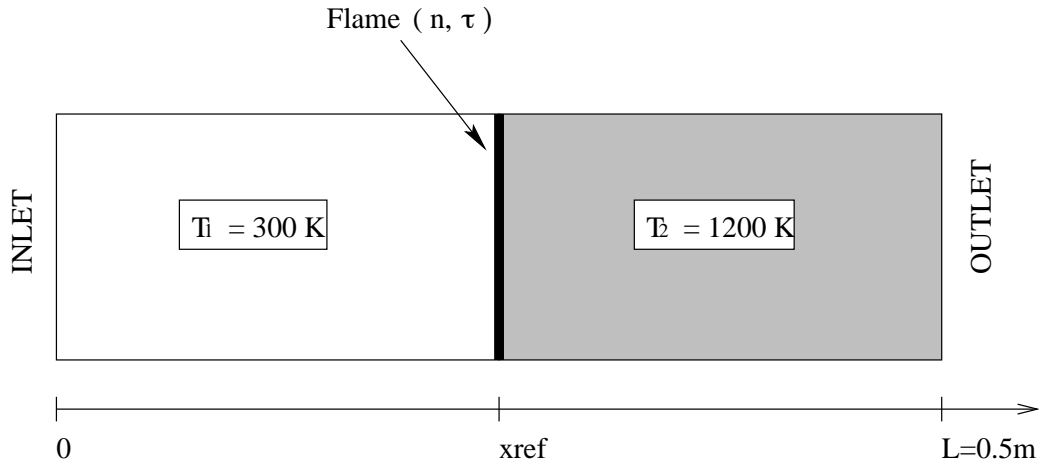


FIG. 4.4 – configuration retained for first order expansion method validation

$$\varepsilon = \frac{\bar{c}^2(\vec{x}_{ref})}{(\gamma - 1)c_p(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)} n \quad (4.46)$$

where c_p is the massic heat capacity at constant pressure. In this simple example, c_p and γ are considered spatially constant and are equal to $1004.5 J.K^{-1}.kg^{-1}$ and 1.4 respectively. In addition, following Crocco [10, 11], the heat release fluctuations are coupled to the velocity fluctuations in the fresh gas. In this academic example it means that the theoretical reference position required for defining the flame transfer function is chosen immediately upstream the flame, i.e. at the abscissa $x_{ref} = 0.25m$.

Application of the asymptotic expansion method

Although the configuration described in 4.3.2 is one dimensional, all the calculations have been performed on unstructured two dimensional meshes with triangular cells. Two kinds of mesh have been used : a first one with 561 nodes and a second one, highly refined in the flame vicinity, with 5231 nodes. Two main issues have been addressed :

– Optimal position of the reference point :

Because of the large temperature variation near x_{ref} , the computation of the acoustic pressure gradient at the reference point (see Eq. 4.44) is not reliable in the vicinity of the flame. To overcome this difficulty, the reference location has been taken as the closest grid point to the flame in the fresh gas viz. $x_{ref} = 0.24m$ for the 561 nodes mesh instead of $x_{ref} = 0.25m$ for the theoretical model. The refinement in the second mesh allows a reference position closer to the theoretical value : $x_{ref} = 0.249m$. Table 4.1 shows that the results obtained with the two meshes are in close agreement with

the theory : as long as the gap between the theoretical and the numerical reference location is small in comparison with the eigenmode wavelength, accurate computation can be performed.

	$x_{ref} = 0.24m$	$x_{ref} = 0.249m$	$x_{ref} = 0.25m$
coarse mesh (561 nodes)	$270.4 - 0.087i$	X	X
refined mesh (5231 nodes)	$271.3 - 0.093i$	$271.4 - 0.088i$	X
theoretical	$271.5 - 0.098i$	$271.6 - 0.088i$	$271.6 - 0.088i$

TAB. 4.1 – Effect of reference position value and the grid resolution for the first eigen frequency ; $\varepsilon = 0.003$, $\tau = 10^{-4}s$. Cross “X” indicates unfeasable calculation.

- Validity domain with respect to expansion parameter ε value :
Three values of the expansion parameter are considered, $\varepsilon = 0.003$ ($n = 0.01$), $\varepsilon = 0.33$ ($n = 1.0$) and $\varepsilon = 1.6$ ($n = 5.0$) in any case the time delay being $\tau = 10^{-4}s$. Eigen frequencies obtained in each case are compared with theoretical solutions of Eq. 4.45. The results are available in Fig. 4.5 and displayed in the complex plane. As expected, the computed eigen frequencies match the theoretical results for low values of ε . Discrepancies appear for ε values close to one but the error on the real part of the eigen frequencies is bounded to 15% excepted for the first mode with $\varepsilon = 1.6$. Concerning the imaginary part of the eigen frequencies, the error is more important but the stability of the mode, i.e. the sign of the imaginary part, is always correctly predicted. Moreover, the third mode is always found the most unstable. From these results, first order asymptotic expansion seems to increase the shift induced by the flame in eigen frequency values but the trend is correctly predicted even for expansion parameter values beyond its theoretical application range ($\varepsilon \ll 1$).

CONCLUSION

A methodology to evaluate the stability of the thermo-acoustic eigenmodes with an active acoustic flame has been proposed. Because of the particular source term induced by the flame, a special treatment is required. An asymptotic expansion method used together a flame transfer function model allows to assess how the unsteady combustion modifies the stability of the eigenmodes of the system. This strategy is tested on an academic case. The method accurately assesses the eigen frequencies for low to medium values of the expansion parameter ε and seems to predict correctly the trend when $\varepsilon > 1$. Further developments will include the application to realistic gas-turbines configurations.

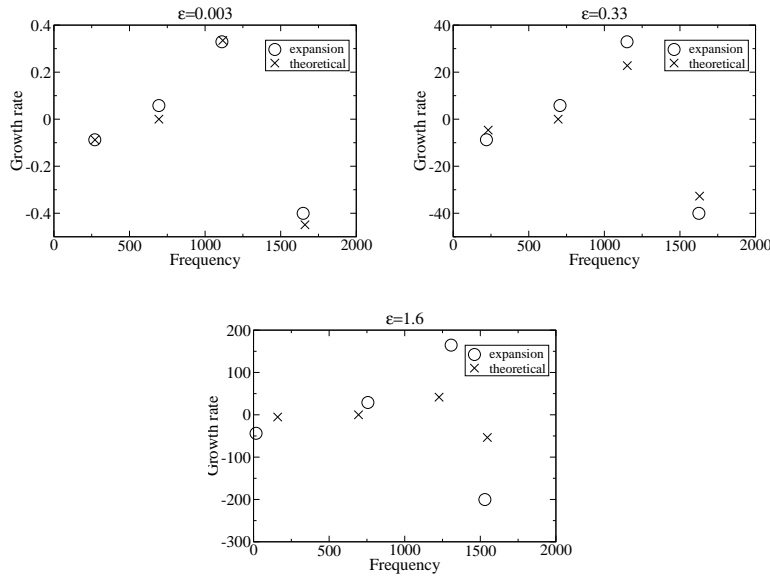


FIG. 4.5 – Representation in the complex plan of the theoretical and computed eigen frequencies

4.3.3 Prise en compte de la flamme active par une méthode de point fixe

La principale difficulté dans la résolution du problème 4.32 réside dans la dépendance fréquentielle de la flamme. En admettant que, à la fréquence propre recherchée ω_{th} , la réponse acoustique de la flamme $\mathcal{N}^{th} = \mathcal{N}(\omega_{th})$ soit connue, la dépendance fréquentielle de la flamme ainsi figée permet alors d'aboutir à un problème aux valeurs propres similaire à celui de la section 4.2.2 :

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \mathcal{N}^{th})\hat{p} = -\omega^2 \hat{p} \\ + \text{Conditions Limites} \end{cases}$$

Ce qui se traduit matriciellement de la manière suivante en reprenant l'équation 4.23 avec conditions limites d'admittance :

$$(A + B_{Z_\alpha} - N^{th})\tilde{p} + \omega B_{Z_{cst}}\tilde{p} + \omega^2(I + B_{Z_\beta})\tilde{p} = 0 \quad (4.47)$$

Avec N la matrice de l'opérateur \mathcal{N} . Toutefois, la connaissance de \mathcal{N}^{th} n'est pas théoriquement accessible puisqu'elle dépend de la fréquence propre recherchée. L'idée développée dans cette section est donc de trouver un moyen d'approcher cette valeur que l'on notera \mathcal{N}^{ap} .

Une première étape consiste à calculer la réponse de la flamme aux fréquences déterminées sans flamme active. On fait donc l'hypothèse, comme à la section 4.3.2, que la flamme active modifie avant tout la stabilité des modes par rapport

à la situation en son absence. En particulier, on suppose que les fréquences avec et sans flamme active (respectivement ω_{th} et ω_0) sont suffisamment proches pour que la réponse de la flamme $\mathcal{N}(\omega_0)$ constitue une bonne approximation de \mathcal{N}^{th} . Cependant, il est en l'état impossible d'avoir effectivement une idée de l'erreur commise par cette substitution. Pour remédier à ce problème tout en améliorant l'évaluation de \mathcal{N}^{th} et ω_{th} , on cherche à étendre la démarche initiale en ayant recours à un processus itératif. Celui-ci consiste, à chaque étape k , en la réévaluation de l'approximation $\omega_{(k)}$ de la fréquence propre recherchée en résolvant le problème 4.47 dans lequel \mathcal{N}^{ap} est la réponse de la flamme à la fréquence $\omega_{(k-1)}$ déterminée à l'étape précédente. Au départ, la réponse acoustique de la flamme utilisée est celle évaluée à la fréquence propre ω_0 sans flamme. L'algorithme est décrit ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
 k = k - 1 : \omega_{(k)} = \omega_{(k-1)} \longrightarrow \text{résolution de : } \left(\mathcal{L} - \mathcal{N}(\omega_{(k)}) \right) \hat{p}_{(k+1)} = -\omega_{(k+1)}^2 \hat{p}_{(k+1)} \\
 \quad \quad \quad \uparrow \\
 \quad \quad \quad \text{si } Err > \varepsilon \\
 \quad \quad \quad \left| \omega_{(k+1)} - \omega_{(k)} \right|
 \end{array}$$

avec Err la variation de la valeur de la fréquence d'une itération à une autre et ε la précision désirée sur la valeur de la fréquence propre recherchée. L'initialisation est réalisée avec : $\omega_{(0)} = \omega_0$. Cet algorithme définit donc une suite récurrente de la forme $\omega_{(k)} = \mathcal{F}(\omega_{(k-1)})$ avec \mathcal{F} la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
 \omega_{(k)} &= \mathcal{F}(\omega_{(k-1)}) \\
 &= \sqrt{\frac{\tilde{p}_{(k)}^H \left(-\mathbf{L} + N(\omega_{(k-1)}) \right) \tilde{p}_{(k)}}{\tilde{p}_{(k)}^H \tilde{p}_{(k)}}} \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

Tout d'abord, on remarque que si l'algorithme converge, la fréquence $\omega_{(k)}$ obtenue au final est alors par définition une fréquence propre à ε près. En outre, il est possible de prouver mathématiquement la convergence de cet algorithme si celui-ci est appliqué à un voisinage du mode propre de départ ω_0 . Cette notion peut-être, dans le contexte de cette partie, précisée de la manière suivante : on dira qu'un mode $(\omega_{(m+1)}, \tilde{p}_{(m+1)})$ vérifiant $(\mathbf{L} - N(\omega_{(m)})) \tilde{p}_{(m+1)} = -\omega_{(m+1)}^2 \tilde{p}_{(m+1)}$ est proche du mode sans flamme active (ω_0, \tilde{p}_0) si les deux assertions suivantes sont vraies :

- Le mode perturbé $\omega_{(m)}$ se différencie du mode sans flamme active ω_0 avant tout par sa stabilité, le décalage fréquentiel $\delta\omega_{(m)} = \omega_{(m)} - \omega_0$ sur la partie réelle de la fréquence propre induit par la flamme active est faible devant la valeur de cette fréquence :

$$|\Re(\delta\omega_{(m)})| \ll \omega_0 \quad (4.49)$$

Cette hypothèse s'appuie sur de nombreuses observations expérimentales et est, entre autres, vérifiée dans l'exemple applicatif du chapitre 7 de cette étude.

- La perturbation sur la structure spatiale du mode ω_0 peut être localement importante mais reste globalement faible, la structure n'est donc pas bouleversée ce qui se traduit mathématiquement par la caractéristique suivante sur le produit scalaire du décalage modal $\delta\hat{p}_{(m+1)} = \hat{p}_{(m+1)} - \hat{p}_0$ et du mode propre initial :

$$\frac{1}{V_\Omega} \left| \int_{V_\Omega} (\delta\hat{p}_{(m+1)})^* \hat{p}_0 dV \right| \ll \frac{1}{V_\Omega} \int_{V_\Omega} |\hat{p}_0|^2 dV$$

du point de vue matriciel, cette propriété s'écrit :

$$|(\delta\tilde{p}_{(m+1)})^H \tilde{p}_0| \ll |\tilde{p}_0|^2 \quad (4.50)$$

Encore une fois, cette propriété est vérifiée notamment dans l'exemple applicatif du chapitre 7 de cette étude.

Dans ces conditions, l'application du théorème du point fixe [103] à la fonctionnelle \mathcal{F} au voisinage de la fréquence propre ω_0 permet de prouver la convergence de l'algorithme en question. La version de celui-ci adaptée au cas étudié est fournie ci-dessous :

Théorème 4.3.1 (du point fixe) *Soit \mathbf{V}_{ω_0} un voisinage de ω_0 , c'est à dire un compact de \mathbb{C} tel que $\forall \omega_{(m)} \in \mathbf{V}_{\omega_0}$ le mode associé à $(\omega_{(m)}, \hat{p}_{(m)})$ vérifie les relations 4.49 et 4.50. Si $\forall (\omega_{(m)}, \omega_{(j)}) \in \mathbf{V}_{\omega_0}^2 \exists K \in [0, 1[$ tel que :*

$$|\mathcal{F}(\omega_{(m)}) - \mathcal{F}(\omega_{(j)})| \leq K |\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|$$

Alors la suite $\omega_{(n+1)} = \mathcal{F}(\omega_{(n)})$ converge.

Tout d'abord, on remarque que, d'après les relations 4.49 et 4.50, le résultat suivant est obtenu :

$$\tilde{p}_{(m+1)}^H \tilde{p}_{(m+1)} \approx |\tilde{p}_0|^2$$

Dans ces conditions, la fonctionnelle retenue prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_0|^2 |\mathcal{F}^2(\omega_{(m)})| &= (\tilde{p}_0 + \delta\tilde{p}_{(m+1)})^H [-\mathbf{L} + N(\omega_{(m)})] (\tilde{p}_0 + \delta\tilde{p}_{(m+1)}) \\ &= -\tilde{p}_0^H \mathbf{L} \delta\tilde{p}_{(m+1)} + \tilde{p}_0^H N(\omega_{(m)}) \tilde{p}_0 + \tilde{p}_0^H N(\omega_{(m)}) \delta\tilde{p}_{(m+1)} - \delta\tilde{p}_{(m+1)}^H \mathbf{L} \delta\tilde{p}_{(m+1)} \\ &\quad + \delta\tilde{p}_{(m+1)}^H N(\omega_{(m)}) \tilde{p}_0 + \delta\tilde{p}_{(m+1)}^H N(\omega_{(m)}) \delta\tilde{p}_{(m+1)} - \underbrace{\tilde{p}_0^H \mathbf{L} \tilde{p}_0}_{-\omega_0^2 |\tilde{p}_0|^2} - \underbrace{\tilde{p}_{(m+1)}^H \mathbf{L} \tilde{p}_0}_{-\omega_0^2 \delta\tilde{p}_{(m+1)}^H \tilde{p}_0} \end{aligned}$$

Cette expression se simplifie grandement en tenant compte des ordres de grandeurs des différents termes. Pour se faire on utilise une vitesse du son caractéristique c_{car} et une longueur caractéristique L_{car} . Dans le cas non trivial où $\mathbf{L}\delta\tilde{p}_{(m+1)} \neq 0$, on peut écrire :

$$|\tilde{p}_0^H \mathbf{L} \delta \tilde{p}_{(m+1)}| \propto \frac{c_{car}^2}{L_{car}^2} |\delta \tilde{p}_{(m+1)}^H \tilde{p}_0|$$

Ainsi, en tenant compte de l'hypothèse 4.50, on en déduit que :

$$|\tilde{p}_0^H \mathbf{L} \delta \tilde{p}_{(m+1)}| \ll |\tilde{p}_0^H \mathbf{L} \tilde{p}_0| \quad (4.51)$$

En appliquant le même raisonnement aux termes faisant intervenir l'opérateur matriciel N , il vient :

$$\mathcal{F}^2(\omega_{(m)}) \approx \frac{1}{|\tilde{p}_0^2|} (\omega_0^2 |\tilde{p}_0|^2 + \tilde{p}_0^H N(\omega_{(m)}) \tilde{p}_0) \quad (4.52)$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\omega_{(m)}) - \mathcal{F}(\omega_{(j)})| &= |\mathcal{F}^2(\omega_{(m)}) - \mathcal{F}^2(\omega_{(j)})| / (|\mathcal{F}(\omega_{(m)}) + \mathcal{F}(\omega_{(j)})|) \\ &\approx \frac{|\tilde{p}_0^H N(\omega_{(m)}) \tilde{p}_0 - \tilde{p}_0^H N(\omega_{(j)}) \tilde{p}_0|}{|\tilde{p}_0| (\sqrt{\omega_0^2 |\tilde{p}_0|^2 + \tilde{p}_0^H N(\omega_{(m)}) \tilde{p}_0} + \sqrt{\omega_0^2 |\tilde{p}_0|^2 + \tilde{p}_0^H N(\omega_{(j)}) \tilde{p}_0})} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Cette expression peut encore se simplifier en tenant compte de l'ordre de grandeur de l'opérateur N . Ce dernier s'exprime uniquement sur la zone occupée par la flamme dont le volume correspondant est noté V_{flam} . Par commodité on se place dans le cas d'une flamme aux caractéristiques homogènes sur V_{flam} . On appelle alors η_{car} la valeur caractéristique de l'amplitude locale de la fonction de transfert dans la zone de flamme. Dans le cadre de l'utilisation du modèle $n - \tau$ classique (Eq. 4.29), il apparait que la valeur de l'amplitude de la fonction de transfert de flamme est de l'ordre de l'unité ([83]). Afin de dimensionner le paramètre η dans une situation où la flamme répond particulièrement aux fluctuations acoustiques, on choisira la valeur $n = 5$ dans la suite du raisonnement. Dans ces conditions, on rappelle la relation 1.83 qui permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \eta_{car} &\approx \frac{\gamma \bar{p}}{\gamma - 1} \frac{S_{ref}}{V_{flam}} n \\ \eta_{car} &\propto 2 \times 10^6 Pa.m^{-1} \end{aligned} \quad (4.54)$$

En effet, dans le contexte des turbines à gaz, les valeurs de \bar{p} et γ sont typiquement de l'ordre de $10^5 Pa$ et 1.4 respectivement. De plus, la section de référence S_{ref} correspond généralement à la section de l'injecteur du brûleur. Le volume

V_{flam} occupé par la flamme se caractérise quant à lui par une section moyenne proche de S_{ref} et par une longueur de flamme L_{flam} qui dans notre contexte est de l'ordre de 0,1 m.

Dans ces conditions, il apparait que :

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_0^H N(\omega_m) \tilde{p}_0| &\approx \left| \frac{1}{V_\Omega} \int_{V_\Omega} \hat{p}_0^* \eta_{car} e^{i\omega\tau} (\gamma-1) \frac{\nabla \hat{p}_0(\vec{x}_{ref})}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})} \cdot \vec{n}_{ref} dV \right| \\ &\propto \frac{\eta_{car}}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref}) L_{ac}} (\gamma-1) |\tilde{p}_0|^2 \frac{V_{flam}}{V_\Omega} \end{aligned}$$

Toujours dans le contexte particulier aux turbines à gaz, L_{ac} est de l'ordre de la taille de la configuration étudiée soit typiquement 1 m, la densité au point de référence est généralement prise dans les gaz frais d'où $\bar{\rho}(\vec{x}_{ref}) = 1 \text{ kg.m}^{-3}$. Dans ces conditions, il apparait que :

$$|\tilde{p}_0^H N(\omega_m) \tilde{p}_0| \propto 10^6 |\tilde{p}_0|^2 \frac{V_{flam}}{V_\Omega}$$

Généralement V_{flam}/V_Ω est du même ordre que L_{flam}/L_{ac} car la flamme peut occuper toute la section, par conséquent dans une configuration réaliste $V_{flam}/V_\Omega \approx 0,1$. Compte-tenu des valeurs caractéristiques déjà choisies, la fréquence caractéristique associée est donc de l'ordre de 500 Hz ce qui permet d'écrire :

$$\frac{|\tilde{p}_0^H N(\omega_m) \tilde{p}_0|}{\omega_0^2 |\tilde{p}_0|^2} \propto 1$$

Dans ces conditions, l'expression 4.53 se simplifie comme :

$$|\mathcal{F}(\omega_{(m)}) - \mathcal{F}(\omega_{(j)})| \approx \frac{|\tilde{p}_0^H (N(\omega_m) - N(\omega_j)) \tilde{p}_0|}{2\sqrt{2}\omega_0 |\tilde{p}_0|^2} \quad (4.55)$$

En considérant comme précédemment que la flamme est homogène et que ses paramètres descriptifs y sont globalement constants, il vient :

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_0^H (N(\omega_m) - N(\omega_j)) \tilde{p}_0| &\propto \frac{V_{flam}}{V_\Omega} \frac{\gamma-1}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref}) L_{ac}} \frac{|\tilde{p}_0|^2}{L_{ac}} \left(\eta(\omega_{(m)}) e^{i\omega_{(m)}\tau(\omega_{(m)})} \right. \\ &\quad \left. - \eta(\omega_{(j)}) e^{i\omega_{(j)}\tau(\omega_{(j)})} \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Cette dernière expression fait intervenir la dépendance fréquentielle de l'opérateur représentant la fonction de transfert de flamme. Cette dépendance est particulière car on considère que les paramètres η et τ ne sont généralement fonction que de $\Re(\omega)$ et ce, pour deux raisons :

- la partie imaginaire de la fréquence modifie les amplitudes des fluctuations. Or, la fonction de transfert étant le rapport de deux quantités fluctuantes dont les composantes temporelles sont identiques, il est logique de penser que, dans le cadre d'un modèle linéaire, ce rapport n'est pas modifié par la prise ne compte de la partie imaginaire de fréquence.
- d'un point vue pratique, seule les variations de la fonction de transfert de flamme selon $\Re\omega$ sont connues. Il est difficile d'accéder à la réponse de la flamme à une fréquence non réelle pure. Le concept de "forçage complexe" nécessiterait par exemple de pulser à une fréquence donnée tout en augmentant les amplitudes d'un facteur correspondant à la partie imaginaire choisie, en pratique un cycle limite ou un endommagement du système serait vite atteint.

Dans ces conditions, on admettra que $\eta(\omega) = \eta(\Re(\omega))$ et $\tau(\omega) = \tau(\Re(\omega))$. Compte-tenu de l'hypothèse 4.49, il est donc licite d'exprimer leur valeur en $\omega_{(m)}$ à partir d'un développement limité autour de ω_0 . La relation 4.56 s'écrit donc au premier ordre en $\Re(\delta\omega_{(m)})$:

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_0^H (N(\omega_m) - N(\omega_j)) \tilde{p}_0| \propto & \left| (\eta e^{i\omega\tau})(\omega_0) (e^{-\Im(\omega_m)\tau(\Re(\omega_0))} - e^{-\Im(\omega_j)\tau(\Re(\omega_0))}) \right. \\ & + \left(\frac{\partial \eta e^{i\omega\tau}}{\partial \Re(\omega)} (\Re(\omega_0)) \right) \left(\Re(\delta\omega_{(m)}) e^{-\Im(\omega_m)\tau(\Re(\omega_0))} - \right. \\ & \left. \left. \Re(\delta\omega_{(j)}) e^{-\Im(\omega_j)\tau(\Re(\omega_0))} \right) \right| \frac{V_{flam}}{V_\Omega} \frac{\gamma-1}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})} \frac{|\tilde{p}_0|^2}{L_{ac}} \quad (4.57) \end{aligned}$$

Quand bien même η et τ ne dépendent que de $\Re(\omega)$, la partie imaginaire de la fréquence intervient malgré tout dans l'expression précédente. Toutefois, une évaluation des ordres de grandeurs simplifie une nouvelle fois l'expression. En effet, les valeurs habituelles de τ sont de l'ordre de la milliseconde et dans les cas de fortes instabilités rencontrés au cours de cette étude, $\Im(\omega) \approx 10^2 \text{ Hz}$. Ainsi, on peut écrire :

$$e^{-\Im(\omega_m)\tau(\Re(\omega_0))} \approx e^{-\Im(\omega_j)\tau(\Re(\omega_0))} (1 + \delta\Im(\omega_m - \omega_j)\tau(\Re(\omega_0))) \quad (4.58)$$

Avec, compte-tenu des ordres de grandeurs énoncés précédemment, $\delta\Im(\omega_m - \omega_j)\tau(\Re(\omega_0)) \approx 0.1$, d'où :

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_0^H (N(\omega_m) - N(\omega_j)) \tilde{p}_0| \propto & \left| (\eta e^{i\omega\tau})(\Re(\omega_0)) \delta\Im(\omega_m - \omega_j)\tau(\Re(\omega_0)) e^{-\Im(\omega_j)\tau(\Re(\omega_0))} \right. \\ & + \left(\frac{\partial \eta e^{i\omega\tau}}{\partial \Re(\omega)} (\Re(\omega_0)) \right) e^{-\Im(\omega_j)\tau(\Re(\omega_0))} \left(\delta\Re(\omega_m) - \omega_{(j)} \right) \left| \right. \\ & \left. \times \frac{V_{flam}}{V_\Omega} \frac{\gamma-1}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})} \frac{|\tilde{p}_0|^2}{L_{ac}} \right. \quad (4.59) \end{aligned}$$

A l'aide des relations 4.55 et 4.59, la condition de convergence du théorème

du point fixe s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{F}(\omega_{(m)}) - \mathcal{F}(\omega_{(j)})|}{|\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|} &\propto \left| (\eta e^{i\omega\tau})(\Re(\omega_0))\tau(\Re(\omega_0))e^{-\Im(\omega_{(j)})\tau(\Re(\omega_0))} \frac{\delta\Im(\omega_{(m)} - \omega_{(j)})}{|\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial\eta e^{i\omega\tau}}{\partial\Re(\omega)}(\Re(\omega_0)) \right) e^{-\Im(\omega_{(j)})\tau(\Re(\omega_0))} \frac{\delta\Re(\omega_{(m)} - \omega_{(j)})}{|\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|} \right| \\ &\quad \times \frac{V_{flam}}{V_{\Omega}} \frac{\gamma - 1}{2\omega_0\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})L_{ac}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Compte-tenu des ordres de grandeurs précédemment introduits, nous allons déterminer les conditions qui permettent de satisfaire le théorème du point fixe. tout d'abord, il apparaît que dans notre contexte :

$$\frac{V_{flam}}{V_{\Omega}} \frac{\gamma - 1}{2\sqrt{2}\omega_0\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})L_{ac}} < 10^{-5} Pa^{-1}.m.s^{-1}$$

De plus,

$$\frac{\delta\Im(\omega_{(m)} - \omega_{(j)})}{|\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|} = O(1) \quad \text{et} \quad \frac{\delta\Re(\omega_{(m)} - \omega_{(j)})}{|\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|} = O(1) \quad (4.61)$$

Enfin, compte-tenu des valeurs de τ , $e^{-\Im(\omega_{(j)})\tau(\Re(\omega_0))} < 2$. Par conséquent à partir du dimensionnement de η (Eq. 4.54), l'ordre de grandeur du premier terme de droite de l'équation 4.60 est le suivant :

$$\begin{aligned} &\left| (\eta e^{i\omega\tau})(\Re(\omega_0))\tau(\Re(\omega_0)) \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\Im(\omega_{(j)})\tau(\Re(\omega_0))} \frac{\delta\Im(\omega_{(m)} - \omega_{(j)})}{|\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|} \right| \propto 10^3 Pa.m^{-1}.s \end{aligned} \quad (4.62)$$

Concernant l'ordre de grandeur du deuxième terme de droite de l'Eq. 4.60, celui-ci s'écrit :

$$\left| \left(\frac{\partial\eta e^{i\omega\tau}}{\partial\Re(\omega)}(\Re(\omega_0)) \right) e^{-\Im(\omega_{(j)})\tau(\Re(\omega_0))} \frac{\delta\Re(\omega_{(m)} - \omega_{(j)})}{|\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|} \right| \propto \frac{\delta|\eta e^{i\omega\tau}|}{\delta\Re(\omega_{(m)})}$$

Avec $\delta|\eta e^{i\omega\tau}|$ la variation maximale de la fonction de transfert de flamme. Compte-tenu des ordres de grandeurs précédents, la condition de convergence de la méthode de point fixe prend donc la forme suivante :

$$\frac{|\mathcal{F}(\omega_{(m)}) - \mathcal{F}(\omega_{(j)})|}{|\omega_{(m)} - \omega_{(j)}|} < 1 \quad \implies \quad \frac{\delta|\eta e^{i\omega\tau}|}{\delta\Re(\omega_{(m)})} < 10^5 Pa.m^{-1}.s \quad (4.63)$$

Généralement, le décalage spectral sur la partie réelle est de l'ordre de la dizaine de Hertz. Cela signifie donc $\delta|\eta e^{i\omega\tau}| < 10^6 Pa.m^{-1}.s$ ce qui compte-tenu

de la valeur de η_{car} autorise des variations de presque 100 % pour l'amplitude de la fonction de transfert de flamme. Finalement, on voit que, d'après le théorème du point fixe et sous les conditions 4.49, 4.50 et 4.63 la méthode de recherche des modes propres avec flamme active dite "du point fixe" converge effectivement et, par définition, vers un mode propre de la configuration étudiée. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle converge effectivement vers un mode propre avec combustion alors que la méthode de développement asymptotique ne fournit qu'une approximation de ce mode. Par contre son inconvénient majeur réside dans son coût de calcul : chaque itération de la méthode du point fixe nécessite un calcul de mode propre par AVSP. De plus, en l'état actuel de AVSP, cette procédure doit être répétée pour chaque mode.

4.4 Méthode algébrique de détermination des fréquences propres

On s'attache à décrire dans cette partie les principaux aspects algébriques de la méthode utilisée dans AVSP. Comme le montre les chapitres précédents, résoudre le problème aux valeurs propres associé à l'équation de Helmholtz avec flamme active nécessite dans tous les cas la résolution d'un problème aux valeurs propres classique de la forme :

$$Ax = \lambda x \quad (4.64)$$

Avec $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour se faire, on commence par décrire les approches classiques en s'intéressant à leurs propriétés fondamentales mais aussi à leurs insuffisances pour une application à grande échelle. Enfin, la méthode utilisée par AVSP, à savoir la méthode de Arnoldi avec réinitialisation implicite, est abordée en mettant en évidence ses liens avec les méthodes classiques. On trouvera en annexe C des rappels d'algèbre relatifs aux diverses notions abordées dans cette section.

4.4.1 Méthode de la puissance

La méthode de la puissance est la méthode de base pour obtenir d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ un vecteur propre et sa valeur propre associée. Elle introduit également le principe des itérations successives de la matrice A comme moyen d'approximation de ses vecteurs propres et valeurs propres. En effet, rechercher les valeurs propres d'une matrice A consiste par définition à rechercher les zéros du polynôme caractéristique correspondant $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Le degré de ce polynôme étant égal à la taille n de la matrice, au-delà de

$n = 4$ il n'existe donc pas de formule analytique permettant la détermination de manière exacte des valeurs propres. L'approximation de ces valeurs ne peut donc se faire que numériquement.

Principe de la méthode

On considère $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice diagonalisable et dont la valeur propre de plus grand module est unique. Le spectre de A , $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, peut être ordonné selon le module de ses valeurs propres :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

On appelle $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ les vecteurs propres associés. La matrice étant par hypothèse diagonalisable, tout vecteur $q \in \mathbb{C}^n$ peut se décomposer sur une base de vecteurs propres [93] :

$$q = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (4.65)$$

Si de plus, on choisit q tel que $\alpha_1 \neq 0$ alors, après k applications de l'opérateur A au vecteur q , il résulte :

$$A^k q = \alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j \lambda_j^k}{\alpha_1 \lambda_1^k} \right) \quad (4.66)$$

Puisque λ_1 est la plus grande valeur propre en module, on obtient à la limite :

$$A^k q \underset{k \rightarrow \infty}{=} \alpha_1 \lambda_1^k x_1$$

En appliquant à $A^k q$ l'opérateur A , il vient :

$$A(A^k q) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \alpha_1 \lambda_1^k A x_1 \quad (4.67)$$

$$\underset{k \rightarrow \infty}{=} \lambda_1 \alpha_1 \lambda_1^k x_1 \quad (4.68)$$

$$\underset{k \rightarrow \infty}{=} \lambda_1 (A^k q) \quad (4.69)$$

On en déduit donc le résultat essentiel de cette méthode, à savoir qu'il est possible à partir d'un certain nombre d'itérations d'obtenir une approximation du vecteur x_1 dont la valeur propre λ_1 est la plus grande en module :

$$A^k q \underset{k \rightarrow \infty}{=} x_1 \quad (4.70)$$

$$q^H A^k q \underset{k \rightarrow \infty}{=} \lambda_1 \quad (4.71)$$

En appelant respectivement $q^{(k)} = A^k q$ et $\lambda^{(k)} = q^{(k)H} q^{(k-1)}$ l'approximation du vecteur propre et de la valeur propre à l'itération k , il est possible à l'aide

de la relation 4.66 de connaître la vitesse de convergence du processus en évaluant :

$$\begin{aligned} \|q^{(k)} - x_1\|_2 &\leq \sum_{j=2}^n \left| \frac{\alpha_j \lambda_j^k}{\alpha_1 \lambda_1^k} \right| \|x_j\|_2 \\ &\leq (n-1) \max_j \left(\left| \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \right| \right) \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \end{aligned}$$

D'où le résultat suivant :

$$\|q^{(k)} - x_1\|_2 = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) \quad (4.72)$$

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) \quad (4.73)$$

On voit donc que la vitesse de convergence de l'algorithme de la méthode de la puissance est piloté par le rapport des modules de la seconde et de la première valeur propre en module. Plus l'écart entre ces deux valeurs sera grand et plus la convergence sera rapide.

Variante de la méthode : méthode de la puissance inverse

La méthode de base permet d'évaluer la plus grande valeur propre en module et son vecteur propre associé mais il est également possible d'obtenir par une logique similaire la valeur propre de plus petit module et son vecteur propre associé. En effet, si en plus de sa diagonalisabilité, la matrice A n'est pas singulière alors :

$$Ax = \lambda x \iff A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

Dans ce cas, si la valeur propre de plus petit module λ_n est unique et si la composante α_n (Eq. 4.65) du vecteur initial q est non nulle alors l'algorithme précédent peut être appliqué à A^{-1} pour rechercher sa plus grande valeur propre en module qui est donc $1/\lambda_n$. La connaissance explicite de A^{-1} n'est pas nécessaire puisque chaque itération du processus ne requiert que des produits de matrice/vecteur. Ainsi, si l'on connaît le vecteur $p^{(k-1)} = A^{-(k-1)}q$ alors $p^k = A^{-1}p^{k-1}$ se déduit par la résolution du système linéaire suivant :

$$Ap^k = p^{k-1}$$

Cette résolution peut se faire par exemple par factorisation LU ou par une méthode itérative [93, 104, 105].

Cette méthode peut être étendue à la recherche d'une valeur propre de A autour d'une certaine valeur $\mu \in \mathbb{C}$ grâce à un décalage spectral. Soit M la matrice définie par :

$$M = A - \mu I \quad (4.74)$$

Le problème aux valeurs propres correspondant s'écrit donc :

$$Mx = \vartheta x \quad (4.75)$$

Avec $\vartheta = \lambda - \mu$. En choisissant un vecteur initial q adapté au problème présent, l'application de la méthode itérative inverse à la matrice M permet donc d'évaluer sa plus petite valeur propre ϑ_1 . Du fait de la définition de M , celle-ci s'écrit :

$$\vartheta_1 = \frac{1}{\min_j |\lambda_j - \mu|} \quad (4.76)$$

En appelant l l'indice j tel que $|\lambda_l - \mu| = \min_j |\lambda_j - \mu|$, la valeur propre de A la plus proche de μ s'obtient alors par la relation suivante :

$$\lambda_l = -\vartheta_1 + \mu \text{ ou } \lambda_l = \vartheta_1 + \mu \quad (4.77)$$

Le choix de l'une ou l'autre relation étant fait selon les critères de l'utilisateur. Une propriété importante du décalage spectral concerne la rapidité de convergence qu'il autorise à la méthode de la puissance selon la valeur du décalage. En effet, si l'on applique la relation 4.73 à la matrice M^{-1} , il apparaît que :

$$\left| \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{(k)} - \left(\frac{1}{\vartheta_n} \right) \right| = O \left(\frac{|\lambda_l - \mu|}{\min_{\lambda_j \in Sp(A) - \lambda_l} |\lambda_j - \mu|} \right)^k \quad (4.78)$$

Autrement dit si la valeur de μ est très proche d'une valeur propre λ de la matrice A , alors la convergence est très rapide. Cette propriété est utilisée dans le cas de méthode de l'itération inverse de Rayleigh [105] dont le principe sera repris dans d'autres méthodes développées dans les paragraphes suivants. Au lieu de conserver la valeur μ du décalage fixe, l'idée est de la réactualiser à chaque itérations afin de la rapprocher de la valeur propre recherchée et ainsi accélérer la convergence. En exemple, l'application de la méthode de l'itération inverse de Rayleigh au calcul de la plus petite valeur propre en module (λ_n) de A est fournie à l'algorithme 4.4.1.

	<i>Initialisation :</i> $q^{(0)}$ tel que $\ q^{(0)}\ _2 = 1$
	<i>pour</i> $k = 1, 2, \dots$
Algorithme 4.4.1	<i>Résolution de</i> $Ap^{(k-1)} = q^{(k-1)}$
	<i>Evaluation de</i> $\mu_k = (q^{(k-1)})^H p^{(k-1)}$
	<i>Résolution de</i> $(A - \mu_k I)r_k = p^{(k-1)}$
	$q^{(k)} = \frac{r_k}{\ r_k\ _2}$
	<i>fin</i>

En outre, on peut montrer [105] que la suite $(\mu_k, q^{(k)})$ converge vers (λ_n, x_n) cubiquement, c'est à dire qu'à partir d'une certaine itération k on a :

$$\|q^{(k+1)} - x_n\|_2 = O(\|q^{(k)} - x_n\|_2^3) \quad (4.79)$$

$$\|\lambda_n - \mu_{k+1}\|_2 = O(|\mu_k - \lambda_n|^3) \quad (4.80)$$

En outre, il est difficile de connaître préalablement le nombre d'itérations requises dans la méthode de la puissance pour atteindre avec la précision désirée une valeur propre et son vecteur propre car le processus dépend totalement du vecteur initial.

4.4.2 Méthode QR

Le principal inconvénient de la méthode de la puissance est qu'elle ne peut évaluer qu'un vecteur propre et une valeur propre à la fois. On introduit dans cette partie une autre grande classe de méthode, à savoir la méthode QR, qui permet d'obtenir non seulement plusieurs valeurs propres mais même l'ensemble du spectre d'une matrice. Dans ce dernier cas de figure, elle constitue alors la méthode de référence. Toutefois, dans le cadre de la problématique qui nous intéresse à savoir la recherche de quelques valeurs propres correspondants aux premières harmoniques d'une configuration donnée, cette méthode n'apparaît pas la plus efficace et ne sera pas utilisée telle quelle dans le code AVSP. En revanche, les principes dont elle fait appel seront essentiels à la méthode finalement retenue.

Principe de la méthode

Cette méthode est fondée sur le théorème fondamental de la décomposition de Schur [93, 104] :

Théorème 4.4.1 (de la décomposition de Schur) *Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ alors il existe $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$, une matrice unitaire, et $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, une matrice triangulaire supérieure, tel que :*

$$AV = VT \quad (4.81)$$

Et dont les éléments diagonaux de T constituent les valeurs propres de A . Cette décomposition est appelée décomposition de Schur.

En outre, cette décomposition n'est pas unique car les valeurs propres peuvent apparaître dans un ordre aléatoire sur la diagonale. La méthode QR fournit un algorithme permettant d'approcher numériquement cette décomposition grâce à la factorisation QR de la matrice A (cf annexe C.2.2). Pour comprendre le recours à la factorisation QR, il suffit de tenter d'étendre la méthode de la puissance au calcul de plusieurs valeurs propres par exemple à p valeurs propres.

Soit $M \in \mathbb{C}^{n \times p}$ une matrice regroupant p vecteurs vérifiant les hypothèses du vecteur initial de la méthode de la puissance. Dans ce cas, après un grand nombre d'applications k de la matrice A à M , la matrice $N = A^k M$ est constituée de p vecteurs quasiment colinéaires au vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module. Par conséquent, il n'est pas possible de cette manière d'extraire plus d'informations sur les valeurs propres. Pour y remédier, il suffit d'orthogonaliser les vecteurs issus de chaque application de A à M et pour se faire, la factorisation QR est un moyen d'y parvenir. On parle alors de méthode d'itération orthogonale, l'algorithme associé est fourni ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
 \text{Initialisation : } \quad M = Q_0 R_0 \quad (\text{Factorisation QR}) \\
 \text{pour } k = 1, 2, \dots \\
 \text{Algorithme 4.4.2} \quad \quad \quad Z_k = A Q_{k-1} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad Q_k R_k = Z_k \quad (\text{Factorisation QR}) \\
 \text{fin}
 \end{array}$$

En gardant les mêmes notations pour les valeurs propres de A (Eq. 4.65), on appelle $D_p(A) = \text{Im}\{x_1, \dots, x_p\}$ le sous espace engendré par les p vecteurs propres associés aux p plus grandes valeurs propres en module. A la condition que le sous-espace Q_0 vérifie $D_p(A^H)^\perp \cap \text{Im}(Q_0) = 0$, c'est à dire que les vecteurs initiaux ne soient pas orthogonaux aux vecteurs propres recherchés, on peut montrer [93] que :

$$\text{Im}(Q_k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} D_p(A) \quad (4.82)$$

Lorsque cette méthode est étendue au calcul de l'ensemble du spectre, alors les matrices finales Q_k et R_k convergent respectivement vers les matrices V et T de la décomposition de Schur de A . La méthode QR peut être vue comme une mise en forme différente et numériquement plus efficace de l'algorithme de la méthode d'itération orthogonale (algorithme 4.4.2). Classiquement cette méthode est appliquée à la recherche de l'ensemble des valeurs propres de A , on va donc considérer que toutes les matrices mises en jeu sont désormais carrées et de taille n . En gardant les mêmes notations que celles utilisées dans l'algorithme de la méthode d'itération orthogonale, on propose de construire à chaque itération k la matrice $T_k = Q_{k-1}^H A Q_{k-1}$ qui peut s'écrire également :

$$T_k = Q_{k-1}^H Q_k R_k = U_k R_k \quad (4.83)$$

Comme le produit de deux matrices unitaires carrées est une matrice unitaire carrée, U_k et R_k apparaissent donc comme les matrices de la factorisation QR de T_k . De plus, la relation 4.83 implique que :

$$T_{k+1} = Q_k^H A Q_k = (Q_k^H A Q_{k-1})(Q_{k-1}^H Q_k) = R_k U_k \quad (4.84)$$

Ceci constitue donc l'algorithme de la méthode QR dont la description est fournie ci-dessous :

Algorithme 4.4.3

Initialisation : $M = U_0 R_0$ (Factorisation QR) et $T_0 = U_0^H A U_0$

pour $k = 1, 2, \dots$

$T_{k-1} = U_k R_k$ (Factorisation QR)

$T_k = R_k U_k$

fin

Accélération de la méthode QR

La méthode QR peut-être accélérée en utilisant une matrice H de Hessenberg (voir Annexe C.1.1) au lieu d'une matrice quelconque. En effet, une matrice de Hessenberg est quasiment, à la subdiagonale près, une matrice triangulaire, par conséquent sa factorisation QR est très rapide par rapport à une matrice pleine : celle-ci ne nécessite en effet que $O(n^2)$ opérations au lieu de $O(n^3)$ opérations [93]. De plus, on peut montrer que la forme de Hessenberg se conserve tout au long de l'algorithme QR. Plus précisément soit H est une matrice de Hessenberg, soit Q et R les matrices respectivement orthogonale et triangulaire issues de la factorisation QR de H , alors $H = QR$ et surtout $H_2 = RQ$ est également une matrice de Hessenberg. On voit donc que dans l'algorithme de la méthode QR, si la matrice d'initialisation T_0 est Hessenberg alors toutes les matrices T_k le seront aussi. La méthode de réduction sous forme de Hessenberg d'une matrice quelconque est fournie dans [93].

4.4.3 Méthode de Arnoldi avec réinitialisation implicite

Le problème physique posé dans cette étude étant la recherche des premières harmoniques d'une configuration donnée, il n'est donc pas nécessaire de calculer l'ensemble du spectre de la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ représentant l'opérateur du problème posé. On cherche donc une méthode efficace permettant de réaliser une décomposition de Schur partielle, c'est à dire trouver $V_m \in \mathbb{C}^{n \times m}$ unitaire représentant les m vecteurs propres associés aux m premières harmoniques et $T_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ triangulaire supérieure telle que :

$$AV_m = V_m T_m \quad (4.85)$$

Pour atteindre ce résultat, la méthode d'itération orthogonale (algorithme 4.4.2) introduite précédemment et restreinte à m vecteurs peut être utilisée. Cependant, d'autres méthodes plus efficaces existent, notamment la méthode de Arnoldi. Cette dernière est une extension de la méthode de Lanczos appliquée aux matrices non hermitiennes [93, 105]. Dans le cas de la méthode d'itération ortho-

gonale ou de la méthode QR (algorithme 4.4.3), l'orthogonalité des vecteurs calculés est obtenue à chaque étape par une factorisation QR qui elle-même requiert l'application de matrices de Householder ou de Givens. Dans la méthode de Arnoldi, l'orthogonalité est directement obtenue par construction progressive d'une matrice de Hessenberg dont l'ordre augmente à chaque itération. L'idée est d'appliquer itérativement la matrice A à un vecteur de départ v_1 selon l'algorithme 4.4.4.

Algorithme 4.4.4

Initialisation : $v_1 = v_1 / \|v_1\|_2$; $w = Av_1$; $\alpha_1 = v_1^H w$
 $f_1 \leftarrow w - v_1 \alpha_1$; $\tilde{V}_1 \leftarrow (v_1)$; $\tilde{H}_1 \leftarrow (\alpha_1)$;
pour $k = 1, 2, \dots$
 $\beta_k = \|f_k\|_2$; $v_{k+1} \leftarrow f_k / \beta_k$
 $\tilde{V}_{j+1} \leftarrow (\tilde{V}_j, v_{j+1})$; $\tilde{H}_j \leftarrow \begin{pmatrix} \tilde{H}_j \\ \beta_j e_j^T \end{pmatrix}$;
 $w \leftarrow Av_{j+1}$;
 $h \leftarrow \tilde{V}_{j+1}^H w$; $f_{j+1} \leftarrow w - \tilde{V}_{j+1} h$;
 $\tilde{H}_{j+1} \leftarrow (\tilde{H}_j, h)$
fin

Avec e_j^T de taille j et correspondant à la transposée du j^{ieme} vecteur de la base canonique. Ainsi au bout de k itérations ($k > m$), les m derniers vecteurs générés par l'algorithme précédent vérifient la relation suivante :

$$A\tilde{V}_m = \tilde{V}_m \tilde{H}_m + E_m \quad (4.86)$$

Avec $E_m = f_k v_k^H \tilde{V}_m$. Ainsi, la relation 4.86 montre que, à chaque étape, les vecteurs de \tilde{V}_m sont orthogonalisés de manière à approcher la forme de décomposition de Schur partielle (Eq. 4.85). La convergence de cette procédure s'explique par le fait qu'elle correspond à l'orthogonalisation de la base de Krylov $(v_1, Av_1, \dots, A^k v_1)$ [93]. Par conséquent la méthode de Arnoldi peut être vue comme une version plus efficace de la procédure d'itération orthogonale (algorithme 4.4.2) pour la base de Krylov en question.

La bibliothèque ARPACK [101] implémentée dans le code AVSP utilise cette méthode de recherche de valeurs propres avec cependant en plus, une procédure destinée à réduire le nombre d'itérations. Cette dernière, appelée "réinitialisation", consiste à se doter périodiquement d'un nouveau vecteur v_1 de construction de la base de Krylov (le vecteur qualifié "d'initial") en se fondant sur l'information issue des itérations précédentes. Plus précisément, au bout de k itérations, k étant un nombre fixé par l'utilisateur sous la seule contrainte $k > m$, la situation de l'Eq. 4.86 est obtenue. L'idée est alors de construire un nouveau

vecteur initial v_1 comme une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice \tilde{H}_m de l'Eq. 4.86. On réoriente ainsi le processus de la méthode de Arnoldi dans des directions privilégiées, l'accélération est obtenue par le fait que les vecteurs propres de la matrice \tilde{H}_m sont une première approximation des vecteurs propres de la matrice A plutôt que des vecteurs quelconques. Comme la matrice \tilde{H}_m est de taille m (soit au plus quelques dizaines), le calcul des valeurs propres/vecteurs propres en question peut être effectué par une méthode QR (voir section 4.4.2). Les détails et les références concernant cette procédure sont fournis dans le guide d'utilisateur de ARPACK [101]. De par sa capacité à calculer rapidement quelques vecteurs propres de configurations de grande taille, cette méthode a donc été retenue dans le code AVSP.

Chapitre 5

Mise en évidence de modes acoustiques tournants dans une turbine à gaz

Contexte

Ce chapitre concerne une application de AVSP illustrant l'intérêt de l'étude des modes transverses de configurations non académiques. Ce chapitre montre l'apport de AVSP à l'analyse acoustique de résultats issus de simulations numériques aux grandes échelles réactives. La configuration étudiée correspond à une partie d'un dispositif expérimentale composée d'une chambre de combustion de section carrée et de son injecteur "swirlé" (injection vorticielle du carburant et du comburant). Sur ce cas, la détermination de la stabilité des modes n'est pas l'objectif principal de l'étude par conséquent aucun terme source thermoacoustique ne sera pris en compte par AVSP. On cherche à mettre en évidence l'origine purement acoustique, et non hydrodynamique, de fluctuations présentant une structure tournant autour de l'axe de symétrie de la configuration. Cette étude a fait l'objet d'un article en cours d'examen [106] à la revue *Combustion and Flame* écrit avec Laurent Selle, Thierry Poinso, Franck Nicoud et Werner Krebs, le premier cité étant l'auteur des calculs de simulation numériques aux grandes échelles. La suite de ce chapitre est donc rédigée en anglais et certaines notations, propres à l'article, sont différentes de celles choisies dans les précédentes section.

Abstract

Rotating modes are instabilities which are commonly observed in swirling flows. This paper shows that, in complex geometry swirled combustors, such modes can appear for both cold and reacting conditions but that they have

different sources : while the cold flow rotating mode is essentially hydrodynamic and corresponds to the well-known PVC (Precessing Vortex Core) observed in many swirled unconfined flows, the rotating structure observed for the reacting case inside the combustion chamber is not hydrodynamically but acoustically controlled. The two transverse acoustic modes of the combustion chamber couple and create a rotating motion of the flame which leads to a self-sustained turning mode which has the features of a classical PVC but a very different source (acoustics and not hydrodynamics). These results are obtained using two complementary tools : compressible LES (Large Eddy Simulations) which solve the turbulent flow and the acoustics simultaneously (but at a high cost) and Helmholtz solvers which freeze the flow and extract only the acoustic modes using linear acoustics assumptions.

5.1 Introduction

Large-Eddy Simulation (LES) methodologies constitute intermediate steps between steady state calculations (RANS) and Direct Numerical Simulation (DNS) [26]. During the past ten years, LES results have proved to be predictive for non-reacting flows [107-111] and more recently also for reacting flows [30, 32, 112-115]. These results suggest that LES could be used in configurations as complex as aero and industrial gas-turbines for the prediction of mean reacting flows properties but also of flow instabilities. However, the CPU cost and the restitution time of LES in these configurations do not yet meet industrial requirements. Consequently, simpler tools must be developed so that their joint use with LES enables a deeper understanding of the physics, thus reducing the number of LES calculations. One such class of codes is Helmholtz solvers which are commonly found in many research centers and companies involved in thermacoustics research [26, 57, 116, 117]. These codes try to predict the frequencies and the structure of eigenmodes of the flow in the combustor assuming harmonic perturbations around a frozen mean state [26, 57]. Obviously, Helmholtz approaches require significant simplifications for the flow and cannot be expected to provide LES-like accuracy for the flow. However, the acoustic analysis offered by Helmholtz methods is more complete than the LES results : Helmholtz solvers provide all possible modes frequencies and structure as well as their growth rates while LES will only evidence the modes which appear for one given regime. Moreover, doing parametric studies is impossible with LES : knowing for example which exhaust nozzle or which Helmholtz resonator can damp a given combustion instability is out of reach of LES but can be done with Helmholtz solvers.

Obviously, LES and Helmholtz codes are complementary methods to study combustion instabilities and more generally unsteady combustion. In this paper, the power of these combined tools is illustrated by considering a question which is the subject of multiple discussions in the combustion community : the existence and importance of rotating modes in swirling combustion [4, 32, 118]. It is well known that non-reacting swirling flows exhibit a variety of unstable modes [29, 119, 120] : the Precessing Vortex Core (PVC) is one of these modes (Fig. 5.1) for which the vortex axis destabilizes and spirals around the vortex initial direction. Such instabilities are observed for unconfined non-reacting flows [119] and also in the wakes of aircrafts [121-123] but also in confined combustion chambers where they often dominate the turbulent activity in the absence of combustion [32]. Because these instabilities appear so clearly for non-reacting flows, it is often assumed that they also dominate the reacting cases. For example, gas turbine burner flows are often tested with water to determine residence times and try to predict possible instabilities from the observation of the cold flow modes. Whether modes observed in such water channel experiments can be extrapolated to instabilities in the real combusting situation is an important question. Note that PVCs are hydrodynamic instabilities which usually do not couple with the acoustics of the chamber. In reacting configurations, the acoustic generation due to the flame excites many modes of the chamber, sometimes leading to rotating modes which look like PVC but are actually due to the combination of transverse acoustic modes and not to a hydrodynamic instability. This paper describes such a situation in a swirled complex geometry combustor. The configuration is first presented. The LES and the Helmholtz solvers are then rapidly described. Cold flow results are discussed before presenting the computations for the reacting case.

5.2 Configuration

An important objective of this study is to present a methodology for the investigation of flame / acoustics interactions and combustion instabilities in realistic geometries. Therefore an industrial gas turbine burner (Fig. 5.2) mounted on a square laboratory combustion chamber in Karlsruhe [124] is considered. This burner is fed by two coaxial swirlers respectively called axial and diagonal swirler. The axial swirler, including its vanes, is fully computed in the LES, whereas the computational domain of the diagonal swirler begins at the trailing edge of the swirling vanes [32]. This burner is mounted on an combustion chamber with a square cross section (Fig. 5.3).

5.2.1 Meshes

The computational domain is the same for both solvers (LES and Helmholtz) but the number of mesh points can be drastically reduced for the computation of acoustic modes with the Helmholtz solver : indeed, the spatial resolution needed for LES is much higher than it is for the resolution of the first acoustic modes of the configuration in the Helmholtz computation. The grid for the reacting LES calculation contains 2,381,238 cells while the grid for the Helmholtz solver contains only 70,214 cells. Consequently, the computational cost of the Helmholtz solver is almost negligible compared to the LES. The computational time for the reacting LES is 280 CPU hours for one period of the high-frequency instability on a SGI O3800, whereas the computation of the first 13 acoustic modes with the Helmholtz code takes less than 10 CPU hours on the same machine.

5.2.2 Boundary conditions

For such a study, boundary conditions must be well defined in terms of mean flow but also of acoustic impedances which must be the same in both computations (LES and Helmholtz). In this prospective study, purely reflecting boundary conditions are imposed at the inlets and outlet of the computational domain : the velocity profile is imposed at both axial and diagonal inlets (Fig.5.2) and the pressure is imposed at the outlet of the combustion chamber (Fig.5.3).

5.3 Numerical tools

5.3.1 LES solver

The solver used in this study (www.cerfacs.fr/cfd/avbp.html) has already been validated and used in numerous studies for turbulent flows both non-reacting [109, 111, 125, 126] and reacting [32, 94, 127-129]. A description of the parallel solver can be found in [130] and its key features for this study are as follows. The code solves the compressible Navier-Stokes equations which allows to take into account acoustics. The Thickened Flame model for turbulent combustion [32, 128] enables the resolution of the flame front on typical LES meshes (whose characteristic cell size are usually much larger than flame thicknesses) while allowing ignition and extinction. This feature is of major interest in the computation of combustion instabilities since parts of the flame front can alternatively be quenched and re-ignited during the instability cycle. Accurate

boundary conditions [94, 131] are mandatory for the prediction of unstable regimes since the acoustic impedances at the boundary drive the acoustic losses. Characteristic boundary conditions are used in the LES for all inlets, outlets and walls [73, 130]. The use of unstructured meshes enables the computation of complex geometries. The use of a high order numerical scheme [96] with minimal dispersion and dissipation is a key feature for the computation of turbulent flows, but also for the accurate resolution of the acoustic waves.

5.3.2 Helmholtz solver

If the reactive Navier Stokes equations are linearized around a mean state (index 0), the general form of the Helmholtz equation is obtained [26, 57] :

$$\nabla \cdot (c^2 \nabla p') - \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' = -(\gamma - 1) \frac{\partial \dot{\omega}_T}{\partial t} - \gamma p_0 \nabla \vec{u} : \vec{u} \quad (5.1)$$

where p' is the pressure perturbation, $\dot{\omega}_T$ is the unsteady local heat release, p_0 is the average pressure and c is the local sound speed. c changes considerably in a reacting flow : it depends on the local value of γ , on the mean molecular weight W and on temperature : $c = (\gamma RT/W)^{1/2}$ where $R = 8.32 uSI$. The two forcing terms in the RHS of Eq. 7.1 are related to the outsteady combustion and turbulent noise respectively. To obtain this equation, the following assumptions are needed :

- Low Mach number flow
- No volume forces
- Linear acoustics (i.e. small perturbations)
- Large scale fluctuations.
- Homogeneous mean pressure.
- Constant polytropic coefficient γ .

The wave equation is usually not solved in the time domain but in the frequency domain by assuming harmonic pressure variations at frequency $f = \omega/(2\pi)$ for pressure and for local heat release perturbations :

$$p' = \Re(P'(x, y, z) \exp(-i\omega t)) \quad (5.2)$$

$$\dot{\omega}_T = \Re(\Omega'_T(x, y, z) \exp(-i\omega t)) \quad (5.3)$$

with $i^2 = -1$

Introducing Eq. (7.8) into Eq. (7.1) and neglecting the turbulent noise compared to the combustion forcing leads to the Helmholtz equation where the unknown quantities are the complex pressure oscillation amplitude P' at frequency f and the heat release amplitude field Ω'_T :

$$\nabla \cdot (c^2 \nabla P') + \omega^2 P' = i\omega(\gamma - 1)\Omega_T' \quad (5.4)$$

This equation is the basis of three-dimensional Helmholtz codes. Knowing the sound speed (c) distribution, *i.e.* knowing the local composition and temperature, it provides the eigen frequencies ω_k and the associated structure of the mode $P_k'(x, y, z)$. At this point, two approaches of increasing complexity are found :

- First, the effects of the unsteady combustion can be neglected by setting $\Omega_T' = 0$. This is equivalent to finding the eigenmodes of the burner, taking into account the presence of the flame through the mean temperature field but neglecting the flame effect as an acoustic active element.
- In a second step, the active effect of combustion can be taken into account if a model linking Ω_T' and P' can be derived to close Eq. (5.4). This is usually the difficult part of the modeling because it requires the determination of the transfer function between acoustics and flame.

For the present study, the active effects of the flame were neglected ($\Omega_T' = 0$) and a parallel iterative solver was used to solve Eq. 5.4 on hybrid meshes [101]. The required mean fields of sound speed is obtained by post-processing the LES results for the reacting flow so that the effect of the flame through the mean temperature field is properly accounted for. Details about solving Eq. 5.4 with general boundary conditions and acoustically active flame are discussed in [98, 100].

5.4 Non-reacting flow : low-frequency rotating mode

For the non-reacting regime, pure air is injected in both axial and diagonal swirlers. The air is pre-heated to $T_{cold} = 323$ K. The LES results have been successfully compared to experimental data in a previous paper [32] in terms of mean and *rms* values for both axial and tangential velocities. The agreement between LES calculations and experimental results is good for the mean flow and the focus is set here on the analysis of unsteady phenomena and especially of turning modes.

To begin this analysis, the acoustic modes of the configuration, computed with the Helmholtz solver for the non-reacting regime are first listed in Tab. 5.1 :

- Modes number 1 and 2 correspond respectively to the 1/4 wave (Fig. 5.4) and 3/4 wave (Fig. 5.5) longitudinal modes of the configuration.
- Modes number 3 and 4 (Fig. 5.6 and 5.7) are the two 1/2 wave transverse and 1/4 wave longitudinal modes of the combustion chamber : their frequencies are equal because the chamber has a square cross-section and the burner is

axisymmetric.

- Mode number 5 (Fig. 5.8) is the 5/4 wave longitudinal mode.
- Modes number 6 and 7 (Fig. 5.9 and 5.10) are the two 1/2 wave transverse and 3/4 wave longitudinal modes of the configuration.

Considering now the LES results, the first obvious observation is that the instantaneous flow does not follow the symmetries of the geometry : since the burner axis is on axis of symmetry for the burner and the chamber, one would expect the radial components of the velocity (v and w) to be zero on the burner axis, apart from turbulent fluctuations. However, plotting the third component of the velocity at point A *i.e.* on the burner axis (Fig. 5.3) shows that the symmetry is broken by a strong harmonic oscillation (Fig. 15 in [32]). The frequency of this oscillation is $f_{cold} = 275$ Hz. This mode was also observed in the experiment at Karlsruhe University [124] at the frequency $f_{exp} = 255$ Hz. The frequency f_{cold} of the velocity oscillation on the burner axis does not match any of the frequencies listed in Tab. 5.1 showing that this oscillation is not an acoustic mode. It is thus suggested that the unsteadiness is caused by a hydrodynamic mode, which can be characterized in terms of Strouhal number : $St = fD/u_{bulk}$, where f is the frequency of the instability, D the burner diameter and u_{bulk} the bulk velocity. For the present mode $St = 0.62$, which is typical of PVC in swirl flows [29, 119, 120]. Fig. 5.1 presents a generic PVC : the vortex due to the swirling motion, originally aligned with the burner axis breaks down at point S in a spiral form. This structure rotates, as a block, around the burner axis. The PVC can be tracked in the LES (Fig. 5.11) by the low pressure region near the vortex axis. In this configuration, the sense of winding of the spiral is opposite to that of the swirl (which is the same for axial and diagonal swirlers). However, the whole structure precesses in the same direction as the global rotation of the flow. In conclusion, the cold flow is dominated by a hydrodynamic mode (PVC) in which acoustics play no role.

5.5 Reacting flow : high frequency rotating mode

For the regime considered here, the diagonal swirler is fed with premixed methane/air while the axial swirler injects pure air. Both flows are pre-heated to 673 K and the global equivalence ratio is $\phi = 0.5$.

5.5.1 Analysis of LES results

The 275 Hz PVC evidenced in the cold flow is not present any more in the reacting regime which is considered here [32]. However, plotting w at point A, after the PVC has vanished (Fig. 5.12) shows that the symmetry of the flow is still

broken by a strong harmonic oscillation. This oscillation dominates the turbulent fluctuations and its frequency is determined through a FFT of the velocity signal on the burner axis (Fig. 5.13) : $f_{hot} = 1198$ Hz. Plotting the pressure field in a plane normal to the burner axis (Fig. 5.14) shows that this high frequency oscillation now corresponds to a rotating transverse mode : the points of minimum and maximum pressure are rotating around the burner axis at the frequency f_{hot} . Even though this mode is "turning" like the PVC observed without combustion, it is not hydrodynamically but acoustically controlled. Its frequency is not determined through a Strouhal scaling based on the burner dimension but through the acoustic eigenmodes of the chamber as shown in the next section.

5.5.2 Reconstruction of the rotating mode using acoustic eigenmodes

As for the cold flow, the list of the first eigen frequencies in the reacting regime are presented in Tab. 5.2. Though the frequencies are different (due to the increase in the temperature), the structure of these modes is exactly the same as for the cold flow (*c.f.* Sec. 5.4 and Fig. 5.4 to 5.10) ; and they are not repeated here.

Modes 3 and 4 are transverse modes sharing the same frequency, 1192 Hz, very close to that observed in the LES. It is possible to show that the rotating mode observed in the LES is actually the combination of these two modes (3 and 4). The pressure fluctuations induced by modes 3 and 4 can respectively be written :

$$p'_3(x, y, z, t) = A_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) F_3(x, y, z) \quad (5.5)$$

$$p'_4(x, y, z, t) = A_4 \cos(\omega_4 t + \phi_4) F_4(x, y, z) \quad (5.6)$$

where F_i is the mode shape, A_i the amplitude and ϕ_i the phase for mode number i . Combining Eq. 5.5 and 5.6 with equal amplitudes ($A_3 = A_4 = A$) but shifting mode 4 by 90° ($\phi_3 = 0$; $\phi_4 = -\pi/2$) leads to :

$$p'(x, y, z, t) = A (F_3(x, y, z) \cos(\omega_3 t) + F_4(x, y, z) \cos(\omega_4 t - \pi/2)) \quad (5.7)$$

As the mode shape is a direct output of the Helmholtz solver, the result of Eq. 5.7 can be reconstructed to generate the temporal evolution of the mode. This result is plotted in Fig. 5.15 and shows exactly the same structure as the rotating mode evidenced in the LES even though the pressure field obtained by LES displays slightly more complex patterns probably due to turbulence (Fig. 5.14). This proves that the high-frequency rotating mode evidenced in the LES of the reacting regime is the combination of the first two transverse

acoustic modes of the combustion chamber, with equal amplitudes and a phase difference of $\pi/2$. Despite the fact that this result does not say why these transverse modes combine in this manner, it proves the acoustic nature of the turning mode for the reacting case.

5.5.3 Influence of the rotating mode on the flame shape

The objective of this section is to show that in the LES, the shape of the flame is strongly affected by acoustic velocity fluctuations. The 1198 Hz mode is not simply forced by combustion. It also affects the flame itself leading to a self-sustained three-dimensional oscillation. These perturbations can be reconstructed from the Helmholtz solver results using the mass conservation equation for the fluctuations :

$$\mathbf{u}' = \frac{\nabla p'}{i\rho\omega} \quad (5.8)$$

Combining Eq. 5.7 and Eq. 5.8 allows the reconstruction of the velocity perturbations corresponding to the acoustic rotating mode. Fig. 5.16 is a plot of axial-velocity fluctuations at the burner mouth generated by the rotating mode. At a given phase $\phi = \omega t$ of the oscillation, the amplitude of the fluctuation is maximum at two locations close to the burner outer side and on opposite sides of the burner axis. At these two spots the axial velocity fluctuations have opposite signs. This pattern rotates around the burner axis at the frequency $f_{hot} = 1198$ Hz.

The axial velocity fluctuations induced by the rotating acoustic mode occur at a critical location in the flow field : the burner mouth. Such fluctuations at a sudden expansion are known to generate vortex rings which can distort the flame front. This occurs in the present configuration : as shown in Fig. 5.19 the flame is distorted by a coherent structure in phase with the acoustic mode. The vortex is not toroidal as for vortex rings but has a spiral form which is the combination of two motions :

1. the rotating mode
2. and the convection by the mean flow field.

For a final quantitative validation of the structure of this mode, the phase of the axial velocity fluctuations from LES and Helmholtz solvers are now compared. Fig. 5.17 presents the pressure fluctuations at point *C* (Fig. 5.3) which is used as the phase reference to synchronize LES result with Eq. 5.7. Fig. 5.18 is the comparison of axial velocity fluctuations at point *B* (Fig. 5.3). The average velocity is subtracted from the LES signal, and the fluctuations are normalized with a unique normalisation :

- The phases for the two solvers match exactly showing the power of the Helmholtz solver to predict acoustically induced velocity fluctuations.
- The fluctuations of u are strongly dominated by the acoustics showing that this flow is not dominated by turbulence but by acoustics.
- This result has implications for simulation : as this flow is obviously acoustically driven, the accurate computation of acoustic waves (low dispersion of numerical scheme, accurate boundary conditions) may be as critical as the modeling of the subgrid-scale turbulence.

5.6 Conclusion

Large-Eddy Simulations (LES) of an industrial-size burner mounted on an academic combustion chamber were conducted in both reacting and non-reacting regimes. The work focuses on the analysis of rotating modes evidenced in both LESs (cold and reacting). The joint use of a compressible LES solver and a Helmholtz solver enables the determination of the nature of these instabilities :

- For the cold flow the rotating mode is due to an hydrodynamic instability typical of swirling flows : Precessing Vortex Core (PVC). The Helmholtz solver shows that the frequency of this instability (275 Hz) does not correspond to an eigenmode of the configuration but can be predicted using a Strouhal scaling based on the bulk velocity and the burner mouth dimension.
- In the reacting regime, the flow still exhibits a rotating mode but at 1198 Hz. This mode is not hydrodynamic : it is acoustically controlled by a combination of the first two transverse modes of the combustor at 1192 Hz. The identification of the rotating mode as an acoustic mode is confirmed by the pressure fluctuation field : the complex structure of this mode evidenced in the LES can be successfully reconstructed from Helmholtz solver results.

This study suggests that a numerical prediction of turbulent combustion instabilities in a gas turbine requires :

1. A compressible LES solver : though the non-reacting part of this study could have been conducted with an incompressible solver, taking into account the acoustic waves is mandatory for the reacting case.
2. The joint use of two solvers (i.e. LES and Helmholtz). The Helmholtz solver explains the acoustic structure evidenced in the LES simulations by allowing the identification of all possible modes.

In the case of turning modes in swirled combustors, these two tools show that such modes can indeed be observed both for cold and reacting flows but that their nature is very different : for the cold flow, the rotating mode is an hydrodynamic mode but it becomes acoustically controlled when combustion is

activated. Such an information is useful to understand the behavior of the combustor but also to help design which is often based on cold flow observation to study instabilities.

5.7 Acknowledgments

This work has been supported by SIEMENS PG. The numerical simulations have been conducted on the computers of the French national computing center CINES in Montpellier.

Tables

Mode number	1	2	3	4	5	6	7
eigen frequency (Hz)	96.8	330.6	528.7	528.8	604.6	641.8	641.9

TAB. 5.1 – List of eigen frequencies for the non-reacting case.

Mode number	1	2	3	4	5	6	7
eigen-frequency (Hz)	158.7	750.2	1192.2	1192.4	1349.6	1447.9	1448.1

TAB. 5.2 – List of eigen-frequencies for the reacting case.

Figures

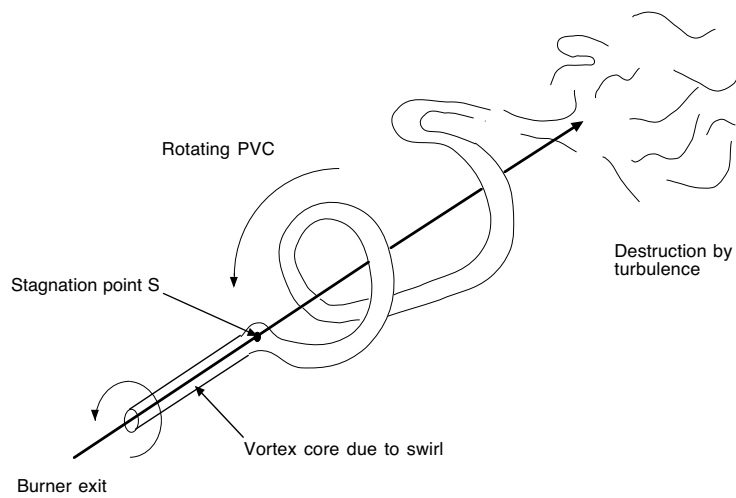


FIG. 5.1 – Schematic representation of a generic PVC.

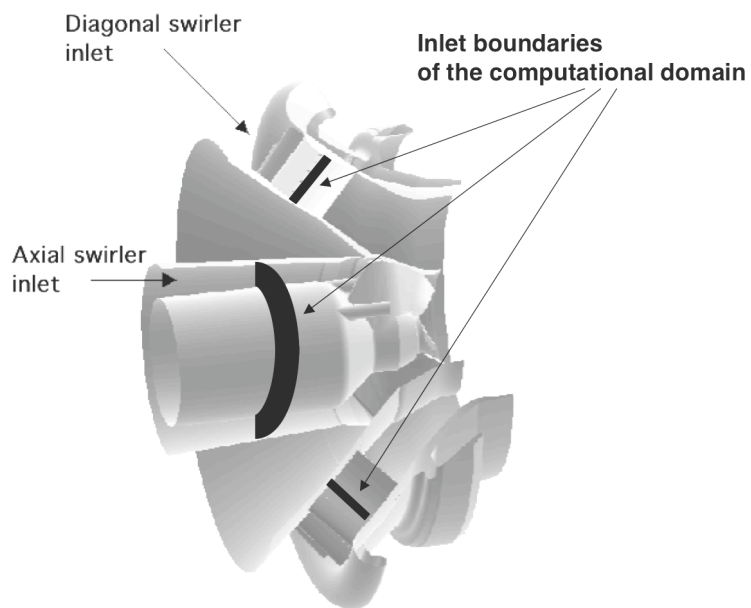


FIG. 5.2 – Burner.

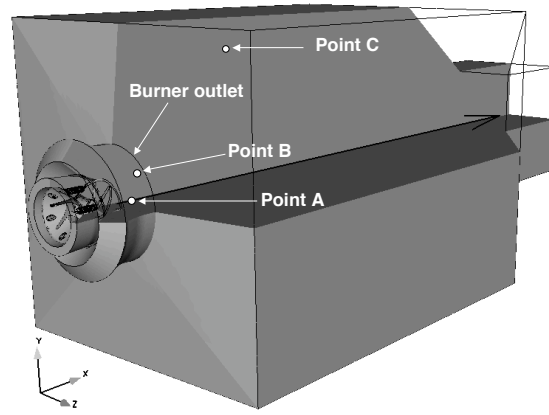
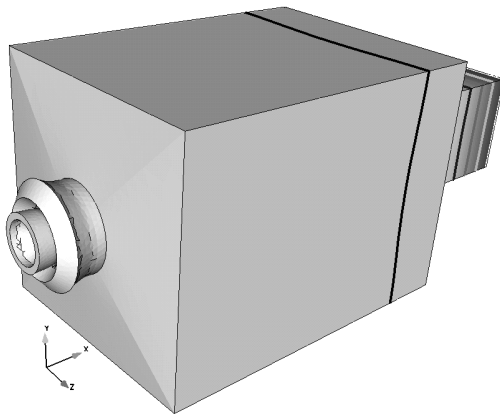
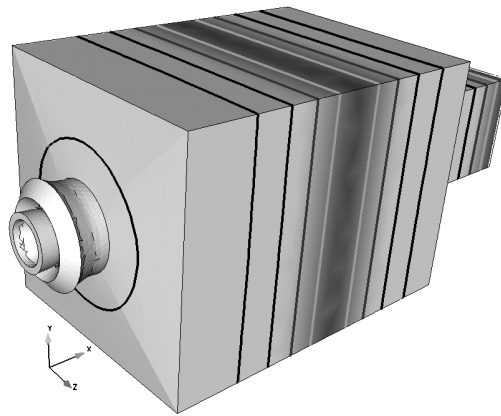


FIG. 5.3 – Computational domain.

FIG. 5.4 – Mode number 1 is the 1/4 wave longitudinal acoustic mode (P' modulus).FIG. 5.5 – Mode number 2 is the 3/4 wave longitudinal acoustic mode (P' modulus).

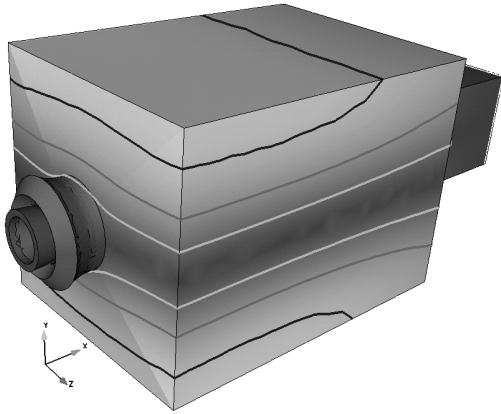


FIG. 5.6 – Mode number 3 is the 1/2 wave transverse in y direction, 1/4 wave longitudinal acoustic mode (P' modulus).

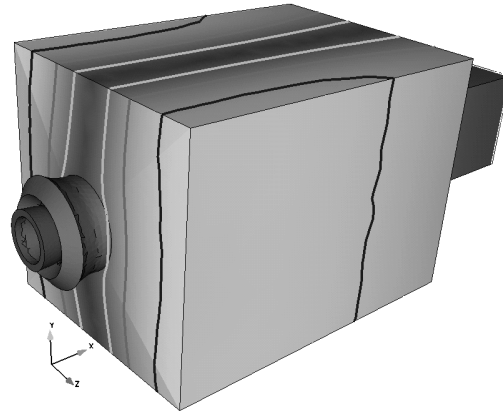


FIG. 5.7 – Mode number 4 is the 1/2 wave transverse in z direction, 1/4 wave longitudinal acoustic mode (P' modulus).

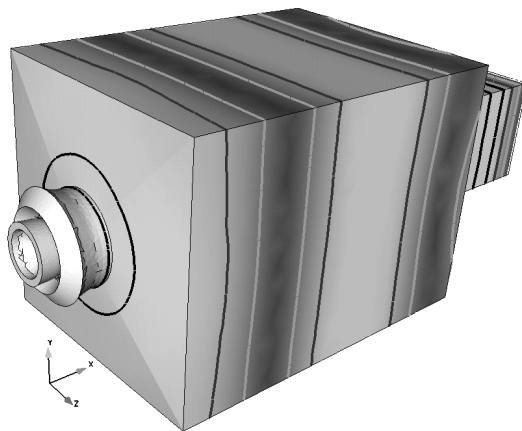


FIG. 5.8 – Mode number 5 is the 5/4 wave longitudinal acoustic mode (P' modulus).

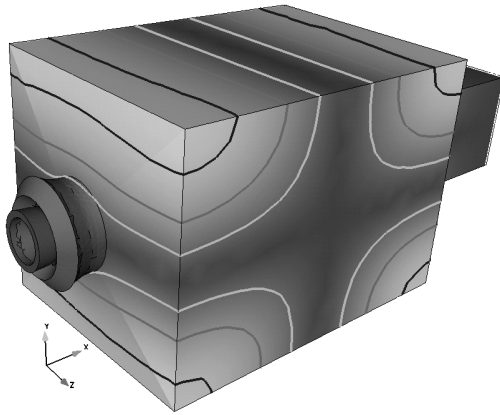


FIG. 5.9 – Mode number 6 is the 1/2 wave transverse in y direction, 3/4 wave longitudinal acoustic mode (P' modulus).

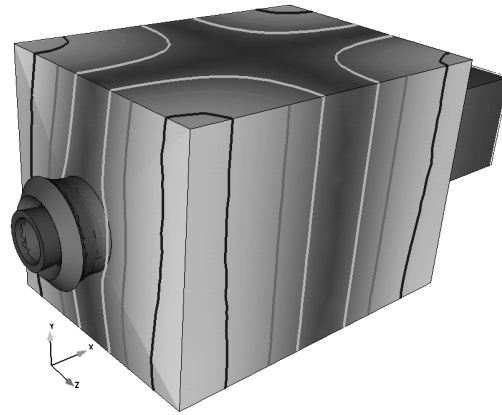


FIG. 5.10 – Mode number 7 is the 1/2 wave transverse in z direction, 3/4 wave longitudinal acoustic mode (P' modulus).

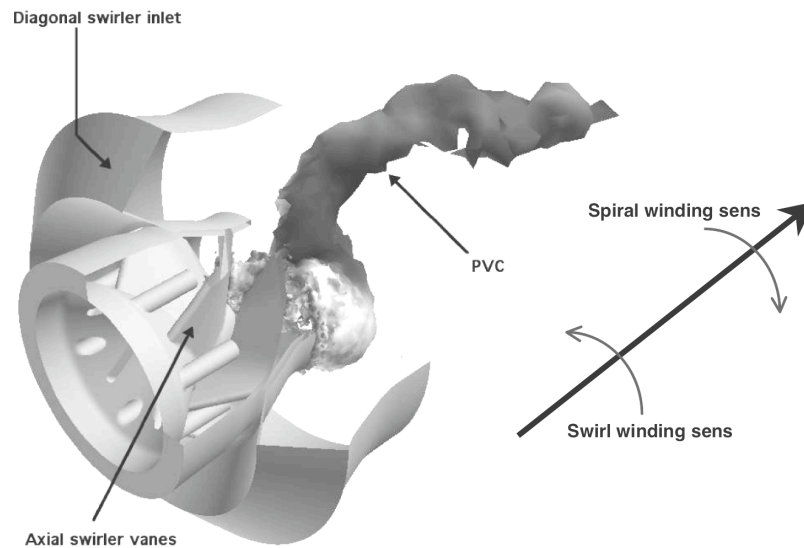


FIG. 5.11 – Visualisation of the PVC in the LES by a pressure iso-surface.

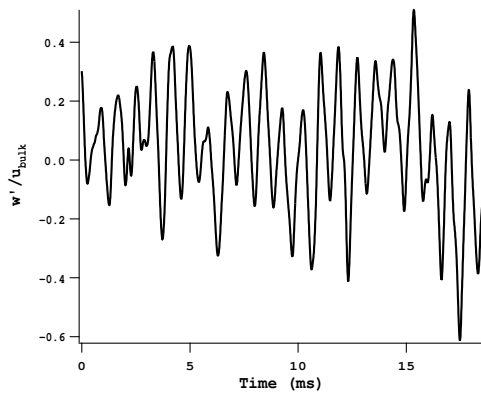


FIG. 5.12 – Signal of w at point A : the flow is dominated by a strong harmonic oscillation.

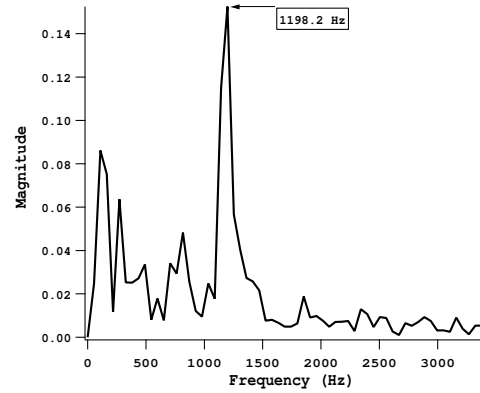


FIG. 5.13 – Spectrum of w at point A : the dominant frequency is 1198 Hz (spectral resolution of 54 Hz).

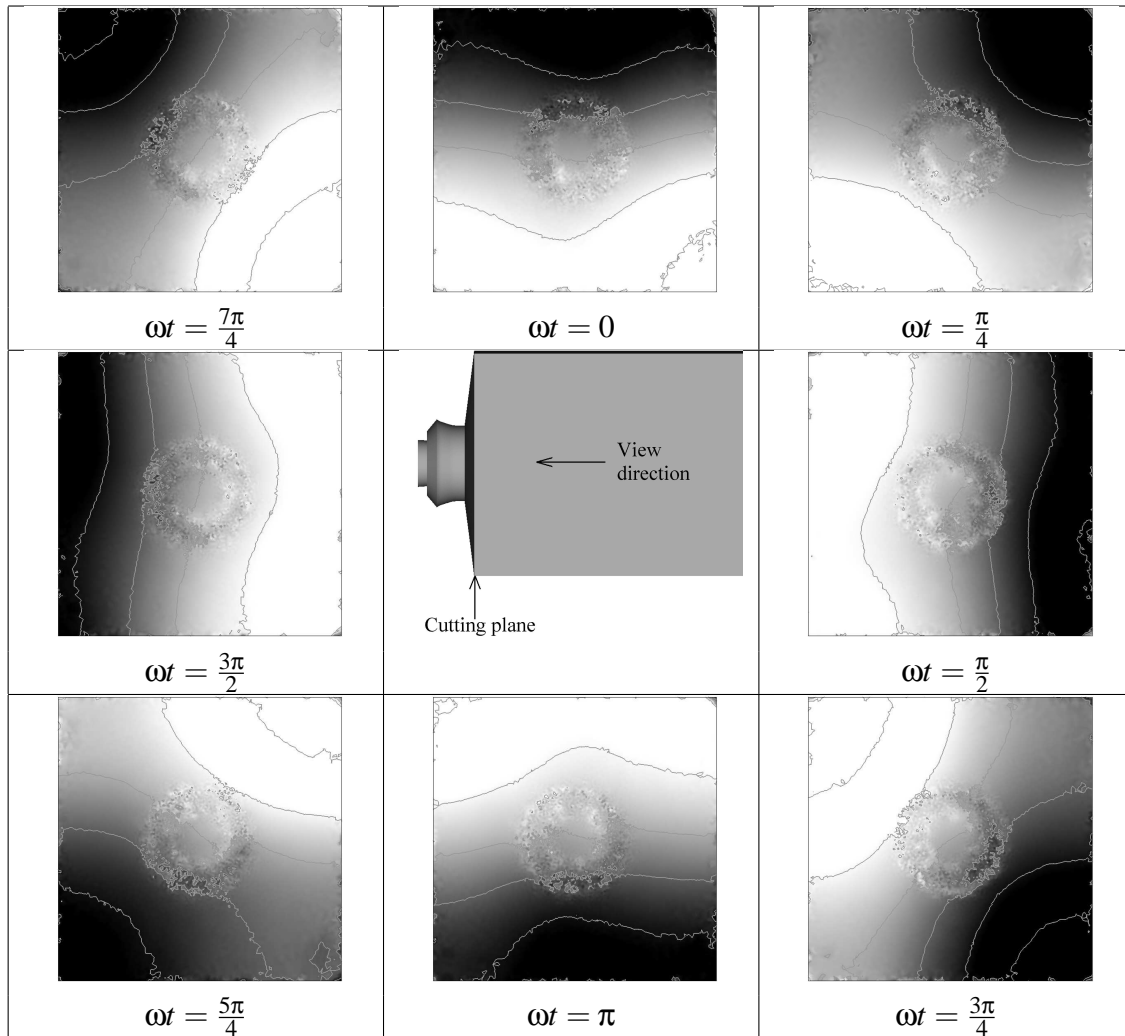


FIG. 5.14 – Transverse structure of the high-frequency rotating mode in the reacting LES. Pressure minimum and maximum are rotating around the burner axis.

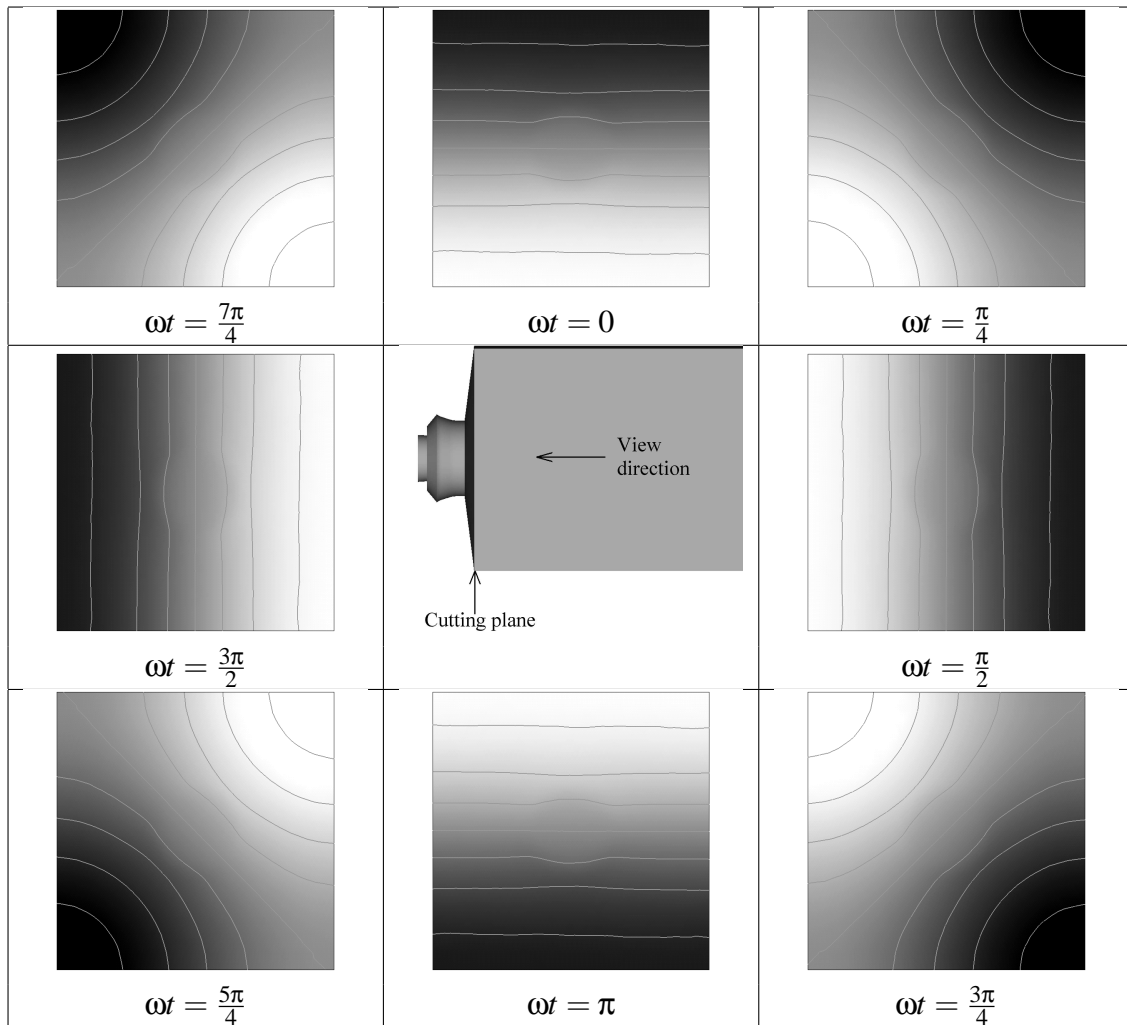


FIG. 5.15 – Transverse structure of the rotating mode reconstructed from the Helmholtz code results using Eq. 5.7.

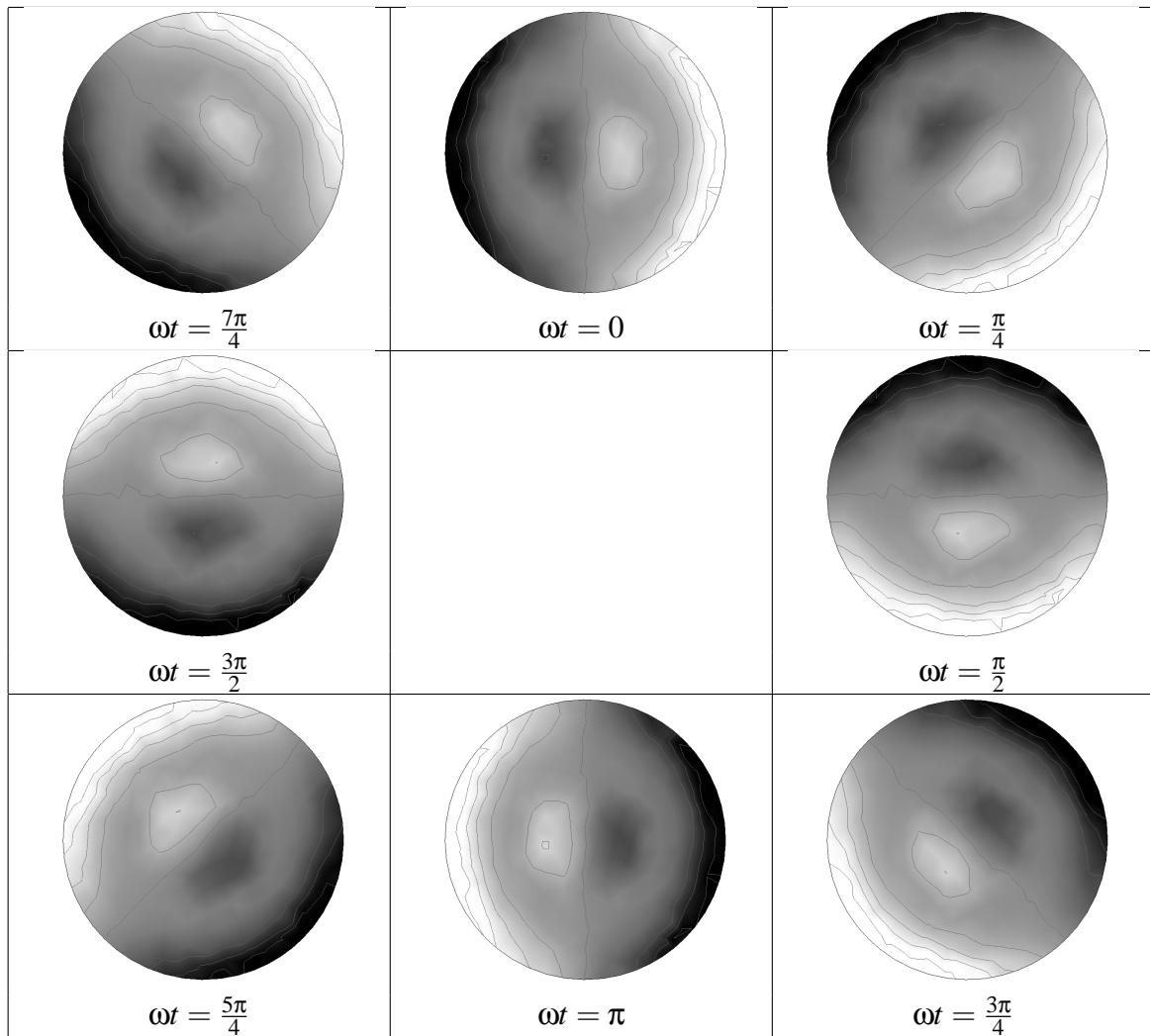
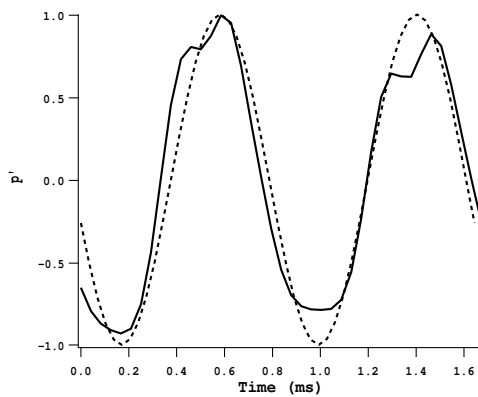
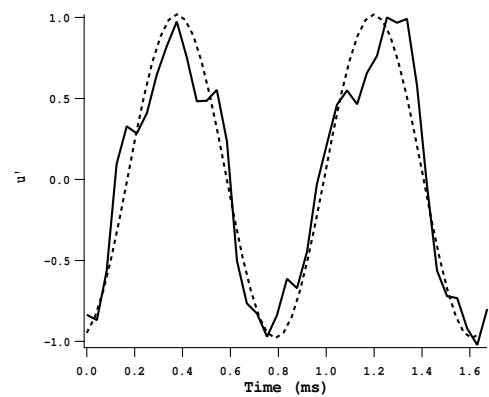


FIG. 5.16 – Velocity fluctuations induced by the rotating mode at the burner outlet.

FIG. 5.17 – Normalised pressure fluctuations at point *C* in the LES (solid) and from the Helmholtz solver (dashed).FIG. 5.18 – Normalised axial velocity fluctuations at point *B* in the LES (solid) and from the Helmholtz solver (dashed).

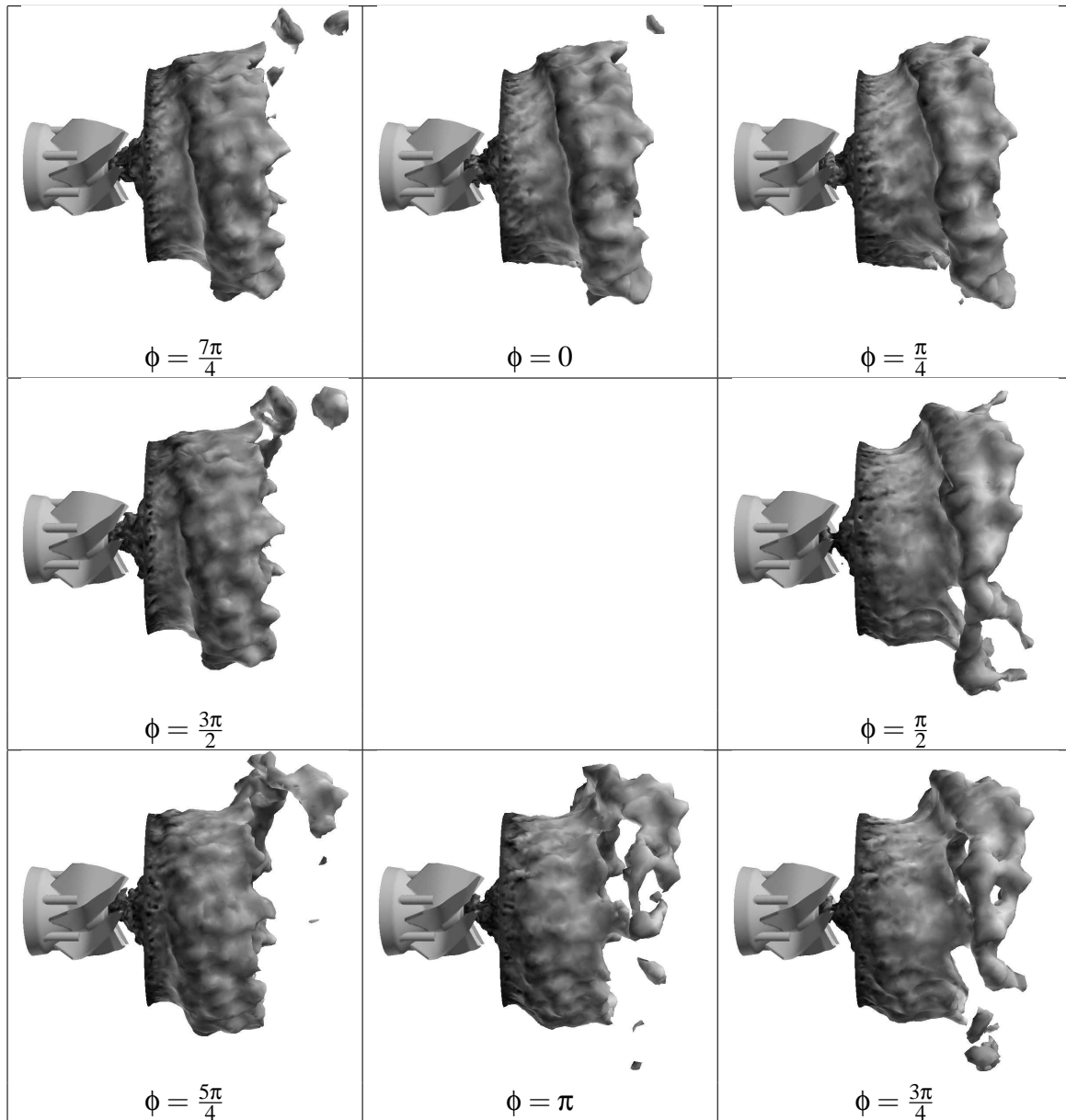


FIG. 5.19 – Distortion of the instantaneous flame front. Axial velocity fluctuations at the burner mouth, caused by the rotating acoustic mode, generate a helix shape vortex.

Chapitre 6

Calcul des modes propres d'une turbine annulaire expérimentale avec flamme active : application de la méthode asymptotique

Contexte

Cette partie concerne l'application du code AVSP à une configuration expérimentale correspondant à une turbine annulaire installée au Lehrstuhl für Thermodynamik de l'université technique de Munich. Cette application a été réalisée dans le cadre d'une coopération et d'un échange entre le laboratoire bavarois et le CERFACS. Je remercie donc le Prof. Polifke, à l'origine de cette collaboration, et tous les membres du Lehrstuhl für Thermodynamik pour leur accueil et leur disponibilité qui ont ainsi permis de concrétiser cette opportunité d'échanges fructueux. Ce chapitre ainsi que l'annexe correspondante (Annexe D) sont extraits d'un rapport technique rédigé en anglais faisant suite à cette coopération. Les principaux aspects développés dans cette partie sont les suivants :

- la mise en pratique de AVSP sur une configuration non académique. Cette dernière étant composée d'un plenum et d'une chambre de combustion annulaires reliés entre eux par douze brûleurs munis d'injecteurs swirlés, ce type de configuration constitue donc un exemple typique d'application future de AVSP dans un contexte industriel. Ce chapitre a donc pour premier objectif de montrer la capacité du code à prendre en compte ce genre de géométrie.
- la prise en compte de différentes hypothèses de modélisation acoustique et de leur impact sur la valeur des modes propres. En particulier, on s'intéresse à l'influence sur la valeur des modes propres de la prise en compte du swirler

et de la forme réaliste du front de flamme en comparant les résultats obtenus avec ceux correspondant à une configuration simple sans swirler et avec un front de flamme plan.

- l'application à une configuration réaliste de la méthode asymptotique présentée à la section 4.3.2 pour déterminer la stabilité des modes de la turbines. Le point essentiel réside dans la possibilité d'utiliser des mesures expérimentales de fonction de transfert de flamme réalisées sur la configuration en question par Klaas Kunze au cours de sa thèse. Par ailleurs, plusieurs hypothèses de modélisation ont été testées en comparant les résultats obtenus avec une flamme considérée acoustiquement mince et ceux obtenus avec une fonction de transfert de flamme non compacte.

6.1 Introduction

It has been known for a long time that the coupling between acoustic waves and flames in industrial systems can lead to high amplitude instabilities [8, 38, 99]. In addition to inducing oscillations of all physical quantities (pressure, velocities, temperature, etc ...), these instabilities can increase the amplitude of the flame motion and, in extreme cases destroy part of the burner. Since the equivalence ratio oscillates when instabilities are present, there is a general trend for combustors to be more unstable when operating in the lean regime (more air injected than necessary to burn the amount of fuel injected). Besides, due to new international constraints, pollutant emissions must be reduced and gas turbine manufacturers need to operate their systems under leaner and leaner conditions. Consequently, there is a need to better understand combustion instabilities and to predict them at the design level. The objective of this study is to present and test a methodology to predict unstable/stable thermo-acoustic modes of a combustor based on a two stpdf approach. At first the problem without reactive flows is considered. The resulting eigenvalue problem is solved by classical Arnoldi method. Then, the problem with combustion is treated by performing an asymptotic expansion around the state without active acoustic flame. This method is tested on realistic test rig used by Klaas Kunze [69] during its PhD at the Lehrstuhl für Thermodynamik Technische Universität München. The starting point of this study deals with calculations of the combustion eigenmodes without acoustic flame. Different configurations are retained in order in order to investigate the relevance of some assumptions on the geometry or on the mean field. Finally, a flame transfer function experimentally measured is introduced into the acoustic code and results are compared with experimental data.

6.2 Description of the thermo-acoustic code

6.2.1 Governing Equations

A suitable description of the present problem can be derived from perfect gases assumption and classical relations of fluid mechanics, i.e. from equations of mass, momentum and energy conservation. This last one is required in the reactive flows framework since flow isentropy is not verified. Besides, assumptions of constant mean pressure and low Mach number appear reasonable from gas turbines observations. In such devices, mean speed flow value in front of sound speed is known to be very low in the whole geometry excepted at the outlet combustion chamber where nozzle impedance conditions extracted from literature [36] can be applied in order to keep a realistic model. Since eigenmodes exhibited in gas turbines lie on the low/medium frequency domain, viscosity as well as thermodiffusivity may moreover be neglected. Under these assumptions, a dimensionless wave equation for small pressure perturbations, that is to say for linear acoustics, may be derived in the same way as performed by Poinso and Veynante [26] and reads :

$$\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla p') - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -(\gamma - 1) \frac{\partial \dot{q}'}{\partial t} \quad (6.1)$$

where primed and barred variables stand for respectively dimensionless acoustic perturbation and dimensionless mean variables whereas p , c , γ and \dot{q} respectively stand for pressure, sound speed, specific heat ratio and rate of heat release. Solving Eq. 6.1 requires a model for rate of heat release fluctuations in order to close the problem. As suggested by the seminal studies of Crocco [10, 11] the flame is modelled as a purely acoustic element, neglecting the effects of local turbulence, chemistry or heat losses. Specifically, rate of heat release is modelled as

$$\dot{q}'(\vec{x}_{ref}, t) = n_l(\vec{x}) \vec{u}'(\vec{x}_{ref}, t - \tau(\vec{x})) \cdot \vec{n}_{ref} \quad (6.2)$$

The parameter $\tau(\vec{x})$ stands for a time lag between unsteady heat release $\dot{q}'(\vec{x}_{ref}, t)$ and the acoustic velocity \vec{u}' at a reference position \vec{x}_{ref} and direction \vec{n}_{ref} . This formulation generalizes the $n - \tau$ model [10, 11], used in the framework of 1D configurations with infinitely thin flame [26] to the case of 3D flows with distributed combustion. Assuming harmonic fluctuations, $p' = \Re(\hat{p}(\vec{x})e^{-j\omega t})$ with $j^2 = -1$, and using linearized Euler equation lead to the following relation between acoustic speed and pressure,

$$\nabla \hat{p} = j\omega \bar{\rho} \hat{\vec{u}} \quad (6.3)$$

By combining equations from set(6.1)-(6.3), it yields :

$$\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \hat{p}) + \omega^2 \hat{p} = \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})} n_l(\vec{x}) e^{i\Re(\omega)\tau(\vec{x})} \nabla \hat{p} \cdot \vec{n}_{ref}(\vec{x}_{ref}) \quad (6.4)$$

This last equation constitutes the eigenvalue problem to solve. Mean variables and flame transfer parameters can be provided by LES calculations. The aim of this study is to find the first eigenmodes, i.e. first harmonics, associated with this equation.

6.2.2 Numerical approach

At first, the problem without source term is considered. The flame is then viewed as an acoustical passive element but can still induce variations in the mean temperature field. In this case, the numerical eigenvalue problem inherited from Eq. 6.4 with a null RHS term takes the following form :

$$A \cdot \hat{p} = -\omega^2 \hat{p} \quad (6.5)$$

Where A is a matrix representing the " $\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla)$ " operator and the boundary conditions. The numerical scheme used is finite-element method of Taylor-Galerkin of order two directly inherited from an LES solver [96]. Since the study is interested on large wave lengths, a higher order scheme is not needed. Three types of boundary conditions are retained :

- An "atmospheric" acoustic pressure condition where $\hat{p} = 0$. It numerically corresponds to a Dirichlet condition.
- A "wall" acoustic condition where $\vec{\hat{u}} \cdot \vec{n} = 0$ with \vec{n} the orthogonal normal to the wall. It numerically corresponds to a von Neumann condition.
- An admittance type condition :

$$\frac{1}{Z} = \frac{\bar{\rho} \bar{c} \vec{\hat{u}} \cdot \vec{n}}{\hat{p}} \quad (6.6)$$

The two first boundary condition types lead to a classical eigenvalue problem and can be solved with an Arnoldi method provided, for instance, by ARPACK software [101].

From Eq. 6.3, it can be deduced that admittance condition is a frequency dependent boundary condition. Eigenvalue problem issued from Eq. 6.5 has then to be modified as follows,

$$A \cdot \hat{p} + \omega B \cdot \hat{p} + \omega^2 \hat{p} = 0 \quad (6.7)$$

where matrix B represents fluxes of " $\bar{c}^2 \nabla \hat{p}$ " incoming from cell faces located at the admittance boundaries. The resulting problem is not anymore linear (in

respect with ω^2) but this difficulty can be overcome by using a suitable variable transformation [97]. A classical eigenvalue problem can thus be recovered but with a doubled size in comparison with original situation.

6.2.3 Numerical issue with combustion and asymptotic expansion

Eigenvalue problem associated with Eq. 6.4 can not be solved directly by classical algebraic methods. Indeed, the kind of non linearity induced by exponential term requires a specific treatment. The approach retained in this study deals with asymptotic expansion. It means the acoustic flame is considered as a perturbation phenomenon of the situation without combustion, therefore, information about eigenmodes with flame will be retrieved from eigenmodes analysis without combustion. Besides, as suggested by global acoustic energy budgets [26], eigenmode stability is determined by accounting of the whole spatial distribution flame and the boundary losses. Two consequences arise from this consideration : firstly, the asymptotic expansion can not be applied to the local equation 6.4 but on the corresponding acoustic energy balance equation in the domain Ω studied,

$$\int_{\Omega} \hat{p} [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \hat{p}) + \omega^2 \hat{p}] dV = \int_{\Omega} \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})} n_l(\vec{x}) e^{i\Re(\omega)\tau(\vec{x})} \hat{p} \nabla \hat{p} \cdot \vec{n}_{ref}(\vec{x}_{ref}) dV \quad (6.8)$$

secondly, the expansion parameter ε has to be relied on the global behaviour of the flame, hence the following definition :

$$\varepsilon = \int_{\Omega} n_l(\vec{x}) dV \quad (6.9)$$

Eigen frequencies and eigenmodes (ω, \hat{p}) of Eq. 6.4 can then be searched as a first order expansion around the modes without combustion (ω_0, \hat{p}_0) ,

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + o(\varepsilon^2) \quad (6.10)$$

$$\hat{p} = \hat{p}_0 + \varepsilon \hat{p}_1 + o(\varepsilon^2) \quad (6.11)$$

introducing these relations in Eq. 6.8 and keeping only first order terms give the following equation :

$$\int_{\Omega} \hat{p}_0 [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \varepsilon \hat{p}_1) + \omega_0^2 \varepsilon \hat{p}_1] dV = -2\varepsilon \int_{\Omega} \hat{p}_0^2 \omega_0 \omega_1 dV + \int_{\Omega} \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})} n_l(\vec{x}) e^{i\Re(\omega_0)\tau(\vec{x})} \hat{p}_0 \nabla \hat{p}_0 \cdot \vec{n}_{ref}(\vec{x}_{ref}) dV$$

The LHS term can be simplified by using a reduction order method [102] in which $\hat{p}_1 = \hat{p}_0 F_1$, F_1 is a spatial derivable function. Thanks to this relation, the LHS term of Eq. 6.12 becomes :

$$\int_{\Omega} \hat{p}_0 [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \varepsilon \hat{p}_1) + \omega_0^2 \varepsilon \hat{p}_1] dV = \int_{\partial\Omega} \bar{c}^2 \hat{p}_0^2 \nabla \varepsilon F_1 dS \quad (6.13)$$

Since eigenmodes with flame (ω, \hat{p}) and without flame (ω_0, \hat{p}_0) verify the same boundary conditions, it turns out that the RHS term of Eq. 6.13 is null on the borders $\partial\Omega$. Consequently, an expression for the order 1 perturbation eigenfrequency $\varepsilon\omega_1$ can be obtained implying only mean variables and eigenmodes without combustion :

$$\varepsilon\omega_1 = \frac{(\gamma - 1) \nabla \hat{p}_0 \cdot \vec{n}_{ref}(\vec{x}_{ref}) \int_{\Omega} \hat{p}_0 n_l(\vec{x}) e^{i\Re(\omega_0)\tau(\vec{x})} dV}{\gamma \bar{p}(\vec{x}_{ref}) 2\omega_0 \int_{\Omega} \hat{p}_0^2 dV} \quad (6.14)$$

Knowing the perturbation eigen frequency $\varepsilon\omega_1$, Eq. 6.12 can then be treated as a linear problem with respect to perturbation eigen mode $\varepsilon\hat{p}_1$. To solve it, a classical LU factorization can be used. Values of eigenmodes with combustion are thus determined with Eq. 6.10 and 6.11.

6.3 Application to an annular combustion chamber : calculation without acoustic flame

6.3.1 General features of the experimental configuration tested

Description of the experimental configuration

In order to validate the approach developed in the first paragraph, the thermo-acoustic code AVSP is applied to a realistic test rig. This experimental setup corresponds to the configuration studied during his PhD by Klaas Kunze [69] at the Lehrstuhl für Thermodynamik Technische universität München. The test rig consists of an annular plenum chamber and an annular combustion chamber connected by twelve swirl burners. A sketch of the configuration geometry is available in the figure 6.1. The plenum chamber is supplied with an externally premixed natural gas-air, so fuel inhomogeneities do not occur and entropy waves do not play a role in this combustor. The hot gas exits the combustor through twelve nozzles of nearly the same height as the combustion chamber. Different operating conditions have been carried out in which the combustor power was approximately 1MW.

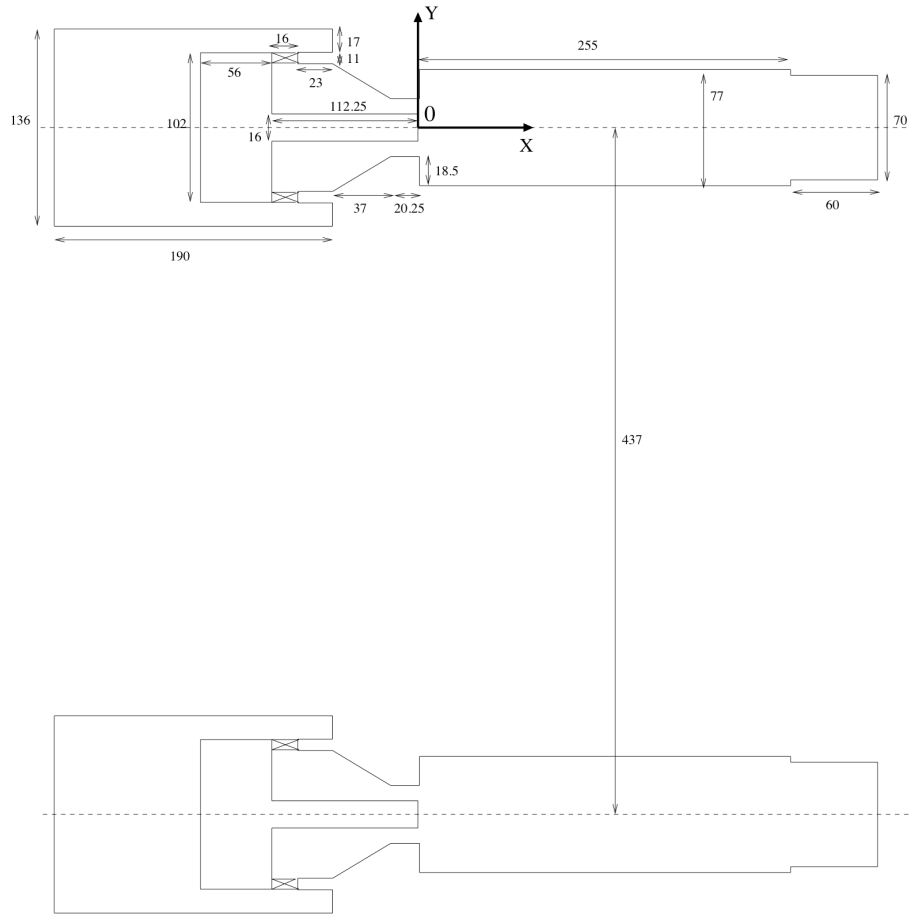


FIG. 6.1 – Geometry of the experimental combustion test rig

Following the model introduced in the first paragraph, the mean \bar{P} , the heat specific ratio γ and mean molecular mass W are considered constant all over the configuration. In addition, natural gas used in the experiment is considered as pure methane. In these conditions, the thermodynamic features of the configurations studied have the following values :

- $\bar{P} = 101300 Pa$
- $\gamma = 1.42$
- $W = 0.0279 kg.mol^{-1}$
- Mean heat capacity : $c_p = 1005.0 J.kg^{-1}.K^{-1}$
- Equivalence ratio : $\Phi = 0.71$
- Mean inlet temperature : $\bar{T}_1 = 300 K$
- Mean outlet temperature : $\bar{T}_2 = 1865 K$
- Mean inlet sound speed : $\bar{c}_1 = 350.0 m.s^{-1}$
- Mean outlet sound speed : $\bar{c}_2 = 879.0 m.s^{-1}$
- Mean inlet density : $\bar{\rho}_1 = 1.14 kg.m^{-3}$

– Mean outlet density : $\bar{\rho}_2 = 0.18 \text{kg.m}^{-3}$

Experimental eigenmodes of the configuration

The inlet plenum corresponds acoustically to a wall since the holes by which fuel-air mixture is injected are very small in comparison with the section of the plenum. The outlet corresponds acoustically to a pressure node since the outlet nozzle runs into the atmosphere. During the experiments, two instabilities were measured at respectively 150Hz and 300Hz , the first corresponding to a longitudinal mode and the second to a circumferential mode of the plenum.

6.3.2 Meshes used in AVSP

Two types of meshes have been used in AVSP : one without swirler (Fig. 6.2, 21404 nodes), and another one with swirler (Fig. 6.3, 26466 nodes).

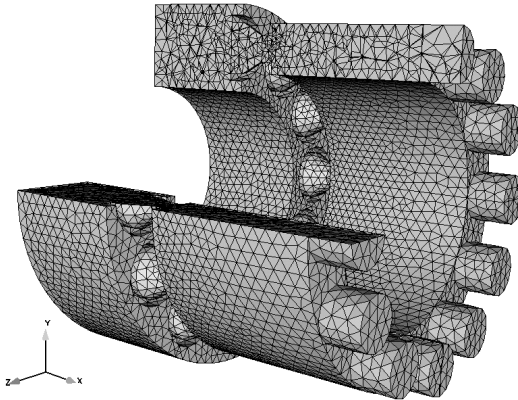


FIG. 6.2 – Cut of the mesh without swirler used in AVSP.

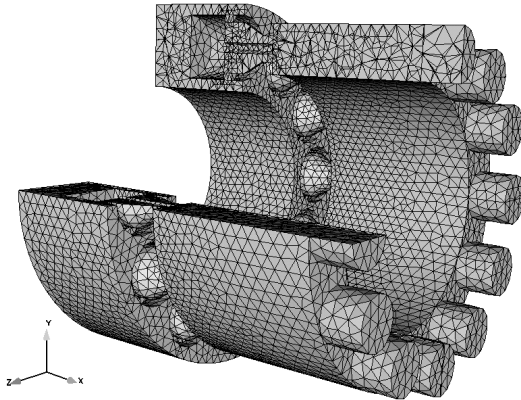


FIG. 6.3 – Cut of the mesh with swirler used in AVSP.

6.3.3 Influence of the mean flame position

The exact location of the flame extremity could not have been exactly determined experimentally but was beyond 10cm from the beginning of the chamber (i.e. the outlet of the burner). In this section, the impact of this uncertainty on the eigen frequencies values and eigenmode shape is investigated. Towards this goal, a simplified vertical flame front located at $x = x_f$ is considered. In addition the flame is compact, meaning that the mean field is considered piecewise constant : upstream the flame location (in the plenum, the burner and the first part of the combustion chamber) the mean temperature is equal to \bar{T}_1

and downstream the flame location (in the rest of the combustion chamber and the nozzles), the mean temperature is equal to \bar{T}_2 . Moreover, in this chapter, the flame is considered acoustically passive, i.e. no fluctuations of the rate of heat release occurred. At last, the swirler is not taken into account but the conical shape of the injectors is considered. The geometry of the configuration is illustrated by the Fig. 6.4. Two situations are considered which roughly corresponds to the two extreme realistic positions of the flame :

- A first case where the vertical flame front stands at $x_f = 0.13m$ (results are available in appendix D.1).
- A second case where the vertical flame front stands at $x_f = 0.10m$ (results are available in appendix D.2).

The distribution of the mean sound speed field in the case where $x_f = 0.13m$ is provided in the Fig. D.1 of appendix D.1.

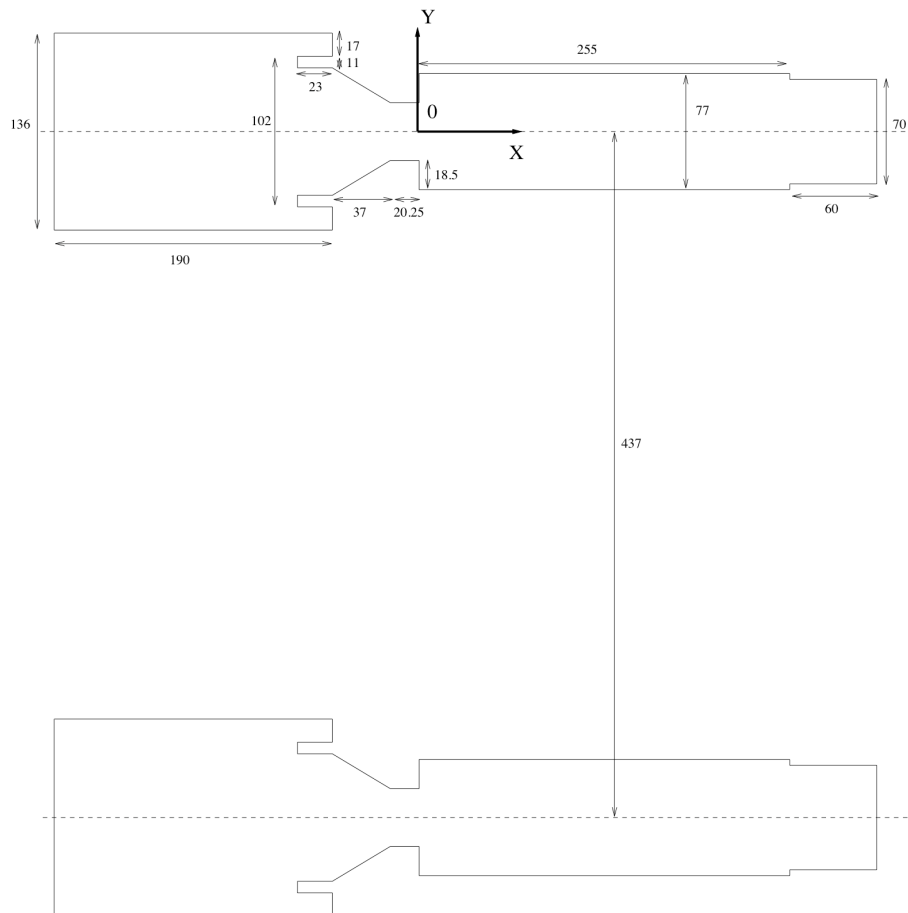


FIG. 6.4 – Geometry retained in the study of the influence of the mean flame position.

From acoustic analysis of these results, the following remarks can be deduced :

- In the two cases, the two first eigen frequencies are nearly the same and

seem to match with the modes experimentally observed. More precisely, in the two situations, the first eigenmode is a longitudinal mode corresponding to the quarter wave mode of the whole geometry, its eigen frequency is respectively 125 Hz for the case $x_f = 0.13\text{ m}$ and 128 Hz for the case $x_f = 0.1\text{ m}$ (see appendix D.1 and appendix D.2). Concerning the second eigenmode, it corresponds in the two cases to the first circumferential mode of the plenum, its eigen frequency value is respectively 283 Hz for the case $x_f = 0.13\text{ m}$ and 285 Hz for the case $x_f = 0.1\text{ m}$.

- The modification of the flame position seems to affect only eigenmodes with significant longitudinal variations in the combustor. Thus, the circumferential eigenmodes of the plenum are not influenced by the flame position as it can be seen on the corresponding eigen frequency values (modes 2,3,6 of table D.1 in appendix D.1 and modes 2,3,6 of table D.1 in appendix D.2). Concerning the longitudinal eigenmodes, only the second one is modified (mode 4 of table D.1 in appendix D.1 and modes 4 of table D.1 in appendix D.2) since the first and the third ones do not present strong variations in the combustor. Besides, no purely circumferential combustor modes can exist for a null pressure boundary condition is imposed at the outlet. As a result, circumferential combustor modes (modes 5,7 of table D.1 in appendix D.1 and modes 5,7 of table D.1 in appendix D.2) are influenced by the shift in the flame position through their longitudinal component.
- Eigenmode structure does not seem to be very sensitive to variations of the corresponding eigen frequency. It appears by comparing the second longitudinal modes obtained in the two cases $x_f = 0.13\text{ m}$ (mode 4 of table D.1 in appendix D.1) and $x_f = 0.1\text{ m}$ (modes 4 of table D.1 in appendix D.2). Although the eigen frequency discrepancy is about 10 % of the eigen frequency value, the spatial structure of the mode is nearly not affected. This is illustrated by the Fig. 6.5 and 6.6. In the same way, the structure of the second circumferential mode of the plenum (mode 5 of table D.1 in appendix D.1 and mode 5 of table D.1 in appendix D.2) in the two situations are quiet similar.

6.3.4 Influence of the flame shape

In order to get a more realistic configuration, a flame shape for the mean flow quantities is adopted. The acoustical influence of this mean field modification is investigated. The geometry is the same as precedently, that is to say without swirler, and corresponds to the Fig. 6.4. The mean field for this case is available in the Fig. D.19 of appendix D.3. Since the extremity of the flame is located at $x = 0.13\text{ m}$, the results from this configuration are compared with the ones

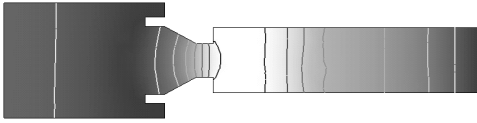


FIG. 6.5 – Sixth eigenmode of the configuration with mean temperature jump at $x = 0.13m$ corresponding to the second longitudinal mode, $f_0 = 558Hz$; normalized acoustic pressure modulus (white stands for 1.0 and black for 0.0).

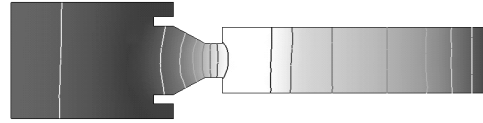


FIG. 6.6 – Sixth eigenmode of the configuration with mean temperature jump at $x = 0.1m$ corresponding to the second longitudinal mode, $f_0 = 594Hz$; normalized acoustic pressure modulus (white stands for 1.0 and black for 0.0)

from the case with a simplified vertical flame front at $x_f = 0.13m$ (see appendix D.1). The main points that arise from these results are the following :

- As expected, the introduction of a more realistic flame shape seems to improve the matching with experimental results : the two first eigen frequency values in the configuration with a flame shape for the mean field (appendix D.3) are indeed respectively $142Hz$ and $293Hz$.
- As in the study of the influence of the flame position, since the mean flow is only modified in the combustor, eigenmodes of the plenum (i.e. without significant variations in the combustor) are not influenced by the introduction of a flame shape for the mean field. On the contrary the second longitudinal mode is affected by accounting of the flame shape : the eigen frequency is shifted from $558Hz$ (mode 4 of table D.1) to $615Hz$ (mode 4 of table D.3) and the structure is slightly perturbed. Since the mean field in the combustor is not only modified in the longitudinal direction but also in the azimuthal direction (see Fig. 6.7), the circumferential modes of the combustor are the modes the more strongly perturbed. For instance, the eigen frequency of the first circumferential combustor mode is shifted from $653Hz$ (mode 5 of table D.3) to $836Hz$ (mode 6 of table D.3). In spite of this frequency gap, the spatial structure of the mode is quite similar in the two configurations (Fig .D.6 and Fig. D.25). Eigen frequency is increased since a part of the cold gas is replaced by hot gas.

6.3.5 Influence of the swirler

The configuration with swirler is at last investigated. The geometry retained corresponds to the one illustrated by Fig. 6.1. Again, a flame shape is retained for the mean field. The results obtained in this situation are compared with the case with a flame shape for mean flow and without swirler (see appendix D.3). It is reminded here that effects due to the mean flow speed are not taken into

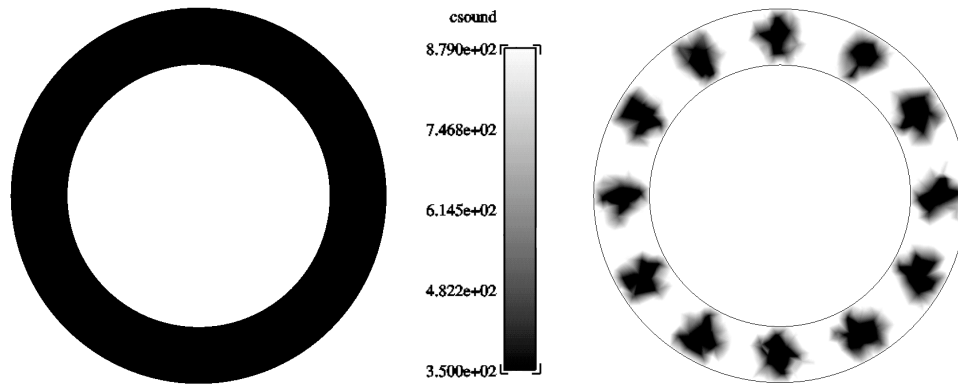


FIG. 6.7 – Slice cut of the mean sound speed field at $x = 0.08\text{ m}$; on the left, Configuration without (on the left) and with (on the right) flame shape for the mean field.

account. The main points that arise from this results (see appendix D.4) are the following :

- The two first modes (mode 1 and 2 in appendix D.3 and appendix D.4), i.e. the modes measured experimentally are not much modified by the introduction of the swirler.
- Only the modes with significant variations in the plenum are influenced by the introduction of the swirler. The longitudinal modes are affected differently following their structure in the plenum : the first and second longitudinal modes do not vary very much in the plenum part and, consequently, are not strongly modified by the swirler. On the contrary, the structure of the third longitudinal mode inside the plenum is firmly altered and the corresponding eigen frequency is shifted from 945 Hz (mode 11 in appendix D.3) to 769 Hz (mode 11 in appendix D.4) in the configuration with swirler. This situation is illustrated by Fig. 6.11 and Fig. 6.10. From a general point of view, the introduction of the swirler induces a decreasing of the eigen frequencies. This is may be due to the area section reduction induced by the swirler slits. On the other hand, the circumferential modes of the plenum have no longitudinal component and are not modified by the swirler. Circumferential modes of the combustor are not purely azimuthal and comprise a longitudinal component which can be evidenced in the combustor as well as in the plenum. As a result, through this component these modes are influenced by the introduction of the swirler as it can be seen on Fig. 6.9 and Fig. 6.8. For these harmonics, the role of the swirler can be significant particularly when acoustic flame is taken into account : in the configuration without swirler, the peak of pressure is located in the flame zone so the Rayleigh criterion [8] is potentially high whereas in the case with swirler, the

amplitude of the mode is far less important in this zone.

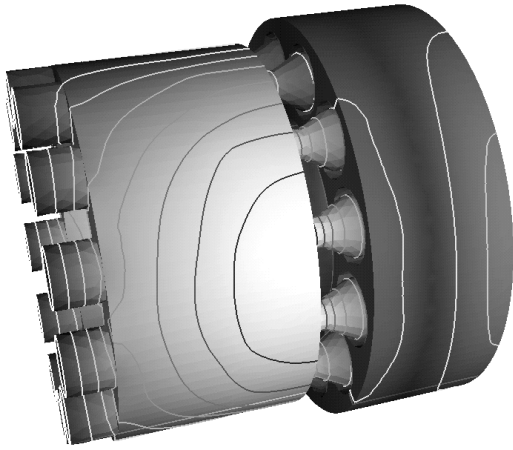


FIG. 6.8 – 1st circumferential mode of the combustor in the configuration without swirler, $f = 836\text{Hz}$, acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

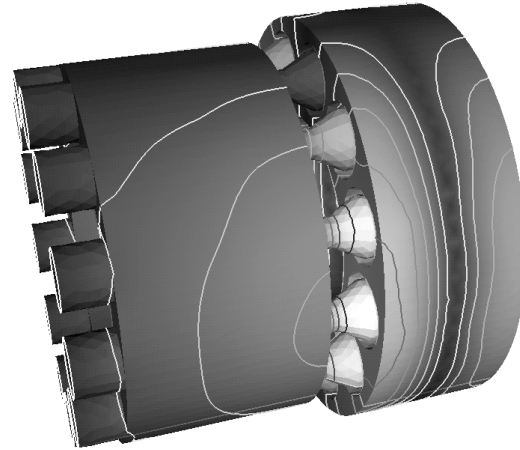


FIG. 6.9 – 1st circumferential mode of the combustor in the configuration with swirler, $f = 753\text{Hz}$, acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

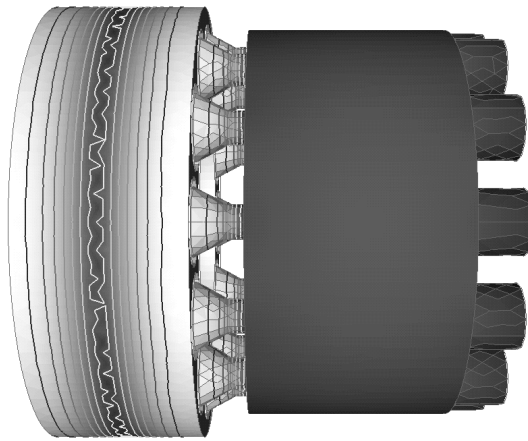


FIG. 6.10 – Third longitudinal mode in the configuration with a flame shape for the mean temperature, $f = 945\text{Hz}$, acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

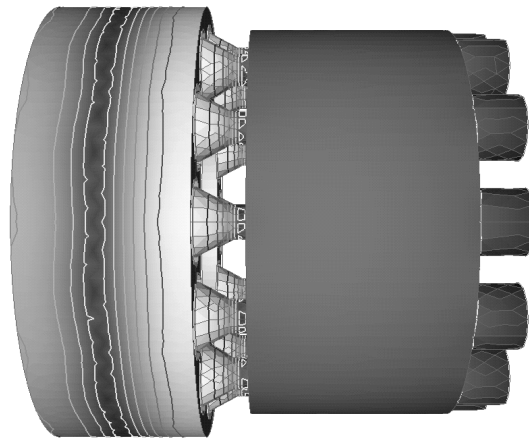


FIG. 6.11 – Third longitudinal mode in the configuration with a flame shape for the mean temperature and with swirler, $f = 769\text{Hz}$, acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

6.4 Application to an annular combustion chamber : calculation with acoustic flame

6.4.1 Flame transfer function characteristics and experimental results

The asymptotic method of AVSP is used on the burner RBK4016650 tested during the PhD of Klaas Kunze [69]. The geometry of the configuration corresponds to the one detailed in fig. 6.1. The total power of the configuration studied is about $\bar{Q}_{total} = 650kW$ and the equivalence ratio of the air-fuel mixture is about 0.71 (Luftzahl= 1.4). In these conditions no instabilities occur and reliable flame transfer function measurements can be carried out. These measurements concern one burner of the annular configuration. The combustor part where the flame stands is divided into four zones as described in the fig. 6.12. For each zone, the flame transfer model, relying \hat{Q}_{zone} the heat release fluctuations of the corresponding zone to the longitudinal acoustic speed fluctuations $\hat{u}_x(\vec{x}_{ref})$, has the following form :

$$\frac{\hat{Q}_{zone}}{\bar{Q}_{burner}} = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)} \frac{\hat{u}_x(\vec{x}_{ref})}{\bar{u}_x(\vec{x}_{ref})} \quad (6.15)$$

where \bar{Q}_{burner} stands for the power of one of the twelve burners and corresponds to $\bar{Q}_{burner} = \bar{Q}_{total}/12 \approx 54.1kW$. The heat release fluctuations of a zone can be related to the local heat release fluctuations \hat{q} (see Eq. 6.4) as follows :

$$\hat{Q}_{zone} = \iiint_{V_{zone}} \hat{q}(\vec{x}) dV \quad (6.16)$$

This equation takes the following form by introducing the local $n - \tau$ model of Eq. 6.2 :

$$\hat{Q}_{zone} = \iiint_{V_{zone}} n_l(\vec{x}) e^{i\omega\tau} \hat{u}_x(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} dV$$

Assuming piecewise constant values by zone for n_l and τ , it can be deduced from Eq. 6.15 the following relation in a given zone for the flame transfer function parameters :

$$n_l = \frac{|F(\omega)| \bar{Q}_{burner}}{V_{zone} \bar{u}_x(\vec{x}_{ref})} \quad (6.17)$$

$$\Re(\omega)\tau = \phi(\omega) \quad (6.18)$$

Considering the burner RBK4016650, the flame transfer function has been measured experimentally for different frequency values between 0 and 400

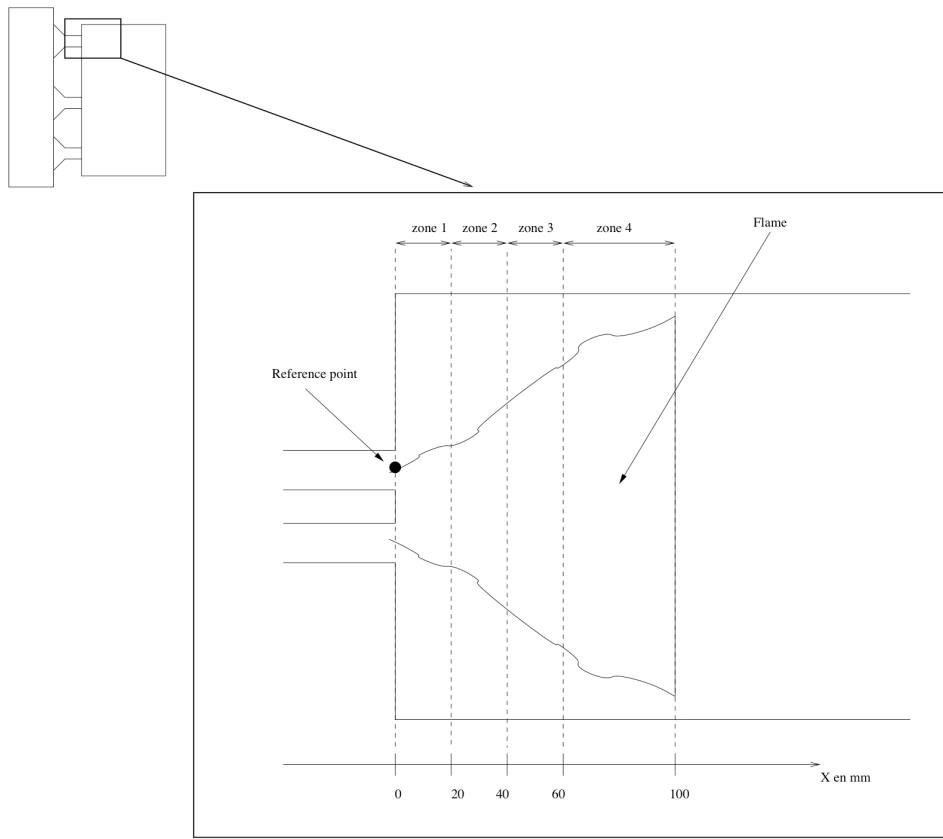


FIG. 6.12 – Flame division for transfer function measurements of one burner of the configuration

Hz thanks to a siren (cf [69]). The resulting flame transfer function parameters for each zone are available in Fig. 6.13 and Fig. 6.14.

During the experiments with different equivalence ratios and different total power values of the device, two modes appeared : the first longitudinal mode at nearly 150Hz and the first mode of the plenum at nearly 300Hz . In the current configuration, no instability was observed experimentally. Therefore AVSP should predict that these modes are stable when accounting for the flame-acoustics coupling.

6.4.2 Results with a flame transfer function defined by zone

At first the flame transfer function of Fig. 6.13 and Fig. 6.14 defined on each zone of the flame is used in AVSP. Since flame transfer function measurements have been performed only in the range $0 - 400\text{Hz}$, only eigenmodes with eigen frequency within this range are retained from AVSP calculations. The corresponding results are available in appendix D.5. In this configuration the mean

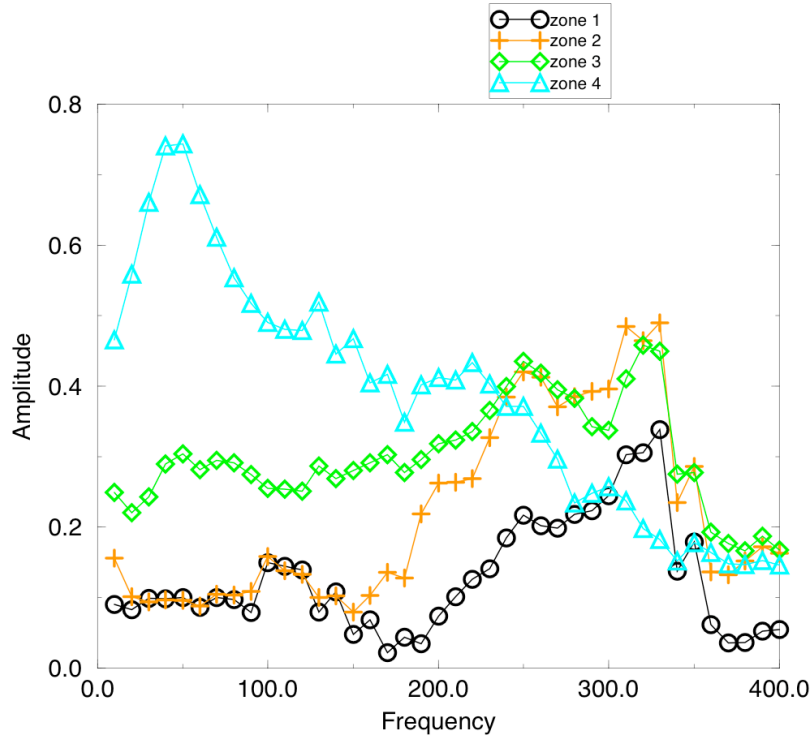


FIG. 6.13 – Amplitude $|F|$ of the flame transfer function in the different zones vs frequency

field and the geometry corresponds to the ones used in appendix D.4, i.e. with a swirler and with a flame shape for the mean field (flame extremity located at $x_f = 0.13m$). The boundary conditions are purely reflecting : null acoustic speed at the inlet, wall reflecting and null acoustic pressure at the outlet. As in the experiments, the reference point is located at the end of injector at the abscissa $x_{ref} = 0.0m$ (see Fig .6.12). In this situation, the expansion parameter ε defined in Eq. 6.9 reaches the following values at the two unstable frequencies experimentally observed :

$$\begin{aligned}\varepsilon(f = 150Hz) &\approx 0.44 \\ \varepsilon(f = 300Hz) &\approx 0.78\end{aligned}\quad (6.19)$$

The main results are the following :

- The second mode (first circumferential mode of the plenum) is correctly predicted : the real part is nearly equal to $Re(f) = 284Hz$ which is closed to the experimental measure at $300Hz$, the imaginary part - or growth rate - is negative a nearly $Im(f) = -20.0Hz$ corresponding to a stable mode as expected.
- The real part of the first mode is almost correctly predicted at $Re(f) =$

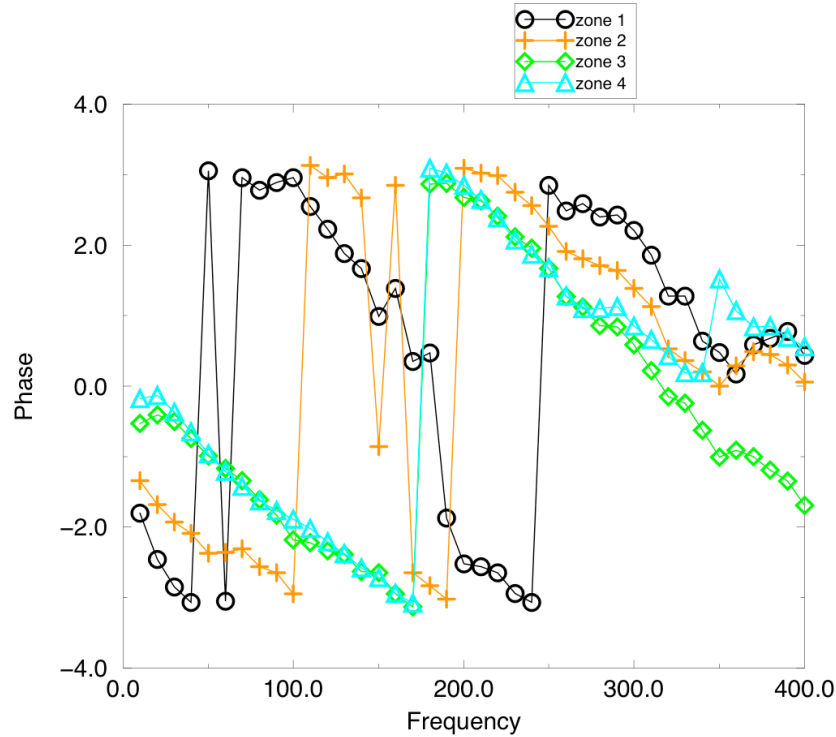


FIG. 6.14 – Phase ϕ of the flame transfer function in the different zones vs frequency

174Hz (instead of 150Hz in experiments) but the imaginary part is evaluated as positive at $Im(f) = 6.7Hz$. Thus the first mode is predicted as unstable by AVSP whereas experiments do not indicate such a behaviour.

- The error of AVSP concerning the stability of the first mode can originate in neglecting dissipative mechanisms. Indeed, the growth rate of the first mode $Im(f) = 6.7Hz$ is very small, particularly in comparison with the corresponding real part, and can then be overcome by dissipative phenomena such as radiation loss at the outlet, boundary layer on the walls, loss by frictions in the swirler. The first mechanism can be taken into account through impedance boundary conditions [62] but its impact on the mode stability is generally small. The second mechanism required a new boundary condition type and is moreover strongly dependent from non-linear phenomena. The third mechanism requires also specific treatment and is dependant from mean speed values. In these conditions the two last mechanism have not been taken into account by AVSP. As a consequence, it is difficult to determine if the error on the mode stability results from the asymptotic method or underestimations of the dissipative phenomena.

6.4.3 Results with a global flame transfer function

In this part, the acoustical activity of the flame is represented by a global flame transfer function issued from the sum of the flame transfer function of each zone as follows :

$$F(\omega)e^{i\phi(\omega)} = \sum_{j=1}^N F_{zone_j}(\omega)e^{i\phi_{zone_j}(\omega)} \quad (6.20)$$

The geometry and the main field are exactly the same as in the precedent configuration, only the flame transfer function is modified by taking a global flame transfer function. The reference point is still at $x_{ref} = 0.0m$. The impact of the flame division on the stability of the mode depends from the variations of the acoustic pressure along the flame. This can be explained thanks to the Rayleigh criterion [8]. From Poinso and Veynante [26], when growth rate is small in comparison with the real part of the eigen frequency $f = 1/T$, this criterion R_r can be evaluated from eigenmodes and heat release fluctuations Fourier transform as follows :

$$R_r = \frac{1}{T} \int_T \int_{V_{flame}} p' q' dt dV = \int_{V_{flame}} \frac{\gamma-1}{2\gamma\bar{p}} \Re(\hat{p}\hat{q}^*) dV = \frac{\gamma-1}{2\gamma\bar{p}} \Re\left(\int_{V_{flame}} \hat{p}\hat{q}^* dV\right) \quad (6.21)$$

where \hat{q}^* is the complex conjugate of the \hat{q} . If the eigenmode varies slowly along the flame it can be considered nearly constant to $\hat{p}(x_f)$ and Eq. 6.21 yields to :

$$\frac{\gamma-1}{2\gamma\bar{p}} \Re\left(\int_{V_{flame}} \hat{p}\hat{q}^* dV\right) \approx \frac{\gamma-1}{2\gamma\bar{p}} \Re\left(\hat{p}(x_f) \underbrace{\int_{V_{flame}} \hat{q}^* dV}_{global\ flame}\right) \quad (6.22)$$

From Fig. D.29 and Fig. D.30, it can be seen that for the two modes studied, the acoustic pressure does not vary a lot along the flame. As a result, the behaviour of the global flame is roughly the same as the flame divided into four zones as shown by the AVSP calculations in appendix D.6 : the first mode is still slightly unstable whereas the second is still stable . Nevertheless, it seems that imaginary part of the eigen frequencies is modified by about 30%.

6.4.4 Sensitivity to the reference point location

The sensitivity to the reference point position is studied in this part. Two closed and realistic positions are tested in order to evaluate the reliability of the AVSP results in precedent configurations. Since these positions are closed and since the geometry and the mean field are still the same, the main points of the

precedent results must not change. The flame transfer function used corresponds to the one described in Fig. 6.12, i.e. the flame divided into four zones. In this new configuration, the reference point is located inside the injector at $x_{ref} = -0.01m$ instead of $x_{ref} = 0.0m$ (see appendix D.4). The shift is therefore very small in comparison with the wavelength of the modes. The results obtained for this new configuration are available in appendix D.7 and show that this shift in the reference position does not strongly modify the eigen frequency values. Nevertheless, the impact of this shift position seems to be as important as the use of a global flame transfer function instead of a zonal one. The fact that a shift of only one centimeter can increase of 30% the growth rate of the modes is explained by the structure of the longitudinal acoustic speed inside the injector. The Fig. 6.15 show that the acoustic speed strongly varies in this part of the configuration. Therefore, the flame model parameters defined in Eq. 6.2 adopt the same behaviour, hence the sensitivity of the results to the reference point location.

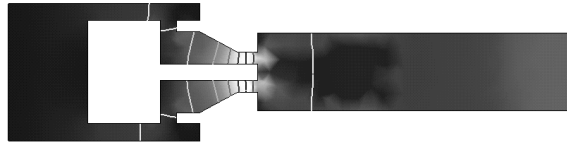


FIG. 6.15 – Longitudinal acoustic speed of the first mode ($f=143$ Hz), white indicates a maximum and black stands for 0

6.5 Conclusion

The acoustic solver based AVSP on the Helmholtz equation is applied to an experimental combustion chamber in order to get the eigenmodes of this configuration and predict their stability. The first step consists in evaluating the eigenmodes without active acoustic flame but with a variable sound speed. Different configurations are tested from a simple configuration with a crude mean temperature jump and without swirler to a more realistic configuration with swirler and with a flame shape for the mean flow. It appears from these results that the two modes observed during experiments, that is to say the first longitudinal mode and the first circumferential mode of the plenum, are correctly predicted on all the configurations tested. Besides, it can be seen that the circumferential modes of the combustor are strongly (particularly their eigen frequency) influenced by the flame shape, i.e. the interface shape of the cold and hot zones. On the other hand, accounting of the swirler can modify the spatial structure of some longitudinal modes particularly the modes with important variations

in the plenum. The second step deals with a case with active acoustic flame. An asymptotic expansion around the modes without combustion is applied in order to get the stability of the modes in such a situation. The use of a flame transfer function measured experimentally is required to characterize the acoustic behaviour of the flame. In these conditions, the first circumferential mode of the plenum at 300 Hz is predicted stable as in the experiments. However, the first longitudinal mode at 150 Hz is predicted unstable but with a small growth rate. The fact that no dissipative phenomena are taken into account can explain this overestimation of the growth rate. Other configurations with a global flame transfer function or with a small shift in the reference point location present roughly the same results. As a conclusion, in order to completely qualify the asymptotic expansion method, a better determination of the dissipative mechanisms seems required.

Chapitre 7

Calcul des mode propres d'une chambre de combustion de section carrée avec injection swirlée et flamme active : application de la méthode du point fixe

Contexte

Ce chapitre illustre l'application de AVSP à une configuration réelle avec flamme acoustiquement active. Plus précisément, la géométrie concernée correspond à un dispositif expérimental installé au laboratoire EM2C (Paris) comprenant un système d'injection swirlé et une chambre de combustion de section carrée. Cette configuration a été étudiée à l'aide du code de calcul LES AVBP [95] par Charles Martin et a présentée pour certaines valeurs de débit de carburant et certains types de conditions limites une instabilité thermoacoustique. On cherche donc à prédire cette instabilité à l'aide de AVSP. Dans cette optique, l'emploi de conditions limites réalistes, c'est à dire de conditions limites d'admittance mesurées à partir des valeurs des résultats LES, est nécessaire. De plus, la prise en compte dans AVSP du terme source thermoacoustique est requis, ce qui est réalisé à travers la fonction de transfert de flamme calculée à partir des résultats LES. La méthode du point fixe (section 4.3.3) est ici appliquée pour déterminer les modes propres avec flamme active. Cette étude, réalisée durant le Summer Program 2004 du Center of Turbulence Research de stanford, a fait l'objet d'un article [100]. La suite de ce chapitre est donc rédigée en anglais et certaines notations, propres à l'article, sont différentes de celles choisies dans les précédentes section.

abstract

This paper presents the analysis of the self-excited combustion instability encountered in a lab-scale, swirl-stabilised combustion system. The instability, successfully captured by reactive Large Eddy Simulation (LES) is used to verify an acoustic energy equation. This energy equation shows how the source term due to combustion (equivalent to the Rayleigh criterion) is balanced by the acoustic fluxes at the boundaries when reaching the limit cycle. Additionally, an Helmholtz-equation solver including flame-acoustics interaction modelling is used to predict the stability characteristics of the system. Feeding the flame-transfer function from the LES into this solver allows to predict an amplification rate for each mode. The unstable mode encountered in the LES compares well with the mode of the highest amplification factor in the Helmholtz-equation solver, as well in terms of mode shape as in frequency.

7.1 Introduction

During the design phases of modern combustion chambers for gas turbines, a critical problem is often encountered : combustion oscillations ([26, 47, 57, 132]). These oscillations cannot be predicted at the design stage and correcting actions can be extremely costly at later stages. Testing burners in simplified combustion chambers is a common method to verify their stability but is also an ambiguous approach because it is known that a given burner can produce unstable combustion in one chamber and not in another. Methods which could provide stability analysis before any tests are therefore requested. This paper demonstrates that Large Eddy Simulation, coupled to acoustic analysis, can provide such information. A proper framework to analyse combustion stability is the wave equation for reacting flows ([26]). Such an equation is complex to derive because most assumptions used in classical acoustics must be revisited in a multi-species, non-isothermal, reacting gas. An approximate equation controlling the propagation of pressure perturbations in a reacting flow is :

$$\nabla \cdot (c_0^2 \nabla \hat{p}) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{p} = -(\gamma - 1) \frac{\partial \dot{\omega}_{T1}}{\partial t} - \gamma p_0 \nabla \vec{u}_1 : \nabla \vec{u}_1 \quad (7.1)$$

where the subscript 0 refers to mean quantities, and the subscript 1 to small perturbations. $\dot{\omega}_{T1}$ is the local perturbed heat release and c_0 is the sound speed, which can change locally because of changes in temperature and composition due to chemical reactions. These reactions are also the source of the additional RHS source term $(\gamma - 1) \partial \dot{\omega}_{T1} / \partial t$, which is responsible for combustion noise and instabilities. Equation (7.1) is difficult to use directly in practice. In the present work, it was solved or used in three different ways :

- First, a fully compressible LES of the reacting flow was performed, in which the pressure perturbations p_1 are explicitly solved for using the full Navier-Stokes equation (not the linearized form of Eq. 7.1). The code used for this LES is described in section 7.2.
- Second, Eq. 7.1 is solved in the frequency domain by assuming monoharmonic fluctuations. This is done using a Helmholtz tool described in Section 7.3.
- Third, Eq. 7.1 is integrated to derive an equation for the fluctuating energy. The definition of such an energy in a reacting flow is discussed in Section 7.4.

The reasons for this combined strategy are the following. First, it is now clear that Large Eddy Simulation (LES) is a powerful tool to study the dynamics of turbulent flames (see special issue of *Flow Turbulence and Combustion* (65, 2000) on LES of reacting flows or recent books on turbulent combustion : [26, 133]). Multiple recent papers have demonstrated the power of these methods ([96, 115, 127, 134-136] [32]). However, an important limitation of LES is its cost : the intrinsic nature of LES (full three-dimensional resolution of the unsteady Navier Stokes equations) makes it very expensive, even on today's computers. Faster tools are needed, for example for optimization and control of thermo-acoustic oscillations in chambers . Acoustic Helmholtz codes belong to this second category. These codes try to predict the global stability of a given combustion system by analyzing the amplification (or damping) of acoustic waves propagating through the entire combustion device. The most common versions of such codes describe combustion through very simplified linear formulations such as the n-tau model ([26, 94, 137]) or matrix formulations ([3, 82, 138]). In these formulations, the flame zone is viewed and modeled as a black box characterized only by its transfer function (or its matrix for matrix approaches), which essentially relates perturbations of heat release in the flame to perturbations of inlet velocity. LES and acoustic codes can be linked : LES is used to provide the mean fields, the unsteady fields and the flame transfer function. This flame transfer function can then be fed into acoustic codes to predict the overall stability of the combustion chamber when it is connected to upstream and downstream ducts.

7.2 Large Eddy Simulations for reacting flows in complex geometries

7.2.1 Numerical methods for compressible reacting LES

Most academic LES is often limited to fairly simple geometries for obvious reasons of cost and complexity reduction. In many cases, experiments are designed using simple two-dimensional shapes ([127, 139, 140]) or axisymmetrical configurations ([141, 142]) and simple regimes (low speed flows, fully premixed or fully non-premixed flames) to allow research to focus on the physics of the LES (subgrid scale models, flame/turbulence interaction model), and more generally, to demonstrate the validity of the LES concept in academic cases. This approach is clearly adequate in terms of modelling development, but it can also be misleading in various aspects when it comes dealing with complex flames in complex geometries, especially in real gas turbines for which specific problems arise :

- Real geometries cannot be meshed easily or rapidly with structured or block-structured meshes : up to now, most LES of reacting flows have been performed in combustion chambers where structured meshes were sufficient to describe the geometry. This is no longer the case in gas turbines and this brings additional difficulties. Indeed, on structured meshes, building high-order spatial schemes (typically 4th to 6th order in space) is easy and provides very precise numerical methods ([143-145]). For complex geometries such structured meshes must be replaced by unstructured grids, on which constructing high-order schemes is a more difficult task.
- Unstructured meshes also raise a variety of new problems in terms of sub-grid scale filtering : defining filter sizes on a highly anisotropic irregular grid is another open research issue ([107, 146-148]). Many LES models, developed and tuned on regular hexahedral grids may, perform poorly on the low-quality unstructured grids required to mesh real combustion chambers. For example, the filtered structure model ([144]) is difficult to extend to non structured grids.
- LES validation is often performed in laboratory low-speed unconfined flames, in which acoustics do not play a role and the Mach number remains small so that acoustics and compressibility effects can be omitted from the equations (low-Mach number approximation : [115, 141]). In most real flames (for example in gas turbines), the Mach number can reach much higher values and acoustics are important so that taking compressibility effects into account becomes mandatory. This leads to a significantly heavier computational task : since, acoustic waves propagate faster than the flow, the time

step becomes smaller and the boundary conditions must handle acoustic wave reflections ([26]). Being able to preserve computational speed on a large number of processors then also becomes an issue simply to obtain a result in a finite time.

- At the present time, it is impossible to perform a true LES everywhere in the flow and it will remain so for a long time. For example, the flow between vanes in swirled burners, inside the ducts feeding dilution jets or through multiperforated plates would require too many grid points. Compromises must be sought to offer (at least) robustness in places where the grid is not sufficient to resolve the unsteady flow.

In the present work, the full compressible Navier Stokes equations are solved on hybrid (structured and unstructured) grids. Subgrid stresses are described by the WALE model ([149]). The flame/turbulence interaction is modeled by the Thickened Flame (TF) model ([127, 128]). The numerical scheme is explicit in time and provides third-order spatial and third-order time accuracy ([128]).

7.2.2 Thickened Flame model and chemical scheme

For this study, the standard TF model developed by [128] is used : in this model, preexponential constants and transport coefficients are both modified to offer thicker reaction zones that can be resolved on LES meshes. The fundamental property justifying this approach has been put forward by [150] by considering the balance equation for the k -species mass fraction Y_k in a one-dimensional flame of thermal thickness δ_L^0 and speed s_L^0 :

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u Y_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x} \right) + \dot{\omega}_k(Y_j, T) \quad (7.2)$$

Modifying this equation to have :

$$\frac{\partial \rho Y_k^{th}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u Y_k^{th}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho F D_k \frac{\partial Y_k^{th}}{\partial x} \right) + \frac{1}{F} \dot{\omega}_k(Y_j^{th}, T^{th}) \quad (7.3)$$

leads to a “thickened” flame equation where F is the thickening factor and superscript th stands for thickened quantities. Introducing the variable changes $X = x/F$; $\Theta = t/F$ leads to :

$$\frac{\partial \rho Y_k^{th}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \rho u Y_k^{th}}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\rho D_k \frac{\partial Y_k^{th}}{\partial X} \right) + \dot{\omega}_k(Y_j^{th}, T^{th}) \quad (7.4)$$

which has the same solution as Eq. (7.2) and propagates the flame front at the same speed s_L^0 . However, $Y_k^{th}(x, t) = Y_k(x/F, t/F)$ shows that the flame is

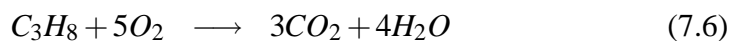
thickened by a factor F . The thickened flame thickness is $\delta_L^1 = F\delta_L^0$. Choosing sufficiently large values of F allows to obtain a thickened flame which can be resolved on the LES mesh. Typically, if n is the number of mesh points within the flame front (n is of the order of 5 to 10) and Δx the mesh size, the resolved flame thickness δ_L^1 is $n\Delta x$ so that F must be $F = n\Delta x/\delta_L^0$. Note that F is not an additional parameter of the model but is imposed by the previous relation as soon as the mesh is created. In the framework of LES, this approach has multiple advantages : when the flame is a laminar premixed front, the TF model propagates it, in the limit of an infinitely thin front, at the laminar flame speed exactly like in a G equation approach. However, this flame propagation is due to the combination of diffusive and reactive terms which can also act independently so that quenching (near walls for example) or ignition may be simulated. Fully compressible equations may also be used as required to study combustion instabilities.

The thickening modification of the flame front also leads to a modified interaction between the turbulent flow and the flame : subgrid scale wrinkling must be reintroduced. This effect can be studied and parametrized using an efficiency function E derived from DNS results ([128, 151, 152]). This efficiency function measures the subgrid scale wrinkling as a function of the local subgrid turbulent velocity u'_{Δ_e} and the filter width Δ_e . In practice, the diffusion coefficient D_k is replaced by $EF D_k$ and the preexponential constant A by AE/F so that the conservation equation for species k is :

$$\frac{\partial \rho Y_k^{th}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u Y_k^{th}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho E F D_k \frac{\partial Y_k^{th}}{\partial x} \right) + \frac{E}{F} \dot{\omega}_k \left(Y_j^{th}, T^{th} \right) \quad (7.5)$$

Such an equation propagates the turbulent flame at a turbulent speed $s_T = E s_L^0$, while keeping a thickness $\delta_L^1 = F\delta_L^0$. In laminar regions, E goes to unity, and Eq. 7.5 simply propagates the front at the laminar flame speed s_L^0 . The subgrid scale wrinkling function E was obtained from the initial model of [128] as a function of the local filter size Δ_e , the local subgrid scale turbulent velocity u'_{Δ_e} , the laminar flame speed s_L^0 , the laminar and the flame thicknesses δ_L^0 and δ_L^1 .

The TF model uses finite rate chemistry : here the configuration corresponds to a lean fully premixed flame so that a one-step Arrhenius kinetics is sufficient. This one-step scheme (called 1sCM1) has been fitted with a genetic algorithm based tool on a laminar flame structure. The reference mechanism used to fit 1sCM1 is the Peters propane scheme ([Peters,1993,verlag]). 1sCM1 takes into account five species (C_3H_8, O_2, CO_2, H_2O and N_2) :



Chemical parameters				Schmidt numbers				
A	$n^{C_3H_8}$	n^{O_2}	E_a	C_3H_8	O_2	CO_2	H_2O	N_2
3.29E10	0.856	0.503	31526	1.241	0.728	0.941	0.537	0.690

TAB. 7.1 – Rate constants and Schmidt numbers for the 1sCM1 scheme : the activation energy is in cal/moles and the preexponential constants in cgs units.

The rate of the single step reaction is given by :

$$q = A \left(\frac{\rho Y_{C_3H_8}}{W_{C_3H_8}} \right)^{n^{C_3H_8}} \left(\frac{\rho Y_{O_2}}{W_{O_2}} \right)^{n^{O_2}} \exp \left(-\frac{E_a}{RT} \right) \quad (7.7)$$

where the parameters are provided in Table 7.1.

The diffusion coefficient D_k of species k is obtained as $D_k = \nu / S_c^k$ where ν is the viscosity and S_c^k the fixed Schmidt number of species k . The Schmidt number values used in the present simulations are given in Table 7.1, and correspond to the PREMIX values measured in the burnt gases. The Prandtl number is set to 0.68. With this parameter set, the agreement between flame profiles obtained using AVBP or PREMIX with the same chemical scheme is excellent. The agreement between the Peters scheme and the 1sCM1 in terms of laminar flame speed is excellent for the lean up to stoichiometric mixtures.

7.3 Acoustic solver for the Helmholtz equation

The acoustic tool used in this study (called AVSP) solves the eigenvalue problem associated to the wave equation (7.1). When dealing with thermo-acoustic instabilities, it is current practice to model the geometry of the combustor by a network of 1D or 2D axisymmetric acoustic elements where a simplified form of Eq (7.1) can be solved ([26, 78]). Jump relations are used to connect all these elements and the amplitude of the forward and backward acoustic waves are determined so that the boundary conditions are satisfied. The main drawback of this approach is that the geometrical details of a combustor cannot be accounted for and only the first "equivalent" longitudinal or orthoradial modes are sought for. In AVSP, a finite element strategy is used to discretize the exact geometry of the combustor so that no assumption is made a priori regarding the shape of the modes. This feature gives AVSP the potential to test the effect of (small) geometrical changes on the stability of the whole system.

The wave equation (7.1) is solved in the frequency domain by assuming harmonic variations at frequency $f = \omega / (2\pi)$ for pressure, velocity and local heat release perturbations ($i^2 = -1$) :

$$\hat{p}' = \hat{P}(x, y, z) \exp(-i\omega t), \quad \vec{u}' = \vec{U}(x, y, z) \exp(-i\omega t) \quad \text{and} \quad \dot{\omega}_{T1} = \hat{\Omega}_T \exp(-i\omega t) \quad (7.8)$$

Introducing Eq. (7.8) into Eq. (7.1) and neglecting the turbulent noise $\gamma p_0 \nabla \vec{u}_1 : \nabla \vec{u}_1$ in front of the combustion term $(\gamma - 1) \partial \dot{\omega}_{T1} / \partial t$ leads to the Helmholtz equation :

$$\nabla \cdot (c_0^2 \nabla \hat{P}) + \omega^2 \hat{P} = i\omega(\gamma - 1) \hat{\Omega}_T \quad (7.9)$$

where the unknown quantities are the complex amplitude \hat{P} of the pressure oscillation at frequency f and pulsation ω . Note that $\hat{\Omega}_T$, the amplitude of the heat release perturbation is also unknown and must be modeled. This is obviously the difficult part of the modeling : it is done in AVSP through an extension of the $n - \tau$ model ([26, 94, 137]) where $\dot{\omega}_{T1} \propto nu_1(x_{\text{ref}}, t - \tau)$. In 1D approaches, the interaction index n and time delay τ are two parameters describing the acoustic behaviour of a compact flame located at the axial position x_{ref} . In AVSP, where the geometry of the combustor is fully described, the flame is distributed and the interaction index and time delay depend on space. These data can be extracted from LES results by post-processing either a self-excited or a forced oscillating regime. Once measured in LES, the fields $n(x)$ and $\tau(x)$ are used to model the unsteady heat release in Eq. (7.9) as $i\omega \hat{\Omega}_T = n(x) \exp(i\omega\tau(x)) \nabla \hat{P}(x_{\text{ref}}) \cdot \vec{n}_{\text{ref}} / \rho_{\text{ref}}$. Although they depend on ω in the most general case, n and τ have been obtained at the most energetic frequency observed in the LES ($f \simeq 380$ Hz) and considered constant over the frequency domain.

Three types of boundary conditions can be prescribed together with this equation (\vec{n} is the outward unit normal vector to the boundary) :

- Dirichlet condition, viz. $\hat{P} = 0$, on fully reflecting outlets,
- Neumann condition, viz. $\nabla \hat{P} \cdot \vec{n} = 0$, on fully rigid walls or reflecting inlets,
- Robin condition, viz. $cZ \nabla \hat{P} \cdot \vec{n} = i\omega \hat{P}$, on general boundaries, where Z is the local reduced complex impedance $Z = \hat{P} / \rho_0 c_0 \vec{U} \cdot \vec{n}$

In this study, the reduced boundary impedance Z has been obtained by post-processing time series of the pressure and velocity on the boundary from the LES at $f \simeq 380$ Hz.

Knowing the boundary impedance (Z), the sound speed (c_0) distribution and the flame response $n(x); \tau(x)$, and assuming that Z does not depend on ω ¹, a Galerkin finite element method is used to transform Eq. (7.9) into a non-linear eigenvalue problem of size N (the number of nodes in the finite element grid used to discretize the geometry) of the form :

$$[A][\hat{P}] + \omega[B][\hat{P}] + \omega^2[C][\hat{P}] = [D(\omega)][\hat{P}] \quad (7.10)$$

¹The same result holds if $1/Z = 1/Z_0 + C_1\omega + C_2/\omega$, where Z_0 , Z_1 and Z_2 are complex valued constants.

where $[\hat{P}]$ stands for the column vector containing the eigenmode at pulsation ω , and $[A]$, $[B]$, $[C]$ are square matrices depending only on the discretized geometry of the combustor. $[D(\omega)]$ is the unsteady contribution of the flame and depends on the pulsation through the combustion term $n(x)\exp(i\omega\tau(x))$. No efficient numerical method exists to solve this non-linear eigenvalue problem. However, in the case where the unsteady flame response is neglected, viz. $[D(\omega)] = 0$, Eq. (7.10) simplifies into a quadratic eigenvalue problem depending only on ω and ω^2 . A change of variable can then be used ([97]) to obtain an equivalent linear eigenvalue problem of size $2 \times N$. Several numerical methods can then be used to assess the eigenmodes. Direct methods (e.g. QR-based) are exact and have the advantage to provide all the eigenmodes. However, they can be expensive to solve for large problems ($N > 10^3$). Since only the first few frequencies are usually of interest from a physical point of view, it is more appropriate to use an iterative method which can be applied for large problems ($N > 10^5$) without difficulty. In AVSP, we are using a parallel implementation of the Arnoldi method ([101]), which enables to solve complex problems of size $N \simeq 20000$ in a few minutes.

Setting $[D(\omega)] = 0$ is equivalent to finding the eigenmodes of the burner, taking into account the presence of the flame through the mean temperature field but neglecting the flame effect as an acoustically active element. The boundary conditions are also considered for and this approximation can provide relevant information about the shape and real frequency of the first few modes of the combustor. However, since there is no coupling between the acoustics and the flame, there is no hope to discriminate between stable and unstable modes, which is the ultimate objective of this study. Under the assumption that the unsteady flame response acts as a small perturbation of the modes without combustion, a linear expansion technique can be developed to assess the imaginary part of ω , hence the stability of the perturbed modes ([98, 153]). Another path has been followed in this study in order to handle cases where the unsteady response of the flame changes the modes significantly and when the linear expansion is not justified. The non-linear eigenvalue problem Eq. (7.10) is then solved iteratively, the k^{th} iteration consisting in solving the quadratic eigenvalue problem in ω_k defined as :

$$([A] - [D(\omega_{k-1})])[\hat{P}] + \omega_k[B][\hat{P}] + \omega_k^2[C][\hat{P}] = 0 \quad (7.11)$$

A natural initialization is to set $[D(\omega_0)] = 0$ so that the computation of the modes without combustion is in fact the first step of the iteration loop. Usually, less than 5 iterations are enough to converge towards the complex pulsation and associated mode. This linearized approach to describe the stability of the burner in terms of modes has drawbacks but remains one of the basic tools to

study instabilities :

- The linearization is valid only for small amplitude perturbations, a condition which is obviously not true when limit cycles typical of combustion instabilities are observed in gas turbines. However, this assumption is valid when the instability grows ([154]) and helps to determine the unstable modes : such modes have to appear and grow before they reach a limit cycle and any analysis adapted to this early phase is of interest.
- Most acoustic tools work on linear regimes for which each oscillatory mode is independent of other modes. Many combustion instabilities exhibit non-linear coupling where high-frequency modes couple with low-frequency oscillations : classical papers from [35] mention such coupling. These were also observed in the experiment of [47] in which a 530 Hz mode (often called rumble) was systematically accompanied by a high-frequency mode (called screech) at 3750 Hz. The fact that combustion instabilities involve more than one mode of oscillation is one of the basis of theories by [155]. The tool presented above treats each mode individually and cannot simulate such phenomena.
- The description of the coupling between acoustics and combustion in such models is extremely crude. The response of the flame excited by an acoustic wave depends on several physical phenomena such as chemical reactions, species diffusion, vortex shedding, vortex-flame interaction, etc All these phenomena are not neglected in the present study but their cumulative effect is modeled through the global time scale τ and index n .

Despite these limitations, such tools are useful because they provide relevant information about the modes triggered by the acoustic/flame coupling while running fast : for the configuration described in section 7.5, only 8000 grid points were necessary to describe the geometry and obtain the first 4 modes. For comparison, half a million nodes were used to perform the LES discussed in section 7.6. A typical run for solving the quadratic eigenvalue problem of type Eq. (7.11) on this grid lasts 10 min by using 15 processors (R14000 500 MHz IP35) on an SGI O3800 parallel machine. Such tool can thus be used in the design process of new gas turbines to characterize their thermoacoustic modes. By describing the whole geometry between the compressor and the turbine, including all the injectors dispatched around the combustion chamber, such simulations would noticeably give unique information about the swirling modes that sometimes show up in large gas turbines. The difficult and computationally expensive task would be to compute the flame transfer function by performing a LES of the turbulent flame. Such simulation would be performed by considering an angular sector corresponding to only one injector, saving a huge amount of grid points and CPU resources.

7.4 Acoustic energy equation

The total acoustic energy equation is an integral form of the wave equation (7.1) which is quite useful to understand basic mechanisms of combustion instabilities. This equation cannot be used to predict unstable modes like the Helmholtz solver, but is a powerful method to analyze the results of an LES as done here. The conservation equation for the acoustic energy $e_1 = \frac{1}{2}\rho_0 u_1^2 + \frac{1}{2}\hat{p}^2/(\rho_0 c_0^2)$ is derived in [26] and can be written :

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} = s_1 - \nabla \cdot (\hat{p}\vec{u}_1) \quad \text{with} \quad s_1 = \frac{(\gamma-1)}{\gamma p_0} \hat{p}\dot{\omega}_{T1} \quad (7.12)$$

If integrated over the whole volume V of the combustor bounded by the surface A , it yields :

$$\frac{d}{dt} \int_V e_1 dV = \int_V s_1 dV - \int_A \hat{p}\vec{u}_1 \cdot \vec{n} dA \quad \text{or} \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E}_1 = \mathcal{S}_1 - \mathcal{F}_1 \quad (7.13)$$

where \vec{n} is the surface normal vector. This surface consists of walls or of inlet/outlet sections.

In Eq. (7.13), all terms are time dependent. The RHS source term \mathcal{S}_1 corresponds to the Rayleigh criterion ([8]) : it measures the correlation between unsteady pressure \hat{p} and unsteady heat release $\dot{\omega}_{T1}$ averaged over the whole chamber. It can act as a source or a sink term for the acoustic energy. The other RHS term \mathcal{F}_1 is less studied because it is impossible to measure experimentally. It is an acoustic flux integrated on all the boundaries. Walls have zero contribution in this term because the velocity perturbations \vec{u}_1 vanish on walls. However, \mathcal{F}_1 may be large on inlets and outlets where it is usually a loss term. Eq. (7.12) is therefore a generalization of the Rayleigh criterion : the total acoustic energy in the chamber \mathcal{E}_1 will grow if the acoustic gain term \mathcal{S}_1 is larger than the acoustic losses \mathcal{F}_1 . The magnitudes and relative importance of the two terms \mathcal{S}_1 and \mathcal{F}_1 are controversial issues in the field of combustion instabilities. For example, one important question is to know whether acoustic losses are important or not in the determination of limit cycles. For these limit cycles, the acoustic energy \mathcal{E}_1 must remain constant over a period of oscillations and Eq. (7.12) shows that such a cycle can be reached for two situations :

- The limit cycle may be *combustion controlled* : if the acoustic losses are small ($\mathcal{F}_1 = 0$), the pressure and heat release signals may adjust to give $\mathcal{S}_1 \simeq 0$. The limit cycle is reached when this phase shift leads to a zero Rayleigh term \mathcal{S}_1 as observed in certain experiments. Physically, this is often obtained when the heat release oscillations saturate (because the minimum reaction rate reaches zero at some instant of the cycle) or when the phase between pressure and heat release changes so that combustion itself controls the limit cycle amplitude.

Total flow rate (kg/s)	axial flow rate (kg/s)	Equivalence ratio	Reynolds number (burner mouth)
22.10^{-3}	4.10^{-3}	0.8	46700

TAB. 7.2 – Flow parameters for combustion cases.

- The limit cycle may be *acoustically controlled* : the source term S_1 may be large (pressure and heat release are oscillating in phase) but the acoustic losses are large too and compensate S_1 . In this case, the final amplitude of oscillation is controlled by the acoustic impedances of outlets and inlets.

Clearly, these two solutions lead to very different approaches of combustion instabilities : if the limit cycle is combustion controlled, the acoustic behavior of inlets and outlets have a limited effect on the stability ; if it is acoustically controlled, acoustic impedances of inlets and outlets become essential elements of any method (experimental or numerical). In the present study, the LES results are post processed to measure all terms of Eq. (7.12) and determine whether the unstable mode is combustion or acoustically controlled (see Section 7.6.3).

7.5 Configuration

7.5.1 Geometry : a swirled premixed combustor

The methodologies described in the previous sections were tested for a swirled combustor displayed in Fig. 7.1. The configuration is typical of swirled combustion : premixed gases are introduced tangentially into a long cylindrical duct feeding the combustion chamber. The tangential injection creates the swirl required for stabilization. The fuel is propane. The two independent swirler elements allow fuel staging. The staging parameter α is defined as the ratio of fuel flow rate of the first to the second swirler. The regime studied here corresponds to the parameters given in Table 7.2. The staging of the burners corresponds to $\alpha = 0.3$.

7.5.2 Boundary conditions

Specifying boundary conditions is a critical issue for compressible flows. Here, the NSCBC technique ([26, 73]) was used at the outlet. The level of reflection of this boundary can be controlled by changing the relaxation coefficient σ of the wave correction ([156]), which determines the amplitude of the incoming

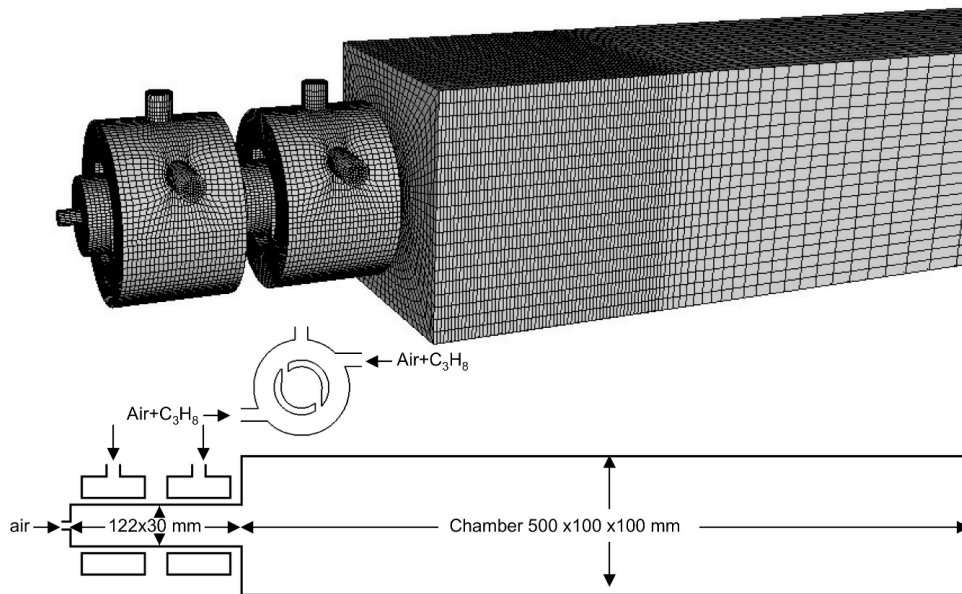


FIG. 7.1 – Configuration : a staged swirled combustor.

wave L_1 entering the computational domain :

$$L_1 = \sigma(p - p_t) \quad (7.14)$$

where p_t is the prescribed pressure value at infinity. Eq. 7.14 acts on the flow like a spring mechanism with a stiffness σ . The impedance of the boundary is a function of σ which can be obtained analytically for simple case ([156]). For more complex cases, this formula gives a good approximation of the actual impedance. For small values of σ , Eq. 7.14 keeps the pressure p close to its target value p_t while letting acoustic wave go out at the same time ([26]) : the outlet is non reflecting. When large values of σ are used, the outlet pressure remains strictly equal to p_t and the outlet becomes totally reflecting. Two sets of computation will be shown (Table 7.3). The first one (called LEAK) corresponds to a case where the spring stiffness σ is small so that the outlet is non reflecting and the acoustic waves are evacuated with very small reflection levels. For the second set (REF), σ is large and the outlet is reflecting (the pressure oscillation is almost zero).

7.6 Results

7.6.1 Stable flow

The first computation corresponds to the situation where the outlet section is non reflecting (case LEAK in Table 7.3). For this case, the acoustic feedback

Case	Inlet σ	Outlet σ	Characteristic	Reduced impedance
LEAK	1000	1000	Non Reflecting outlet	$-0.85 + 0.35i$
REF	1000	10000	Reflecting outlet	$-0.04 + 0.21i$

TAB. 7.3 – Acoustic inlet and outlet boundaries for the runs REF and LEAK. The last column comes from a post-processing of times series of velocity and pressure. The complex valued impedance was used as boundary condition in AVSP.

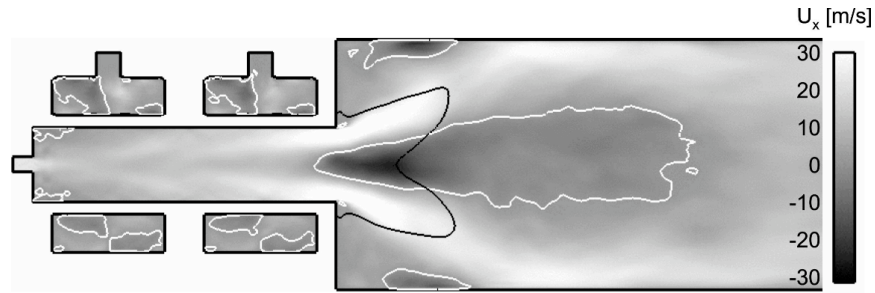


FIG. 7.2 – Mean axial velocity field, white line : iso- $u_x = 0$, black line : iso- $T = 1500$ K for stable combustion.

is minimized and the flame does not exhibit any strong unstable movement. The mean velocity and fuel mass fraction fields are displayed in Fig. 7.2 and Fig. 7.3. As expected, the downstream part of the central recirculation zone is filled by burnt gases and stabilize the turbulent flame.

7.6.2 Acoustic analysis

Using the mean temperature fields given by LES, the Helmholtz solver was used to obtain the thermoacoustic eigenmodes of the burner. For this analysis, the active effect of the flame is modelled using a transfer function ($n(x)$ and $\tau(x)$) obtained with LES, the mean sound speed is given by the average LES

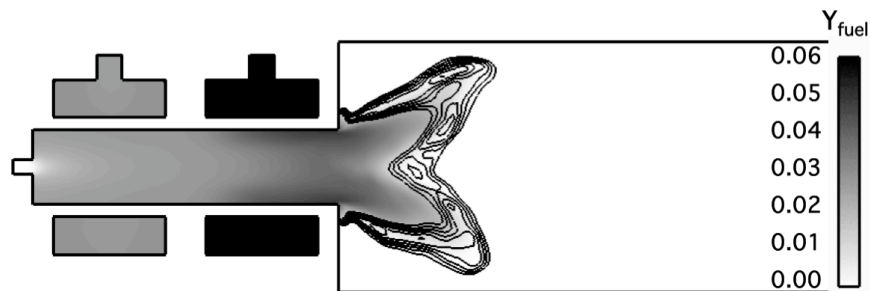


FIG. 7.3 – Mean fuel mass fraction field, black lines : iso-reaction rate for stable combustion.

Mode - no active flame	Frequency [Hz]	Growth rate [$rd.s^{-1}$]	Mode - active flame	Frequency [Hz]	Growth rate [$rd.s^{-1}$]
1	308	-42	1	304	-672
2	435	-23	2	432	653
3	833	-3.1	3	835	5
4	1184	-63	4	1136	232

TAB. 7.4 – AVSP results : frequencies and growth rates of the first four modes predicted by the acoustic solver with and without acoustics/flame coupling.

fields and the impedances of the REF run (Table 7.3) are used at the outlet and inlet of the combustor. When the outlet is set to a non reflecting condition similar to run LEAK, the acoustic solver predicts that all modes are damped. The frequency and decay/growth rate of the first four modes obtained with ($n(x)$ and $\tau(x)$ from LES) or without ($n(x)$ set to zero) acoustics/flame coupling in the REF case are displayed in Tab. 7.4. Note that the first four modes are mainly longitudinal. When the unsteady effect of the flame is not accounted for, all modes are damped (negative growth rate), because the mechanism which feeds the instability is not present and acoustic losses through the inlet/outlet boundary are not compensated. When the flame transfer function obtained from LES is used, the first mode is drastically damped by the acoustics/flame interaction, while the second mode is predicted to be the most unstable. The pressure node in the second mode vanishes when the acoustic/flame interaction is taken into account. The 3rd and 4th modes are only marginally triggered. Recall however that the flame transfer function has been assessed by post-processing the LES results in the 400 Hz range so that it is not clear whether the acoustics/flame interaction is properly accounted for as far as modes in the 1000 Hz range are concerned. Still, accounting for the flame transfer function allowed to discriminate between the first two modes of the burner although neither big difference in their shape can be found in Fig. 7.4 nor clear frequency discrimination can be stated compared to LES results (380 Hz).

7.6.3 LES results

In addition to the average results of Section 7.6.1, LES also reveals that the combustor can exhibit a strong unstable mode when the outlet is acoustically closed (case REF). In this case, soon after ignition, the pressure and the global heat release start oscillating (Fig. 7.6 a) at 380 Hz which is very close to the mode predicted by AVSP in Section 7.6.2. To analyse the behavior of this instability, the following sequence is set up :

- Starting from a stable flame (LEAK), the outlet impedance is changed to

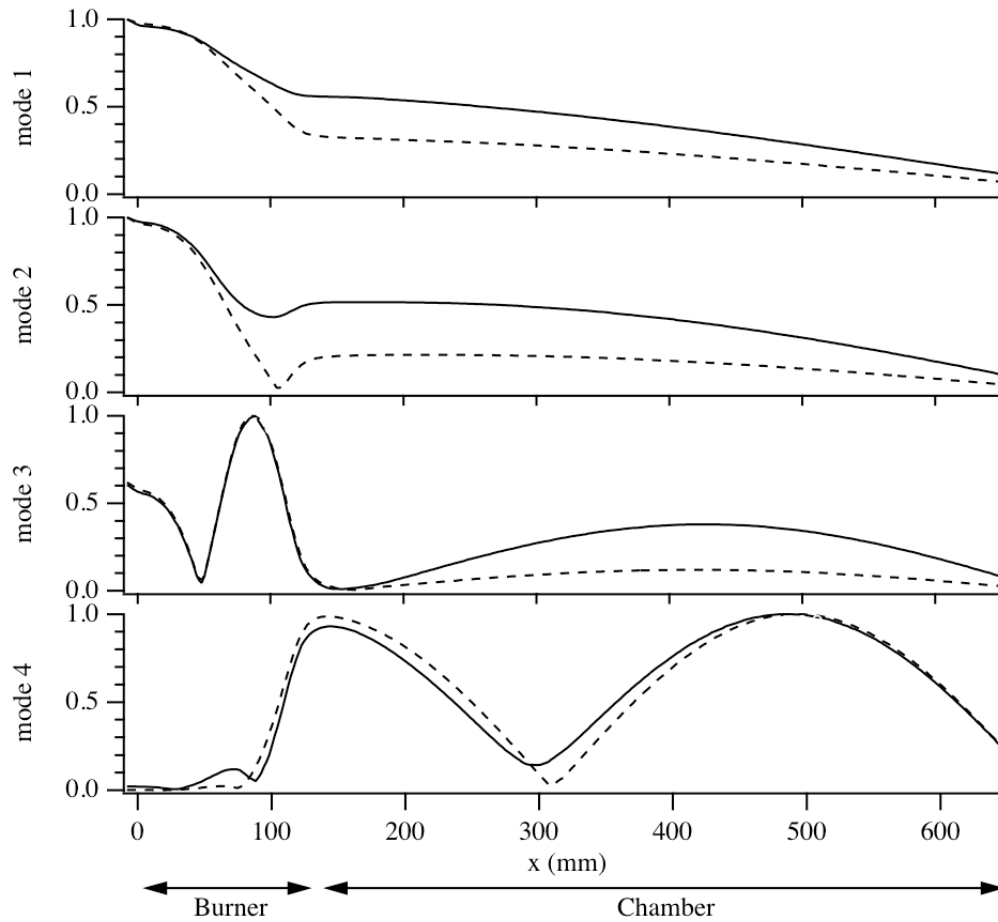


FIG. 7.4 – Longitudinal structure of the first four modes obtained with acoustic analysis : Normalized p_1^{rms} evolution along burner axis with acoustics/flame coupling (—) and without (----).

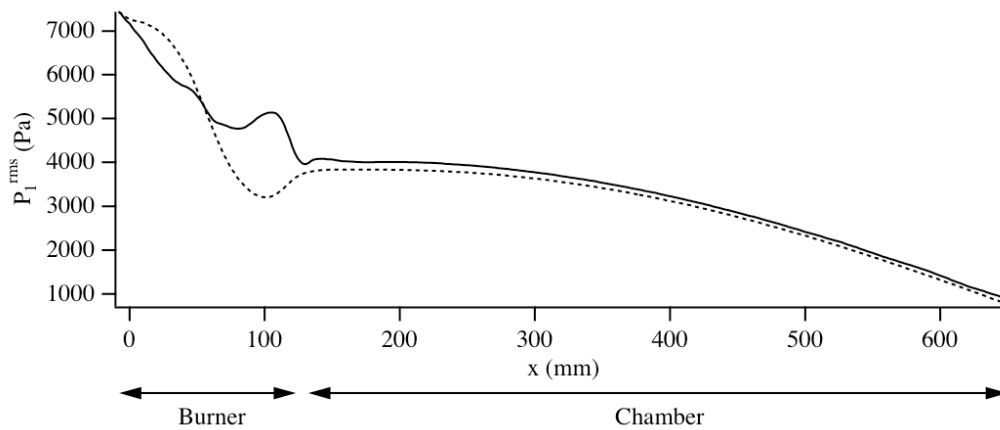


FIG. 7.5 – Comparison of LES (—) and acoustic (----) solvers : RMS pressure fluctuations p_1^{rms} along burner axis.

become reflecting (case REF) at time $t = 0.127s$ (Fig. 7.6). The oscillation grows and reaches a limit cycle at a frequency of 380 Hz mode which is close to mode 2 predicted by the Helmholtz code (Section 7.6.2) at 432 Hz. Its mode structure is also very well predicted (Fig. 7.5) : the pressure perturbation p_1^{rms} measured in the LES matches the acoustic structure of the 432 Hz mode predicted by AVSP.

- At time $t = 0.173s$, the outlet impedance is switched again to a non reflecting condition (case LEAK) so that the instability disappears.

This scenario provides three phases which are studied sequentially :

- A linear growth between times 0.127s and 0.150s (Section 7.6.4),
- A limit cycle between times 0.150s and 0.173s (Section 7.6.5),
- A decay phase starting at $t = 0.173s$ (Section 7.6.6)

For each phase, the instability is analyzed in terms of flame shape, flame oscillation and phase between heat release and pressure. Moreover, the acoustic energy equation budget is closed and all terms are analyzed.

7.6.4 Growth phase

Once the outlet boundary is acoustically closed ($t = 0.127s$), the thermoacoustic instability starts. Fig. 7.6 displays the time variations of the combustion source term \mathcal{S}_1 , the acoustic losses \mathcal{F}_1 (Fig. 7.6 b), the total acoustic energy in the chamber \mathcal{E}_1 (Fig. 7.6 d) and shows that the budget of Eq. 7.13 is very well closed by the LES data : the difference $\mathcal{S}_1 - \mathcal{F}_1$ matches the time derivative of \mathcal{E}_1 (Fig. 7.6 c). This validates both the LES results and the wave equation 7.13. It is also the first example of such a treatment for a resonating combustor. Since

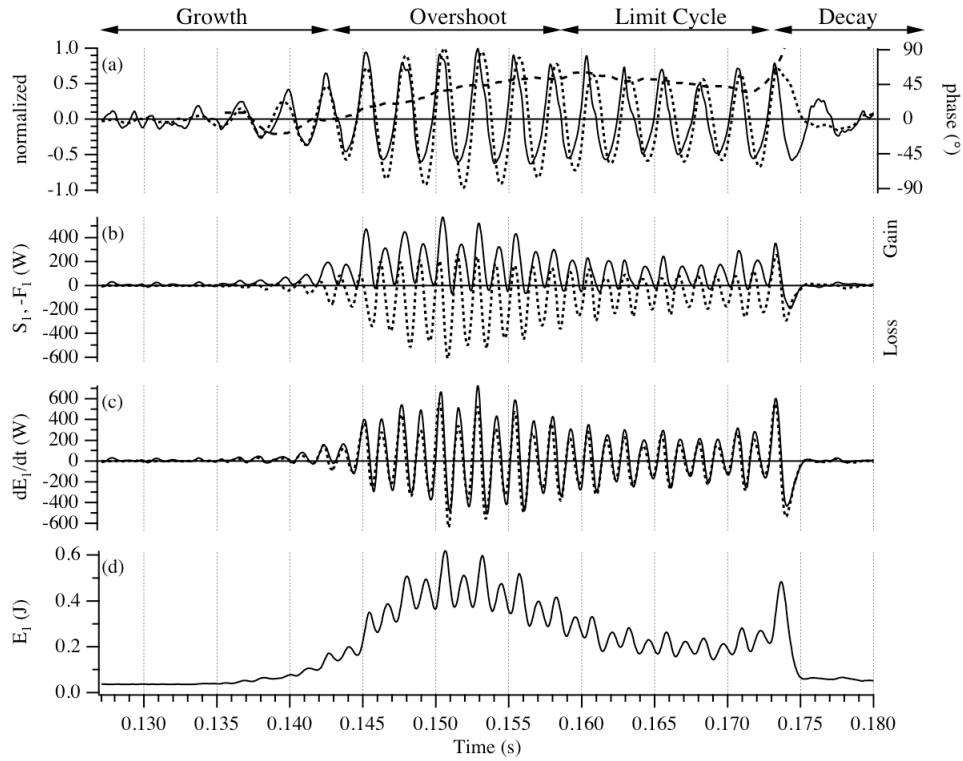


FIG. 7.6 – Closure of the acoustic energy equation : (a) mean normalized value of pressure (—), heat release (·····) and phase angle between these signals (----); (b) S_1 (—) and \mathcal{F}_1 (·····); (c) $S_1 - \mathcal{F}_1$ (—) and $\partial \mathcal{E}_1 / \partial t$ (·····); (d) \mathcal{E}_1 .

the budget is closed, individual terms can then be analyzed.

The phase angle between pressure and heat release is displayed in Fig. 7.6a. During the growth phase, it is close to zero and slowly shifting towards $\pi/4$, leading to a strong coupling between pressure and heat release i.e. a positive S_1 term. During the growth phase, the source term S_1 is large and always positive (Fig. 7.6 b), because the phase angle stays in the $[-\pi/2; \pi/2]$ range. Fig. 7.6 b shows clearly that the acoustic losses balance the reacting term S_1 in the acoustic budget equation.

7.6.5 Limit cycle

At $t=0.150s$, the instability reaches a limit cycle at 380 Hz. Before reaching this limit cycle, a large overshoot of acoustic energy is observed : this is typical of combustion instabilities and it has been observed experimentally. Fig. 7.6 shows that reaching the non-linear zone, the phase difference between pressure and heat release increases from zero to $\pi/4$ in the limit cycle zone. The drift of this phase difference together with increasing acoustic losses lead to the

saturation of the instability.

The coupling loop between p_1 and $\dot{\omega}_{T1}$ can be identified from LES as follows. The longitudinal mode induces the formation of a vortex ring at the dump plane. This vortex ring strongly interacts in phase with the flame. Fig. 7.7 illustrates the interaction between the acoustically induced vortex ring and the flame brush. Fig. 7.8 allows to locate LES snapshots in the acoustic period and displays the mean pressure fluctuation \hat{p} in the flame zone, the heat release fluctuation $\dot{\omega}_{T1}$, and the fluctuation of the mean velocity in the dump plane u_1^{dump} . At instant 1, a vortex ring appears at the dump plane when du_1^{dump}/dt is maximum. The ring structure detaches and is convected through the flame by the mean flow (instants 2, 3 and 4). During the period 1-3 the flow incoming from the injector pipe stretches the flame, increasing its area, whereas the flame wrinkling by the vortex ring remains weak. Consequently $\dot{\omega}_{T1}$ increases with a medium slope. Between points 3 and 5 the vortex ring is clearly wrinkling the flame and $\dot{\omega}_{T1}$ increases faster. Moreover, the vortex ring is gradually destroyed, and its global coherence disappears between instants 4 and 5, at a moment when du_1^{dump}/dt is minimum. At instant 5 some coherent structures are still interacting with the flame, producing (noisy) flame pockets and cusps. After 5, the flame burns out the fresh gases present in the chamber and propagates back to the injection pipe decreasing the overall flame surface and $\dot{\omega}_{T1}$.

7.6.6 Decay phase

The decay phase is triggered by the sudden change in the acoustic outlet boundary condition switching to non-reflecting (LEAK). The phase angle $\phi_{p\omega}$ increases by a large amount : $\phi_{p\omega} > \pi/2$ at $t = 0.174s$ i.e $1.2ms$ after relaxing outlet pressure (Fig. 7.6). At this time S_1 becomes globally negative for the first time and the instability is rapidly damped. The acoustic losses actually become positive (gain term) during this last oscillation but the instability *engine* is broken and the Rayleigh term S_1 becomes negative during a half cycle ($0.173 < t < 0.175ms$ on Fig. 7.6) leading to the immediate disappearance of all unstable activity.

7.7 Conclusions

Three complementary tools have been used to analyse the instability modes of a staged swirled combustor : full compressible LES, Helmholtz analysis and budget of acoustic energy. The two latter methods utilize LES results but provide essential new elements : the Helmholtz results allow the exact identi-

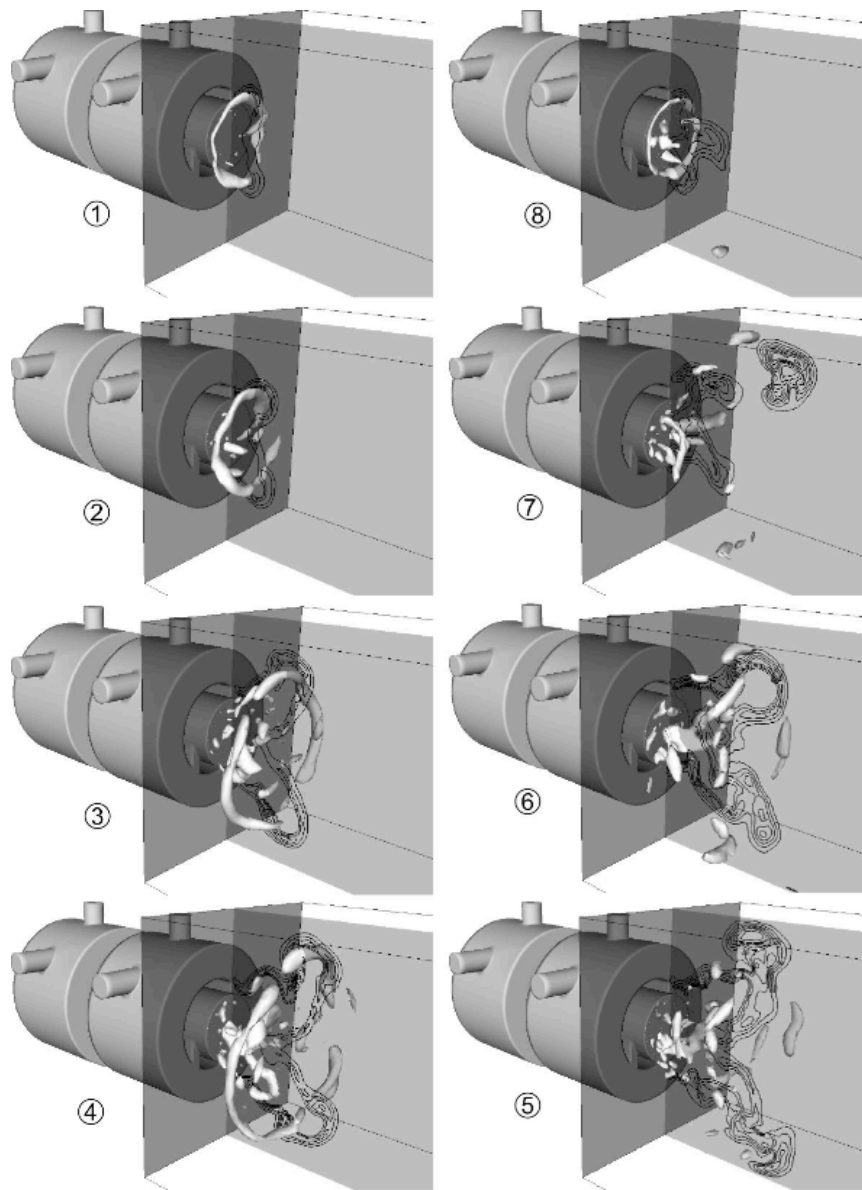


FIG. 7.7 – Vortex ring shedding for a period during the limit cycle, isosurface : Q vortex criterion ; black lines : iso-reaction rate.

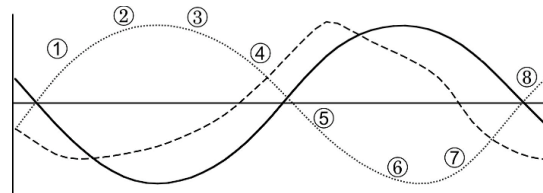


FIG. 7.8 – Time signals during the limit cycle and snapshots corresponding to the previous figure : pressure (—), inlet velocity (.....) and total heat release (----)

fication of modes appearing during the instability, while the budget of acoustic energy demonstrates that the Rayleigh criterion is not the only or even the largest term in the acoustic energy equation : acoustic losses at the outlet of the combustor contribute significantly to the budget of acoustic energy and determine the levels of oscillation amplitudes as well as their appearance.

Acknowledgments

Certain numerical simulations have been conducted on the computers of the CINES and IDRIS french national computing centers. Simulations have been supported partly by ALSTOM POWER and by the EC program (WP2) FUEL-CHIEF.

Conclusion et Perspectives

L'objectif de cette thèse était de développer des outils numériques d'analyse acoustique susceptibles de fournir une évaluation rapide de la stabilité, la structure spatiale et la fréquence des premiers modes propres de configurations complexes de type turbine à gaz. Pour se faire, deux stratégies différentes mais complémentaires ont été élaborées dans le cadre de l'acoustique linéaire :

- Une approche dite de "code réseau" dans laquelle une configuration donnée est discrétisée à l'aide d'une succession de quelques dizaines d'éléments aux fonctions de transfert acoustiques connues et paramétrées par la fréquence propre recherchée. Afin de pleinement tirer partie de la rapidité et de la souplesse de cette approche, celle-ci a été volontairement restreinte aux seules ondes longitudinales.
- Une approche dite "d'éléments/volumes finis", requérant des moyens de calculs plus importants que la précédente mais pleinement tridimensionnelle et capable de prendre en compte des champs moyens et des géométries détaillées. Le parallélisme des méthodes numériques employées autorisent de plus l'étude de configurations réalistes entières.

Dans les deux cas, la détermination de la réponse acoustique du système étudié s'avère nettement plus rapide que celle obtenue à l'aide de simulations numériques instationnaires classiques du type LES, et ce, pour deux raisons principales :

- d'une part les équations de la mécanique des fluides sont appliquées aux seules fluctuations acoustiques permettant ainsi de restreindre le système à une seule équation (l'équation d'onde) et à une seule variable (la fluctuation de pression).
- d'autre part les grandes longueurs d'ondes des modes recherchés permettent l'utilisation de maillages beaucoup moins denses que leurs équivalents LES et autres simulations numériques instationnaires.

En outre, l'approche fréquentielle retenue pour les deux types de codes facilite l'utilisation de conditions limites d'impédances générales.

Un premier exemple d'application de cette méthodologie a été décrit au chapitre 5. Il montre la complémentarité de ces outils avec la simulation LES

sur le cas d'une chambre de combustion expérimentale. L'analyse acoustique de cette configuration réalisée à l'aide du code AVSP permet non seulement de déterminer la nature de l'instabilité mise en évidence dans la simulation LES mais en outre, elle montre l'existence d'un mode original, à savoir un mode tournant d'origine purement acoustique et non hydrodynamique. L'autre intérêt des outils développés au cours de cette thèse réside dans leur capacité à évaluer la stabilité des modes propres de configurations complexes. Ceci constitue le point dur de ce travail. Pour se faire, une modélisation du terme source thermoacoustique sous la forme d'une fonction de transfert de flamme a été utilisée. Compte-tenu des phénomènes à petite échelle mis en jeu dans ce type de mécanisme, la fonction de transfert de flamme requise est obtenue par mesure expérimentale ou par mesure sur simulations numériques. L'une des originalités de cette étude réside cependant dans la résolution du problème aux valeurs propres non classique hérité de la situation avec une flamme active acoustiquement. Deux méthodes ont été élaborées dans le cadre du code AVSP : la première s'appuie sur un développement asymptotique autour des modes sans flamme active ; la deuxième repose sur la recherche des modes propres avec flamme active par une méthode de point fixe, à chaque itération la dépendance fréquentielle de la fonction de transfert de flamme est figée ce qui permet d'obtenir un problème aux valeurs propres classique. En plus de validations académiques, ces techniques ont été respectivement appliquées à une turbine expérimentale annulaire et à une chambre de combustion munie d'un injecteur swirlé. Dans ce dernier cas, l'instabilité mise en évidence par la LES a été correctement prédite ainsi que la forme spatiale du mode instable.

A l'issue de ce travail de thèse, la viabilité du concept de prédiction des instabilités de combustion par association des outils acoustiques précédemment décrits et de la simulation LES apparaît démontrée. La première perspective consécutive à cette conclusion concerne donc l'application de ces outils dans les étapes de conception industrielle. Celle-ci pourrait alors se dérouler de la manière suivante : La simulation numérique par LES pourrait être réservée au seul calcul de la fonction de transfert de flamme ce qui nécessiterait la prise en compte d'un seul brûleur ou d'une seule tranche parmi des dizaines dans le cas typique d'une configuration de turbine à gaz annulaire. La seconde étape consisterait à introduire la fonction de transfert ainsi mesurée dans le code acoustique qui, du fait du parallélisme et des maillages peu denses qu'il utilise, pourrait quant à lui prendre en compte l'ensemble de la configuration. La détermination de la stabilité de modes propres azimuthaux, dont l'importance est cruciale sur ce type de configuration, serait en particulier possible, et ce, à un coût beaucoup moindre que celui occasionné par une simulation

LES appliquée à la configuration entière. Cette dernière alternative d'ailleurs n'a encore jamais pu être réalisée à l'heure actuelle. Par ailleurs, du point de vue technique, plusieurs autres perspectives d'évolution se dégagent à l'issue de cette étude :

- la première concerne la prise en compte d'un champ de vitesse moyenne non identiquement nulle. Les résultats obtenus sur les divers exemples d'application ont montré au cours de cette étude que les hypothèses de modélisation retenues au chapitre 1 sont vraisemblablement vérifiées dans le contexte applicatif aux turbines à gaz. L'écart maximum entre fréquences prédites et mesurées est de l'ordre de 10 % comme dans l'exemple du chapitre 7. Une première piste expliquant cet écart relatif pourrait donc être le rôle de l'écoulement moyen. Toutefois, la prise en compte d'une simple vitesse convective dans les équations ne devrait certainement pas induire de changements notables du fait des faibles nombres de Mach dans les configurations étudiées. En revanche, l'écart relatif peut éventuellement être imputable aux gradients de vitesse moyenne au niveau du front de flamme. Ceux-ci pourraient induire une réflexion locale aboutissant à un léger déphasage des ondes acoustiques à leurs niveaux, d'où un écart en fréquence. Cependant la prise en compte de ce phénomène conduit à complexifier largement la formulation du chapitre 1. Non seulement il n'existe plus de proportionnalité directe entre les fluctuations acoustiques de vitesse et de pression mais en outre il devient difficile de modéliser le problème par une seule équation d'onde. Il est vraisemblable qu'une formulation vectorielle en (p', \mathbf{u}') soit préférable. Toutefois la taille du système est alors augmentée.
- Une autre perspective d'évolution concerne la prise en compte d'effets non-linéaires. Les méthodes linéaires ne s'intéressent qu'à la phase de croissance des instabilités mais celles-ci peuvent aboutir à un cycle limite, au terme d'un certain laps de temps, dont l'amplitude demeure acceptable pour le dispositif. En conséquence, on peut penser que les méthodes linéaires précédemment décrites ont une tendance à surestimer l'importance des instabilités de combustion. Un deuxième point concernant la prise en compte des effets non linéaires est relatif aux éventuels excitations de modes hautes fréquences par des modes basses fréquences. Ces mécanismes, notamment rencontrés dans des instabilités de combustion aéronautiques appelées "screech", ne peuvent pas être prédits par les codes de cette étude dans leur forme actuelle. Leur adaptation dans le cadre d'une formulation non linéaire s'avérerait nécessaire pour remplir cet objectif supplémentaire.

Bibliographie

- [1] Culick, F.E.C., "Some recent results for nonlinear acoustic in combustion chambers." *AIAA Journal* , 1994. 32(1) : p. 146-169.
- [2] Nottin, C., "Développement de méthodes de prévision des instabilités de combustion dans les foyers prémélangés". 2002, Centrale Paris : Paris,France.
- [3] Paschereit, C.O., P. Flohr, and B. Schuermans. "Prediction of combustion oscillations in gas turbine combustors". in 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 2001. Reno, NV.
- [4] Krebs, W., et al., "Thermoacoustic stability chart for high intense gas turbine combustion systems." *Combust. Sci. Tech.* , 2002. 174 : p. 99-128.
- [5] Légier, J.-P., "Simulations numériques des instabilités de combustion dans les foyers aéronautiques". 2001, INP Toulouse : Toulouse.
- [6] Spradley, I.E. and S.W.K. Yuan, "Prediction of thermal acoustic oscillations (TAOs) in the claes solid CO₂/NEON system." *Advances in Cryogenic Engineering*, 1992. 37, Part A.
- [7] Garrett, S. and S. Backhaus, "Le son transformé en froid." *Pour la science*, 2001(Dossier hors-série, Le monde des sons) : p. 112-117.
- [8] Rayleigh, L., "The explanation of certain acoustic phenomena." *Nature*, 1878. July 18 : p. 319-321.
- [9] Fernandes, E.C. "Unsteady flames and the Rayleigh criterion". in Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Unsteady Combustion. September 6-17,1993. Praia de Granja, Portugal : Kluwer Academic.
- [10] Crocco, L., "Aspects of combustion instability in liquid propellant rocket motors. Part I." *J. American Rocket Society* , 1951. 21 : p. 163-178.
- [11] Crocco, L., "Aspects of combustion instability in liquid propellant rocket

- motors. Part II." *J. American Rocket Society* , 1952. 21 and 22 : p. -.
- [12] Crocco, L. "Theoretical studies on liquid propellant rocket instability". in 10th Symp. (Int.) on Combustion. 1965 : The Combustion Institute, Pittsburgh.
- [13] Culick, F.E.C., "Non linear behavior of acoustic waves in combustion chambers." *Astronautica Acta*, 1976. 3 : p. 714-757.
- [14] Bahr, D.W. "Aircraft Turbine Engine NOx Emission Abatement". in Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Unsteady Combustion. September 6-17,1993. Praia de Granja, Portugal : Kluwer Academic.
- [15] Lefebvre, A.H., "Gas Turbine Combustion, Second Edition. 1998 : Taylor and Francis.
- [16] Keller, J.J., "Thermoacoustic Oscillations in Combustion Chambers of Gas Turbines." *AIAA Journal* , 1995. 33(12) : p. 2280-2287.
- [17] Lang, W., T. Poinsot, and S. Candel, "Active control of combustion instability." *Combust. Flame* , 1987. 70 : p. 281-289.
- [18] McManus, K., T. Poinsot, and S. Candel, "A review of active control of combustion instabilities." *Prog. Energy Comb. Sci.* , 1993. 19 : p. 1-29.
- [19] Sreenivasan, K.R. and S. Raghu, "The control of combustion instability : A perspective." *Current Science*, 2000. 79(6) : p. 867-883.
- [20] Hathout, J.P., et al. "Role of actuation in combustion control". in IEEE Conference on Control Applications/CASD. August 22-27,1999. Hawaiï.
- [21] Paschereit, C.O. and E. Gutmark. "Control of Thermoacoustic Instabilities in a Premixed Combustor by Fuel Modulation". in 37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 1999. Reno, NV.
- [22] Barrère, M. and F.A. Williams, "Comparison of combustion instabilities found in various types of combustion chambers." *Proc. of the Combustion Institute*, 1968. 12 : p. 169-181.
- [23] Clavin, P., "Dynamic behavior of premixed flame fronts in laminar and turbulent flows." *Prog. Energy Comb. Sci.* , 1985. 11 : p. 1-59.
- [24] Borghi, R. and M. Champion, "Modélisation et théorie des flammes. 2000 : Editions Technip.

- [25] Poinso, T. and D. Veynante, "Combustion", in Encyclopedia of Computational Mechanics, R.e.d.B. Erwin Stein, Thomas J.R. Hughes, Editor. 2004, Wiley.
- [26] Poinso, T. and D. Veynante, "Theoretical and numerical combustion. 2001 : R.T. Edwards.
- [27] Ho, C.M. and P. Huerre, "Perturbed free shear layers." *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1984. 16 : p. 365.
- [28] White, F.M., "Viscous fluid flow. 1991, New-York : McGraw-Hill.
- [29] Gupta, A.K., D.G. Lilley, and N. Syred, "Swirl flows. 1984 : Abacus Press.
- [30] Huang, Y., et al., "Large Eddy Simulation of combustion dynamics of lean-premixed swirl-stabilized combustor." *J. Prop. Power* , 2003. 19(5) : p. 782-794.
- [31] Loiseleux, T., J.-M. Chomaz, and P. Huerre, "The effect of swirl on jets and wakes : linear stability of the rankine vortex with axial flow." *Physics of fluids*, 1998. 10 : p. 1120-1134.
- [32] Selle, L., et al., "Compressible Large-Eddy Simulation of turbulent combustion in complex geometry on unstructured meshes." *Combust. Flame* , 2004. 137(4) : p. 489-505.
- [33] Laverdant, A., "Contribution à l'étude des instabilités de combustion des foyers aérobies". 1992, ONERA, France.
- [34] Lucas, L. and D. Rockwell, "Self-excited jet : upstream modulation and multiple frequencies." *J. Fluid Mech.* , 1984. 147 : p. 333-352.
- [35] Rogers, D.E. and F.E. Marble, "A mechanism for high frequency oscillations in ramjet combustors and afterburners." *Jet Propulsion*, 1956. 26 : p. 456-462.
- [36] Marble, F.E. and S. Candel, "Acoustic disturbances from gas nonuniformities convected through a nozzle." *J. Sound Vibration* , 1977. 55 : p. 225-243.
- [37] Eckstein, J., et al. "Experimental study on the role of entropy waves in low-frequency oscillations for a diffusion burner". in ASME Turbo Expo. 2004. Vienna, Austria.
- [38] Putnam, A.A., "Combustion driven oscillations in industry ". Fuel and

Energy Science Series, J.M. Beer ed. 1971 : American Elsevier.

[39] Nicoud, F. and T. Poinsot, "Fluctuating energies and stability criteria for thermoacoustic instabilities : is the Rayleigh criterion right ?" *Combust. Flame* , 2004. submitted.

[40] Polifke, W. "Combustion Instabilities, VKI Lectures Series". in Advances in Aeroacoustics and applications. March 15-19, 2004. von Karman institute for fluid dynamics.

[41] Ffowcs Williams, J.E., "Sound Sources in Aerodynamics - Fact and Fiction." *AIAA Journal* , 1982. 20(3) : p. 307-315.

[42] Schuller, T., "Mécanismes de Couplage dans les Interactions Acoustique-Combustion". 2003, Ecole Centrale de Paris.

[43] Clavin, P., P. Pelce, and L. He, "One-dimensional vibratory instability of planar flames propagating in tubes." *J. Fluid Mech.*, 1990. 216 : p. 299-322.

[44] Searby, G. and D. Rochwerger, "A parametric acoustic instability in pre-mixed flames." *J. Fluids Mech.*, 1991. 231 : p. 529-543.

[45] Boyer, L. and J. Quinard, "On the dynamics of anchored flames." *Combust. Flame* , 1990. 82 : p. 51-65.

[46] Schuller, T., D. Durox, and S. Candel, "A unified model for the prediction of laminar flame transfer functions : comparisons between conical and V-flames dynamics." *Combust. Flame* , 2003. 134 : p. 21-34.

[47] Poinsot, T., et al., "Vortex driven acoustically coupled combustion instabilities." *J. Fluid Mech.* , 1987. 177 : p. 265-292.

[48] Smith, D.A. and E.E. Zukoski. "Combustion instability sustained by unsteady vortex combustion". in 21st Joint Propulsion Conference. 1985. Monterey.

[49] Keller, J.O. and J.W. Daily, "The effects of highly exothermic chemical reaction on a two-dimensional mixing layer." *AIAA Journal* , 1985. 23(12) : p. 1937-1945.

[50] Lieuwen, T. and B.T. Zinn, "The Role of Equivalence Ratio Oscillations In Driving Combustion Instabilities In Low NO_x Gas Turbines." *Proc. of the Combustion Institute*, 1998. 27 : p. 1809-1816.

- [51] Flohr, P., C.O. Paschereit, and V. Bellucci. "Steady CFD Analysis for Gas Turbine Burner Transfer Functions". in 41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. January 6-9,2003. Reno,NV.
- [52] Sattelmayer, T. "Influence of the combustor aerodynamics in combustion instabilities from equivalence ratio fluctuations". in International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition. 2000. Munich : ASME paper.
- [53] Marble, F.E. and S. Candel. "Acoustic attenuation by vaporization of liquid droplets. Application to noise reduction in fans and ducts". in 7th Fluid and Plasma Dynamics Conference. 1974. Palo Alto.
- [54] Sirignano, W.A., "Droplet Vaporization in an Oscillating Gas", in Fluid Dynamics and Transport of Droplets and Sprays, C.U. Press, Editor. 1999. p. 73-76.
- [55] Duvvur, A., C.H. Chiang, and W.A. Sirignano, "Oscillatory fuel Droplet Vaporization : Driving Mechanism for Combustion Instability." *Journal of Propulsion and Power*, 1996. 12 : p. 358-365.
- [56] Kuo, K.K., "Principles of Combustion. 1986, New York : John Wiley.
- [57] Crighton, D.G., et al., "Modern methods in analytical acoustics. Lecture Notes. 1992, New-York : Springer Verlag.
- [58] Dowling, A.P., "The calculation of thermoacoustic oscillations." *J. Sound Vibration* , 1995. 180(4) : p. 557-581.
- [59] Culick, F.E.C. "Combustion Instabilities in Liquid-Fueled Propulsion Systems- An Overview". in AGARD 72B PEP Meeting. 1988. Bath, England.
- [60] Lamarque, N., "Ecriture et validation d'un code permettant le calcul l'impédance d'entrée d'une tuyère". 2004, Institut National Polytechnique de Toulouse : Toulouse,France.
- [61] Le Helley, P., "Etude theorique et experimentale des instabilites de combustion et de leur controle dans un bruleur premelange", in EM2C Laboratory. 1994, Ecole Centrale de Paris : Chatenay Malabry.
- [62] Pierce, "Acoustics : an introduction to its physical principles and applications ". Second Edition ed. 1991, New York : McGraw Hill.
- [63] Kinsler, L.E., et al., "Fundamental of acoustics. 1982 : John Wiley.

- [64] Dowling, A.P., "Nonlinear self-excited oscillations of a ducted flame." *J. Fluid Mech.*, 1997. 346 : p. 271-290.
- [65] Crocco, L. and S.I. Cheng, "Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors, Vol. Agardograph No 8. 1956 : Butterworths Science.
- [66] Candel, S., C. Huynh, and T. Poinso. "Some modeling methods of combustion instabilities". in *Unsteady combustion*. 1996 : Nato ASI Series, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [67] Truffin, K. and T. Poinso, "Comparison and extension of methods for acoustic identification of burners." *Technical Report*, 2004.
- [68] Varoquié, B., et al., "Experimental analysis and large eddy simulation to determine the response of non-premixed flame submitted to acoustic forcing." *Proc. of the Combustion Institute*, 2002. 29 : p. 1965-1970.
- [69] Kunze, K., "Untersuchung des thermoakustischen flammen ubertragungsverhaltens in einer ringbrennkammer.. (2004)". 2004, Lehrstuhl für Thermodynamik Technische Universität München : Munich, Germany.
- [70] Matsui, Y., "An Experimental Study on Pyro-Acoustic Amplification of Premixed Laminar Flames." *Combust. Flame*, 1981. 43 : p. 199-209.
- [71] Fleifil, M., et al., "Response of a Laminar Premixed Flame to Flow Oscillations : A Kinematic Model and Thermoacoustic Instability Results." *Combust. Flame*, 1996. 106 : p. 487-510.
- [72] Dowling, A.P., "A kinematic model of ducted flame." *J. Fluid Mech.*, 1999. 394 : p. 51-72.
- [73] Poinso, T. and S. Lele, "Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows." *J. Comput. Phys.*, 1992. 101(1) : p. 104-129.
- [74] Ferziger, J.H. and M. Perić, "Computational Methods for Fluid Dynamics. 1987, Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag.
- [75] Veynante, D. and T. Poinso, "Large Eddy Simulation of combustion instabilities in turbulent premixed burners." in *Annual Research Briefs*. 1997, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ. p. 253-274.
- [76] Selle, L., "Simulation aux grandes échelles des couplages acoustique / combustion dans les turbines á gaz". 2004, INP Toulouse : Toulouse.

- [77] Krüger, U., et al. "Prediction and measurement of Thermoacoustic Improvements in Gas Turbines with annular combustion systems". in ASME TURBO EXPO. 2000. Munich, Germany.
- [78] Stow, S.R. and A.P. Dowling. "Thermoacoustic oscillations in an annular combustor". in ASME Paper. 2001. New Orleans, Louisiana.
- [79] Schuermans, B., V. Bellucci, and C.O. Paschereit. "Thermoacoustic modeling and control of multi burner combustion systems". in ASME turbo Expo 2003. 2003. Atlanta, USA : ASME paper.
- [80] Stow, S.R. and A.P. Dowling. "Modelling of circumferential modal coupling due to Helmholtz resonators". in ASME Paper 2003-GT-38168. 2003. Atlanta, Georgia, USA.
- [81] Paschereit, C.O., et al. "Measurement of transfer matrices and source terms of premixed flames". in ASME/IGTI Int'I Gas Turbine and Aeroengine Congress & Exposition. 1999. Indianapolis, IN : ASME Paper.
- [82] Polifke, W., et al., "Reconstruction of acoustic transfer matrices by instantaneous computational fluid dynamics." *J. Sound Vibration* , 2001. 245(3) : p. 483-510.
- [83] Truffin, K., B. Varoquié, and T. Poinso. "Measurements of transfer functions in reacting flows using Large Eddy Simulations." in 10th International Congress on Sound and Vibration. 2003. Stockholm, Sweden.
- [84] Gentemann, A., et al. "Acoustic Transfer Matrix Reconstruction and Analysis for Ducts with Sudden Change of Area". in 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit. 2003. Hilton Head, USA : AIAA Paper.
- [85] Johnson, C., "Numerical solution of partial differential equation by finite element method ". Cambridge University Press ed. 1995.
- [86] Laverdant, A.M., T. Poinso, and S. Candel, "Influence of the mean temperature field on the acoustic mode structure in a dump combustor." *J. Prop. Power* , 1986. 2 : p. 311-316.
- [87] Krebs, W., G. Walz, and S. Hoffmann. "Thermoacoustic analysis of annular combustor". in 5th AIAA Aeroacoustics Conference. 1999.
- [88] Pankiewicz, C. and C. Sattelmayer. "Time Domain Simulation of Combustion Instabilities in Annular Combustors". in ASME TURBO EXPO 2002.

2002. Amsterdam : ASME Paper.

[89] Kaufmann, A., "Analytical and numerical study of thermoacoustic instabilities : Application to the RIJKE tube." 2000, Institut National Polytechnique de Toulouse : Toulouse, France.

[90] Attouch, H., X. Goudou, and P. Redont, "The heavy ball with friction method I. the continuous dynamical system." *Prépublications du département de mathématiques, université Montpellier II*, 1998.

[91] Henrici, P., "Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 3. 1997 : Wiley.

[92] Press, W.H., et al., "Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing. 1982, Cambridge : Cambridge University Press.

[93] Golub, G.H. and C.F. Van Loan, "Matrix computations, second edition ". second edition ed. 1989 : The John Hopkins University Press.

[94] Kaufmann, A., F. Nicoud, and T. Poinso, "Flow forcing techniques for numerical simulation of combustion instabilities." *Combust. Flame* , 2002. 131 : p. 371-385.

[95] AVBP, "A parallel CFD code for unsteady flow simulations on hybrid grids, www.cerfacs.fr/cfd/avbp.html".

[96] Colin, O. and M. Rudgyard, "Development of high-order Taylor-Galerkin schemes for unsteady calculations." *J. Comput. Phys.* , 2000. 162(2) : p. 338-371.

[97] Chatelin, F., "Eigenvalues of matrices", J.W.a. Sons, Editor. 1993. p. 121-122.

[98] Benoit, L. and F. Nicoud, "Numerical assessment of thermo-acoustic instabilities in gas turbines." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005. in press.

[99] Williams, F.A., "Combustion theory. 1985, Menlo Park, CA : Benjamin Cummings.

[100] Martin, C., et al., "Analysis of acoustic energy and modes in a turbulent swirled combustor", in Proc of the Summer Program. 2004, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ. : Stanford. p. in press.

- [101] Lehoucq, R. and D. Sorensen, "ARPACK user's guide : Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. 1997 : www.caam.rice.edu/software/ARPACK.
- [102] Bender, C. and S. Orszag, "Advanced Mathematical Methods for scientists and Engineers Theoretical and Numerical Combustion ". McGraw-Hill International editions ed. 1987.
- [103] Gondran, M. and M. Minoux, "Graphes, dioïdes et semi-anneaux. 2002 : Tec et Doc.
- [104] Lascaux, P. and R. Théodore, "Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur ". 2ème édition ed, Vol. Vol. 1. 1993 : Masson.
- [105] Lascaux, P. and R. Théodore, "Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur ". 2ème édition ed, Vol. Vol. 2. 1993 : Masson.
- [106] Selle, L., et al., "Joint use of compressible Large-Eddy Simulation and Helmholtz solvers for the analysis of rotating modes in an industrial swirled burner." *Combust. Flame* , 2005. (in press).
- [107] Sagaut, P., "Large Eddy Simulation for incompressible flows. Scientific computation series. 2000 : Springer-Verlag.
- [108] Piomelli, U. and J.R. Chasnov, "Large eddy simulations : theory and applications", in *Turbulence and Transition Modelling*, H. Hallbäck, et al., Editors. 1996, Kluwer Academic Publishers. p. 269 - 336.
- [109] Schlüter, J. and T. Schönfeld, "LES of jets in cross flow and its application to gas turbine burners." *Flow Turb. and Combustion* , 2000. 65(2) : p. 177-203.
- [110] Mary, I. and P. Sagaut, "Large Eddy simulation of Flow around an Airfoil Near Stall." *AIAA Journal* , 2002. 40(6) : p. 1139-1145.
- [111] Prière, C., et al., "LES of mixing enhancement : LES predictions of mixing enhancement for jets in cross-flows." *J. of Turbulence*, 2004. 5 : p. 1-30.
- [112] Janicka, J. and A. Sadiki, "Large Eddy simulation for turbulent combustion." *Proc. of the Combustion Institute*, 2004. 30 : p. in press.
- [113] Di Mare, F., W.P. Jones, and K. Menzies, " Large Eddy Simulation of a

- model gas turbine combustor." *Combust. Flame* , 2004. 137 : p. 278-295.
- [114] Mahesh, K., G. Constantinescu, and P. Moin, "A numerical method for Large-eddy simulation in complex geometries." *J. Comput. Phys.* , 2004. 197 : p. 215-240.
- [115] Pierce, C.D. and P. Moin, "Progress-variable approach for large eddy simulation of non-premixed turbulent combustion." *J. Fluid Mech.* , 2004. 504 : p. 73-97.
- [116] Walz, G., et al. "Detailed analysis of the acoustic mode shapes of an annular combustion chamber". in Int. Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition. 1999. Indianapolis, Indiana.
- [117] Zikikout, S., "Mécanisme d'instabilités de combustion dans un foyer à flammes non prémélangées". 1988, Université Paris-Sud Orsay.
- [118] Evesque, S., W. Polifke, and C. Pankiewitz. "Spinning and azimuthally standing acoustic modes in annular combustors". in 9th AIAA / CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit. 2003. Hilton Head, SC, USA.
- [119] Billant, P., J.-M. Chomaz, and P. Huerre, "Experimental Study of Vortex Breakdown in Swirling Jets." *J. Fluid Mech.* , 1998. 376 : p. 183-219.
- [120] Lucca-Negro, O. and T. O'Doherty, "Vortex breakdown : a review." *Prog. Energy Comb. Sci.* , 2001. 27 : p. 431-481.
- [121] Holzaepfel, F., "A Probabilistic Two-Phase Wake Vortex Decay and Transport Model." *J. Aircraft*, 2003. 40(2) : p. 323-331.
- [122] Holzaepfel, F., et al., "Analysis of wake vortex decay mechanisms in the atmosphere." *Aerospace Science and Technology*, 2003. 7(4) : p. 263-275.
- [123] Laporte, F. and A. Corjon, "Direct numerical simulation of elliptic instability of a vortex pair." *Phys. Fluids*, 2000. 12(5) : p. 1016-1031.
- [124] Schildmacher, K.-U., et al. "Experimental Investigations of the Temporal Air-fuel Mixing Fluctuations and Cold Flow Instabilities of a Premixing Gas Turbine Burner". in ASME TURBO EXPO 2000. 2000. Munich, Germany.
- [125] Schlüter, J., et al. "Characterization of confined swirl flows using Large Eddy Simulations". in ASME TURBO EXPO 2001 Land, Sea and Air. 2001. New Orleans, USA.

- [126] Prière, C., et al. "Large Eddy Simulation of Opposed Jets in Cross Flow". in 1st Int. Workshop on Trends in Numerical and Physical Modeling for Turbulent Processes. 2002. Darmstadt, Allemagne.
- [127] Angelberger, C., F. Egolfopoulos, and D. Veynante, "Large Eddy Simulations of chemical and acoustic effects on combustion instabilities." *Flow Turb. and Combustion* , 2000. 65(2) : p. 205-22.
- [128] Colin, O., et al., "A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion." *Phys. Fluids* , 2000. 12(7) : p. 1843-1863.
- [129] Roux, S., et al., "Studies of mean and unsteady flow in a swirled combustor using experiments, acoustic analysis and Large Eddy Simulations." *Combust. Flame* , 2005. in press.
- [130] Moureau, V., et al., "Numerical methods for unsteady compressible multi-component reacting flows on fixed and moving grids." *J. Comput. Phys.* , 2005(202(2)) : p. 710-736.
- [131] Ducruix, S. and S. Candel, "External flow modulation in computational fluid dynamics." *AIAA Journal* , 2004. 42(8) : p. 1550-1558.
- [132] Candel, S. "Combustion instabilities coupled by pressure waves and their active control." in 24th Symp. (Int.) on Combustion. 1992 : The Combustion Institute, Pittsburgh.
- [133] Peters, N., "Turbulent combustion. 2000 : Cambridge University Press.
- [134] Caraeni, D., C. Bergström, and L. Fuchs, "Modeling of Liquid Fuel Injection, Evaporation and Mixing in a Gas Turbine Burner Using Large Eddy Simulation." *Flow Turb. and Combustion* , 2000. 65 : p. 223-244.
- [135] Desjardins, P.E. and S.H. Frankel, "Two dimensional Large Eddy Simulation of soot formation in the near field of a strongly radiating nonpremixed acetylene-air jet flame." *Combust. Flame* , 1999. 119(1/2) : p. 121-133.
- [136] Pitsch, H. and L. Duchamp de la Geneste, "Large Eddy Simulation of Premixed Turbulent Combustion using a level-set approach." *Proc of the Comb. Institute*, 2002. 29 : p. 2001-2005.
- [137] Crocco, L. "Research on combustion instability in liquid propellant rockets." in 12th Symp. (Int.) on Combustion. 1969 : The Combustion Institute, Pittsburgh.

- [138] Krueger, U., et al. "Prediction and measurements of thermoacoustic improvements in gas turbines with annular combustion systems". in ASME TURBO EXPO 2000. 2000.
- [139] Légier, J.-P., T. Poinsot, and D. Veynante. "Dynamically thickened flame Large Eddy Simulation model for premixed and non-premixed turbulent combustion". in Summer Program 2000. 2000. Center for Turbulence Research, Stanford, USA.
- [140] Duchamp de Lageneste, L. and H. Pitsch, "Progress in large eddy simulation of premixed and partially premixed turbulent combustion", in Annual Research Briefs. 2001, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ. p. 61-82.
- [141] Kempf, A., et al., "Large-eddy simulation of a counterflow configuration with and without combustion." *Proc. of the Combustion Institute*, 2000. 28 : p. 35-40.
- [142] Pitsch, H. and H. Steiner, "Large Eddy Simulation of a Turbulent Piloted Methane/Air Diffusion Flame (Sandia Flame D)." *Phys. Fluids* , 2000. 12 : p. 2541-2554.
- [143] Lele, S., "Compact finite difference schemes with spectral like resolution." *J. Comput. Phys.* , 1992. 103 : p. 16-42.
- [144] Ducros, F., P. Comte, and M. Lesieur, "Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer developing spatially over a flat plate." *J. Fluid Mech.* , 1996. 326 : p. 1-36.
- [145] Gamet, L., et al., "Compact Finite Difference Schemes on Non-Uniform Meshes. Application to Direct Numerical Simulations of Compressible Flows." *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 1999. 29(2) : p. 159-191.
- [146] Scotti, A., C. Meneveau, and D.K. Lilly, "Generalized Smagorinski model for anisotropic grids." *Phys. Fluids* , 1993. 5(9) : p. 2306-2308.
- [147] Scotti, A., C. Meneveau, and M. Fatica, "Generalized Smagorinski model for anisotropic grids." *Phys. Fluids* , 1997. 9(6) : p. 1856-1858.
- [148] Vasilyev, O.V., T.S. Lund, and P. Moin, "A general class of commutative filters for LES in complex geometries." *J. Comput. Phys.* , 1998. 146 : p. 82-104.

- [149] Nicoud, F. and F. Ducros, "Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient." *Flow Turb. and Combustion*, 1999. 62(3) : p. 183-200.
- [150] Butler, T.D. and P.J. O'Rourke. "A numerical method for two-dimensional unsteady reacting flows". in 16th Symp. (Int.) on Combustion. 1977 : The Combustion Institute.
- [151] Angelberger, D., et al. "Large Eddy Simulations of combustion instabilities in premixed flames". in Summer Program. 1998 : Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ.
- [152] Charlette, F., D. Veynante, and C. Meneveau, "A power-law wrinkling model for LES of premixed turbulent combustion : Part I - non-dynamic formulation and initial tests." *Combust. Flame*, 2002. 131 : p. 159-180.
- [153] Nicoud, F. and L. Benoit. "Global tools for thermo-acoustic instabilities in gas turbines." in APS/DFD meeting. 2003. New York.
- [154] Poinso, T., et al. "Initiation and suppression of combustion instabilities by active control". in 22nd Symp. (Int.) on Combustion. 1988 : The Combustion Institute, Pittsburgh.
- [155] Yang, V. and F.E.C. Culick, "Analysis of low-frequency combustion instabilities in a laboratory ramjet combustor." *Combust. Sci. Tech.*, 1986. 45 : p. 1-25.
- [156] Selle, L., F. Nicoud, and T. Poinso, "The actual impedance of non-reflecting boundary conditions : implications for the computation of resonators." *AIAA Journal*, 2004. 42(5) : p. 958-964.
- [157] Bloxidge, G., et al., "Active control of reheat buzz." *AIAA Journal*, 1988. 26 : p. 783-790.
- [158] Candel, S., "Mécanique des Fluides. 1995, Paris : Dunod.

Annexe A

Relations de saut à l'interface entre deux éléments du code Soundtube

A.1 Relation de saut de vitesse acoustique

On considère la situation générale dans laquelle une flamme est localisée à l'interface entre deux "tubes" élémentaires du code Soundtube, ces derniers étant caractérisés par des sections et des températures moyennes différentes. Comme mentionné au chapitre 3, on ne s'intéresse qu'aux seules ondes longitudinales, seule la composante longitudinale u de la vitesse sera donc considérée. On cherche dans un premier temps à relier les fluctuations de vitesses acoustiques de part et d'autre de l'interface. Pour se faire, une approche consiste à utiliser un bilan de masse au niveau de l'interface en question, en apportant cependant un soin particulier au choix du volume de contrôle [157]. En effet dans la situation en question, non seulement les fluctuations acoustiques du débit massique varient de part et d'autre de la flamme mais la position elle-même de cette dernière fluctue également. On choisit donc un volume de contrôle V fixe qui contient l'interface réactive à chaque instant. Compte-tenu de l'hypothèse de flamme acoustiquement mince retenue dans Soundtube (chapitre 3), la taille de ce volume est faible devant les longueurs d'ondes acoustiques considérées. De plus, on distingue V_1 et V_2 les parties de V occupées respectivement par les gaz frais et les gaz chauds. La situation est illustrée par la figure A.1.

Dans ces conditions, la conservation de masse sur le volume V s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{m}_1 - \dot{m}_2 &= \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \\ &= \frac{d}{dt}(\rho_1 V_1) + \frac{d}{dt}(\rho_2 V_2)\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Les indices 1 et 2 se rapportent aux gaz frais et chauds respectivement, $\dot{m} = \rho u S$ représente le débit massique. L'utilisation dans la relation A.1 du formalisme

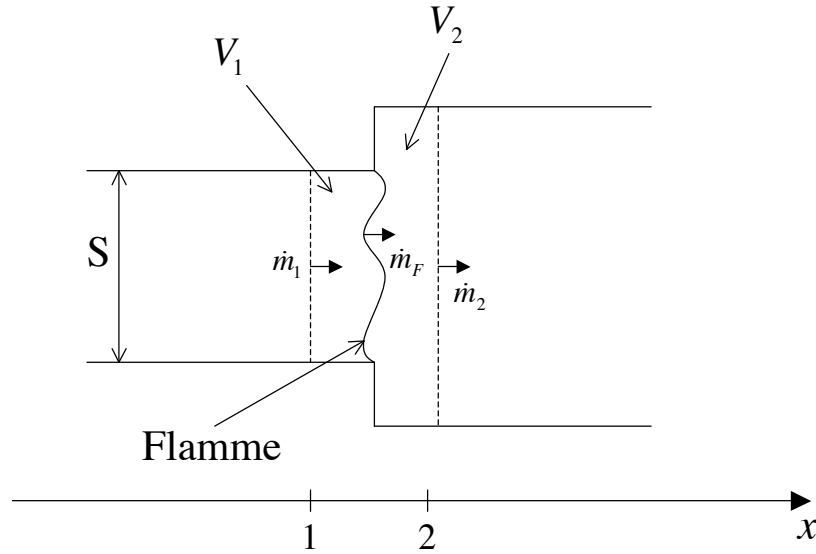


FIG. A.1 – Interface réactive entre deux tubes élémentaires dans la modélisation "Soundtube".

introduit à la section 1.2.3 permet alors d'écrire :

$$\hat{m}_1 - \hat{m}_2 = (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)(-i\omega)\hat{V}_1 - i\omega(\hat{\rho}_1\bar{V}_1 + \hat{\rho}_2\bar{V}_2) \quad (\text{A.2})$$

Le volume V est fixe au cours du temps mais pas les volumes V_1 et V_2 qui sont liés aux fluctuations de l'interface réactive. Afin de faire intervenir le taux de dégagement de chaleur global de la flamme \dot{Q} , on introduit le débit massique \dot{m}_F au niveau de la flamme et on réalise un bilan de masse sur le volume V_1 :

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_F = \frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho dV \quad (\text{A.3})$$

La linéarisation de cette équation aboutit aux relations suivantes :

$$\bar{m}_1 - \bar{m}_F = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{m}_1 - \hat{m}_F = \bar{\rho}_1(-i\omega)\hat{V}_1 - i\omega\hat{\rho}_1\bar{V}_1 \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas d'une flamme de prémélange, les résultats classiques issus de la flamme monodimensionnelle permettent d'écrire [26] :

$$\dot{m}_F Y_1^{fuel} Q_{reac} = \dot{Q} \quad (\text{A.6})$$

Y_1^{fuel} représente la fraction massique de fuel dans les gaz frais. Q_{reac} représente l'énergie libérée par unité de masse, elle ne dépend que de la réaction chimique et des caractéristiques thermodynamiques des composants chimiques mis en

jeu, c'est donc du point de vue acoustique une constante. On suppose en plus que la composition du mélange n'est pas modifiée par l'acoustique c'est à dire que Y_1^{fuel} est également considérée constante du point de vue acoustique. Dans ces conditions, les fluctuations de dégagement de chaleur vérifient :

$$\frac{\hat{m}_F}{\bar{m}_F} = \frac{\hat{Q}}{\bar{Q}} \quad (\text{A.7})$$

Cette dernière équation, utilisée conjointement avec les relations A.5, permet d'écrire :

$$(-i\omega)\hat{V}_1 = \frac{\hat{m}_1}{\bar{\rho}_1} - \frac{\hat{m}_1}{\bar{\rho}_1} \frac{\hat{Q}}{\bar{Q}} + \frac{i\omega\hat{\rho}_1\bar{V}_1}{\bar{\rho}_1} \quad (\text{A.8})$$

Compte-tenu de ces derniers développements, l'équation A.2 prend la forme suivante :

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) \left(\frac{\hat{m}_1}{\bar{\rho}_1} - \frac{\hat{m}_1}{\bar{\rho}_1} \frac{\hat{Q}}{\bar{Q}} + \frac{i\omega\hat{\rho}_1\bar{V}_1}{\bar{\rho}_1} \right) - i\omega(\hat{\rho}_1\bar{V}_1 + \hat{\rho}_2\bar{V}_2) \quad (\text{A.9})$$

Cette dernière relation peut se simplifier en tenant compte de l'hypothèse à bas nombre de Mach. Dans ce cas la fluctuation du débit s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \hat{\rho}\bar{u}S + \bar{\rho}\hat{u}S \\ &\approx S\bar{\rho}\hat{u}(1+M) \\ \hat{m} &\approx \bar{\rho}\hat{u}S \end{aligned}$$

Par ailleurs, la taille du volume V n'est soumise qu'à une seule contrainte, celle de pouvoir contenir les fluctuations de la position du front de flamme. En appelant \hat{u}_{max} l'amplitude des fluctuations de vitesse et T_{ac} une période acoustique, on en déduit que la taille minimale pour V_1 (ou V_2) est de l'ordre de $S \times u_{max} \times T_{ac}$. Dans ces conditions, il apparaît que :

$$|\hat{m}_1| \approx \bar{\rho}_1 \hat{u}_{max} S_1 \quad (\text{A.10})$$

$$|i\omega\hat{\rho}_1\bar{V}_1| \approx \bar{\rho}_1 \hat{u}_{max} S_1 M_1 \quad (\text{A.11})$$

Ainsi, l'hypothèse de bas nombre de Mach permet également de négliger les termes en V_1 et V_2 de l'équation A.9 devant les autres termes (avec $|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|$ du même ordre que $\bar{\rho}_1$). Compte-tenu de ces simplifications, l'Eq. A.9 s'écrit :

$$\hat{u}_2 S_2 - \hat{u}_1 S_1 = \left(\frac{1}{\bar{\rho}_2} - \frac{1}{\bar{\rho}_1} \right) \frac{\bar{m}_1}{\bar{Q}} \hat{Q} \quad (\text{A.12})$$

Le taux de dégagement de chaleur moyen se déduit des relations classiques issues de la configuration de flamme monodimensionnelle [26] :

$$\bar{Q} = \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 c_p (\bar{T}_2 - \bar{T}_1) S_1 \quad (\text{A.13})$$

En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient finalement la relation de saut de suivante :

$$\boxed{S_2 \hat{u}_2 - S_1 \hat{u}_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \hat{Q}} \quad (\text{A.14})$$

A.2 Relation de saut de pression acoustique

On considère à nouveau la situation de la figure A.1. Pour relier les fluctuations de pression de part et d'autre de l'interface, on applique un bilan de quantité de mouvement au volume de contrôle V . On rappelle que seules les fluctuations longitudinales de vitesse sont considérées et que la viscosité de l'écoulement est négligée (voir section 1.2.3). Dans ces conditions le bilan en question s'écrit :

$$(\rho_1 u_1^2 + p_1) S_1 - (\rho_2 u_2^2 + p_2) S_2 + F_x^{(lat)} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV \quad (\text{A.15})$$

Dans cette relation $F_x^{(lat)}$ représente la composante longitudinale de la force latérale exercée sur le fluide en raison de l'élargissement de la section. Cette composante s'écrit [158] :

$$F_x^{(lat)} = p_1 (S_2 - S_1) \quad (\text{A.16})$$

D'où la forme suivante pour la relation A.15 :

$$\rho_1 u_1^2 S_1 - \rho_2 u_2^2 S_2 + S_2 (p_1 - p_2) = \frac{d}{dt} (\rho_1 u_1 V_1) + \frac{d}{dt} (\rho_2 u_2 V_2) \quad (\text{A.17})$$

La linéarisation de cette équation amène le résultat suivant pour l'écoulement moyen :

$$\bar{\rho}_1 \bar{u}_1^2 S_1 - \bar{\rho}_2 \bar{u}_2^2 S_2 = 0 \quad (\text{A.18})$$

Par ailleurs, compte-tenu de l'hypothèse de faible nombre de Mach, on montre que (au premier ordre) :

$$|(\rho u^2)'| \ll |p'| \quad (\text{A.19})$$

Dans ces conditions, la forme linéarisée de l'Eq. A.17 s'écrit :

$$S_2 (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) (-i\omega) \hat{V}_2 \quad (\text{A.20})$$

Comme dans la section précédente $|\hat{V}_2| \approx S_2 T_{ac} \hat{u}_{max}$, par conséquent :

$$|\bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) (-i\omega) \hat{V}_2| \approx |\hat{p}| M_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) \quad (\text{A.21})$$

Sous la condition que le nombre de Mach est suffisamment faible pour que $|M_2(1 - \frac{S_2}{S_1})| \ll 1$, la relation de saut suivante est finalement obtenue :

$$\hat{p}_2 = \hat{p}_1 \quad (\text{A.22})$$

Annexe B

Exemples de validation du code Soundtube

En complément de la partie 3.6, cette section présente quelques unes des configurations de validation de Soundtube dans lesquelles une solution analytique est dérivable. On s'intéresse ici à des situations non classiques permettant ainsi de tester des caractéristiques importantes de soundtube telles que la dépendance fréquentielles des conditions limites ou la prise en compte de flamme non "acoustiquement minces". On rappelle que les définitions des paramètres du code sont disponibles à la partie 3.2. Cette section est extraite du manuel d'utilisation du code Soundtube rédigé en anglais.

B.1 Simple Tube with a variable reflexion coefficient

B.1.1 General features and analytical results

The situation of a simple tube is considered. However, the output reflexion coefficient (R_2) is variable in frequency as illustrated by the figure B.1.

Mean temperature, mean pressure, length and section area are respectively named T , P , L and S .

Eigen frequencies values of the configuration

When the frequency equals an eigen frequency, all the boundary conditions are verified, that is to say :

– 1st reflexion condition :

$$R_1 = 1 \implies A_1^+ = A_1^- \quad (\text{B.1})$$

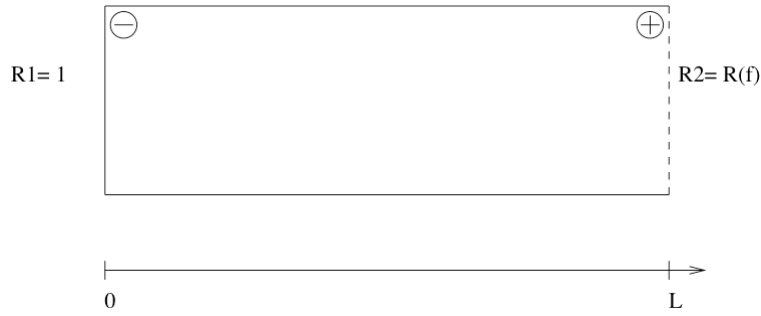


FIG. B.1 – Simple tube with a variable output reflexion coefficient

– 2nd reflexion condition :

$$R_2 = R_2(f) \implies A_2^+ e^{i.2.k.L} = R_2(f).A_2^- \quad (\text{B.2})$$

Hence :

$$R_1.e^{i.2.k.L} = R_2$$

The real and imaginary parts (growth rate) of eigen frequencies can be easily deduced :

$$f_r = \frac{c}{2\pi}.k_r = \frac{c}{4\pi L} \cdot (\arg(R_2(f)/R_1) + 2.n.\pi) \quad (\text{B.3})$$

$$f_i = \frac{c}{2\pi}.k_i = \frac{c}{4\pi L} \cdot \ln \left| \frac{R_1(f)}{R_2} \right| \quad (\text{B.4})$$

The function $R_2(f)$ is chosen to vary continuously and “smoothly” with only the real part of f . From 1 Hz to 2000 Hz, $R_2(f)$ varies from -1 to -0.84 . The exact formula chosen is as follows :

$$R_2(f) = \frac{f_r^2}{\alpha} - 1 \quad (\text{B.5})$$

with $\alpha = 25 \times 10^6$. So, in the range [1 Hz, 2000 Hz], $R_2(f)$ is a negative number as it can be seen in the figure B.2.

The eigen frequencies can be now evaluated. The m^{th} mode of the configuration is :

$$f_r = \frac{c}{4L} \cdot (1 + 2.m) \quad (\text{B.6})$$

$$f_i = \frac{-c}{4\pi L} \cdot \ln \left(1 - \frac{c^2(1 + 2.m)^2}{16\alpha L^2} \right) \quad (\text{B.7})$$

In this case, the real part of the eigen frequency is not modified in comparison with the situation of the simple tube. On the other hand, the growth rate (or imaginary part of the eigen frequency) is not zero anymore .

Features of the configuration

To compare analytics with soundtube results, the following features are chosen :

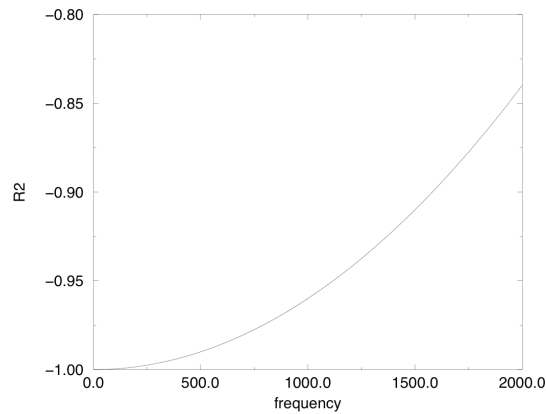


FIG. B.2 – Evolution of the Reflexion coefficient with frequency

- $T = 2000 K$
- $P = 1.013 bars$
- $S = 0.03 m^2$
- $W = 0.02897 kg/mol$
- $\gamma = 1.4$
- $L = 0.5 m$

B.1.2 Soundtube results and comparison with analytical results

Modal method

mode1 $\text{Re}(f) : 4.48218696620299e+02$ $\text{Im}(f) : 1.15114727598094e+00$
mode2 $\text{Re}(f) : 1.34465608986090e+03$ $\text{Im}(f) : 1.07108118926279e+01$

Energyforcing method in the complex plan

mode 1 : $\text{Re}(f) = 4.482187e+02$ $\text{Im}(f) = 1.151147e+00$
mode 2 : $\text{Re}(f) = 1.344655e+03$ $\text{Im}(f) = 1.070862e+01$

Fluxforcing method on the real axis

In this situation, a forcing at different real frequencies within the range $[0, 2000 Hz]$ is performed. The quantity evaluated is the loudspeaker acoustic flux. The result of this forcing is illustrated by the figure B.3.

Analytical results

In this situation, the relations B.6 and B.7 give the following results :

mode 1 : $\text{Re}(f) = f_r = 448.2187$ $\text{Im}(f) = f_i = 1.151147$
mode 2 : $\text{Re}(f) = f_r = 1344.656$ $\text{Im}(f) = f_i = 10.71081$

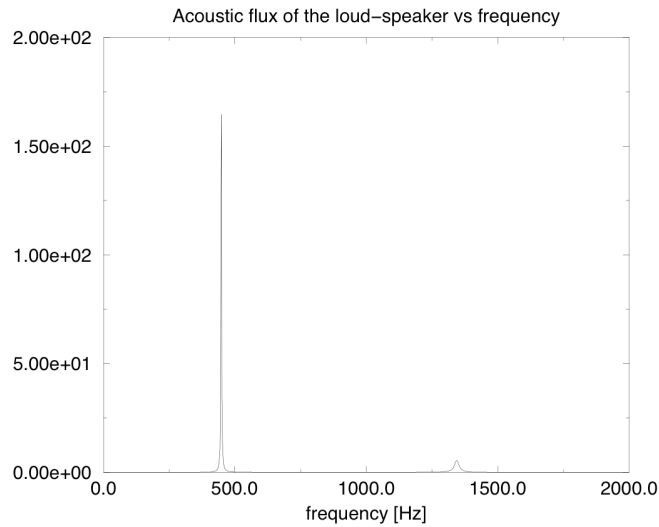


FIG. B.3 – Acoustic flux at the loudspeaker in the case of a tube with a variable reflexion coefficient

B.2 Tube with a thick flame

B.2.1 General features and analytical results

The configuration of the figure B.4 is considered. The two flames of the device have the same reference speed (in the $n - \tau$ model) that's why they can be seen as a unique flame. This reference speed is the speed at the end of the tube 1, i.e : the speed at the side “+” of the tube 1. More precisely, this case corresponds to a distribution of the heat release in different regions. Each region has its own values for n and τ . Between two regions, acoustics without combustion is applied.

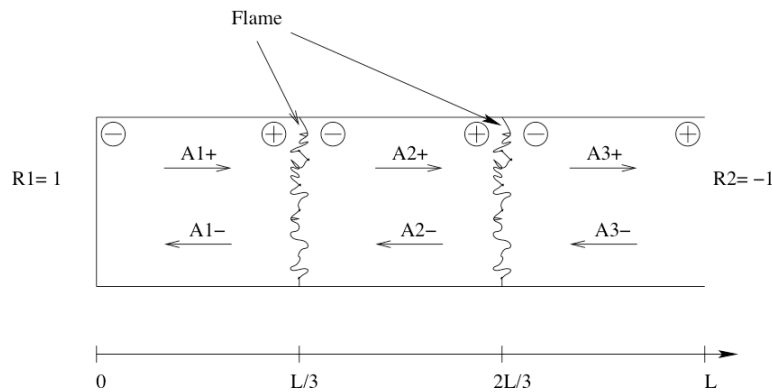


FIG. B.4 – Tube with a thick flame

To find more easily an analytical solution, the following simplifications are

applied :

- Same mean temperature in the two tubes :

$$T_1 = T_2 = T_3 = T$$

- Same section in the two tubes :

$$S_1 = S_2 = S_3 = S$$

- Same mean pressure in the two tubes :

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

- Same length for the three tubes :

$$l_1 = l_2 = l_3 = l = L/3$$

Reflexion relations

According to these hypothesis and the definition of a reflexion coefficient, the reflexion relations are in the current case :

- 1st reflexion condition :

$$R_1 = 1 \implies A_1^+ = A_1^- \quad (\text{B.8})$$

- 2nd reflexion condition :

$$R_2 = -1 \implies A_3^+ e^{i.2.k.l} = -A_3^- \quad (\text{B.9})$$

Jump-relations for pressure

- At the first intersection, the jump-relation for pressure is :

$$p'_1(L/3) = p'_2(L/3) \implies A_1^+ . e^{i.k.l} + A_1^- . e^{-i.k.l} = A_2^+ + A_2^- \quad (\text{B.10})$$

- At the second intersection, the jump-relation for pressure is :

$$p'_2(2L/3) = p'_3(2L/3) \implies A_2^+ . e^{i.k.l} + A_2^- . e^{-i.k.l} = A_3^+ + A_3^- \quad (\text{B.11})$$

Jump-relation for speed

The general jump-relation for speed is applied in the current case. It is reminded that the orientation of each tube is essential in this relation. In this case the two flames have the same reference speed : the acoustic speed at the end of the first tube (at side “+”).

- At the first intersection, the jump-relation for speed is :

$$S.u'_1(L/3) + S.u'_1(L/3).n_1.e^{i\omega\tau_1} - S.u'_2(L/3) = 0$$

Hence :

$$(A_1^+ . e^{i.k.l} - A_1^- . e^{-i.k.l}).(1 + n_1 . e^{i\omega\tau_1}) - A_2^+ + A_2^- = 0 \quad (\text{B.12})$$

- At the second intersection, the speed reference is also $u'_1(L/3)$. So, the jump-relation for speed is :

$$S.u'_2(2L/3) + S.u'_1(L/3).n_2.e^{i\omega\tau_2} - S.u'_3(2L/3) = 0$$

Hence :

$$A_2^+.e^{i.k.l} - A_2^-.e^{-i.k.l} + (A_1^+.e^{i.k.l} - A_1^-.e^{-i.k.l}).n_2.e^{i\omega\tau_2} - A_3^+ + A_3^- = 0 \quad (\text{B.13})$$

Characteristic function and results

By combining the relations B.8, B.9, B.10, B.11, B.12 and B.13 it yields :

$$\cos(3.k.l) - 2.n_1.e^{i.\omega.\tau_1}.\sin^2(k.l).\cos(k.l) - n_2.e^{i.\omega.\tau_2}.\sin^2(k.l) = 0 \quad (\text{B.14})$$

To finish the calculus, the hypothesis of very small heat release (i.e : $n \ll 1$) is necessary. As a consequence, the value f of eigen frequencies with combustion is close to their value without combustion f_0 (example 1 of this help guide). So, The Taylor expansion of B.14 can be applied with $k = k_0 + \delta k$ and $|\delta k| \ll |k_0|$. Finally, it yields :

$$\delta k = \frac{-\sin^2(k_0 l)}{L.\sin(k_0 L)} [2n_1 \cos(k_0 l).(\cos(\omega_0 \tau_1) + i.\sin(\omega_0 \tau_1)) + n_2.(\cos(\omega_0 \tau_2) + i.\sin(\omega_0 \tau_2))]$$

The shift in frequency, for the real and the imaginary part, can be expressed as follows :

$$\Re(\delta f) = \frac{-c}{2\pi} \frac{\sin^2(k_0 l)}{L.\sin(k_0 L)} [2n_1 \cos(k_0 l).\cos(\omega_0 \tau_1) + n_2.\cos(\omega_0 \tau_2)] \quad (\text{B.15})$$

$$\Im(\delta f) = \frac{-c}{2\pi} \frac{\sin^2(k_0 l)}{L.\sin(k_0 L)} [2n_1 \cos(k_0 l).\sin(\omega_0 \tau_1) + n_2.\sin(\omega_0 \tau_2)] \quad (\text{B.16})$$

Features of the configuration

To compare analytics with soundtube results, the following features are chosen :

- $T = 2000 \text{ K}$
- $P = 1.013 \text{ bars}$
- $S = 7 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $W = 0.02897 \text{ kg/mol}$
- $\gamma = 1.4$
- $L = 0.75 \text{ m}$
- $n_1 = 0.01$
- $n_2 = 0.015$
- $\tau_1 = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$
- $\tau_2 = 2.8 \times 10^{-5} \text{ s}$

B.2.2 soundtube results and comparison with analytical results

Modal method

mode1	Re(f) :2.97289384475941e+02	Im(f) :-5.17788415780247e-02
mode2	Re(f) :8.99236555906445e+02	Im(f) :4.45502312056407e-01
mode3	Re(f) :1.49419363395483e+03	Im(f) :-1.08061192337921e-01

Energyforcing method in the complex plan

mode 1 :	Re(f)=2.972894e+02	Im(f)=-5.177884e-02
mode 2 :	Re(f)=8.992366e+02	Im(f)=4.455023e-01
mode 3 :	Re(f)=1.494194e+03	Im(f)=-1.080612e-01

Fluxforcing method on the real axis

Acoustic flux of the loudspeaker is measured for different forced real frequencies, the result is illustrated in the figure B.5.

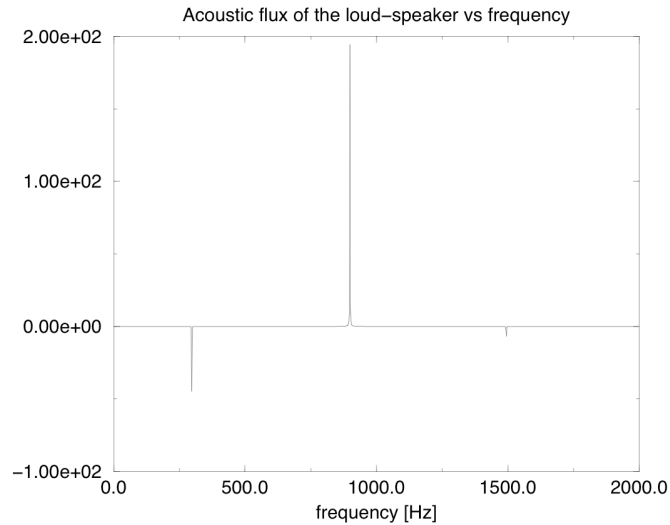


FIG. B.5 – Acoustic flux of the loudspeaker evaluated in the case of the tube with thick flame

Analytical results

The modes without combustion are calculated following the relation B.3 but with $L = 0.75$:

$$f_{01} = 298.813 \text{ Hz and } \text{Im}(f_{01})=0$$

$$f_{02} = 896.4374 \text{ Hz and } \text{Im}(f_{02})=0$$

$$f_{03} = 1494.062 \text{ Hz and } \text{Im}(f_{03})=0$$

In this situation, the relations B.15, B.16 give the following results :

- mode 1 :
 $\Re(\delta f) = -1.5359$ so $\Re(f) = 297.277$ Hz
 $\Im(\delta f) = -0.0529$ so $\Im(f) = -0.0529$ Hz
- mode 2 :
 $\Re(\delta f) = 2.8180$ so $\Re(f) = 899.2554$ Hz
 $\Im(\delta f) = 0.4482$ so $\Im(f) = 0.4482$ Hz
- mode 3 :
 $\Re(\delta f) = 0.1312$ so $\Re(f) = 1494.193$ Hz
 $\Im(\delta f) = -0.1081$ so $\Im(f) = -0.1081$ Hz

B.3 Three tubes in a “T” configuration without flame

B.3.1 General features and analytical results

The configuration of the figure B.6 is considered.

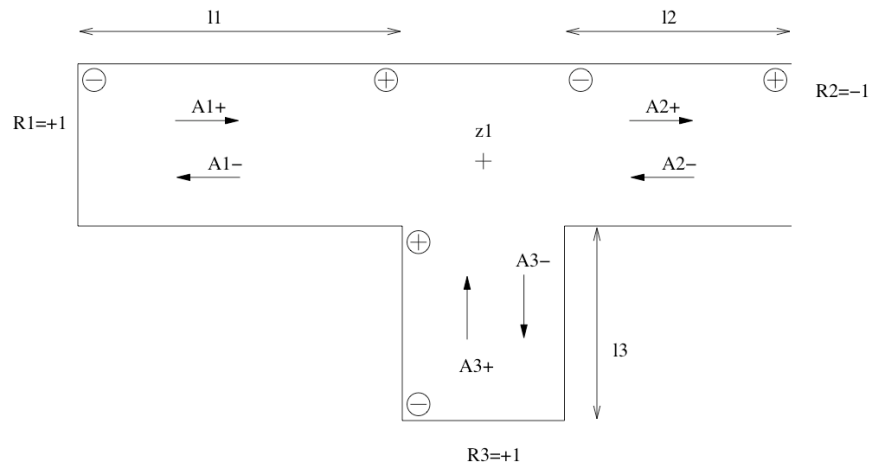


FIG. B.6 – “T” configuration without flame

To find more easily an analytical solution, the following simplifications are applied :

- Same mean temperature in all the tubes :

$$T_1 = T_2 = T_3 = T$$

- Same section in all the tubes :

$$S_1 = S_2 = S_3 = S$$

- Same mean pressure in all the tubes :

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

Reflexion relations

According to these hypothesis and the definition of a reflexion coefficient, the reflexion relations are in the current case :

- 1st reflexion condition :

$$R_1 = 1 \implies A_1^+ = A_1^- \quad (\text{B.17})$$

- 2nd reflexion condition :

$$R_2 = -1 \implies A_2^+ e^{i.2.k.l_2} = -A_2^- \quad (\text{B.18})$$

- 3rd reflexion condition :

$$R_3 = 1 \implies A_3^+ = A_3^- \quad (\text{B.19})$$

Jump-relations for pressure

These relations are in the current case :

- First jump-relation for pressure :

$$p_1'(z_1) = p_2'(z_1) \implies A_1^+ . e^{i.k.l_1} + A_1^- . e^{-i.k.l_1} = A_2^+ + A_2^-$$

By using the relations B.17 and B.18 and by supposing $\sin(kl_2) \neq 0$ it becomes :

$$A_2^+ = A_1^+ . \frac{i.e^{-i.k.l_2} \cos(kl_1)}{\sin(kl_2)} \quad (\text{B.20})$$

- Second jump-relation for pressure :

$$p_1'(z_1) = p_3'(z_1) \implies A_1^+ . e^{i.k.l_1} + A_1^- . e^{-i.k.l_1} = A_3^+ . e^{i.k.l_3} + A_3^- . e^{-i.k.l_3}$$

By using the relations B.17 and B.19 and by supposing $\cos(kl_3) \neq 0$ it becomes :

$$A_3^+ = A_1^+ . \frac{\cos(kl_1)}{\cos(kl_3)} \quad (\text{B.21})$$

Jump-relation for speed

The general jump-relation for speed is applied in the current case. It is reminded that the orientation of each tube is essential in this relation.

$$S.u_1'(z_1) - S.u_2'(z_1) + S.u_3'(z_1) = 0$$

By introducing the “Riemann invariants”, it yields :

$$A_1^+ . e^{i.k.l_1} - A_1^- . e^{-i.k.l_1} - A_2^+ + A_2^- + A_3^+ . e^{i.k.l_3} - A_3^- . e^{-i.k.l_3} = 0$$

By using firstly the relations B.17, B.18, B.19 and secondly the relations B.20 and B.21, the precedent equation can be simplified as follow :

$$A_1^+ . [\sin(kl_1) - \cos(kl_1) . \cotan(kl_2) + \cos(kl_1) . \tan(kl_3)] = 0 \quad (\text{B.22})$$

Characteristic function

If $A_1^+ \neq 0$ and if $\cos(kl_1) \neq 0$ then the relation B.22 leads to the following characteristic function :

$$\tan(kl_1) - \cotan(kl_2) + \tan(kl_3) = 0 \quad (\text{B.23})$$

Solving this equation is not trivial and not necessary to compare the soundtube solutions with analytics. Introducing eigen frequencies computed by Soundtube into the equation B.23 and afterwards checking the null result is another way to verify Soundtube solutions validity.

Features of the configuration

To compare analytics with soundtube results, the following features are chosen :

- $T = 2000 \text{ K}$
- $P = 1.013 \text{ bars}$
- $S = 0.03 \text{ m}^2$
- $W = 0.02897 \text{ kg/mol}$
- $\gamma = 1.4$
- $l_1 = 0.25 \text{ m}$
- $l_2 = 0.35 \text{ m}$
- $l_3 = 0.2 \text{ m}$

B.3.2 Soundtube results and comparison with analytical results

Modal method

mode1	Re(f) : 3.08185562303430e+02	Im(f) : -3.20991295045994e-15
mode2	Re(f) : 9.85546974375448e+02	Im(f) : 2.98529281906877e-14
mode3	Re(f) : 1.22985400446902e+03	Im(f) : 1.85165833108401e-14
mode4	Re(f) : 1.96300768743214e+03	Im(f) : -1.77689469965228e-14

Energyforcing method in the complex plan

mode 1 :	Re(f)=3.081856e+02	Im(f)=1.057769e-14
----------	--------------------	--------------------

mode 2 : $\text{Re}(f)=9.855470\text{e}+02$ $\text{Im}(f)=-6.235264\text{e}-15$
mode 3 : $\text{Re}(f)=1.229854\text{e}+03$ $\text{Im}(f)=-1.940787\text{e}-14$
mode 4 : $\text{Re}(f)=1.963008\text{e}+03$ $\text{Im}(f)=4.250708\text{e}-14$

Energyforcing method on the real axis

The figure B.7 shows the global acoustic energy measurements for different real frequencies in configuration studied.

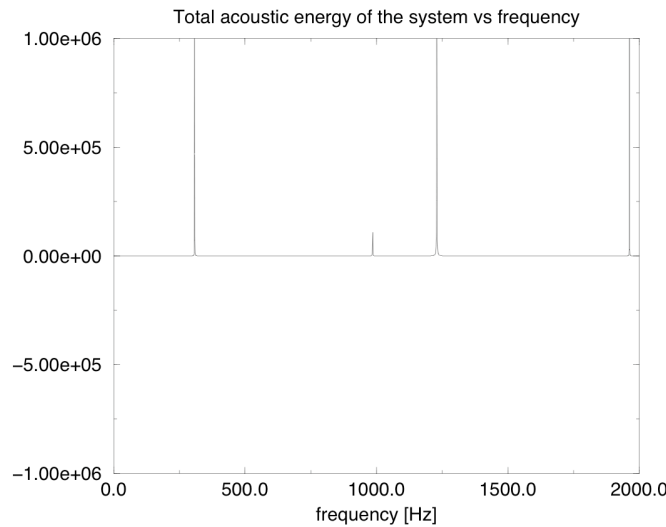


FIG. B.7 – Acoustic energy in the case of the “T” configuration without flame

Analytical results

In this case, explicit relations for eigen frequencies can not be obtained but the characteristic function is available. As a consequence, soundtube results are introduced into the characteristic function (relation B.23) to verify if they satisfy it. Since the results of all the methods are very similar, only the results of the modal method are introduced into this equation.

– mode 1 : $f_0 = 308.1856 \text{ Hz}$ and $k = \frac{2\pi f_0}{c}$

$$\tan(kl_1) - \cotan(kl_2) + \tan(kl_3) = 3.5 \times 10^{-7}$$

– mode 2 : $f_0 = 985.547 \text{ Hz}$ and $k = \frac{2\pi f_0}{c}$

$$\tan(kl_1) - \cotan(kl_2) + \tan(kl_3) = 3 \times 10^{-6}$$

– mode 3 : $f_0 = 1229.854 \text{ Hz}$ and $k = \frac{2\pi f_0}{c}$

$$\tan(kl_1) - \cotan(kl_2) + \tan(kl_3) = -1 \times 10^{-6}$$

– mode 4 : $f_0 = 1963.008 \text{ Hz}$ and $k = \frac{2\pi f_0}{c}$

$$\tan(kl_1) - \cotan(kl_2) + \tan(kl_3) = 1.8 \times 10^{-6}$$

Annexe C

Rappels d'algèbre

C.1 Définitions fondamentales

Cette partie est destinée à rappeler succinctement les notions d'algèbre essentielles à la compréhension de cette étude. De plus amples descriptions sur le sujet sont disponibles dans [93, 104, 105].

C.1.1 Notations algébriques

Soit $z = a + i \times b$ un nombre complexe, on appelle conjugué de z le nombre complexe z^* défini de la manière suivante :

$$z^* = a - i \times b \quad (\text{C.1})$$

Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Pour cette matrice, on introduit les notations et définitions suivantes :

- A^T est la matrice transposée de $A \iff a_{ij}^T = (a_{ji})$
- A^H est la matrice auto-adjointe de $A \iff a_{ij}^H = (a_{ji})^*$

Si de plus A est une matrice carrée ($m = n$) :

- A est une matrice hermitienne $\iff A^H = A$
- A est une matrice normale $\iff AA^H = A^H A$
- A^{-1} est la matrice inverse de $A \iff AA^{-1} = A^{-1}A = I$
- A est une matrice unitaire $\iff AA^H = A^H A = I$
- A est une matrice Hessenberg supérieure (respectivement inférieure) $\iff A_{ij} = 0$ pour $j > i + 1$ (respectivement $j < i - 1$) et tel qu'il existe $i \in [1, \dots, n]$ tel que $A_{ii} \neq 0$

On appelle le rang de A et on note $rg(A)$, le nombre de vecteur colonne de A linéairement indépendants.

On appelle image de l'application linéaire associée à la matrice A , et on note $Im(A)$, l'ensemble des vecteurs $y \in \mathbb{C}^n$ tels qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ vérifiant : $Ax = y$.

C.1.2 Problème aux valeurs propres

Soit $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$, on appelle problème aux valeurs propres généralisé la recherche d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ et d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$B(\lambda)x = \lambda M(\lambda)x \quad (\text{C.2})$$

Le vecteur x est alors appelé vecteur propre et λ sa valeur propre associée. Sous cette forme les matrices B et M peuvent être fonctions de λ et dans ce cas le problème n'est pas linéaire. Si au contraire, B et M ne dépendent pas de λ et que M est inversible alors en introduisant $A = M^{-1}B$ le problème aux valeurs propres linéaire s'écrit :

$$Ax = \lambda x \quad (\text{C.3})$$

Les valeurs propres constituent alors les zéros du polynôme caractéristique p_A de A défini par :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (\text{C.4})$$

C.2 Transformations matricielles particulières

C.2.1 Transformation de Householder

Soit $v \in \mathbb{C}^n$. On appelle transformation de Householder la symétrie par rapport au plan orthogonal à v [104]. La matrice $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ associée à cette transformation s'écrit :

$$H = I - 2vv^H \quad (\text{C.5})$$

Cette matrice est symétrique et unitaire.

C.2.2 Factorisation QR

Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($m \geq n$) alors il existe $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$, une matrice unitaire, et $R \in \mathbb{C}^{m \times n}$, une matrice triangulaire supérieure ($R_{ij} = 0$ pour $j > i$) tel que :

$$A = QR \quad (\text{C.6})$$

Si $rg(A) = n$ alors Q constitue une base orthonormée de $Im(A)$. D'un point de vue pratique, la factorisation QR peut être réalisée par une succession de transformations de Householder [93].

Annexe D

Modes propres de la turbine annulaire expérimentale calculés avec AVSP

Toute comme la section 6, cette partie est issue du rapport technique faisant suite à l'utilisation du code AVSP sur la turbine expérimentale installée au Lehrstuhl für Thermodynamik de l'université technique de Munich. Cette annexe récapitule les résultats obtenus avec AVSP sur les différentes configurations testées.

D.1 Calculation on the case without acoustic flame, without swirler and with a compact flame located at $x_f = 0.13m$

D.1.1 Mean field

The mean sound speed field for this configuration is given in the figure D.1.

D.1.2 Eigen frequencies

The eigen frequencies computed by AVSP in this configuration can be found in table D.1.

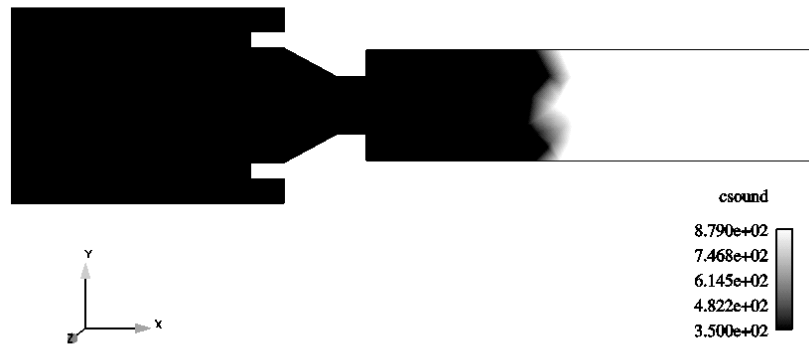


FIG. D.1 – Mean sound speed in the configuration with mean temperature jump at $x = 0.13m$

Mode number	Frequency (in Hz)	Spatial structure
1	125.0	1st longitudinal
2	283.0	1st plenum circumferential
3	517.3	2nd plenum circumferential
4	558.8	2nd longitudinal
5	652.5	1st combustor circumferential
6	750.6	3rd plenum circumferential
7	830.0	2nd combustor circumferential
8	934.6	3rd longitudinal

TAB. D.1 – Eigenmodes calculated by AVSP in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$.

D.1.3 Eigenmodes

First mode longitudinal mode ($f = 125Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.2.

First circumferential mode of the plenum ($f = 283Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.3.

Second circumferential mode of the plenum ($f = 517Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.1.3.

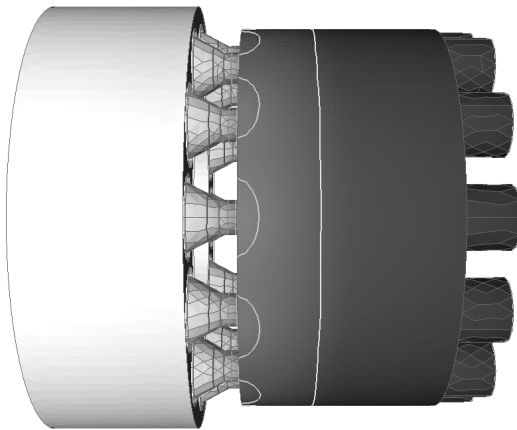


FIG. D.2 – First longitudinal mode ($f = 125Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

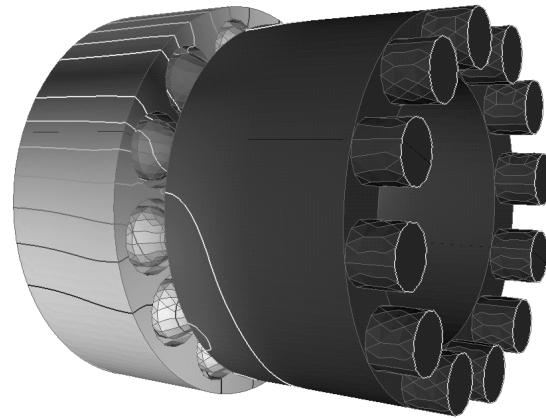


FIG. D.3 – First circumferential mode of the plenum ($f = 283Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

Second longitudinal mode ($f = 558Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.5.

First circumferential mode of the combustor ($f = 653Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.6.

Third circumferential mode of the plenum ($f = 750Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.7.

Second circumferential mode of the combustor ($f = 830Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.8.

Third longitudinal mode ($f = 934Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.9.

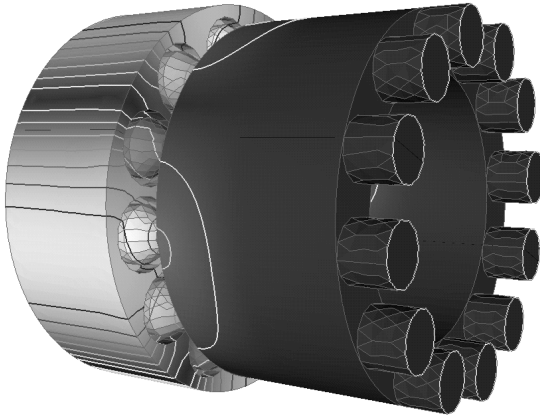


FIG. D.4 – Second circumferential mode of the plenum ($f = 517Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

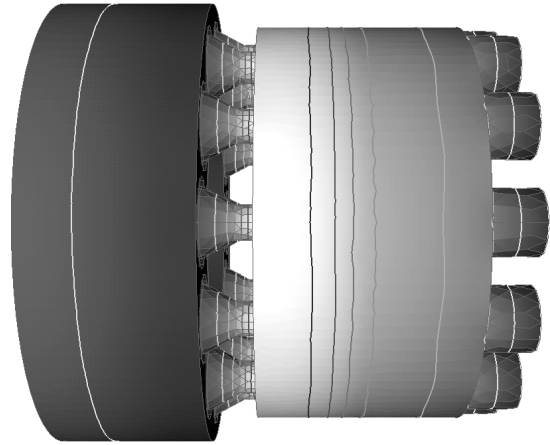


FIG. D.5 – Second longitudinal mode ($f = 558Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

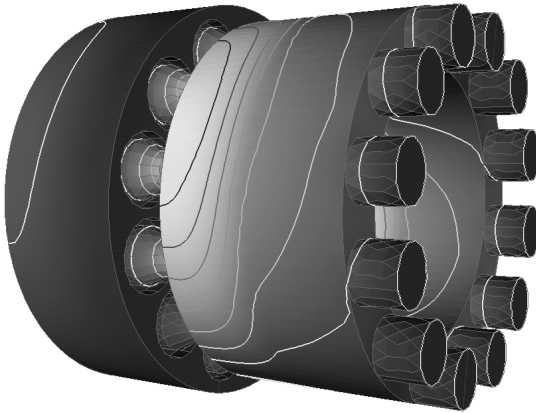


FIG. D.6 – First circumferential mode of the combustor ($f = 653Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

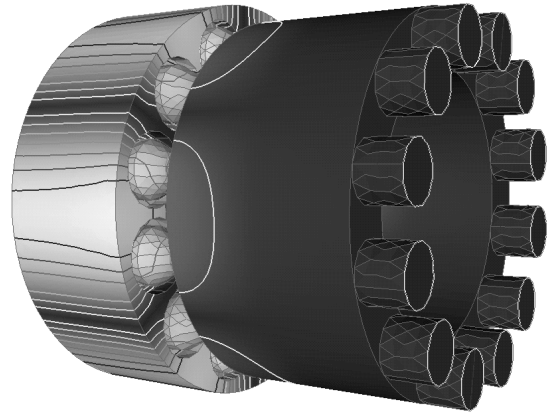


FIG. D.7 – Third circumferential mode of the plenum ($f = 750Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

D.2 Calculation on the case without acoustic flame, without swirler and with a compact flame located at $x_f = 0.1m$

D.2.1 Mean field

The mean sound speed field for this configuration is given in the figure D.10.

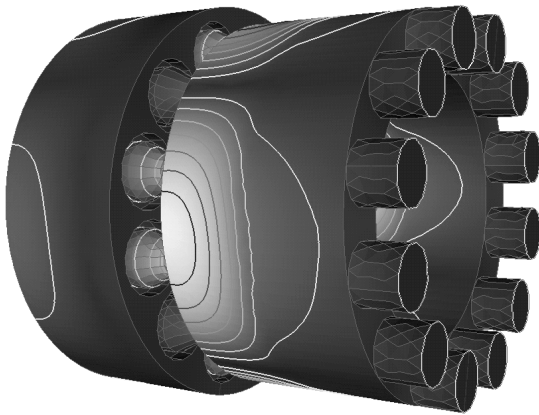


FIG. D.8 – Second circumferential mode of the combustor ($f = 830Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

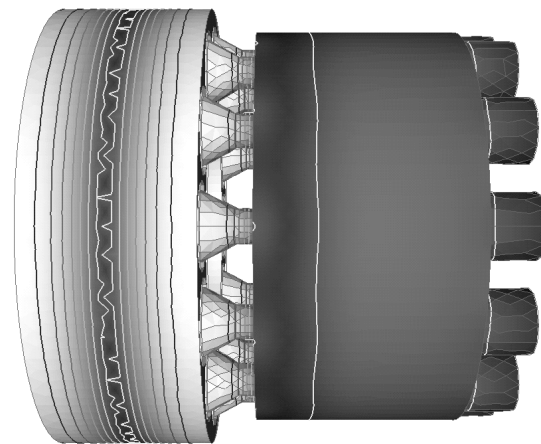


FIG. D.9 – Third longitudinal mode ($f = 934Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.13m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

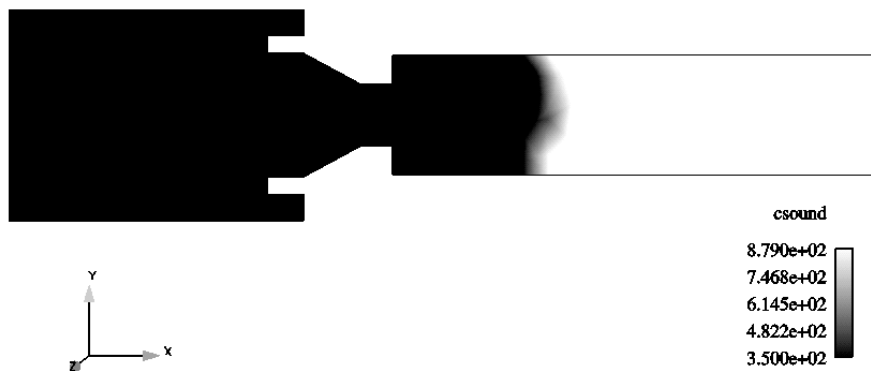


FIG. D.10 – Mean sound speed in the configuration with mean temperature jump at $x = 0.1m$

D.2.2 Eigen frequencies

The eigen frequencies computed by AVSP in this configuration can be found in table D.2.

Mode number	Frequency (in Hz)	Spatial structure
1	128.2	1st longitudinal
2	284.8	1st plenum circumferential
3	518.6	2nd plenum circumferential
4	594.9	2nd longitudinal
5	723.5	1st combustor circumferential
6	751.6	3rd plenum circumferential
7	932.8	2nd combustor circumferential
8	935.1	3rd longitudinal

TAB. D.2 – Eigenmodes calculated by AVSP in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.10m$.

D.2.3 Eigenmodes

First mode longitudinal mode ($f = 128Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.11.

First circumferential mode of the plenum ($f = 284Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.12.

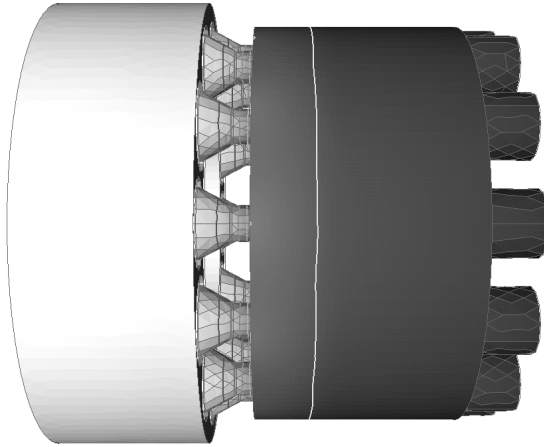


FIG. D.11 – First longitudinal mode ($f = 128Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.1m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

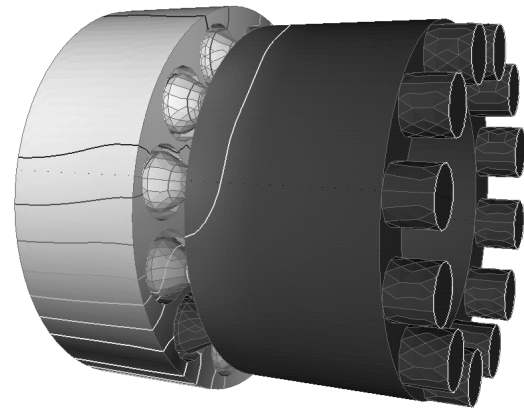


FIG. D.12 – First circumferential mode of the plenum ($f = 284Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.1m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

Second circumferential mode of the plenum ($f = 518Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.13.

Second longitudinal mode ($f = 594Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.14.

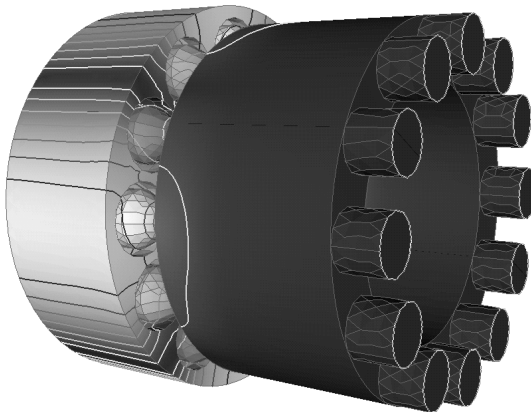


FIG. D.13 – Second circumferential mode of the plenum ($f = 518Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.1m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

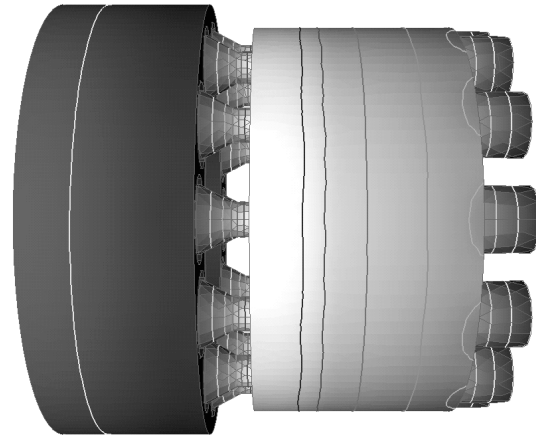


FIG. D.14 – Second longitudinal mode ($f = 594Hz$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.1m$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

First circumferential mode of the combustor ($f = 724Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.15.

Third circumferential mode of the plenum ($f = 751Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.16.

Second circumferential mode of the combustor ($f = 932Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.17.

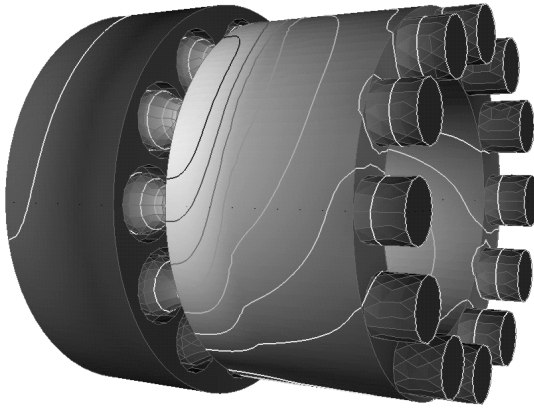


FIG. D.15 – First circumferential mode of the combustor ($f = 724\text{Hz}$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.1\text{m}$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

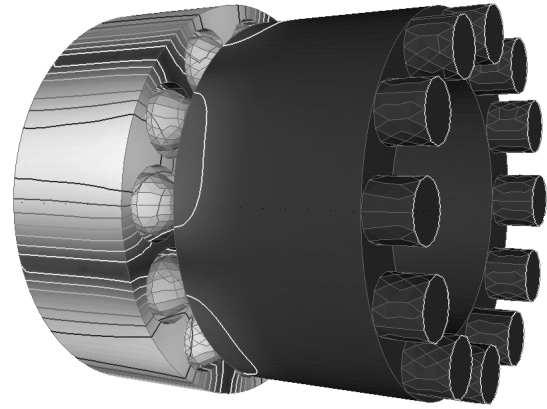


FIG. D.16 – Third circumferential mode of the plenum ($f = 751\text{Hz}$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.1\text{m}$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

Third longitudinal mode ($f = 935\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.18.

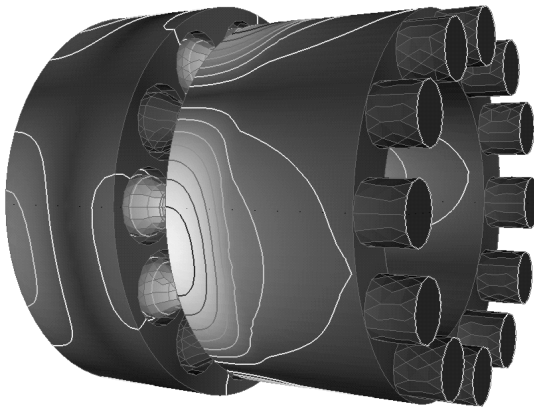


FIG. D.17 – Second circumferential mode of the combustor ($f = 932\text{Hz}$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.1\text{m}$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

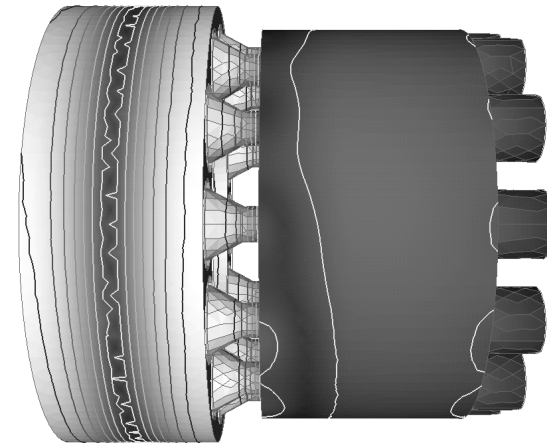


FIG. D.18 – Third longitudinal mode ($f = 935\text{Hz}$) in the configuration with a mean temperature jump at $x = 0.1\text{m}$; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

D.3 Calculation on the case without acoustic flame, without swirler and with a flame shape

D.3.1 Mean field

The mean sound speed field for this configuration is given in the figure D.19.

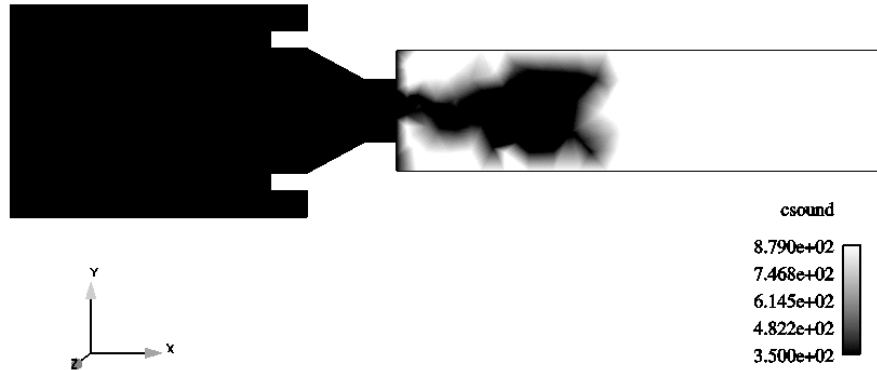


FIG. D.19 – Mean sound speed in the configuration with a flame shape for the mean temperature.

D.3.2 Eigen frequencies

The eigen frequencies computed by AVSP in this configuration can be found in table D.3.

Mode number	Frequency (in Hz)	Spatial structure
1	142.3	1st longitudinal
2	293.3	1st plenum circumferential
3	525.0	2nd plenum circumferential
4	615.3	2nd longitudinal
5	758.0	3rd plenum circumferential
6	836.3	1st combustor circumferential
7	945.7	2nd combustor circumferential
8	981.7	3rd longitudinal

TAB. D.3 – Eigenmodes calculated by AVSP in the configuration with flame shape for the mean field.

D.3.3 Eigenmodes

First mode longitudinal mode ($f = 142\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.20.

First circumferential mode of the plenum ($f = 293\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.21.

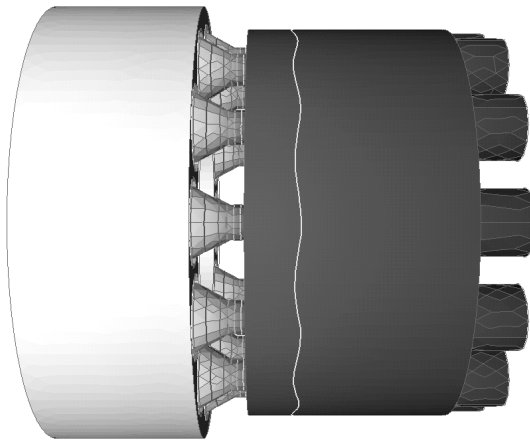


FIG. D.20 – First longitudinal mode ($f = 142\text{Hz}$) in the configuration with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

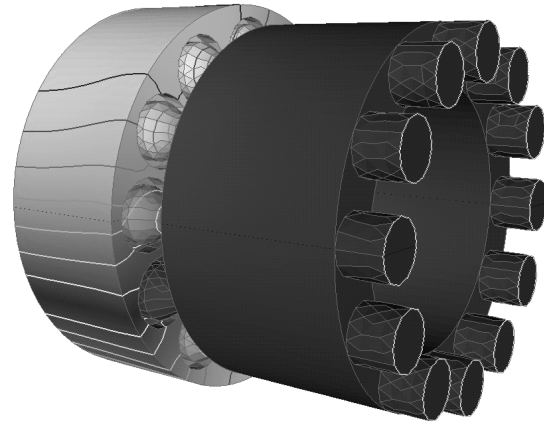


FIG. D.21 – First circumferential mode of the plenum ($f = 293\text{Hz}$) in the configuration with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

Second circumferential mode of the plenum ($f = 525\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.22.

Second longitudinal mode ($f = 615\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.23.

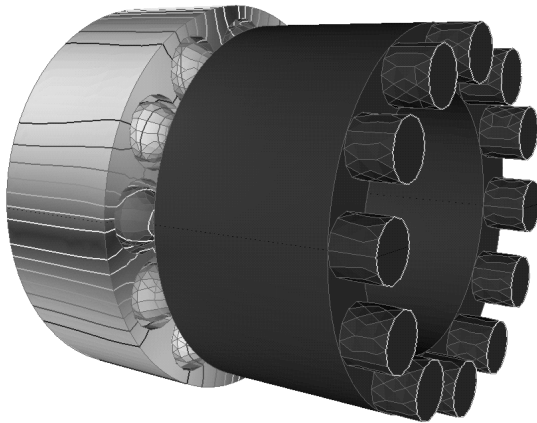


FIG. D.22 – Second circumferential mode of the plenum ($f = 525\text{Hz}$) in the configuration with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

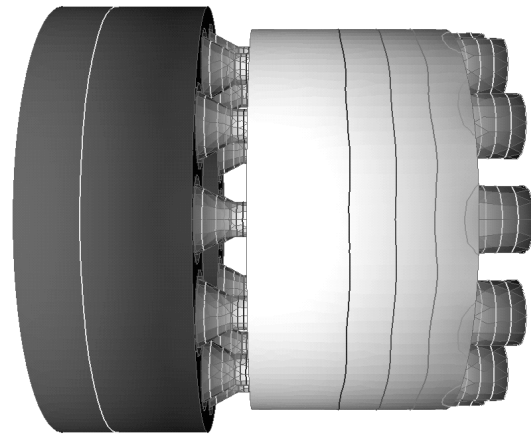


FIG. D.23 – Second longitudinal mode ($f = 615\text{Hz}$) in the configuration with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

Third circumferential mode of the plenum ($f = 758\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.24.

First circumferential of the combustor ($f = 836\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.25.

Third longitudinal mode ($f = 945\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.26.

Fourth circumferential mode of the plenum ($f = 981\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.27.

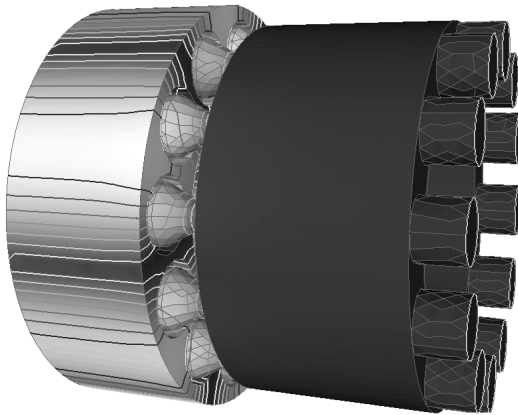


FIG. D.24 – Third circumferential mode of the plenum ($f = 758\text{Hz}$) in the configuration with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

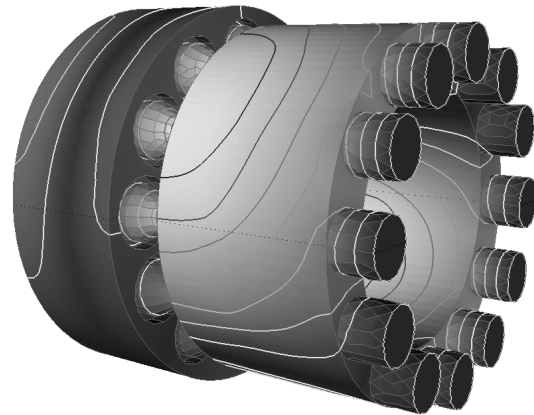


FIG. D.25 – First circumferential mode of the combustor ($f = 836\text{Hz}$) in the configuration with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

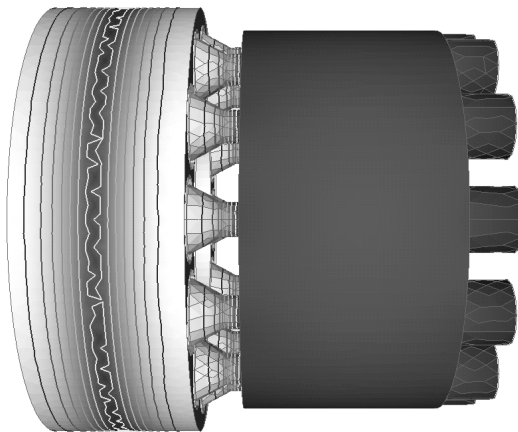


FIG. D.26 – Third longitudinal mode of the plenum ($f = 945\text{Hz}$) in the configuration with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

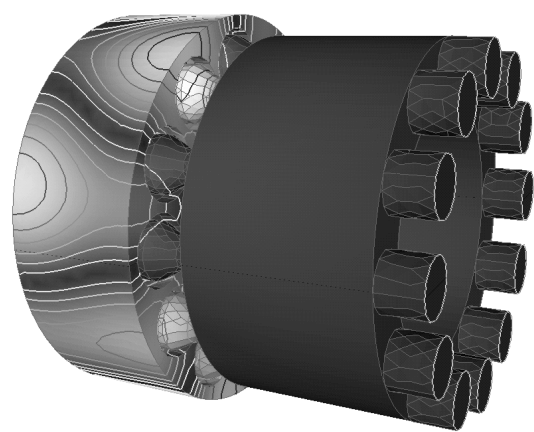


FIG. D.27 – Fourth circumferential mode of the plenum ($f = 981\text{Hz}$) in the configuration with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

D.4 Calculation on the case without acoustic flame, with swirler and with a flame shape

D.4.1 Mean field

The mean sound speed field for this configuration is given in the figure D.28.

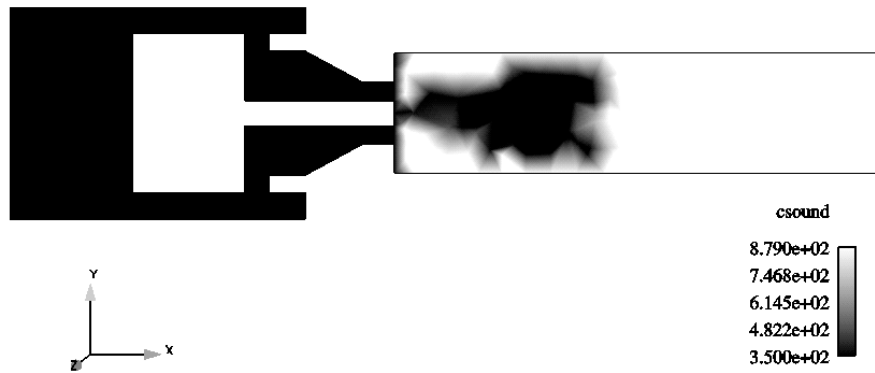


FIG. D.28 – Mean sound speed in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature.

D.4.2 Eigen frequencies

The eigen frequencies computed by AVSP in this configuration can be found in table D.4.

Mode number	Frequency (in Hz)	Spatial structure
1	143.2	1st longitudinal
2	285.6	1st plenum circumferential
3	503.1	2nd plenum circumferential
4	594.2	2nd longitudinal
5	712.6	3rd plenum circumferential
6	753.5	1st combustor circumferential
7	769.3	3rd longitudinal
8	860.5	4th plenum circumferential

TAB. D.4 – Eigenmodes calculated by AVSP in the configuration with flame shape for the mean field and with swirler.

D.4.3 Eigenmodes

First longitudinal mode ($f = 143\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.29.

First circumferential mode of the plenum ($f = 285\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.30.

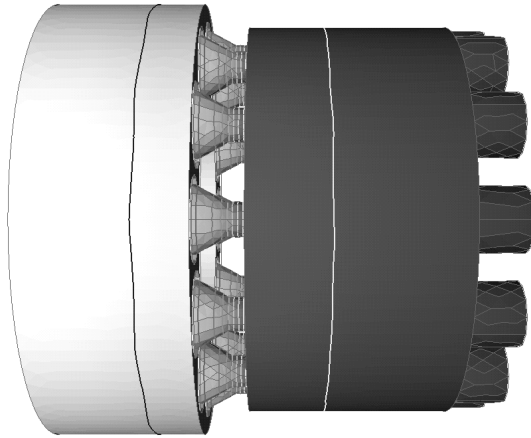


FIG. D.29 – First longitudinal mode of the plenum ($f = 143\text{Hz}$) in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

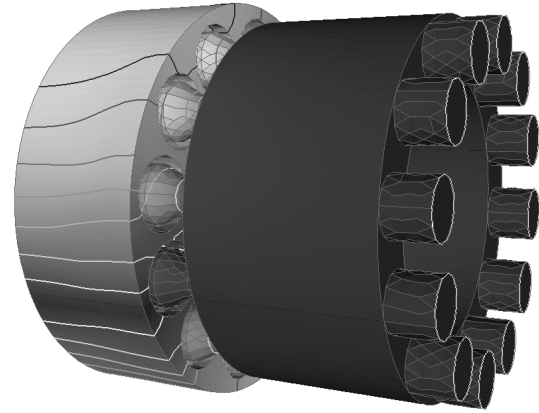


FIG. D.30 – First circumferential mode of the plenum ($f = 285\text{Hz}$) in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

Second circumferential mode of the plenum ($f = 503\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.31.

Second longitudinal mode ($f = 594\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.32.

Third circumferential mode of the plenum ($f = 712\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.33.

First circumferential mode of the combustor ($f = 753\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.34.

Third longitudinal mode ($f = 769\text{Hz}$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.35.

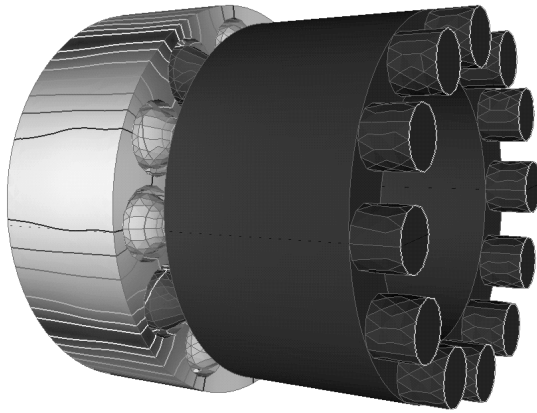


FIG. D.31 – Second circumferential mode of the plenum ($f = 503Hz$) in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

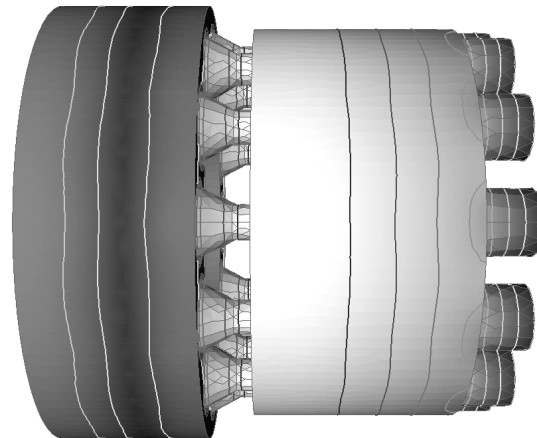


FIG. D.32 – Second longitudinal mode ($f = 594Hz$) in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

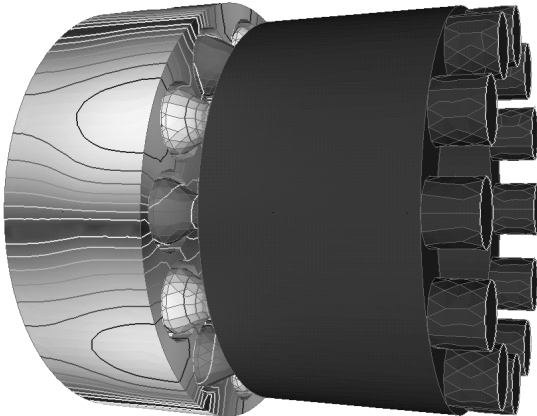


FIG. D.33 – Third circumferential mode of the plenum ($f = 712Hz$) in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

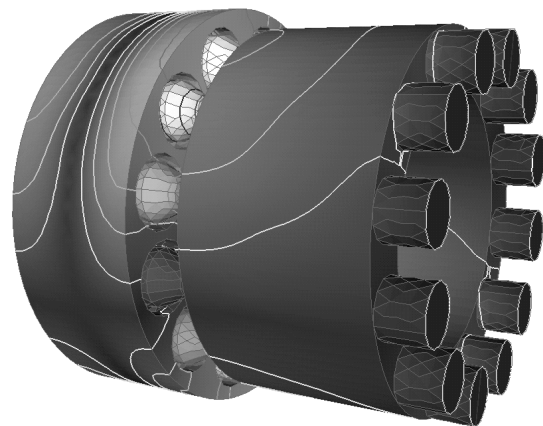


FIG. D.34 – First circumferential mode of the combustor ($f = 753Hz$) in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

Fourth circumferential mode of the plenum ($f = 860Hz$)

The spatial structure of the acoustic modulus is available for this mode in the figure D.36.

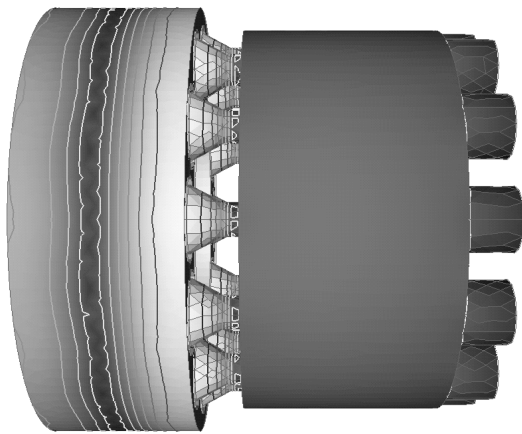


FIG. D.35 – Third longitudinal mode ($f = 769\text{Hz}$) in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

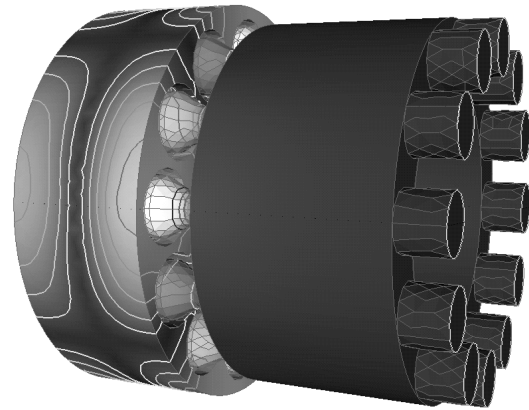


FIG. D.36 – Fourth circumferential mode of the plenum ($f = 860\text{Hz}$) in the configuration with swirler and with a flame shape for the mean temperature field; normalized acoustic pressure modulus (black stands for 0.0 and white for 1.0).

D.5 Calculation on the case with swirler and with an acoustic flame divided into four zones

D.5.1 Geometry and Mean field

Similar to appendix D.4.

D.5.2 Flame transfer function features

The situation is illustrated by Fig. 6.12.

- $x_{ref} = 0.0\text{m}$
- Flame divided into 4 zones.

D.5.3 Eigen frequencies

The eigen frequencies computed by AVSP in this configuration can be found in table D.5.

Mode number	Frequency (in Hz)	Spatial structure
1	$164.3 + 4.5i$	1st longitudinal
2	$284.8 - 14.1i$	1st plenum circumferential

TAB. D.5 – Eigen frequencies calculated by AVSP in the configuration with acoustic flame divided into four zones and reference point at $x_{ref} = 0.0m$.

D.6 Calculation on the case with swirler and with a global acoustic flame

D.6.1 Geometry and Mean field

Similar to appendix D.4.

D.6.2 Flame transfer function features

- $x_{ref} = 0.0m$
- Flame divided into 1 zone.

D.6.3 Eigen frequencies

The eigen frequencies computed by AVSP in this configuration can be found in table D.6.

Mode number	Frequency (in Hz)	Spatial structure
1	$166.7 + 9.0i$	1st longitudinal
2	$284.0 - 12.4i$	1st plenum circumferential

TAB. D.6 – Eigen frequencies calculated by AVSP in the configuration with a global acoustic flame and reference point at $x_{ref} = 0.0m$.

D.7 Calculation on the case with acoustic flame, with swirler, with a $n - \tau$ distribution on the flame and with a reference point inside the injector

D.7.1 Geometry and Mean field

Similar to appendix D.4.

D.7.2 Flame transfer function features

The situation is illustrated by Fig. 6.12.

- $x_{ref} = -0.01m$
- Flame divided into 4 zones.

D.7.3 Eigen frequencies

The eigen frequencies computed by AVSP in this configuration can be found in table D.7.

Mode number	Frequency (in Hz)	Spatial structure
1	$173.9 + 6.7i$	1st longitudinal
2	$284.3 - 20.7i$	1st plenum circumferential

TAB. D.7 – Eigenmodes calculated by AVSP in the configuration with an acoustic flame divided into 4 zones and with a reference point located at $x_{ref} = -0.01m$.

Résumé

Les instabilités thermoacoustiques constituent une catégorie de phénomène impliquée dans des applications aussi diverses que chaudières, moteurs fusées ou turbines à gaz. Dans ce dernier cas, les réglementations environnementales de plus en plus contraignantes ont amené les constructeurs à élaborer des systèmes requérant des mélanges air-carburant très pauvres à la limite de la flammabilité. La susceptibilité de la flamme aux perturbations de l'écoulement s'en trouve alors fortement accrue induisant parfois des oscillations auto-entretenues de toutes les grandeurs physiques pouvant aboutir à des dommages importants. Dans ce contexte, la possibilité de prédire dès la phase de conception l'apparition de ce genre de phénomène s'avère cruciale. Cependant, le recours à des simulations numériques instationnaires classiques ne peut être que limité compte-tenu du coût de calcul encore prohibitif sur de grandes configurations industrielles. Une approche complémentaire réside dans l'utilisation d'outils numériques exclusivement dévolus aux fluctuations acoustiques. Cette thèse s'inscrit dans cette optique et présente deux approches explorées au cours de cette étude :

- un code de type "réseau" évalue les modes propres longitudinaux en discrétisant la configuration en quelques dizaines d'éléments monodimensionnels aux fonctions de transferts connus.
- un code, s'inspirant du formalisme des éléments finis, tridimensionnel et parallèle.

Ces outils, validés sur configurations académiques, ont été appliqués à des configurations expérimentales de turbines à gaz.

MOTS CLES : instabilité, thermoacoustique, combustion, acoustique, valeurs propres