

**UNIVERSITE MONTPELLIER II  
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC**

**THESE**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II**

*Formation Doctorale* : Mathématiques  
*Ecole doctorale* : I2S (Information, Structures, Systèmes)  
*Directeur de thèse* : Franck NICOUD

présentée et soutenue publiquement

par

**M. Antoine DEVESA**

le 5 Décembre 2006

**Modélisation de paroi pour la simulation  
d'écoulements instationnaires non-isothermes**

**JURY**

M. AUPOIX Bertrand,	Directeur de recherches à l'ONERA de Toulouse,	Examineur
M. DEVILLE Michel,	Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne,	Examineur
M. DRONIOU Jérôme,	Professeur à l'Université de Montpellier II,	Examineur
M. DUCROS Frédéric,	Directeur de laboratoire - CEA Grenoble,	Examineur
M. LAMBALLAIS Eric,	Professeur à l'Université de Poitiers,	Rapporteur
M. NICOUD Franck,	Professeur à l'Université de Montpellier II,	Directeur de thèse
M. QUEMERE Patrick,	Ingénieur de recherches - CEA Grenoble,	Membre invité
M. SAGAUT Pierre,	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie Paris VI,	Rapporteur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Simulation numérique d'écoulements pariétaux turbulents</b>	<b>5</b>
<b>1 Simulation numérique de la turbulence</b>	<b>7</b>
1.1 Description analytique des écoulements turbulents . . . . .	8
1.1.1 Equations de Navier-Stokes . . . . .	8
1.1.2 Le caractère turbulent des écoulements . . . . .	9
1.2 Différentes approches de la simulation numérique . . . . .	9
1.2.1 Simulation numérique directe . . . . .	10
1.2.2 Approche moyennée . . . . .	11
1.2.3 Simulation des grandes échelles . . . . .	14
1.3 Modélisation statistique de la turbulence . . . . .	15
1.3.1 Modèles algébriques . . . . .	15
1.3.2 Modèles avec équations de transport de quantités turbulentes . . . . .	16
1.3.3 Modèles à l'ordre 2 . . . . .	19
1.4 Modélisation des termes de sous-maille en LES . . . . .	19
1.4.1 Modèle de Smagorinsky . . . . .	19
1.4.2 Modèle Wale . . . . .	20
1.4.3 Modèle à Fonction de Structure Sélective . . . . .	21
1.5 Modélisation du flux de chaleur turbulent . . . . .	22
<b>2 Couche limite pariétale turbulente</b>	<b>25</b>
2.1 Hypothèses simplificatrices dans la couche limite . . . . .	25

2.2	Structure de la couche limite pariétale turbulente . . . . .	26
2.2.1	La zone interne . . . . .	27
2.2.2	La zone externe . . . . .	29
2.2.3	Le raccordement entre zones interne et externe . . . . .	29
2.3	Contraintes numériques pour la simulation d'écoulements pariétaux . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Evaluation du frottement et des flux thermiques à la paroi</b>	<b>31</b>
3.1	Corrélations théoriques et empiriques . . . . .	31
3.1.1	Régime quasi-isotherme . . . . .	31
3.1.2	Régime non-isotherme . . . . .	33
3.2	Concept de modèle de paroi . . . . .	33
3.2.1	Loi de paroi standard . . . . .	34
3.2.2	Autres modèles de paroi existants . . . . .	36
3.2.3	Modèle TBLE . . . . .	38
3.3	Objectifs . . . . .	40
<b>II</b>	<b>Modèles de paroi pour les écoulements à densité variable</b>	<b>43</b>
<b>4</b>	<b>Description des écoulements de fluides dilatables</b>	<b>45</b>
4.1	Effets de densité variable dans les écoulements turbulents . . . . .	45
4.2	Formulation de l'approche Bas Mach . . . . .	46
4.3	Mise en défaut des modèles standards existants . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Prise en compte des effets de densité</b>	<b>53</b>
5.1	Transformation de Van Driest . . . . .	53
5.2	Etude de canal plan aux propriétés variables . . . . .	55
5.3	Développement d'un modèle de paroi couplé : CWM . . . . .	57
5.3.1	Intégration de la transformation de Van Driest . . . . .	57
5.3.2	Calibration de la loi de paroi par la constante $C'$ . . . . .	58
5.3.3	Calcul des grandeurs turbulentes pour le modèle de paroi couplé . . . . .	60
5.4	Adaptation d'un modèle de paroi pour la LES : TBLE- $\rho$ . . . . .	62

5.4.1	Considérations sur le modèle de turbulence du TBLE . . . . .	62
5.4.2	Résolution numérique de TBLE- $\rho$ . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Mise en œuvre des modèles de paroi couplé et TBLE-<math>\rho</math></b>	<b>69</b>
6.1	Etude préliminaire sur les modèles de paroi développés . . . . .	69
6.1.1	Comportement global . . . . .	70
6.1.2	Comportement en $\Delta T$ faible . . . . .	70
6.1.3	Conclusions sur cette étude préliminaire . . . . .	71
6.2	Etude de canal plan turbulent aux propriétés physiques variables . . . . .	72
6.3	Le code de calcul Trio_U . . . . .	76
6.3.1	Avancement en temps . . . . .	76
6.3.2	Schémas de discrétisation spatiale pour la convection . . . . .	77
6.3.3	Algorithme de résolution en Quasi-compressible . . . . .	78
6.4	Comparaison entre résultats de simulation moyennés et corrélations . . . . .	79
6.4.1	En régime quasi-isotherme . . . . .	79
6.4.2	En régime non-isotherme . . . . .	80
6.5	Simulation d'une lame de fluide dans un assemblage de combustible (RCG) . . . . .	81
6.5.1	Contexte industriel du cas test . . . . .	81
6.5.2	Présentation du cas test . . . . .	82
6.5.3	Simulation Bas-Reynolds . . . . .	83
6.5.4	Tests des modèles de paroi . . . . .	85
<b>III</b>	<b>Sur les effets instationnaires dans la modélisation de paroi</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>91</b>
7.1	Caractéristiques temporelles des modèles de paroi . . . . .	91
7.2	Physique des écoulements pulsés . . . . .	91
7.3	Second problème de Stokes et épaisseur de pénétration . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Expérience numérique sur le transport de scalaires passifs pulsés</b>	<b>95</b>
8.1	Equations de conservation et propriétés pariétales . . . . .	95

8.2	Le code de calcul AVBP . . . . .	96
8.2.1	L'approche cell-vertex . . . . .	96
8.2.2	Les schémas numériques . . . . .	98
8.2.3	Le pas de temps . . . . .	98
8.3	Validation du code AVBP pour l'étude de scalaires passifs pulsés . . . . .	99
8.3.1	Oscillation de la condition de paroi . . . . .	99
8.3.2	Oscillation par imposition du terme source . . . . .	101
8.4	Configuration d'étude . . . . .	102
8.4.1	Propriétés dynamiques et thermiques de l'écoulement . . . . .	103
8.4.2	Mode de forçage des espèces fictives . . . . .	105
8.4.3	Paramètres de forçage . . . . .	107
8.5	Résultats numériques . . . . .	110
8.5.1	Forçage par les conditions extérieures . . . . .	111
8.5.2	Forçage par la paroi . . . . .	116
8.5.3	Conclusions sur les résultats dans les deux configurations . . . . .	122
<b>9</b>	<b>Réponse dynamique des modèles de paroi</b>	<b>123</b>
9.1	Mise en œuvre des modèles hors code . . . . .	123
9.1.1	Principe du test numérique . . . . .	123
9.1.2	Résultats . . . . .	124
9.2	Approfondissements relatifs au modèle TBLE . . . . .	130
9.2.1	Influence de l'état initial . . . . .	130
9.2.2	Influence du pas de temps externe . . . . .	132
9.3	Discussion en termes de modélisation de paroi . . . . .	132
<b>10</b>	<b>Vers une une loi de paroi instationnaire ?</b>	<b>133</b>
10.1	Dérivation de modèles instationnaires . . . . .	134
10.1.1	Formulation 1 . . . . .	135
10.1.2	Formulation 2 . . . . .	135
10.2	Test hors-code . . . . .	136

<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>139</b>
<b>Références</b>	<b>146</b>
<b>Annexes</b>	<b>a</b>
<b>A Article de conférence n° 1</b>	<b>a</b>
<b>B Article accepté pour publication dans Computers and Fluids</b>	<b>b</b>
<b>C Article de conférence n° 2</b>	<b>c</b>
<b>D Article de conférence n° 3</b>	<b>d</b>
<b>E Article soumis à International Journal of Heat and Mass Transfer</b>	<b>e</b>



# Introduction

Depuis que l'orientation nucléaire pour la production d'énergie a été prise par le gouvernement français, la production d'énergie nucléaire n'a cessé d'augmenter. L'utilisation de celle-ci doit néanmoins être la plus sécurisée possible, afin éviter que des catastrophes industrielles se produisent à la suite de problèmes matériels ou d'erreurs humaines : c'est ce qui constitue ce que l'on appelle communément la sûreté nucléaire, dont une définition est donnée ci-dessous.

«La sûreté nucléaire vise à assurer la protection des personnes et de l'environnement contre l'ensemble des dangers et nuisances liés à l'activité nucléaire. Elle répond à trois exigences : assurer la sûreté, en fonctionnement normal, des installations nucléaires en limitant les rejets d'effluents radioactifs dans l'environnement ; prévenir les incidents et les accidents ; limiter les conséquences de tels événements. Elle prend en compte l'ensemble des risques inhérents aux installations de la conception au démantèlement et aux substances radioactives (utilisation, transport et transformation). Pour disposer d'une installation nucléaire sûre, il est indispensable d'assurer en permanence le contrôle de la réaction nucléaire, le refroidissement du combustible et le confinement de l'ensemble des produits radioactifs. Ces trois fonctions, fondamentales, régissent la conception, puis la construction et enfin l'exploitation d'une centrale nucléaire.»<sup>1</sup>

Plus précisément, la phase de conception est aujourd'hui assistée par la simulation numérique, permettant de prévoir et analyser le comportement de systèmes *a priori*, pour aider à la prévention d'incidents ou d'accidents. Cette thèse s'inscrit dans ce cadre d'études préliminaires pour la prévention des incidents concernant les écoulements de fluides dans les installations nucléaires.

De manière générale, les écoulements de l'industrie nucléaire se caractérisent par un nombre de Reynolds élevé et une géométrie complexe. De plus, l'enjeu principal repose sur la récupération d'une énergie provenant de réactions à l'échelle atomique, par l'intermédiaire de fluides caloporteurs, dont le but est de transporter la chaleur. Ceci implique habituellement la présence de forts gradients de température dans ces écoulements. Dans ce contexte que l'on peut qualifier d'extrême, il est pratiquement impossible d'effectuer des mesures, qu'elles soient relatives à la dynamique de l'écoulement (vitesse, pression), ou la thermique. En effet, l'ordre de grandeur des couches limites dynamique et thermique est généralement inférieur au millimètre. De même, effectuer des mesures précises à hautes températures et souvent haute pression représente à ce jour, autant d'obstacles infranchissables d'un point de vue expérimental. Ceci est une des raisons pour lesquelles la simulation numérique de tels écoulements apparaît comme un complément voire même dans certains cas une alternative à l'expérimentation.

La simulation numérique dans ce contexte doit pouvoir conduire à la bonne évaluation des

---

<sup>1</sup>Extrait de «L'énergie nucléaire en 110 questions (Edition de janvier 2000), Ministère de l'économie, des Finances et de l'Industrie

flux thermiques aux interfaces fluides / parois, tout en représentant le plus fidèlement possible les phénomènes instationnaires en présence. En effet, la principale source d'incidents dans les circuits de refroidissement d'installations nucléaires réside dans la fatigue thermique à laquelle sont soumis les matériaux. Ceux-ci réagissent directement aux variations cycliques de température par contraction et dilatation. Une répétition trop nombreuse de ces cycles peut alors entraîner la génération de fissures pouvant entraîner une détérioration plus ou moins dangereuse des matériaux (une illustration sur des conséquences possibles de la fatigue thermique sur des pales de turbines est donnée par la Figure 1). Dans le cadre des écoulements de l'industrie nucléaire, le cas de brèches induites dans les parois, notamment celles de la cuve primaire du réacteur (cf. Figure 2), est un des phénomènes les plus représentatifs des préoccupations en matière de prévention de rejet de produits radioactifs dans l'environnement.

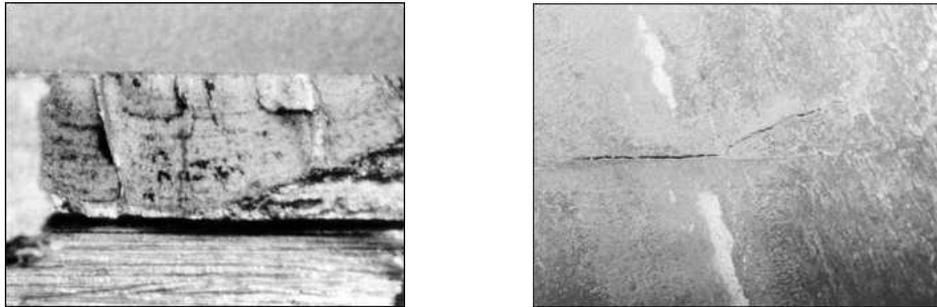


FIG. 1 – Fissures dues à la fatigue thermique à la surface d'une conduite en acier au carbone

Cette thèse se consacre précisément à la détermination précise en espace et en temps des flux de chaleur dans ce type d'installations, au travers d'une modélisation des phénomènes dynamique et thermique de proche paroi.

L'objectif final étant de développer, tester et mettre en exploitation un(de) nouveau(x) modèle(s) de paroi pouvant être utilisé pour la simulation d'écoulements instationnaires et à densité variable, deux objectifs intermédiaires mais essentiels pour y parvenir ont été identifiés. Selon un premier axe de travail, l'influence de forts gradients de température qui règnent dans les écoulements ciblés doit être analysée, afin de déterminer d'abord l'erreur qui est actuellement commise par l'utilisation de modèles dédiés aux écoulements quasi-isothermes, et ensuite de développer des modèles adaptés à ce type d'écoulements où les propriétés du fluide sont variables. Un second axe consiste à étudier l'impact d'instationnarités dues à des phénomènes thermiques périodiques sur la détermination du flux de chaleur au cours du temps ainsi qu'à rechercher de nouvelles possibilités pour prendre en compte ces effets instationnaires dans des modèles de paroi.

Afin de conférer un maximum de clarté à ce document, le plan qui a été adopté est articulé autour des trois parties suivantes :

- la **Partie I** contient des éléments préliminaires et bibliographiques sur la simulation numérique d'écoulements pariétaux turbulents, nécessaires à la bonne compréhension du problème et sa correcte formulation
- la **Partie II** traite de la dérivation de modèles de paroi pour les écoulements à densité variable qui a été réalisée pendant cette thèse
- la **Partie III** est basée sur la détermination des effets instationnaires dans la modélisation de paroi

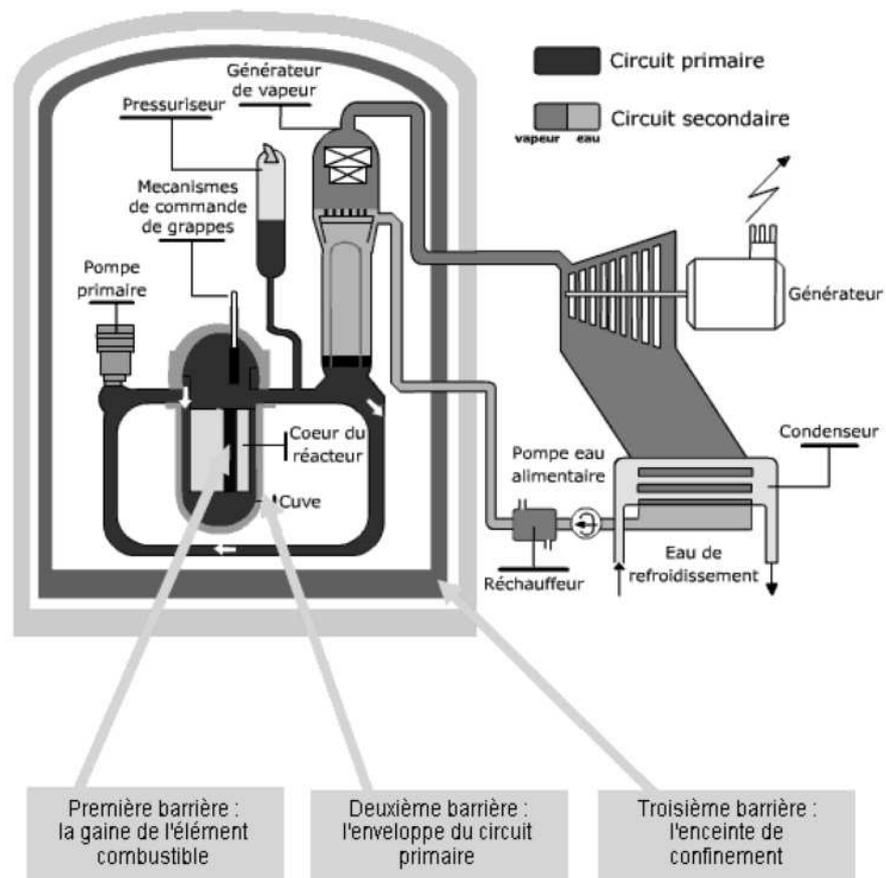


FIG. 2 – Schéma descriptif d'un réacteur nucléaire à eau pressurisée



**Première partie**

**Simulation numérique d'écoulements  
pariétaux turbulents**



# Chapitre 1

## Simulation numérique de la turbulence

La simulation numérique en mécanique des fluides (on parlera de CFD - Computational Fluid Dynamics - par la suite) fait aujourd'hui partie intégrante de la recherche et de l'industrie. Apparue au cours des dernières décennies, grâce à l'avènement de l'informatique et en particulier du calcul scientifique, elle constitue désormais un outil supplémentaire pour les ingénieurs et chercheurs, aux côtés de l'expérimentation et de la théorie.

Dans les milieux concernés par cette étude, la description analytique de la mécanique des fluides repose sur des propriétés de mécanique des milieux continus. Le nombre de Knudsen défini comme le rapport entre le libre parcours moyen  $l^1$  et la dimension caractéristique de l'écoulement du fluide  $D$  reste suffisamment faible (largement inférieur à  $10^{-3}$ ) pour pouvoir considérer une particule fluide assez grande pour contenir un échantillon statistiquement représentatif de molécules, et assez petite pour pouvoir être considérée comme ponctuelle par rapport à l'écoulement macroscopique.

Ainsi, des propriétés de conservation (masse, énergie, quantité de mouvement) peuvent être formulées pour cette particule fluide. Le système regroupant ces propriétés est connu sous le nom des équations de Navier-Stokes, et est détaillé en Section 1.1.

Les écoulements de l'industrie nucléaire, brièvement décrits dans l'introduction, tout comme ceux que l'on retrouve dans la nature, sont majoritairement turbulents. Bien qu'il n'existe à ce jour aucune définition universelle de la turbulence, ses principales propriétés sont connues. La turbulence se traduit par la présence de mouvements tourbillonnaires répartis continûment sur une large plage d'échelles. Dans le domaine spatio-temporel, on caractérise la turbulence par sa dynamique tridimensionnelle non-linéaire, soumise à des mécanismes de transfert d'énergie entre grandes et petites structures.

La complexité de la dynamique des écoulements turbulents et sa forte non-linéarité peut conduire à envisager différentes approches de simulation, plus ou moins coûteuses en termes d'opérations de calcul, qui conduisent à des modélisations dont le degré de complexité varie. Trois approches sont envisagées en Section 1.2, qui seront utilisées au cours de cette étude.

---

<sup>1</sup>Distance caractéristique parcourue par une molécule de fluide entre deux collisions

## 1.1 Description analytique des écoulements turbulents

### 1.1.1 Equations de Navier-Stokes

Le système d'équations de départ est basé sur le principe de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie [11, 47] et constitue les équations de Navier-Stokes. La thèse ayant pour cadre théorique les écoulements de fluides dilatables, nous écrivons donc ici ces équations pour représenter des fluides compressibles, c'est-à-dire pour lesquels la densité n'est pas considérée comme constante. Si on considère un fluide newtonien, et en suivant la convention de sommation sur les indices répétés, on peut écrire de façon générale ces équations comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) &= 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho h u_j + q_j) - \frac{dp}{dt} - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$ , l'enthalpie  $h$  et le flux de chaleur  $q_j$  s'expriment ( $\delta_{ij}$  étant le coefficient de Kronecker et  $C_p$  la capacité calorifique à pression constante) :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ij} \\ h &= C_p T \\ q_j &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{aligned}$$

La seconde relation est valable dans le cadre de cette étude car la capacité calorifique  $C_p$  est constante. La viscosité moléculaire  $\mu$  dépend de la température et peut être définie par la loi de Sutherland :

$$\mu = \mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + C_0}{T + C_0} \quad (1.2)$$

où  $T_0$ ,  $\mu_0$  et  $C_0$  sont respectivement une température, une viscosité et une constante de référence, dépendantes du gaz considéré. La conductivité thermique  $\lambda$  peut, quant à elle, être calculée par le biais d'un nombre de Prandtl ( $Pr$ ) qui peut être variable, et tel que :

$$\lambda = \lambda(T) = \frac{\mu(T) C_p}{Pr}$$

La loi liant la pression aux autres grandeurs thermodynamiques de l'écoulement est ici celle des gaz parfaits :

$$p = \rho r T \quad (1.3)$$

Par la suite, nous serons amené à simplifier ce système des équations compressibles de Navier-Stokes en utilisant une approximation de fluide faiblement compressible. Ceci sera détaillé et utilisé au cours de la Partie II.

On peut ici noter que, bien que les équations de Navier Stokes soient déjà une modélisation de la réalité physique, celles-ci n'ont pas encore été résolues analytiquement (le problème de fournir une solution à ce système mathématique reste ouvert). Afin de contourner la complexité de ce problème, on peut envisager de discrétiser ces équations sur une grille et résoudre le problème discret associé. Nous verrons selon quelle méthode il est possible d'y parvenir dans la Section 1.2.

### 1.1.2 Le caractère turbulent des écoulements

Les inconnues des équations de Navier-Stokes sont des quantités instantanées et locales :  $u_j$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $h$ . Pour connaître la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement, on définit un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds de l'écoulement, en fonction d'une vitesse et d'une longueur caractéristiques :

$$Re = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho ul}{\mu} \quad (1.4)$$

Un faible nombre de Reynolds caractérise un écoulement laminaire. A l'opposé, un grand nombre de Reynolds, dénote son caractère turbulent. Entre ces deux extrêmes se trouve une zone de transition laminaire-turbulent, qui n'est pas bien connue et qui s'étend autour de valeurs dépendant de la géométrie considérée (de l'ordre de quelques milliers pour un écoulement entre deux plaques planes par exemple).

Le nombre de Reynolds, qui peut être défini de nombreuses façons, et à de nombreuses échelles, joue un rôle important dans l'approche de la résolution numérique d'un écoulement (cf. Section 1.2).

## 1.2 Différentes approches de la simulation numérique

L'objectif principal d'une simulation en mécanique des fluides numériques est, avant tout, d'obtenir des renseignements fiables et quantitatifs sur les propriétés d'un écoulement turbulent, la majeure difficulté résidant dans son caractère turbulent. C'est en ce sens que l'on compte beaucoup sur l'évolution progressive des super-calculateurs toujours plus puissants pour résoudre les problèmes d'intérêt en un temps raisonnable aussi bien pour les études amont de recherche que pour les calculs plus appliqués de l'industrie.

Néanmoins, la puissance informatique est aujourd'hui telle que l'ensemble des échelles fréquentielles de la turbulence ne peut qu'être difficilement résolu numériquement. En effet, l'échelle temporelle de Kolmogorov (c'est-à-dire des plus petits échelles turbulentes) décroît en  $Re^{0.5}$ , et l'échelle spatiale en  $Re^{0.75}$  [47]. De plus, dans les écoulements pariétaux, l'échelle de longueur caractéristique est une échelle visqueuse qui décroît en  $Re^{0.8}$ . On comprend ainsi que la résolution de toutes les échelles d'un écoulement pariétal sera d'autant plus difficile que son nombre de Reynolds sera élevé.

On voit donc apparaître des difficultés, déjà au niveau de la méthodologie à employer pour remplir certains critères de « qualité d'une simulation », que sont : 1- le niveau de description, 2- la précision et 3- le coût de calcul (horaire, donc financier). Le niveau de description correspond à la quantité d'information à laquelle on souhaite accéder, qu'elle concerne les grandes structures

de l'écoulement, les plus petites, ou l'ensemble. La précision sera, elle, fonction des outils numériques qui serviront à la simulation et qui peuvent donner des résultats plus ou moins justes. Enfin, le coût de calcul peut être vu comme le temps de restitution du calcul, celui-ci devant rester acceptable par rapport aux échelles de temps des projets par exemple.

La simulation numérique est ainsi, avant tout, un problème de compromis entre ces trois aspects. Selon ce qui semble être le plus important dans l'objectif final d'un calcul (et qui bien sûr varie fortement selon le contexte académique ou industriel), on privilégiera des approches différentes pour sa réalisation.

Les trois principales approches sont décrites dans les paragraphes suivants.

### 1.2.1 Simulation numérique directe

La résolution directe des équations de Navier Stokes est l'approche numérique la plus instinctive pour la simulation numérique. Elle constitue le fondement de la simulation numérique directe (SND ou DNS : Direct Numerical Simulation en anglais). Dans une DNS, aucun modèle de turbulence n'est utilisé. En revanche, cette méthode nécessite des schémas de haute précision et des maillages de haute résolution, afin de capturer l'ensemble des échelles turbulentes en jeu et d'obtenir ainsi le niveau de description le plus élevé. La Figure 1.1 donne une représentation très schématique du spectre de la turbulence dans cette situation-là (tout est résolu, aucune modélisation n'est utilisée).

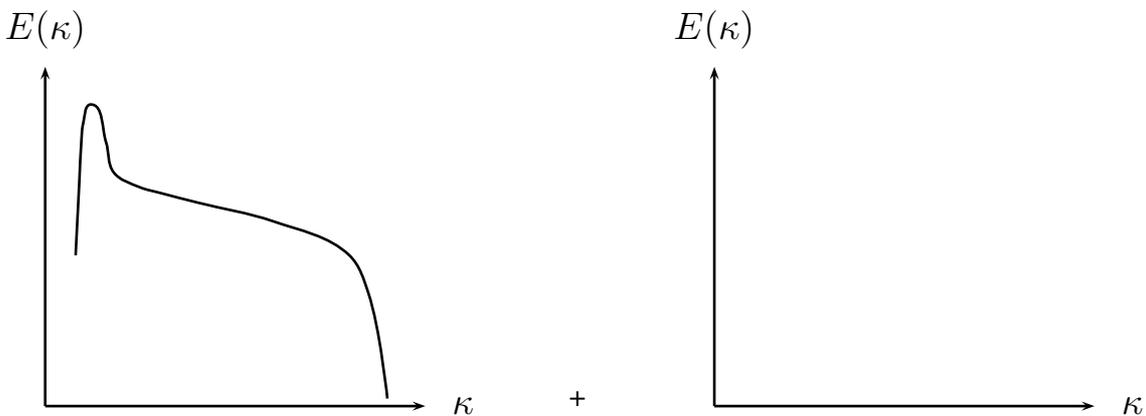


FIG. 1.1 – Schéma du spectre d'énergie d'une simulation numérique directe, résolu (gauche) et modélisé (droite)

Néanmoins, l'emploi de la simulation numérique directe repose sur les estimations de résolution spatiale et temporelle précédemment citées, à savoir que les échelles caractéristiques diminuent fortement lorsque le nombre de Reynolds augmente. Ceci limite donc l'application de la DNS à des écoulements à faible nombre de Reynolds.

Il n'en reste pas moins que des calculs DNS représentent une base de données fiable, que ce soit pour la comparaison avec des calculs moins précis, pour la vérification d'hypothèses employées dans la dérivation de modèles ou bien encore pour la compréhension des phénomènes en jeu dans une configuration étudiée. De nombreuses simulations directes ont, par exemple, été effectuées pour des écoulements de canaux plans, à faible nombre de Reynolds au cours des dernières décen-

nies. Le nombre de Reynolds pertinent pour cette configuration est basé sur la vitesse de frottement  $U_\tau$ <sup>2</sup> et la demi-hauteur du canal  $h$  :

$$Re_\tau = \frac{U_\tau h}{\nu_w} \quad (1.5)$$

Ainsi, les écoulements à faibles  $Re_\tau$  sont accessibles par la simulation directe. C'est le cas par exemple de Kim *et al.* [34] qui furent les premiers à réaliser une DNS de canal plan turbulent à un nombre de Reynolds  $Re_\tau$  de 180. Cette valeur est une valeur limite car juste supérieure au nombre de Reynolds de transition laminaire-turbulent. Les données de cette simulation font encore aujourd'hui office de référence et seront utilisées au cours de cette étude. Plus récemment, des DNS à nombre de Reynolds plus importants ( $Re_\tau = 2000$ ) ont été effectuées par Hoyas *et al.* [25]. Ceci est le calcul DNS de canal plan turbulent à  $Re_\tau$  le plus élevé que l'on puisse trouver dans la littérature à ce jour. Et pour cause, ce calcul a pris environ 120 jours pleins sur 2048 processeurs<sup>3</sup> pour pouvoir converger et être moyenné afin d'en tirer des statistiques satisfaisantes.

Afin de diminuer le coût de calcul extrêmement élevé des simulations directes turbulentes, plusieurs solutions ont été envisagées en ne prenant en compte que les faibles longueurs d'ondes ou à l'inverse les grandes longueurs d'ondes. C'est le cas de la simulation des grandes échelles dont le principe est détaillé plus loin. Aux antipodes de la simulation numérique directe, on peut tenter de modéliser toutes les échelles de l'écoulement en se basant sur les propriétés de la turbulence, et en ne résolvant les équations de Navier-Stokes que pour les quantités moyennées : c'est l'approche RANS, évoquée ci-après.

### 1.2.2 Approche moyennée

Afin de diminuer considérablement le coût d'une simulation, il est possible d'envisager de modéliser tout ou partie des structures turbulentes présentes dans l'écoulement. L'approche RANS (acronyme pour Reynolds Averaged Navier-Stokes) a pour principe de résoudre les équations de Navier-Stokes pour les quantités moyennes, de telle sorte que le seul mouvement moyen est calculé. L'ensemble des structures de la turbulence est modélisé (ceci est schématisé par la Figure 1.2).

Les grandeurs mises en jeu dans ces équations sont des grandeurs locales et instantanées. Afin de considérer la partie moyenne et fluctuante de chacune d'elles, nous allons appliquer un opérateur de séparation d'échelles tel que :

$$f = \bar{f} + f'$$

Cet opérateur est défini comme la moyenne d'ensemble ou moyenne stochastique sur  $N$  réalisations d'un même écoulement d'une grandeur  $f$ , fonction aléatoire en espace et en temps, prenant la valeur  $f_k$  pour la réalisation  $k$  :

$$\widehat{f(x_i, t)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(x_i, t) \quad (1.6)$$

---

<sup>2</sup>Cette échelle de vitesse caractéristique de la turbulence pariétale sera définie formellement en Section 2.2

<sup>3</sup>Au centre de calcul de Barcelone : MareNostrum, qui est le 8<sup>ème</sup> centre de calcul le plus puissant au monde actuellement

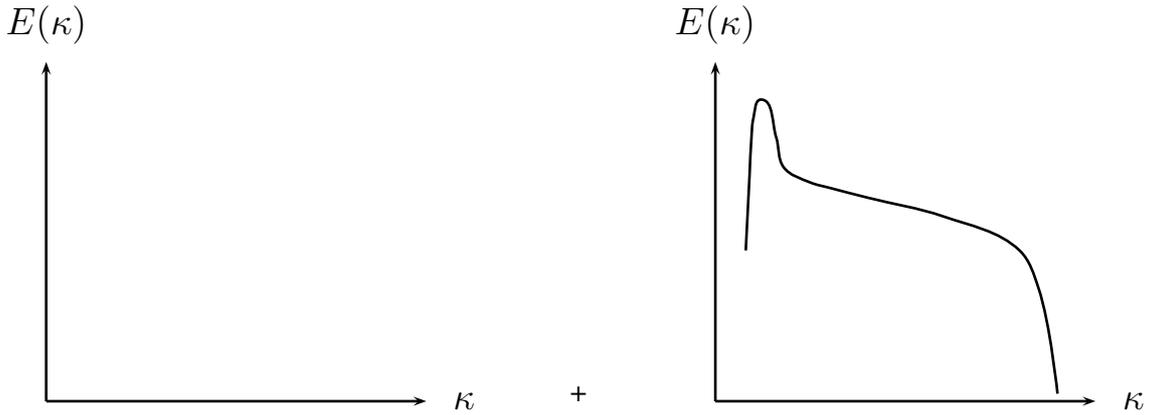


FIG. 1.2 – Schéma du spectre d'énergie d'une simulation moyennée, résolu (gauche) et modélisé (droite)

Cependant, cette définition nécessite la mise à disposition d'un nombre élevé de réalisations (en théorie, ce nombre devrait être infini). En pratique, une seule réalisation peut être difficile à obtenir, ce qui conduit à définir d'autres types de moyenne. La moyenne temporelle définie par :

$$\overline{f(x_i, t)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

est ainsi généralement confondue avec la moyenne d'ensemble, Eq. (1.6). La correspondance de ces deux types de moyenne (statistique et temporelle) implique la validité du principe d'ergodicité, c'est-à-dire lorsque l'écoulement est statistiquement stationnaire. Ainsi, l'utilisation d'un opérateur de moyenne temporelle implique la stationnarité de l'écoulement. Il devient alors difficile d'utiliser cette moyenne temporelle dans le cas d'écoulements instationnaires : en effet, la durée d'intégration en temps doit être suffisamment petite devant les échelles de temps macroscopiques, et assez grande devant les échelles de la turbulence. C'est pour cela que le concept de moyenne d'ensemble est celui utilisé par la suite.

Si l'on considère en détail cet opérateur de moyenne, on s'aperçoit qu'il a les propriétés suivantes :

1. conservation des constantes :

$$\overline{a} = a$$

2. linéarité :

$$\overline{af + g} = a\overline{f} + \overline{g}$$

3. commutation avec les dérivées partielles spatiales et temporelles :

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Une dernière propriété est respectée dans le cas d'un opérateur de moyenne statistique, qui s'écrit :

4. idempotence :

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{f}.g} &= \overline{\tilde{f}}.\overline{g} \\ \overline{\overline{\tilde{f}}} &= \overline{\tilde{f}} \\ \overline{\tilde{f}'} &= 0\end{aligned}$$

La vérification de cette 4<sup>ème</sup> propriété différencie l'opérateur de moyenne statistique, des opérateurs de filtrage, comme nous le verrons au paragraphe 1.2.3.

L'application de cet opérateur aux équations de conservation précédemment écrites conduit à l'obtention de termes non directement calculables, dus à la non-linéarité des dites équations. Afin de simplifier leur écriture, on utilise souvent le formalisme de Favre fondé sur une pondération des quantités en jeu par la masse volumique. Cette notation, couramment appelée moyenne de Favre par abus de langage, s'écrit :

$$f = \tilde{f} + f'' \quad \text{avec :} \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}$$

Remarque : cette pondération par la masse volumique s'applique à toutes les variables, sauf la pression et la masse volumique elle-même.

Nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \tilde{u}_j}) &= 0 \\ \frac{\partial (\overline{\rho \tilde{u}_i})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \overline{\rho u_i'' u_j''} + \overline{\rho} \delta_{ij} - \overline{\tau_{ij}}) &= 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.8) \\ \frac{\partial (\overline{\rho \tilde{h}})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \tilde{h} \tilde{u}_j} + \overline{\rho h'' u_j''} + \overline{q_j} - \overline{\tau_{ij} \tilde{u}_i}) - \frac{d\overline{\rho}}{dt} + \overline{\tau_{ij}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} &= 0\end{aligned}$$

Les expressions respectives des contraintes visqueuses et du flux de chaleur moyennées peuvent se simplifier [60] en :

$$\begin{aligned}\overline{\tau_{ij}} &= \overline{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \overline{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \delta_{ij} \\ \overline{q_j} &= -\overline{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}\end{aligned}$$

En effet, on peut supposer que les corrélations faisant intervenir les fluctuations des coefficients de transfert moléculaire ( $\mu$  et  $\lambda$ ) sont négligeables et considérer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\overline{\mu} &= \mu(\tilde{T}) \\ \overline{\lambda} &= \lambda(\tilde{T})\end{aligned}$$

La loi d'état (1.3) pour les grandeurs moyennées s'écrit simplement :

$$\overline{p} = \overline{\rho r \tilde{T}} \quad (1.9)$$

Le système formé par les équations de Navier-Stokes moyennées (1.8) fait apparaître de nouveaux termes ( $\overline{\rho u_i'' u_j''}$  et  $\overline{\rho h'' u_j''}$ ). Le premier est connu comme le tenseur des contraintes de Reynolds, le second est son pendant pour l'équation de l'enthalpie. Ces deux termes ne sont pas calculables directement, et posent donc un problème de fermeture de ces équations. Une modélisation de ces termes s'impose donc et sera présentée au cours de la Section 1.3.

### 1.2.3 Simulation des grandes échelles

Afin de se baser sur une sorte de compromis entre d'une part la simulation numérique directe et d'autre part la simulation de l'écoulement moyen seulement, une troisième approche consiste à ne simuler que les grandes échelles de l'écoulement. Les plus petites structures sont alors modélisées en utilisant leurs propriétés pseudo-universelles (isotropie, dissipation). La répartition dans l'espace spectral entre modélisation et résolution est ainsi telle que le montre la Figure 1.3. On parle alors de Simulation des Grandes échelles ou Large Eddy Simulation (LES).

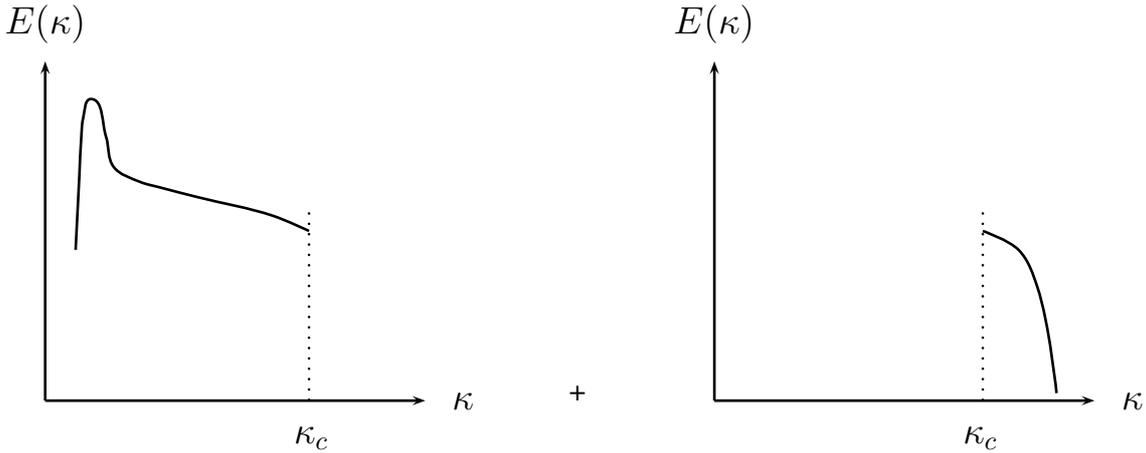


FIG. 1.3 – Schéma du spectre d'énergie d'une simulation moyennée, résolu (gauche) et modélisé (droite)

La séparation entre les grandes et les petites structures se fait par un opérateur de séparation d'échelles. Un filtre passe-bas est appliqué sur les grandeurs instantanées, de taille caractéristique  $\Delta$ . Dans l'espace spectral, le filtrage permet de faire la distinction entre les nombres d'onde résolus, et ceux qui sont filtrés, ceci de part et d'autre d'un nombre d'onde de coupure,  $\kappa_c$ , tel que :

$$\kappa_c = \frac{\pi}{\Delta} \quad (1.10)$$

De la même façon que pour l'établissement des équations moyennées (paragraphe 1.2.2), cet opérateur vérifie les propriétés de linéarité, conservation des constantes et commutation avec les dérivées spatiales et temporelles (même si ces deux dernières ne sont pas directement respectées par le filtre lui-même, on les suppose vraies). Seule la propriété d'idempotence, suivie par l'opérateur de moyenne, n'est pas vérifiée ici : c'est elle qui différencie l'opérateur de filtrage, d'un opérateur de moyenne. Par conséquent, les inégalités suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} \overline{f\bar{g}} &\neq \bar{f}\bar{g} \\ \overline{\bar{f}} &\neq \bar{f} \\ \overline{f'} &\neq 0 \end{aligned}$$

L'application de l'opérateur de filtrage aux équations de Navier-Stokes aboutit au même système que précédemment, à ceci près que le tenseur des contraintes turbulentes ou tenseur de sous-maille (subgrid scale en anglais) s'écrit :

$$\widetilde{\tau}_{ij}^L = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}) \quad (1.11)$$

L'exposant  $L$ , par opposition à l'exposant  $R$ , est relatif à l'approche LES.

Les termes de sous-maille peuvent être réécrits comme la somme de trois contributions :

$$\widetilde{\tau}_{ij}^L = \widetilde{\mathcal{L}}_{ij}^L + \widetilde{\mathcal{C}}_{ij}^L + \widetilde{\mathcal{R}}_{ij}^L \quad (1.12)$$

Ces trois termes correspondent à l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_{ij}^L &= \bar{\rho} \left( \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \right) \\ \widetilde{\mathcal{C}}_{ij}^L &= \bar{\rho} \left( \widetilde{u_i' u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j'} \right) \\ \widetilde{\mathcal{R}}_{ij}^L &= \bar{\rho} \widetilde{u_i' u_j'} \end{aligned}$$

qui désignent respectivement le tenseur de Léonard, le tenseur des corrélations croisées et le tenseur de Reynolds. Cette décomposition montre que le tenseur de sous-maille représente les interactions entre les échelles non-résolues d'une part, résolues d'autre part, et enfin les interactions croisées entre parties résolues et non-résolues.

Comme dans l'approche moyennée, le terme  $\widetilde{\tau}_{ij}^L$  pose le problème de la fermeture des équations filtrées, et doit donc être modélisé. Une brève description de la modélisation des termes de sous-maille sera fournie en Section 1.4.

Ceci clôt la présentation des approches les plus répandues que sont la simulation numérique directe, la simulation moyennée et la simulation des grandes échelles, ainsi que le problème de la fermeture des systèmes d'équations obtenus pour ces deux dernières.

Remarque : on peut aussi mentionner d'autres méthodes mettant en œuvre des fonctions à densité de probabilité (acronyme anglais : PDF) par exemple. Une description complète des autres approches existantes peut être lue dans l'ouvrage de Pope [47].

## 1.3 Modélisation statistique de la turbulence

### 1.3.1 Modèles algébriques

L'approche la plus simple consiste à utiliser le concept de viscosité turbulente. Dans cette optique, on suppose que le tenseur de Reynolds est directement lié aux gradients de vitesse et, de plus, que la partie anisotrope  $a_{ij}$  de ce tenseur s'écrit :

$$a_{ij} = \widetilde{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = -\nu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -2\nu_t S_{ij} \quad (1.13)$$

Cette relation est analogue à celle liant les contraintes visqueuses aux gradients de vitesse ( $S_{ij}$  étant le tenseur de taux de déformation) :

$$\tau_{ij} + P \delta_{ij} = 2\mu S_{ij} \quad (1.14)$$

Ceci permet d'introduire la notion de viscosité turbulente, qui sera donc la grandeur à évaluer pour parvenir à la modélisation des tensions de Reynolds. L'analyse dimensionnelle montre que

cette viscosité peut s'exprimer sous la forme d'un produit d'une vitesse caractéristique  $u^*$  par une longueur caractéristique  $l^*$  :

$$\nu_t = u^* l^* \quad (1.15)$$

Dans le cas d'un écoulement cisailé, après avoir fait l'ensemble des simplifications qui s'imposent (on reviendra sur les hypothèses qui sont faites pour la représentation des lois de paroi), on obtient une équation monodimensionnelle (en  $y$ , direction normale à la paroi) de la forme :

$$-\widetilde{u''v''} = \nu_t \frac{d\widetilde{u}}{dy} \quad (1.16)$$

Une vitesse représentative de l'écoulement est :  $u^* = \left| \widetilde{u''v''} \right|^{1/2}$ . La recombinaison des trois précédentes relations aboutit à l'expression suivante pour la vitesse  $u^*$  :

$$u^* = l^* \left| \frac{d\widetilde{u}}{dy} \right| \quad (1.17)$$

On peut donc écrire au final la viscosité turbulente sous la forme :

$$\nu_t = l^{*2} \left| \frac{d\widetilde{u}}{dy} \right| \quad (1.18)$$

Comme nous le verrons plus tard, la longueur caractéristique  $l^*$  peut s'exprimer de façon très simple en utilisant l'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl. La formulation (1.18) correspond alors au modèle de turbulence appelé « modèle de longueur de mélange ».

Le modèle de longueur de mélange est de loin le plus simple des modèles de turbulence. En effet, on ne résout pas d'équation de transport supplémentaire pour une quelconque quantité turbulente, et l'expression pour  $\nu_t$  est facilement calculable, à ceci près que la longueur de mélange doit être spécifiée analytiquement. D'un autre côté, ces modèles particulièrement accessibles, tout comme le sont les modèles de Cebeci-Smith ou encore Wilcox [63], peuvent rapidement montrer leurs limites selon le type de configuration d'écoulement. Ceci est principalement dû au fait que la définition de la longueur caractéristique de la turbulence n'est pas universelle, mais se trouve étroitement liée à la géométrie traitée.

Une conséquence importante est que le domaine de validité du modèle de longueur de mélange est restreint au peu de cas qui ont été étudiés de manière extensive. De plus, par les relations utilisées précédemment, il se base sur des propriétés d'écoulements pleinement turbulents, et peut donc s'avérer imprécis pour le traitement des écoulements décollés.

D'autres types de modèles de turbulence existent, comme les modèles pour lesquels on résout une ou plusieurs équations de transport.

### 1.3.2 Modèles avec équations de transport de quantités turbulentes

D'autres modèles de turbulence reposent sur la résolution d'une ou plusieurs équations de transport pour des quantités turbulentes. Ces équations viennent s'ajouter au système d'équations de Navier-Stokes moyennées détaillées précédemment, ce qui amène donc un surcoût non négligeable, notamment par rapport à un modèle de turbulence algébrique.

Le modèle le plus répandu, dans les codes industriels en particulier, est le modèle à 2 équations  $k - \epsilon$ . La première équation est propre à l'énergie cinétique turbulente  $k$  définie par :

$$k = \frac{1}{2} \widetilde{u''_i u''_i} \quad (1.19)$$

La seconde correspond à l'équation de transport pour la dissipation  $\epsilon$  de cette énergie. La résolution de ces deux équations supplémentaires permettra d'obtenir une longueur et une vitesse caractéristiques de la turbulence, nécessaires au calcul d'une viscosité turbulente. Cette approche, apparue au cours des années 70, est principalement due à Jones et Launder [30].

Dans le modèle  $k - \epsilon$ , la viscosité turbulente est définie par la relation suivante :

$$\mu_t = C_\mu \frac{(\overline{\rho k})^2}{\overline{\rho} \epsilon} \quad (1.20)$$

où  $C_\mu$  est une constante du modèle.

L'équation exacte pour l'énergie cinétique turbulente  $k$  s'écrit en multipliant l'équation de la quantité de mouvement par la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho k}}{\partial t} + \overline{u_i \frac{\partial \overline{\rho k}}{\partial x_i}} &= -\overline{\rho u''_i u''_j} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho k} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\overline{\rho'' u''_i}}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \\ &+ \overline{p'' \frac{\partial u''_i}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \overline{\rho u''_j u''_j u''_i} + \overline{p'' u''_i} - \overline{\tau_{ij} u''_j} \right) - \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Le dernier terme représente le taux de dissipation  $\overline{\rho} \epsilon$  :

$$\overline{\rho} \epsilon = \overline{\tau_{ij} \frac{\partial u''_i}{\partial x_j}} \quad (1.22)$$

Plusieurs simplifications peuvent être faites à ce stade. Les fluctuations de masse volumique sont négligées et le champ des fluctuations de vitesse est supposé solénoïdal, ce qui revient donc à considérer l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho k}}{\partial t} + \widetilde{u}_i \frac{\partial \overline{\rho k}}{\partial x_i} &= -\overline{\rho u''_i u''_j} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho k} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_i} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \overline{\rho u''_j u''_j u''_i} + \overline{p'' u''_i} - \overline{\tau_{ij} u''_j} \right) - \overline{\rho} \epsilon \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le membre de droite fait intervenir le tenseur de Reynolds, pour lequel l'hypothèse de viscosité turbulente (Equation (1.13)) est appliquée. On modélise les autres termes par :

$$\begin{aligned} \overline{\tau_{ij} u''_j} &= \mu \frac{\partial k}{\partial x_i} \\ \frac{1}{2} \overline{\rho u''_j u''_j u''_i} + \overline{p'' u''_i} &= \frac{\mu_t}{\alpha_k} \frac{k}{x_i} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Au final, et en utilisant une formulation conservative pour  $\overline{\rho k}$ , on obtient :

$$\frac{\partial \overline{\rho k}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho k} \widetilde{u}_i}{\partial x_i} = -\overline{\rho u''_i u''_j} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\alpha_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] - \overline{\rho} \epsilon \quad (1.25)$$

$C_\mu$	$\alpha_k$	$\alpha_\epsilon$	$C_{\epsilon_1}$	$C_{\epsilon_2}$
0.09	1	1.3	1.57	2

TAB. 1.1 – Valeurs des constantes du modèle  $k - \epsilon$

En ce qui concerne la dissipation, l'établissement de l'équation de transport est calqué sur celui de l'énergie cinétique turbulente en s'assurant de l'homogénéité des termes mis en jeu. Seule la forme finale de cette équation est donnée ici :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon \tilde{u}_i}{\partial x_i} = -C_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} \overline{\rho u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\alpha_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] - C_{\epsilon_2} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (1.26)$$

Les équations du modèle  $k - \epsilon$  font apparaître différentes constantes qui ont été déterminées empiriquement sur des écoulements fondamentaux. Leurs valeurs sont généralement prises autour de celles de Jones et Launder [30]. Dans cette étude, leurs valeurs sont celles consignées dans le Tableau 1.1.

Malheureusement, la modélisation des termes des équations pour l'énergie cinétique turbulente et la dissipation n'est valable que pour les zones où la turbulence est pleinement établie. De fait, elle est invalide pour les écoulements pariétaux et nécessite l'ajout de termes de correction, dits termes Bas Reynolds<sup>4</sup>. Une formulation Bas-Reynolds [30] du modèle  $k - \epsilon$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} k \tilde{u}_i}{\partial x_i} &= -\overline{\rho u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\alpha_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] - \bar{\rho} \epsilon \\ &\quad - 2\mu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon \tilde{u}_i}{\partial x_i} &= -C_{\epsilon_1} f_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{\rho u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\alpha_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] - C_{\epsilon_2} f_2 \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k} \\ &\quad + 2\mu \mu_t \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial n_i^2} \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\mu_t = C_\mu f_3 \frac{(\bar{\rho} k)^2}{\bar{\rho} \epsilon} \quad (1.29)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la paroi, et les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  sont des fonctions d'amortissement telles que :

$$f_1 = 1 \quad f_2 = \left( 1 - 0.3e^{-R_t^2} \right) \quad f_3 = e^{\frac{-2.5}{1+R_t/50}} \quad (1.30)$$

Remarque : l'ajout du terme Bas-Reynolds dans l'équation pour  $\epsilon$  tend à annuler le taux de dissipation au voisinage de la paroi, ce qui ne correspond pas au comportement de la dissipation réelle, mais plutôt à celui d'une pseudo-dissipation. Cependant, partout excepté au voisinage très proche de la paroi, ces deux quantités sont identiques.

<sup>4</sup>On parle ici d'un nombre de Reynolds local turbulent  $R_t = k^2/\nu\epsilon$ , qui tend vers 0 à mesure que l'on s'approche d'une paroi

Dans la suite de cette étude, le modèle  $k - \epsilon$  sera le seul modèle utilisé pour la réalisation de calculs numériques selon une approche RANS. Néanmoins, on trouve dans la littérature d'autres modèles de turbulence à deux équations de transport, mettant en jeu des quantités turbulentes différentes. C'est le cas par exemple du modèle  $k - \omega$  de Wilcox [63] où la quantité  $\omega = k/\epsilon$  remplace la dissipation  $\epsilon$ .

### 1.3.3 Modèles à l'ordre 2

On notera ici, sans rentrer dans les détails, qu'il existe des modélisations au second ordre, prenant en compte non pas une équation de transport pour une quantité turbulente choisie de façon arbitraire, mais directement l'équation de transport des tensions de Reynolds. Ce genre d'approche est qualifié de Reynolds Stress Model (modélisation du tenseur de Reynolds). Mais le simple fait de résoudre cette équation ne constitue pas en lui-même une fermeture au problème turbulent, puisque des corrélations triples  $\overline{u_i'' u_j'' u_k''}$  apparaissent, qui devront à leur tour être modélisées. De plus, le surcoût lié à la résolution de 6 équations de transports supplémentaires est significatif.

Maintenant que la modélisation pour l'approche moyennée a été décrite, nous allons détailler la modélisation des termes de sous-maille qui apparaissent en simulation numérique aux grandes échelles.

## 1.4 Modélisation des termes de sous-maille en LES

De façon analogue à la viscosité turbulente pour l'approche moyennée, on introduit le concept de viscosité de sous-maille par la définition suivante :

$$\tau_{ij}^L - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^L = -2\nu_t S_{ij} \quad (1.31)$$

Par abus de langage, la notion de viscosité turbulente peut être associée à la viscosité de sous-maille en LES. Comme pour l'approche moyennée, une expression pour  $\mu_t$  doit être fournie qui constituera le modèle de sous-maille.

Dans l'éventail des modèles de sous-maille pour la LES, on peut distinguer ceux qui font appel à une modélisation structurelle de ceux qui mettent en œuvre une modélisation fonctionnelle [48]. C'est à cette dernière famille seulement que nous nous intéresserons, et deux modèles en particulier seront décrits ici : le modèle de Smagorinsky, et le modèle à fonction de structure selective.

### 1.4.1 Modèle de Smagorinsky

Smagorinsky [55], pionnier de la simulation des grandes échelles, proposa le premier modèle de sous-maille en 1963.

Dans le modèle de Smagorinsky, la viscosité de sous-maille est définie par :

$$\mu_t = \tilde{\rho} l_s^2 \tilde{\mathcal{S}} \quad (1.32)$$

où  $l_s$  est l'échelle de longueur dite de Smagorinsky, et  $\tilde{S}$  est la norme du tenseur du gradient de vitesse :

$$\tilde{S} = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}} \quad (1.33)$$

Afin que la longueur  $l_s$  soit proportionnelle à la taille du filtre, on définit la constante  $C_s$  du modèle de Smagorinsky, telle que :

$$l_s = C_s \Delta \quad (1.34)$$

On trouve dans la littérature des valeurs assez différentes pour  $C_s$ , une valeur théorique fondée sur la turbulence homogène isotrope étant 0.18.

La formulation de  $\mu_t$  en fonction des grandeurs résolues implique que seul le transfert d'énergie depuis les échelles résolues vers les échelles de sous-maille est pris en compte : aucune information liée au transfert d'énergie des petites structures elles-mêmes n'est incluse dans la modélisation.

Outre le fait que la constante  $C_s$  n'est pas universelle car elle a été basée sur une valeur théorique en turbulence homogène isotrope (alors que la plupart des écoulements industriels sont anisotropes), le modèle de Smagorinsky présente l'inconvénient majeur de ne pas avoir le comportement adéquat au voisinage de la paroi. Concrètement, les zones de cisaillement, même bien résolues présenteront une viscosité de sous-maille largement surestimée, et le modèle deviendra alors trop dissipatif.

Pour pallier à ce problème, des fonctions d'amortissement peuvent être mises en œuvre dans la définition de la viscosité de sous-maille, afin d'obtenir le bon comportement de  $\mu_t$  près des parois.

Afin de contourner les inconvénients du modèle de Smagorinsky, d'autres modèles ont été développés. Nous proposons ici d'en présenter deux, le modèle *Wale* et le modèle à *Fonction de Structure Sélective*. Ces modèles ont été utilisés dans les calculs de canaux plans en LES réalisés au cours de cette thèse.

### 1.4.2 Modèle *Wale*

Le modèle *Wale* (acronyme pour *Wall Adapting Local Eddy-viscosity*) [41] a été développé afin d'obtenir la bonne décroissance de la viscosité de sous-maille à la paroi. En effet, par des considérations sur l'énergie cinétique turbulente et la dissipation, on peut déduire que la viscosité de sous-maille au voisinage de la paroi doit avoir un comportement asymptotique en  $y^3$ . Or, le modèle de Smagorinsky a un comportement en  $y$ . Ainsi, le modèle *Wale* définit ainsi deux opérateurs basés sur le tenseur des gradients de vitesse résolue  $\tilde{g}_{ij}$  :

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (1.35)$$

de telle sorte que :

$$\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{\tilde{OP}_1}{\tilde{OP}_2} \quad (1.36)$$

avec :

$$s_{ij}^d = \frac{1}{2}(\widetilde{g_{ij}^2} + \widetilde{g_{ji}^2}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\widetilde{g_{kk}^2} \quad (1.37)$$

$$\widetilde{OP}_1 = (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2} \quad (1.38)$$

$$\widetilde{OP}_2 = (\widetilde{S_{ij}S_{ij}})^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4} \quad (1.39)$$

La constante du modèle  $C_w = 0.5$ , est déterminée sur une configuration de turbulence homogène isotrope. En plus de fournir la bonne décroissance de  $\nu_t$  aux parois sans nécessiter d'information sur la distance du point de calcul par rapport à celle-ci, il permet de mieux reproduire la transition laminaire-turbulent.

### 1.4.3 Modèle à Fonction de Structure Sélective

Ce modèle, développé par David à partir de la formulation du modèle à fonction de structure de Lesieur et Métais (pour une revue, le lecteur pourra se reporter à [36]), se base sur une formulation spectrale de la viscosité de sous-maille :

$$\nu_t = \frac{2}{3}C_k^{-3/2} \left( \frac{E(\kappa_c)}{\kappa_c} \right)^{1/2} \quad (1.40)$$

où  $\kappa_c$  est le nombre d'onde de coupure du filtre LES, et  $E(\kappa_c)$  l'énergie spectrale locale, exprimée grâce à une fonction de structure d'ordre 2 :

$$F_2(\vec{x}, \Delta x) = \langle \|\widetilde{u}(\vec{x}, t) - \widetilde{u}(\vec{x} + \vec{r}, t)\|^2 \rangle_{\|\vec{r}\|=\Delta x} \quad (1.41)$$

$F_2$  peut être interprétée comme la moyenne statistique locale du carré des différences de vitesse sur la surface de la sphère de centre  $\vec{x}$  et de rayon  $\Delta x$ . Le calcul de  $F_2$  au point  $\vec{x}$  dépend donc des nœuds voisins. Une formulation à 6 points paraît la plus naturelle, mais on peut adopter une formulation à 4 points lorsque l'on souhaite réaliser cette moyenne statistique dans un plan d'homogénéité (comme c'est le cas dans un canal plan où l'on souhaite prendre en compte une moyenne sur les plans parallèles aux parois). Grâce à l'expression de la fonction de structure  $F_2$ , l'équation (1.40) devient :

$$\nu_t(\vec{x}, \Delta x) = 0.105 C_k^{-3/2} \Delta x (F_2(\vec{x}, \Delta x))^{1/2} \quad (1.42)$$

On remarque que la valeur de la viscosité de sous-maille sera d'autant plus faible que la turbulence aux faibles échelles de longueur ne sera pas assez développée localement.

Afin d'améliorer la prise en compte de l'intermittence de la turbulence, un terme multiplicatif caractérisant la tridimensionalité de l'écoulement est rajouté à l'expression de  $\nu_t$ . Celui-ci est tel que la viscosité de sous-maille tend vers 0 lorsque l'écoulement n'est pas pleinement turbulent, et vers son expression précédente (1.42) dans la situation contraire. L'interprétation quantitative de ce critère se base sur la valeur des fluctuations locales de vorticité : lorsque l'angle entre le vecteur vorticité local et la moyenne de la vorticité calculée aux points de maillage voisins est supérieur à la valeur la plus probable (déterminée selon sa fonction de densité de probabilité), la viscosité sous-maille est active, sinon, seule la viscosité moléculaire joue son rôle dissipatif.

## 1.5 Modélisation du flux de chaleur turbulent

L'équation de l'énergie moyennée contient le terme  $\overline{\rho h'' u''_j}$  qui représente un flux de chaleur turbulent. De même nature que le terme du tenseur de Reynolds, il ne peut être calculé directement et doit donc être approximé. Il en est de même pour la simulation des grandes échelles dont le système d'équations filtrées fait intervenir la même corrélation.

La modélisation du flux de chaleur turbulent est souvent basée sur une formulation fickienne, de la même façon que l'hypothèse de Boussinesq est utilisée pour l'approximation de  $\tau_{ij}$ . On introduit donc une diffusivité turbulente  $\alpha_t$ , telle que :

$$-\overline{h'' u''_j} = \alpha_t \frac{d\tilde{T}}{dx_j} \quad (1.43)$$

On peut de la même manière définir une diffusivité de sous-maille, qui est le coefficient de proportionnalité entre la corrélation vitesse-enthalpie et le gradient de température résolu.

Plusieurs modèles sont alors envisageables pour l'expression de la diffusivité turbulente. Généralement, on fait l'hypothèse que le champ de température est fortement corrélé à la dynamique de l'écoulement, de sorte que la diffusivité turbulente est directement liée à la viscosité turbulente par l'intermédiaire d'un nombre de Prandtl turbulent :

$$\alpha_t = \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (1.44)$$

Ainsi, on utilise généralement un modèle de turbulence à nombre de Prandtl turbulent constant, qui comme son nom l'indique, affecte une valeur fixe à ce nombre. La valeur en question a été estimée proche de 1. Cependant, l'hypothèse qu'il reste constant dans un écoulement est totalement fautive [24]. Il n'en reste pas moins que ce modèle s'avère extrêmement simple, et qu'il donne des résultats plutôt satisfaisants, lorsque  $Pr_t$  est choisi autour de l'unité. De plus les données expérimentales (décrites dans [24]) prouvent que, à part au voisinage proche de la paroi (zone visqueuse typiquement), le nombre de Prandtl turbulent est quasi-constant et selon les expériences et les configurations, sa valeur se situe entre 0.5 et 1.

La valeur communément utilisée pour l'approche moyennée est 0.9. Ceci vient principalement de constatations faites en utilisant le modèle de turbulence  $k - \epsilon$ , qui tendent à montrer que les résultats étaient les plus fiables pour  $Pr_t = 0.9$ . Mais, des valeurs plus faibles (typiquement autour de 0.5) ont été adoptées dans de nombreux codes de simulation des grandes échelles. Au final, personne n'a de garantie quant à la justesse des flux thermiques turbulents ou de sous-maille calculés. Néanmoins, il semble que la valeur du nombre de Prandtl turbulent joue finalement un rôle assez limité quant aux résultats [24] pour les fluides d'intérêt dans les applications visées, à savoir, l'air, l'eau...

Quelques remarques peuvent être faites ici concernant les autres modèles de turbulence pour la thermique disponibles dans la littérature. Certains modèles proposent une approche non-fickienne, comme c'est le cas pour le modèle de similarité d'échelles [48]. Celui-ci implique un second filtrage des grandeurs déjà filtrées (LES) et relie ensuite le flux de chaleur turbulent aux seules grandeurs résolues (vitesse et température). Enfin, d'autres modèles mettent en œuvre une partie fickienne et une autre non-fickienne, ou bien une détermination dynamique du modèle.

Au cours du Chapitre 2, nous présentons d'un point de vue physique et mathématique l'analyse des écoulements turbulents qui balayent une paroi, tant sur l'aspect dynamique que thermique. Leurs particularités et leur rôle dans les écoulements industriels y seront détaillés.



## Chapitre 2

# Couche limite pariétale turbulente

Dans ce chapitre, les spécificités des écoulements de paroi turbulents sont décrites de façon plus précise. Si l'on considère les équations de Navier-Stokes présentées au cours du Chapitre 1, et le fait que la présence d'une paroi solide se traduit au niveau du fluide visqueux par une condition d'adhérence, plusieurs simplifications mathématiques peuvent être apportées au problème (Section 2.1). La résolution analytique étant alors possible dans le cadre des équations moyennées, sa solution mettra en lumière la structure particulière de la couche limite turbulente (Section 2.2), et précisera les contraintes de l'évaluation précise des grandeurs pariétales (Section 2.3).

### 2.1 Hypothèses simplificatrices dans la couche limite

La principale caractéristique d'une couche limite pariétale est que, à cause de sa viscosité, le fluide a une vitesse nulle à la paroi : c'est la condition de non-glissement. Les effets dus à la présence d'une paroi sont confinés dans une zone proche de celle-ci appelée couche limite pariétale. Son épaisseur est définie comme la distance à la paroi  $\delta$  telle que :  $u_\delta = 0.99u_\infty$ , avec  $u_\infty$  la vitesse « amont » non perturbée par la paroi.

Dans un premier temps et afin de comprendre les mécanismes simples mis en jeu dans la couche limite turbulente, nous considérons que l'écoulement est pleinement turbulent et stationnaire en moyenne. D'autre part, la composante longitudinale de vitesse  $u$  est prédominante devant la composante normale à la paroi  $v$  et les gradients longitudinaux sont considérés comme faibles devant les gradients normaux à la paroi (dans cette première approche le gradient longitudinal de pression est considéré comme nul). De plus, nous supposons que la couche limite se développe sur une paroi plane et lisse, à une température fixe  $T_w$ . Comme les écoulements d'intérêt dans cette étude sont caractérisés par leur faible vitesse, la dissipation visqueuse est négligée. Pour clarifier le contexte limité de cette section, les nombreuses hypothèses utilisées sont listées ci-après :

1.  $\vec{u} = 0$  à la paroi (condition de non-glissement)
2. L'écoulement est stationnaire en moyenne, et pleinement turbulent
3. La convection longitudinale est prépondérante par rapport à la convection normale
4. Les gradients longitudinaux de vitesse et température sont négligeables par rapport aux gradients normaux

5. Le gradient longitudinal moyen de pression est nul
6. La paroi est plane et lisse, à température constante  $T_w$
7. La dissipation visqueuse est négligeable : les vitesses d'écoulement sont faibles (Mach faible)
8. Il n'y a pas de réaction chimique (pas de terme source de chaleur)
9. L'hypothèse des gaz parfaits est valable
10. Les effets de thermo-diffusion (Dufour) et d'interdiffusion d'espèces (Soret) ne sont pas pris en compte
11. Les flux radiatifs sont négligés
12. Il n'y a pas de forces extérieures (pas de gravité)

Les équations de Navier-Stokes moyennées (1.8), dans une région proche de la paroi, se simplifient alors [49] selon le problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} - \overline{\rho u_i'' v''} \right) = 0 \quad i = 1, 3 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \overline{\rho v'' h''} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Dans cette écriture, les variables en jeu sont uniquement fonction de  $y$ , la distance selon la direction normale à la paroi. Les dérivées partielles deviennent donc des dérivées droites. D'autre part, la modélisation des corrélations des fluctuations de vitesse et température peut se faire grâce à l'hypothèse de Boussinesq :

$$-\overline{\rho u_i'' v''} = \mu_t \frac{d\tilde{u}_i}{dy} \quad \overline{\rho v'' h''} = \lambda_t \frac{d\tilde{T}}{dy} \quad (2.3)$$

A partir d'ici, le raisonnement pour la quantité de mouvement n'est détaillé que pour la première composante de la vitesse ( $u$ ), mais il reste le même pour  $w$ . En intégrant une première fois, les équations (2.1) et (2.2) deviennent :

$$(\bar{\mu} + \mu_t) \frac{d\tilde{u}}{dy} = \tau_w = \mu_w \left( \frac{d\tilde{u}}{dy} \right)_{y=0} \quad (2.4)$$

$$(\bar{\lambda} + \lambda_t) \frac{d\tilde{T}}{dy} = -q_w = \lambda_w \left( \frac{d\tilde{T}}{dy} \right)_{y=0} \quad (2.5)$$

## 2.2 Structure de la couche limite pariétale turbulente

La couche limite a principalement deux longueurs caractéristiques :  $y_\tau$  qui est basée sur le rapport de la viscosité cinématique à la paroi  $\nu_w$  par une vitesse caractéristique des plus petites structures turbulentes et  $\delta$  qui est l'épaisseur de couche limite. La première est plutôt représentative d'une zone très proche paroi où les effets visqueux sont non-négligeables, la seconde d'une zone de turbulence établie où les effets turbulents sont prédominants.

### 2.2.1 La zone interne

Ici, on définit les échelles caractéristiques de la région très proche paroi par :

$$y_\tau = \frac{\nu_w}{U_\tau} \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} \quad T_\tau = \frac{q_w}{\rho_w C_p U_\tau} \quad (2.6)$$

Notons que  $U_\tau$  est appelée vitesse de frottement, et  $T_\tau$  température de frottement. Les grandeurs physiques et inconnues du problème peuvent alors être adimensionnées :

$$\begin{aligned} y^+ &= \frac{y}{y_\tau} & u^+ &= \frac{\tilde{u}}{U_\tau} & T^+ &= -\frac{\tilde{T} - T_w}{T_\tau} \\ \mu^+ &= \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} & \mu_t^+ &= \frac{\mu_t}{\mu_w} & \rho^+ &= \frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \\ \lambda^+ &= \frac{\bar{\lambda}}{\mu_w C_p} & \lambda_t^+ &= \frac{\lambda_t}{\mu_w C_p} \end{aligned}$$

Les équations (2.4) et (2.5) s'écrivent sous forme adimensionnelle [21, 59] :

$$(\mu^+ + \mu_t^+) \frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad (2.7)$$

$$(\lambda^+ + \lambda_t^+) \frac{dT^+}{dy^+} = 1 \quad (2.8)$$

Dans le cadre d'un écoulement quasi-isotherme, on peut simplifier les équations précédentes en :

$$(1 + \mu_t^+) \frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad (2.9)$$

$$\left( \frac{1}{\text{Pr}} + \lambda_t^+ \right) \frac{dT^+}{dy^+} = 1 \quad (2.10)$$

La considération de différents cas pour étudier l'ordre de grandeur du premier ou du second terme de chacune des équations (2.9) et (2.10) s'impose à présent. En effet, dans une zone très proche de la paroi, on admet, pour l'équation de la quantité de mouvement, que les effets turbulents sont négligeables devant les effets visqueux, soit  $\mu_t^+ \ll 1$ . D'autre part, dans une zone plus éloignée de la paroi, les effets visqueux sont prédominants par rapport aux effets turbulents, c'est-à-dire que  $\mu_t^+ \gg 1$ . Entre les deux, l'ordre de grandeur de ces deux termes doit être relativement proche. Le même raisonnement peut être tenu pour l'équation de la chaleur, avec prédominance ou non des effets diffusifs sur les effets turbulents.

#### Sous-couche visqueuse

Dans cette région la plus proche de la paroi où  $y^+ < 5$ , on a, pour l'équation (2.9) :

$$\frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad \text{c'est-à-dire, après intégration :} \quad u^+ = y^+$$

L'équation (2.10), elle, devient :

$$\frac{dT^+}{dy^+} = \text{Pr} \quad \text{c'est-à-dire, après intégration :} \quad T^+ = \text{Pr} y^+$$

On aboutit donc à un système d'équations très simples, qui forment la loi de paroi standard classique, pour la sous-couche visqueuse.

### Sous-couche inertielle

Pour des distances à la paroi au delà de  $y^+ = 30$ , les effets turbulents sont dominants. Ainsi, les équations (2.9) et (2.10) s'écrivent :

$$\mu_t^+ \frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_t^+ \frac{dT^+}{dy^+} = 1 \quad (2.11)$$

Nous faisons le choix de prendre pour  $\mu_t$  une expression de type longueur de mélange (comme défini au paragraphe 1.3.1). Ainsi, la viscosité turbulente prend la forme de :

$$\mu_t = \rho l^{*2} \left| \frac{d\tilde{u}}{dy} \right| \quad (2.12)$$

où la longueur de mélange  $l^*$  vaut  $\kappa y$ ,  $\kappa$  étant la constante de Von Kármán ( $\kappa \approx 0.415$ ). On obtient donc, en passant en variables adimensionnées :

$$\mu_t^+ = (\kappa y^+)^2 \frac{du^+}{dy^+}$$

D'autre part, la diffusivité turbulente  $\lambda_t$  est reliée à la viscosité turbulente par l'intermédiaire du nombre de Prandtl turbulent  $\text{Pr}_t$  (analogie de Reynolds), tel que :

$$\lambda_t = \frac{\mu_t C_p}{\text{Pr}_t} \quad \text{soit :} \quad \lambda_t^+ = \frac{\mu_t^+}{\text{Pr}_t}$$

Il est alors possible de continuer la résolution analytique du système d'équations (2.11) :

$$\left( \kappa y^+ \frac{du^+}{dy^+} \right)^2 = 1 \quad (2.13)$$

$$\frac{\mu_t^+}{\text{Pr}_t} \frac{dT^+}{dy^+} = 1 \quad (2.14)$$

Une fois intégré, le système formé par les équations (2.13) et (2.14) donne ( $C_{u,0}$  et  $C_{T,0}$  étant les constantes d'intégration pour la vitesse et la température) :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,0} \quad (2.15)$$

$$T^+ = \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln y^+ + C_{T,0} \quad (2.16)$$

L'équation (2.15) est la loi logarithmique « classique », dont la vérification expérimentale est due à Von Kármán [59], et qui est connue comme étant une loi universelle pour la zone inertielle (souvent appelée zone logarithmique à cause de cette loi). Les constantes sont généralement prises à  $C_{u,0} = 5.32$  et  $C_{T,0} = 3.9$ , mais la valeur de la seconde reste controversée. Le système formé par les équations (2.15) et (2.16) constitue la loi de paroi standard pour la sous-couche inertielle, et sera à nouveau discuté plus en détails en Section 3.2.1.

### Sous-couche tampon

Dans cette région telle que  $5 < y^+ < 30$ , il apparaît impossible d'intégrer les équations (2.9) et (2.10), donc ses propriétés sont relativement mal connues. Elle joue un rôle de raccordement entre les sous-couches visqueuse et inertielle.

## 2.2.2 La zone externe

Dans cette zone, la structure de l'écoulement est entièrement contrôlée par la turbulence. Les échelles caractéristiques ne sont pas les mêmes que dans la zone interne : l'épaisseur de couche limite  $\delta$  est l'échelle caractéristique de la turbulence, même si l'on garde la même échelle de vitesse  $U_\tau$  (en effet la vitesse de frottement reste caractéristique car l'ordre de grandeur des tensions de Reynolds  $-\rho \widetilde{u''v''}$  est  $U_\tau^2$  [15]). Alors, on peut écrire, à partir de l'équation (2.4) et en considérant que les effets turbulents sont prépondérants sur les effets visqueux, que :

$$\mu_t \frac{d\tilde{u}}{dy} = \tau_w \quad (2.17)$$

Reprenons l'expression de longueur de mélange pour  $\mu_t$  et posons  $y_e = y/\delta$  :

$$\left( \kappa y_e \frac{d(\tilde{u}/U_\tau)}{dy_e} \right)^2 = 1 \quad (2.18)$$

En intégrant et en se basant sur le fait que  $\tilde{u} = u_e$  ( $u_e$  : vitesse à la frontière de la couche limite) à  $y = \delta$ , on a :

$$\frac{\tilde{u} - u_e}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y_e \quad (2.19)$$

Cette équation, qui régit l'écoulement dans la région externe de la couche limite, est dite « loi de vitesse déficitaire ». Par le même raisonnement, on peut écrire une loi de température déficitaire, dans laquelle on garde la température de frottement  $T_\tau$  pour l'adimensionnement de  $\tilde{T}$ . Celle-ci se trouve être de la forme ( $T_e$  étant la température à la frontière de la couche limite) :

$$-\frac{\tilde{T} - T_e}{T_\tau} = \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln y_e \quad (2.20)$$

## 2.2.3 Le raccordement entre zones interne et externe

Le raccordement entre les zones interne et externe de la couche limite n'est possible que s'il existe une région intermédiaire où les lois de proche paroi (2.15) et (2.16) et les lois déficitaires (2.19) et (2.20) sont toutes valables, respectivement pour la vitesse et la température. Ceci donne lieu à des conditions diverses de raccordement sur la vitesse de frottement, le nombre de Reynolds de frottement, ou encore le coefficient de frottement [15].

## 2.3 Contraintes numériques pour la simulation d'écoulements pariétaux

A cause de la domination des effets visqueux dans une zone très proche de la paroi (zone interne de la couche limite), l'écoulement pariétal va être dépendant du nombre de Reynolds de l'écoulement. Afin de comparer les effets visqueux aux effets convectifs dans cette région, on considère le nombre de Reynolds de « frottement », basé sur la vitesse de frottement  $U_\tau$ , une grandeur caractéristique de l'écoulement (typiquement, la demi-hauteur  $h$  pour une configuration de canal), et la viscosité cinématique  $\nu_w$  à la paroi, et défini en Eq. (1.5).

A titre d'indication, dans le cas d'un canal plan de demi-hauteur  $h$ , qui est un cas académique bien maîtrisé et qui sera rencontré tout au long de cette thèse, la valeur de Reynolds de transition d'un régime laminaire vers un régime turbulent est de l'ordre de 150. Un point au centre du canal se situe donc, en terme d'ordonnée adimensionnée  $y^+$ , autour de cette valeur. En effet :

$$y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu_w} = \frac{y}{h}Re_\tau \quad (2.21)$$

Ainsi, le centre du canal se situe dans la zone logarithmique : la couche limite s'étale sur toute la hauteur du canal. A l'inverse, pour un nombre  $Re_\tau$  relativement grand, de l'ordre de 10,000, la couche limite devient relativement fine, comparée à la hauteur du canal. Ce qui implique que la zone interne de la couche limite peut être très difficile à appréhender, que ce soit d'un point de vue expérimental ou numérique, à des valeurs élevées de  $Re_\tau$ .

On voit alors apparaître la problématique du traitement des parois dans une simulation numérique : l'épaisseur de la couche limite est liée au nombre de Reynolds. Or, pour être correctement représentée, la couche limite doit être assez finement résolue car la nature de l'écoulement pariétal dépend de tous les détails qui le composent, de la paroi jusqu'à la zone externe. En terme de nombre de points, ceci fait que le raffinement nécessaire à capturer tous ces détails doit être significatif. Certains auteurs ont quantifié cette dépendance du nombre de points minimum par rapport au nombre de Reynolds : la résolution nécessaire pour calculer correctement la zone externe d'une couche limite est proportionnelle à  $Re^{0.4}$ , alors que pour la sous-couche visqueuse, le nombre de points du maillage doit être proportionnel à  $Re^{1.8}$  [10, 45].

Comme l'on a pu le voir en détaillant les différentes approches de la simulation numérique détaillées au Chapitre 1, excepté pour la méthode RANS, le raffinement doit également être effectué dans les trois directions de l'espace, de par la nature des simulations LES et DNS. La recommandation est habituellement de disposer de quelques cellules dans la sous-couche visqueuse, ce qui fait que la distance adimensionnée de la première maille doit se situer autour de  $y^+ = 1$  et en admettant que le facteur d'échelle entre deux mailles ne soit pas trop conséquent. Au final, le nombre de points nécessaire pour simuler correctement une couche limite pariétale, même à des Reynolds modérés apparaît comme *prohibitif* par rapport aux capacités actuelles de calcul informatique.

Au cours du chapitre suivant, nous verrons comment contourner le problème du raffinement lorsque celui-ci, à cause d'un nombre de Reynolds trop élevé, devient impossible à atteindre avec les ressources informatiques disponibles.

## Chapitre 3

# Evaluation du frottement et des flux thermiques à la paroi

Lorsque le nombre de Reynolds est trop élevé pour pouvoir simuler l'ensemble des échelles de la turbulence jusqu'à la paroi, avec les contraintes de maillage précédemment décrites et avec un coût de calcul raisonnable, il apparaît nécessaire de mettre en œuvre d'autres méthodes afin de calculer au mieux les grandeurs caractéristiques au voisinage de la paroi. En effet, ce n'est pas tant la connaissance de la distribution de toutes les variables comme la vitesse ou la température au travers de la couche limite qui est primordiale, mais bien les valeurs que l'on appellera pariétales.

En ce qui concerne la partie dynamique de l'écoulement, c'est le frottement pariétal  $\tau_w$  qu'il nous est important de calculer précisément, ce qui revient à calculer le gradient de vitesse tangentielle à la paroi. Pour la température, il s'agit du flux de chaleur pariétal  $q_w$ , c'est-à-dire du gradient de température à la paroi. Ce couple de grandeurs (frottement, flux de chaleur) permet de calculer les coefficients de frottement  $C_f$  et le nombre de Nusselt  $Nu$ , définis dans la section suivante. Dans ce chapitre, différents moyens de calculer toutes ces grandeurs pariétales seront présentées.

### 3.1 Corrélations théoriques et empiriques

De nombreuses corrélations existent, qui permettent de déterminer le frottement et le flux pariétaux. Les principales sont détaillées dans cette section. Pour une revue plus complète de ces relations, on pourra se reporter aux ouvrages [27, 33].

#### 3.1.1 Régime quasi-isotherme

- **Le coefficient de frottement :**

Le coefficient de frottement à la paroi  $C_f$  est défini à partir du frottement pariétal  $\tau_w$  et des grandeurs intégrales  $\rho_m$  et  $U_m$  :

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_m U_m^2} \quad (3.1)$$

Les quantités  $\rho_m$  et  $U_m$  sont respectivement définies par :

$$\rho_m = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad U_m = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} U d\Omega \quad (3.2)$$

On montre [47], à partir des relations régissant la zone logarithmique Eq. (2.15) et de vitesse déficitaire Eq. (2.19), qu'il existe une relation simple entre  $C_f$  et le nombre de Reynolds  $Re$  basé sur la vitesse moyenne du canal :

$$Re = 2\sqrt{\frac{2}{C_f}} \exp \left[ 1 + \kappa \left( \sqrt{\frac{2}{C_f}} - B - B_1 \right) \right] \quad (3.3)$$

où  $B = 5.32$  est la constante additive de la loi logarithmique, et  $B_1 = 0.7$  celle de la loi de vitesse déficitaire. Cette relation, qui permet de calculer directement le coefficient de frottement à partir du nombre de Reynolds, constitue une des corrélations répandues dans la littérature pour le coefficient de frottement. La corrélation de Dean [18] est aussi très souvent utilisée et est telle que :

$$\begin{cases} C_f = 12/Re & \text{en régime laminaire} \\ C_f = 0.073 \cdot Re^{-1/4} & \text{en régime turbulent} \end{cases}$$

Cette corrélation de Dean a été ensuite reformulée [34] pour donner une relation entre le frottement pariétal et la vitesse au centre d'une canal plan :

$$\tau_w = 3.02 \cdot 10^{-3} \rho_w U_c^2 \quad (3.4)$$

• **Le nombre de Nusselt :**

Le nombre de Nusselt est un nombre adimensionné particulièrement intéressant pour étudier les flux pariétaux. Il est défini par le quotient entre le transfert de chaleur total et la conductivité thermique :

$$Nu = \frac{lh}{\lambda} \quad (3.5)$$

où  $l$  est une longueur caractéristique, et  $h$  le coefficient d'échange thermique. Celui-ci est égal au flux de chaleur pariétal divisé par la différence entre la température moyenne  $T_m$  et la température de paroi  $T_w$  :

$$Nu = \frac{l}{\lambda} \frac{q_w}{T_m - T_w} \quad (3.6)$$

Le nombre de Nusselt peut être évalué par une corrélation expérimentale largement utilisée dans la littérature [27], et s'exprimant en fonction du nombre de Reynolds hydraulique  $Re_D$  et du nombre de Prandtl  $Pr$  :

$$Nu = 0.023 Re_D^{4/5} Pr^{1/3} \quad (3.7)$$

Rappelons que dans le cas d'un canal, le diamètre hydraulique est de  $4h$ , donc le nombre de Reynolds hydraulique est tel que :  $Re_D = 2Re$ .

Il apparaît ainsi que les deux corrélations pour  $C_f$  et  $Nu$  sont toutes deux des fonctions du nombre de Reynolds, basées respectivement sur la hauteur et le diamètre hydraulique.

### 3.1.2 Régime non-isotherme

Les corrélations présentées au Paragraphe 3.1.1 sont propres aux cas quasi-isothermes, mais ne sont plus adaptées dans des configurations anisothermes. D'autres corrélations peuvent être trouvées dans la littérature qui permettent de traiter de tels cas.

Pour le coefficient de frottement, une adaptation de la relation (3.3) aux régimes non-isothermes par l'intermédiaire d'un facteur de compressibilité [15] et réadapté de [50] :

$$C_{f_a} = C_f \times f \quad \text{avec} \quad f = \left( \frac{0.46T_m + 0.54T_w}{T_m} \right)^{-0.684} \quad (3.8)$$

où  $C_f$  est le coefficient présent dans Equation (3.1) valable en incompressible. Cette nouvelle relation fait intervenir les températures moyennes et de paroi, afin de prendre en compte les différences de propriétés physiques entre le fluide loin de la paroi et à la paroi elle-même.

En ce qui concerne le nombre de Nusselt, la corrélation (3.7) peut être modifiée de la même façon afin de mieux prendre en compte les configurations anisothermes. Ainsi, on peut trouver [27] qu'une bonne approximation de  $Nu$  est :

$$Nu = 0.027Re_D^{4/5} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu_m}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (3.9)$$

où  $\mu_m$  est la viscosité dynamique moyenne de l'écoulement, et  $\mu_w$ , la viscosité à la paroi.

Ces corrélations en régime quasi-isotherme et anisotherme font donc intervenir des valeurs moyennes de l'écoulement comme le nombre de Reynolds. Ces relations algébriques restent donc potentiellement applicables à des configurations simples et aboutissent à des valeurs moyennes de frottement et de flux de chaleur.

## 3.2 Concept de modèle de paroi

La description de la structure même de la couche limite pariétale turbulente (décrite en Section 2.2) permet de mettre en évidence le fait que la distribution de vitesse ou de température dans la zone logarithmique peut être reliée aux grandeurs pariétales de frottement et de flux. Pourtant entre la paroi et la zone logarithmique, les profils de  $U$  et  $T$  changent considérablement en terme d'expression analytique, notamment dans la sous-couche tampon. Mais, pour un triplet (distance à la paroi, vitesse et température) donné, on peut déduire analytiquement le couple (frottement, flux de chaleur pariétaux).

Cette relation entre les données de la zone logarithmique et les données à la paroi est exploitée par le concept de modèle de paroi. Cela permet de réduire de façon drastique le coût de calcul puisque la résolution fine des sous-couches visqueuse et tampon n'est plus nécessaire. A titre de comparaison, un point de calcul pour un modèle de paroi doit se situer dans la zone logarithmique, correspondant à un  $y^+ = 100$ , alors que la résolution jusqu'à la paroi nécessiterait d'avoir un premier point de calcul autour de  $y^+ \approx 1$ .

Le fonctionnement d'un modèle de paroi est décrit sur la Figure 3.1. A partir des données de la zone logarithmique (que l'on dira extérieures et dénotées par l'indice  $e$  sur le schéma 3.1, une

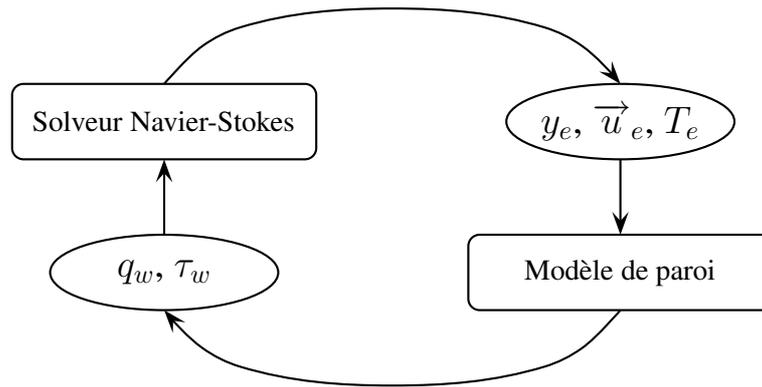


FIG. 3.1 – Schéma de principe d'un modèle de paroi

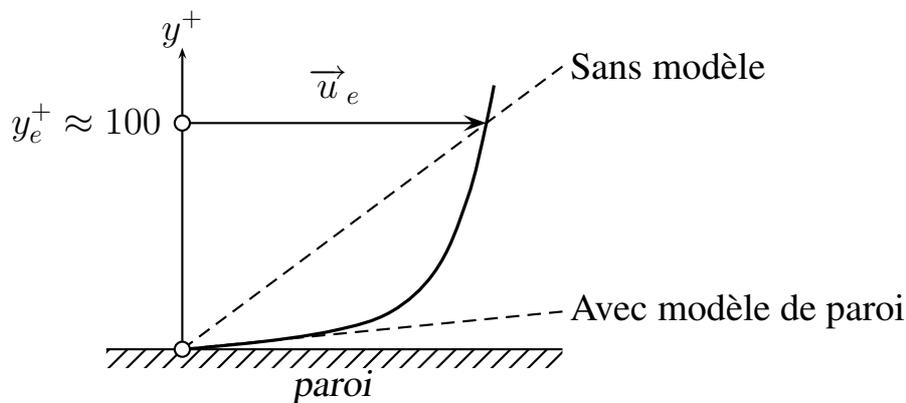


FIG. 3.2 – Gradient à la paroi, avec ou sans modèle de paroi

relation analytique plus ou moins simple permettra de connaître les gradients corrects (Figure 3.2) de vitesse et température, par comparaison à ceux calculables directement entre le point de calcul et la paroi (par différence finie de la même manière que les flux laminaires). Les flux de quantité de mouvement et de chaleur obtenus en sortie du modèle de paroi servent à corriger les flux calculés en premier lieu par le solveur Navier-Stokes. Ceci se fait par le biais d'une correction du gradient de vitesse et de température dans la cellule de paroi, ainsi que de la viscosité et de la diffusivité turbulentes dans le terme de diffusion des équations. Les valeurs corrigées des gradients à la paroi, et des grandeurs  $\mu_t$  et  $\alpha_t$ , deviennent ainsi fonction des valeurs de  $U_\tau$  et  $T_\tau$  de sortie de la loi de paroi.

### 3.2.1 Loi de paroi standard

Sans être énoncé explicitement, le modèle de paroi standard a déjà été décrit au Paragraphe 2.2.1. Il provient directement des équations régissant la zone logarithmique de la couche limite, sous les hypothèses listées précédemment. Nous rappelons ici ces équations :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,0} \quad (3.10)$$

$$T^+ = \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln y^+ + C_{T,0} \quad (3.11)$$

Pour obtenir le frottement et le flux de chaleur à la paroi, les grandeurs  $U_\tau$  et  $T_\tau$  doivent d'abord être calculées par l'intermédiaire des relations (3.10) et (3.11). Pour cela, on peut transformer ces deux équations en deux fonctionnelles de  $U_\tau$  et  $T_\tau$ , et en revenant aux notations dimensionnelles pour les inconnues :

$$F_1(U_\tau) = U_\tau \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{yU_\tau}{\nu_w} \right) + C_{u,0} \right] - \tilde{u}_e = 0 \quad (3.12)$$

$$F_2(U_\tau, T_\tau) = T_\tau \left[ \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln \left( \frac{yU_\tau}{\nu_w} \right) + C_{T,0} \right] + (\tilde{T}_e - T_w) = 0 \quad (3.13)$$

On constate que le système à résoudre se résume à deux fonctionnelles dont une est uniquement fonction de  $U_\tau$ . Néanmoins, le caractère non-linéaire de  $F_1$  implique sa résolution par une méthode itérative. Un exemple de méthode simple à implémenter et efficace (qui converge en quelques itérations seulement) est la méthode de Newton. Appliquée à  $F_1$ , cet algorithme de résolution s'écrit à l'itération  $k + 1$  :

$$U_\tau^{k+1} = -\frac{F_1(U_\tau^k)}{F_1'(U_\tau^k)} + U_\tau^k \quad (3.14)$$

Une fois la méthode convergée,  $T_\tau$  est obtenu par substitution dans  $F_2$ .

### Equilibre universel de Kolmogorov :

Le proche voisinage de la paroi n'étant pas résolu numériquement lors de l'emploi d'une loi de paroi, il est nécessaire d'évaluer les valeurs de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation au point de calcul afin qu'elles correspondent aux estimations de frottement et de flux de chaleur données par la loi de paroi. Les grandeurs turbulentes peuvent être calculées en faisant l'hypothèse d'équilibre entre production et dissipation. Cette hypothèse, aussi appelée équilibre universel de Kolmogorov, a pu être vérifiée expérimentalement par Laufer (repris dans [49]). L'énergie cinétique  $k$  dans la première maille est obtenue en considérant qu'il existe une zone à frottement constant dans tout la zone interne de la couche limite, c'est-à-dire :

$$\tau_w = -\bar{\rho} \widetilde{u''v''} \quad (3.15)$$

Bradshaw a montré, au travers d'une expérience décrite en [5], que le frottement dans une couche limite pouvait être directement lié à l'énergie cinétique turbulente par :

$$0.3\bar{\rho}\tilde{k} = -\bar{\rho}\widetilde{u''v''}$$

La valeur de 0.3 est en fait la valeur de  $C_\mu^{1/2}$ ,  $C_\mu = 0.09$  étant la constante du modèle  $k - \epsilon$  (cf. Paragraphe 1.3.2). De ces relations, on peut déduire que :

$$\tilde{k} = \frac{U_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (3.16)$$

On utilise alors le fait que la production est égale à la dissipation :

$$\bar{\rho} \bar{\epsilon} = -\bar{\rho} \widetilde{u''v''} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (3.17)$$

D'après l'équation portant sur la vitesse (3.10), le gradient de vitesse vaut :  $U_\tau/\kappa y$ . Finalement :

$$\bar{\epsilon} = \frac{U_\tau^3}{\kappa y} \quad (3.18)$$

**Remarque sur l'équation de la température :**

L'équation (3.11), à cause de la constante d'intégration  $C_{T,0}$  est plus ou moins controversée dans la littérature. En effet, une valeur communément utilisée est autour de 3.9, tandis que d'autres expressions peuvent être trouvées dans la littérature [35], aboutissant à des valeurs de l'ordre de 3.16 pour de l'air. Dans cette étude, afin de s'affranchir de cette constante additionnelle dont la valeur semble peu universelle, la corrélation de Kader [31] constituera l'équation en température du modèle de paroi standard. Cette corrélation s'écrit :

$$T^+ = \text{Pr}y^+ e^{-\Gamma} + \left[ 2.12 \ln \left( (1 + y^+) \frac{2.5(2 - y/h)}{1 + 4(1 - y/h)^2} \right) + \beta(\text{Pr}) \right] e^{-1/\Gamma} \quad (3.19)$$

Avec  $h$  la demi-hauteur du canal, et  $\Gamma$  et  $\beta(\text{Pr})$  tels que :

$$\begin{cases} \Gamma &= \frac{10^{-2} (\text{Pr}y^+)^4}{1 + 5\text{Pr}^3 y^+} \\ \beta(\text{Pr}) &= (3.85\text{Pr}^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln \text{Pr} \end{cases}$$

Le principal avantage de cette loi est qu'elle offre une représentation de toute la zone interne de la couche limite thermique, depuis la sous-couche visqueuse jusqu'à la sous-couche logarithmique. De plus, elle permet la prise en compte des effets du nombre de Prandtl laminaire sur le flux pariétal, contrairement à la précédente équation en température (3.11).

**3.2.2 Autres modèles de paroi existants**

La loi de paroi précédemment décrite a pu être amenée par une série d'hypothèses qui restreignent significativement sa possibilité d'une utilisation dans des situations pratiques. La restriction principale est que l'écoulement est stationnaire en moyenne, c'est-à-dire qu'on ne considère que l'écoulement moyen, comme c'est le cas dans une simulation avec une méthode RANS (cf. Section 1.2). De plus, au point de calcul de la loi de paroi, afin de connaître l'énergie cinétique turbulente  $k$  et la dissipation  $\epsilon$ , on doit utiliser l'hypothèse supplémentaire d'équilibre entre production et dissipation, dans cette cellule.

A ce titre, la loi de paroi standard peut être considérée comme une loi à l'équilibre. Les lois à l'équilibre constituent une première approche possible dans la stratégie de modélisation à la paroi.

**Lois à l'équilibre :**

Hormis la loi de paroi standard, d'autres formulations peuvent être envisagées selon que les longueurs de référence ou encore le profil de vitesse qui sont prescrits. Deux lois de parois sont présentées ici.

La loi de *Chieng et Launder* [13] propose des échelles de longueur et vitesse caractéristiques différentes, basées sur l'énergie cinétique turbulente  $k_v$  à l'ordonnée  $y_v$  :

$$u_\tau^* = \frac{\tau_w}{\rho_w \sqrt{k_v}} \quad y_\tau^* = \frac{\nu_w}{\sqrt{k_v}} \quad (3.20)$$

Cette longueur  $y_v$  est telle que le nombre de Reynolds basé sur  $k_v$  vaut :

$$Re_v = \frac{y_v \sqrt{k_v}}{\nu_w} = 20.5 \quad (3.21)$$

A partir de là, les lois pour la vitesse s'écrivent de la même manière que la loi de paroi standard, en distinguant deux zones :

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & \text{si : } y \ll y_v \\ u^+ = \frac{1}{\kappa^*} \ln(E^* y^+) & \text{si : } y \gg y_v \end{cases}$$

La valeur de  $y_v$  doit donc être calculée en premier lieu. Ceci est possible par la relation (3.21) et les expressions de l'énergie cinétique turbulente et la dissipation, qui sont imposées de telle sorte que :

$$\begin{cases} k = k_v \left( \frac{y}{y_v} \right)^2 & \text{et } \epsilon = \frac{2\nu k_v}{y_v^2} & \text{si : } y \ll y_v \\ k = \frac{k_2 - k_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) + k_1 & \text{et } \epsilon = \frac{k^{3/2}}{\kappa C_\mu^{3/4} y} & \text{si : } y \gg y_v \end{cases}$$

Les indices 1 et 2 représentent respectivement les valeurs au premier et au second point de calcul. En ce qui concerne la température, la grandeur  $T_\tau$  devient :

$$T_\tau = \frac{q_w}{\rho_w C_p \sqrt{k_v}} \quad (3.22)$$

La loi de paroi développée par Chien et Launder propose ainsi une solution pour capturer les décollements. En effet, quelque soit le signe de  $\tau_w$ , l'énergie cinétique et la dissipation restent toujours calculables, contrairement à la loi de paroi standard.

La loi de Werner et Wengle [62] suggère de formuler le profil de vitesse comme une loi en puissance.

$$\begin{cases} u^+ = y^+ & \text{si : } y \ll y_0 \\ u^+ = A(y^+)^B & \text{si : } y \gg y_0 \end{cases}$$

Avec  $A = 8.3$ ,  $B = 1/7$  et  $y_0 = 11.81$ . En intégrant la relation analytique appropriée sur toute la hauteur de la première maille, on obtient directement la valeur de  $U_\tau$ .

D'autres variantes dans la formulation de lois à l'équilibre peuvent être trouvées dans la littérature, permettant de prendre en compte un gradient de pression longitudinal non-nul [58]. Plus récemment, des lois généralisées [16, 54] ont été développées afin d'offrir un domaine d'utilisation (de validité) plus large que le modèle de paroi standard et de pouvoir traiter des écoulements plus complexes (zones de recirculations, à gradient de pression nul). On peut aussi mentionner l'existence de modèles de paroi mettant en œuvre des équations monodimensionnelles [38] résolues par un processus itératif.

Toutes ces lois ont en réalité à peu près les mêmes comportements et donnent des résultats satisfaisants, pour peu que la configuration simulée corresponde aux hypothèses employées pendant le développement de ces lois. Cependant, certaines peuvent s'avérer inadéquates pour traiter des écoulements autres qu'attachés et pleinement turbulents, ou présentant de fortes variations spatiales ou temporelles.

### Approches zonales :

Une autre famille de traitements de la zone proche paroi consiste à résoudre un problème sensiblement différent dans la couche limite. Ceci correspond à une approche zonale, car deux zones peuvent être clairement identifiées, ainsi que leur frontière.

Une première méthode qui a été expérimentée en premier lieu par Spalart *et al.* [56] est la *DES* (acronyme anglais pour « Detached Eddy Simulation »). Cette méthode a été développée à partir du constat que l'approche RANS donne des résultats assez limités en ce qui concerne les écoulements de couche limite décollée. Le principe est de résoudre la zone particulièrement mal représentée avec une approche LES, tandis que partout ailleurs l'approche RANS reste utilisée, ce qui revient à changer la modélisation de la turbulence, d'une région à l'autre. Ceci permet de réduire au final le coût d'une simulation d'écoulement pariétal particulièrement complexe, qui aurait été prohibitive avec une approche aux grandes échelles sur tout le domaine. Parmi les inconvénients de cette méthode, le passage de la zone RANS à la zone LES se fait par l'intermédiaire d'une zone « grise », dont les propriétés restent un peu obscures. D'autre part, la solution obtenue par DES est fortement dépendante du maillage, puisque le critère de changement du modèle de turbulence est fonction de l'échelle de longueur locale, c'est-à-dire de façon simplifiée, de la taille de la maille.

Au paragraphe suivant, une autre approche zonale est décrite de façon plus précise : c'est le modèle TBLE, qui sera largement utilisé dans la suite de ce document.

### 3.2.3 Modèle TBLE

Introduit pour la première fois en 1996 par les travaux de Balaras *et al.* [2], le modèle TBLE (acronyme pour Thin Boundary Layer Equation, c'est-à-dire équation de couche limite fine) a été utilisé et développé de manière croissante depuis. Il a fait l'objet de plusieurs études et applications sur différents cas, notamment par Cabot *et al.* [6, 7, 8, 20, 61] et plus récemment par Benarafa *et al.* [4].

Ce modèle se place dans le cadre des méthodes à approche zonale, c'est-à-dire qu'un problème sensiblement différent est résolu dans une certaine zone, par rapport au reste de la simulation. Dans le cas de la DES, c'est dans les régions de décollement qu'apparaît le traitement LES, lorsque tout le reste de la simulation est réalisé avec une modèle RANS. En ce qui concerne le TBLE, c'est dans les cellules pariétales que ce traitement différent va être mis en œuvre.

En effet, partout dans le domaine, les équations de Navier-Stokes filtrées sont résolues. Puis, à partir du premier point de calcul jusqu'à la paroi, un maillage mono-dimensionnel fin est imbriqué, comme décrit sur le schéma 3.3, sur lequel un jeu d'équations simplifiées est résolu. Ces équations ont pour inconnues les composantes de vitesse tangentielles à la paroi  $u_i$  ( $i = 1, 3$ ) et sont celles obtenues pour une couche limite turbulente bidimensionnelle :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} (u_i u_n) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] \quad (3.23)$$

La composante normale à la paroi de la vitesse peut alors être calculées par conservation de la masse :

$$u_n = - \int_0^y \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dy' \quad (3.24)$$

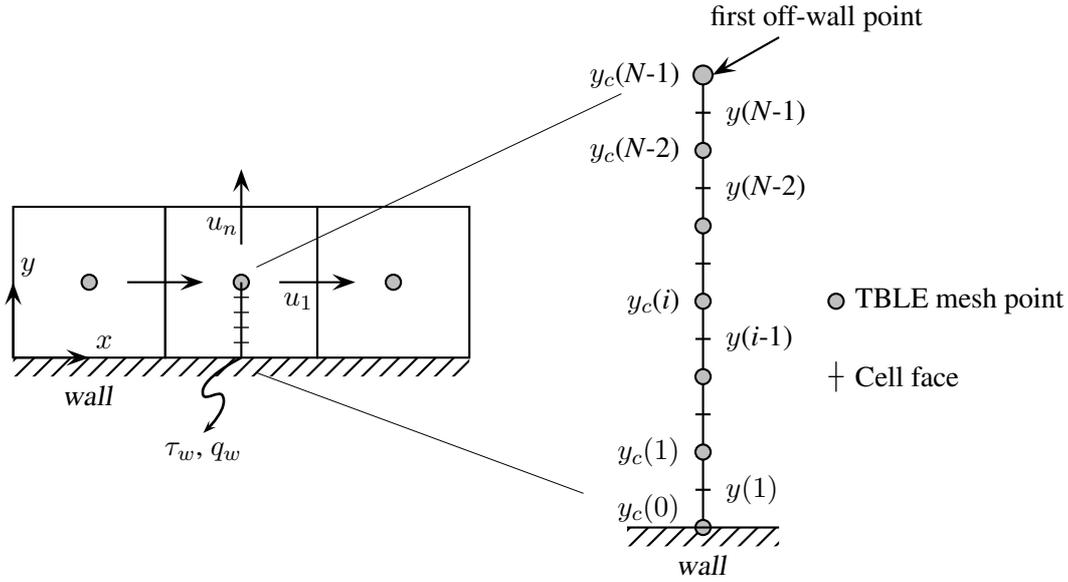


FIG. 3.3 – Maillage TBLE intercalé entre la paroi et le premier point de maillage LES

La présence d'un terme temporel dans les équations indique que la notion d'avancement en temps joue un rôle dans le modèle. D'autre part, toutes les échelles de la turbulence sont modélisées, et à ce titre il se rapproche plutôt d'une approche RANS. Ainsi, le modèle de turbulence adopté doit avoir une importance significative sur les résultats. Néanmoins, par souci de simplicité d'implémentation, un modèle de type longueur de mélange est généralement privilégié pour l'expression de  $\nu_t$ .

$$\nu_t = (\kappa y)^2 |S| D(y) \quad (3.25)$$

où  $\kappa$  est la constante de von Kármán,  $y$  la distance à la paroi,  $|S|$  la norme du tenseur de contraintes, et  $D$  la fonction d'amortissement qui permet d'obtenir la bonne décroissance de  $\nu_t$  à la paroi, dont l'expression est empruntée à [46] :

$$D(y) = 1 - \exp \left[ - (y^+ / 25)^3 \right] \quad (3.26)$$

Grâce au raffinement du maillage imbriqué TBLE à la paroi, le frottement et le flux de chaleur pariétaux peuvent être directement évalués par le gradient normal à la paroi des composantes de la vitesse et de la température. Lorsque le premier point du maillage fin TBLE se situe aux environs de  $y^+ = 1$ , on obtient une précision appréciable au niveau du calcul de ces gradients pariétaux, qui revêtent la forme discrétisée suivante :

$$\tau_w = \mu(0) \sqrt{\left( \frac{u_1(1) - u_1(0)}{y_c(1) - y_c(0)} \right)^2 + \left( \frac{u_3(1) - u_3(0)}{y_c(1) - y_c(0)} \right)^2} \quad (3.27)$$

$$q_w = -\lambda(0) \frac{T(1) - T(0)}{y_c(1) - y_c(0)} \quad (3.28)$$

Le seul lien entre le problème externe (LES) et le problème TBLE est constitué par les inconnues de vitesse et pression au premier point de proche paroi LES. Celles-ci sont les conditions aux

limites « extérieures » du problème fin. A la paroi, les conditions aux limites du problème TBLE reposent sur la condition de non-glissement (composantes de la vitesse nulles). Ce couplage LES-TBLE par les conditions aux limites extérieure et pariétale permet de s'assurer que la résolution elle-même du problème fin sera découplée de celle du problème LES. Ainsi, le modèle TBLE peut apparaître, dans son principe, comme une loi de paroi au sens classique (contrairement à la DES). Les entrées et sorties du modèle TBLE sont schématisées sur la Figure 3.4.

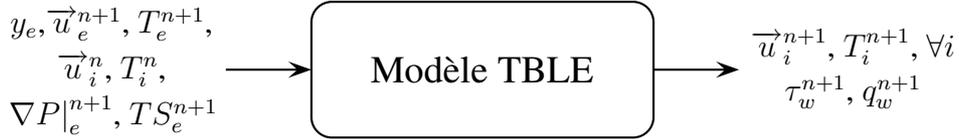


FIG. 3.4 – Entrées et sorties du modèle TBLE

Le modèle TBLE a été testé avec succès dans cette version initiale dans de nombreux cas, notamment en configurations attachées et détachées [2, 8], au bord de fuite d'un profil d'aile [61] ou encore en conduite carrée [2]. Néanmoins, il peut être simplifié de façon drastique en négligeant les termes convectifs des deux équations de quantité de mouvement. En effet, lorsque l'on considère la région très proche de la paroi, on peut supposer que le phénomène de convection est négligeable devant les phénomènes de diffusion moléculaire. L'équation (3.23) devient alors :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] \quad (3.29)$$

Avec cette simplification majeure, le jeu d'équations résolu devient monodimensionnel dans la direction normale à la paroi (le gradient de pression étant considéré constant pour tout le maillage fin et fixé par le problème externe). Une telle version de TBLE sans termes convectifs a été testée [6, 7, 3] avec des résultats satisfaisants. Il n'en reste pas moins que la possibilité de prendre en compte les termes convectifs dans les équations du modèle est un atout considérable, d'autant que le surcoût engendré apparaît comme raisonnable (moins de 10% sur des cas académiques [3] avec une approche structurée). Il est clair que le coût de prise en compte des termes convectifs selon une approche non-structurée sera largement plus important.

De plus amples détails sur la discrétisation des équations ainsi que la méthode de résolution du problème TBLE seront donnés au Chapitre 5, où une version du modèle TBLE sera développée dans le cadre des écoulements à faibles nombres de Mach.

### 3.3 Objectifs

La brève revue des modèles de paroi existants nous montre que bon nombre de lois empiriques ou analytiques ont été développées pour des écoulements incompressibles, ce qui les rend par nature invalides en situation de fluide aux propriétés variables. Or, ce genre d'écoulements intervient dans de nombreuses situations de l'industrie comme cela a été discuté en introduction. On se propose donc dans cette étude, de prouver le mauvais traitement d'écoulements pariétaux turbulents fortement non-isothermes par les modèles de paroi existants d'une part, puis de développer de nouveaux modèles qui soient eux, adaptés aux écoulements à densité variable. Ceci correspond aux travaux présentés dans la Partie II de ce document. Ces nouveaux modèles seront utilisés en

régime isotherme et fortement non-isotherme afin de tester leur efficacité et seront comparés aux résultats avec les modèles utilisés actuellement.

Par ailleurs, un second point d'intérêt réside dans les capacités intrinsèques d'un modèle de paroi à traiter de façon satisfaisante les écoulements soumis à de fortes instationnarités. Or, la majorité des lois de paroi provenant de la simplification majeure que l'écoulement simulé est stationnaire, il est légitime de douter que la précision de leur résultat soit assurée dans les cas d'écoulements instationnaires. Ainsi, dans un second temps, les travaux porteront sur une investigation concernant les capacités des modèles de paroi à représenter ce type d'écoulements instationnaires. Des limitations en terme de fréquence caractéristique des instationnarités pourront être formulées, qui assurent ou non la validité des modèles de paroi testés. De plus, le modèle TBLE qui est le seul traitement pariétal à présenter une avancée en temps des inconnues au voisinage de la paroi, sera soumis aux mêmes tests. Ainsi, la prise en compte du terme temporel des équations du modèle pourra être analysée, afin de déterminer si cela constitue une amélioration dans la précision du modèle ou bien au contraire une restriction quant aux limitations fréquentielles qui peuvent être établies. Cette thématique sera l'objet de la Partie III.



## **Deuxième partie**

# **Modèles de paroi pour les écoulements à densité variable**



## Chapitre 4

# Description des écoulements de fluides dilatables

Les écoulements turbulents présentant de larges variations de propriétés physiques comme la densité sont présents dans de nombreuses situations industrielles et peuvent aussi se rencontrer dans la nature. Dans cette étude, une importance significative y est accordée puisque de nombreuses configurations de l'industrie nucléaire consistent en des écoulements à densité variable.

Dans ces applications, une large part est réservée à l'étude précise des échanges thermiques entre deux solides ou entre un solide et un fluide le balayant.

### 4.1 Effets de densité variable dans les écoulements turbulents

La définition de la densité  $\rho$  d'un fluide permet d'identifier les différents types de causes étant à l'origine de variations de densité dans un écoulement. Cette définition est basée sur le rapport entre la masse d'un milieu fluide par le volume qu'il occupe :

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (4.1)$$

Dès lors on peut envisager que les variations de densité puissent avoir des causes différentes, en relation avec un changement de volume ou de masse. Ces causes sont classées selon les quatre catégories suivantes :

#### **Effets de changements géométriques**

La variation du volume contenant une certaine quantité de fluide peut évoluer par l'intermédiaire des conditions limites, impliquant des changements de densité du fluide.

#### **Effets du nombre de Mach**

La compressibilité d'un fluide sous l'effet de sa vitesse d'écoulement est aussi une source de changement de densité

#### **Effets de mélange**

Un milieu fluide réactif ou non réactif à température et pression constante peut générer des variations de densité liées au seul mélange des espèces.

### Effets de dilatabilité

Des variations de densité peuvent être directement liées à des variations des propriétés thermiques. L'expansion thermique du fluide engendre alors une évolution du volume.

Cette dernière catégorie est celle qui nous intéresse particulièrement ici. En effet, notre étude se limite à des écoulements faiblement compressibles, à volume constant, et n'impliquant pas de mélange d'espèces. Une revue bibliographique sur ce sujet montre que les études concernant les écoulements à densité variable réalisées jusqu'à présent portent en majeure partie sur des écoulements à nombre de Mach élevé. C'est ainsi que de nombreuses questions ont été peu abordées sur ce thème et restent sans réponse. Il en est ainsi pour la modélisation de paroi dans un tel régime, qui est l'objet du Chapitre 5.

## 4.2 Formulation de l'approche Bas Mach

Toutes les types d'effets de densité variable précédemment décrits ne se retrouvent pas systématiquement dans les écoulements d'intérêt. Souvent l'approximation  $\rho = cte$  est suffisante pour traiter de façon assez satisfaisante les écoulements de fluides faiblement dilatables.

Néanmoins, les écoulements de l'industrie nucléaire présentent souvent de fortes différences de température, telles que les équations de Navier-Stokes formulées pour  $\rho$  constant ne constituent pas une assez bonne modélisation de l'écoulement.

Afin de considérer la seule source des variations de densité qui nous intéresse ici, soit les effets de dilatation/contraction, nous allons simplifier le problème en « filtrant » l'acoustique des équations de Navier-Stokes. Ceci constitue l'approche Bas Mach qui sera utilisée par la suite. Outre la simplification du problème analytique, cette approche permet, d'un point de vue numérique, de s'affranchir partiellement de la limitation sur le pas de temps pour la stabilité des méthodes explicites. La vitesse de convection étant la seule apparaissant dans le nombre de Courant-Friedrich-Levy (CFL). Cette approche est donc particulièrement bien adaptée aux cas où les ondes acoustiques n'ont pas d'influence sur le traitement des phénomènes physiques de type convection forcée, libre ou mixte.

Pour amener de façon la plus simple possible les simplifications impliquées par une telle approche, nous reprenons le formalisme de Paolucci [44]. Les nombres sans dimension suivants (Mach, Reynolds, Froude, Peclet, rapport des chaleurs spécifiques) peuvent être formés à partir des grandeurs caractéristiques du fluide ou de la configuration :

$$Ma = \frac{U}{c_0} \quad Re = \frac{\rho_0 U l}{\mu_0} \quad Fr = \frac{U^2}{g_0 l} \quad Pe = \frac{\rho_0 c_{p0} U l}{\lambda_0} \quad \gamma = \frac{c_{p0}}{c_{v0}} \quad (4.2)$$

Les valeurs indicées par 0 peuvent être des données initiales ou limites du problème. La vitesse  $U$  et la longueur  $l$  sont des grandeurs caractéristiques de l'écoulement. On peut ainsi voir que les effets acoustiques sont uniquement inclus dans le nombre de Mach, par la vitesse du son  $c_0$ . La reformulation des équations de Navier-Stokes en fonction de ces paramètres sans dimension va ainsi permettre de justifier de l'importance de certains termes par rapport à d'autres lorsque le nombre de Mach est faible.

Le jeu d'équations est donc réécrit selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + Ma^{-1} \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + Ma^{-1} \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{Ma^{-1}}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{Ma}{Fr} \rho g_i + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + Ma^{-1} u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \Gamma \left( \frac{\partial P}{\partial t} + Ma^{-1} u_j \frac{\partial P}{\partial x_j} \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \gamma \frac{\Gamma}{Re} \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ P = \rho T \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où la grandeur  $\Gamma$  introduite ici est égale à  $(\gamma - 1)/\gamma$ , soit :  $\Gamma = r/c_p$ .

Les écoulements considérés ayant un nombre de Mach faible ( $Ma \ll 1$ ), il est possible de développer les inconnues en série de puissances du nombre de Mach (plus exactement du nombre de Mach au carré, qui est d'autant plus faible). De cette façon, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = Ma \left[ u_i^{(0)} + Ma^2 u_i^{(1)} + o(Ma^2) \right] \\ T = T^{(0)} + Ma^2 T^{(1)} + o(Ma^2) \\ P = P^{(0)} + Ma^2 P^{(1)} + o(Ma^2) \\ \rho = \rho^{(0)} + Ma^2 \rho^{(1)} + o(Ma^2) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Ces séries fonction du nombre de Mach peuvent être introduites dans le système (4.3), et ainsi par identification des termes à l'ordre 1, on montre :

$$0 = \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{Ma^2}{Fr} g_i \rho^{(0)} \quad (4.5)$$

Hormis dans des cas très particuliers (océanographie ou encore astrophysique), on a  $Ma^2/Fr \ll 1$ , ce qui implique que Eq. (4.5) devient :

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.6)$$

Ceci implique, qu'au premier ordre en  $Ma^2$ , la pression est seulement dépendante du temps :  $P^{(0)} = P^{(0)}(t)$ .

La pression  $P$  peut au final être considérée comme la somme :  $P = P^{(0)} + Ma^2 P^{(1)}$ . Par la suite, on simplifiera en écrivant :

$$P = P_0(t) + P_1(x_i, t) \quad (4.7)$$

Le terme  $P_0$  sera interprété comme la partie thermodynamique de la pression, tandis que le second,  $P_1$  est la pression hydrodynamique et est directement proportionnel au nombre de Mach au carré.

Si seuls les termes de l'ordre de 1 sont conservés dans l'équation d'état du fluide, il résulte que  $P_0 = \rho_0 T_0$ .

Afin de revenir au formalisme utilisé dans cette thèse (équations dimensionnées), le système d'équations de Navier-Stokes (4.3) peut ainsi se réécrire de la manière suivante, en supprimant les indices 0 et 1 sauf pour la pression :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \\ \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + P_1 \delta_{ij} - \tau_{ij}) = 0 & i = 1 \text{ à } 3 \\ \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho h u_j + q_j) - \frac{dP_0}{dt} - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \\ P_0 = \rho r T \end{cases} \quad (4.8)$$

Ce système requiert une équation supplémentaire sur la pression  $P_0$ . Une condition  $P_0$  constante peut être imposée, mais généralement, une condition de conservation de la masse globale est utilisée, qui se traduit par l'intégration de la loi d'état du gaz sur le domaine fluide  $\Omega$  :

$$P_0(t) = \frac{r M_0}{\int_{\Omega} \frac{d\Omega}{T}} \quad (4.9)$$

Une troisième possibilité est de résoudre une équation différentielle pour  $P_0$ , obtenue par la conservation globale de l'énergie :

$$\frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{dt} = \frac{1}{\bar{\rho} V} \int_{\Omega} \frac{\rho}{T} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega \quad (4.10)$$

où  $\bar{\rho}$  est la moyenne de la masse volumique sur le domaine  $\Omega$ .

Dans la suite de cette partie de thèse, la description des écoulements à faible nombre de Mach soumis à de fortes variations de densité se fera par le biais de l'approche Bas Mach, aussi dénotée « formulation Quasi-Compressible » des équations de Navier-Stokes.

### 4.3 Mise en défaut des modèles standards existants

Comme expliqué à la Section 3.3, les modèles de paroi décrits précédemment dans la revue bibliographique ont tous été développés dans le cadre de l'approximation d'écoulement incompressible. Bien qu'il existe un domaine de validité de tous ces modèles pour de faibles variations de propriétés physiques (l'approximation peut être considérée comme correcte pour de faibles différences de température), en revanche, leur utilisation devient injustifiable lorsque les variations de densité sont importantes.

Une préoccupation majeure est donc de connaître les résultats obtenus par l'utilisation de ces modèles en régime non-isotherme, afin d'en déduire l'erreur commise par rapport au calcul exact des flux thermiques. Ici, en préambule de cette partie consacrée au développement de modèles de paroi pour le régime non-isotherme, nous nous proposons de démontrer l'invalidité des modèles classiquement utilisés dans de tels cas.

Des simulations numériques directes ont été réalisées par Nicoud afin de construire des tests *a priori* qui nous permettent ici de valider les différentes étapes de modélisation. Ces DNS [39,

42] traitent le cas d'un canal plan turbulent bi-périodique entre deux parois à des températures différentes.  $T_1$  est la température de paroi basse,  $T_2$  est celle de la paroi haute et varie d'une DNS à l'autre (jusqu'à  $T_2/T_1 = 4$ ). Les calculs ont permis de créer une base de données pour les écoulements à densité variable, jusque là manquante, pour le développement de modèles en régime anisotherme. Notons que les variations de température sont appliquées à la viscosité dynamique par le biais de la loi de Sutherland, Equation (1.2), ou d'une loi en puissance  $\mu \propto T^{-1/2}$ . Le domaine de calcul est présenté en Figure 4.1.

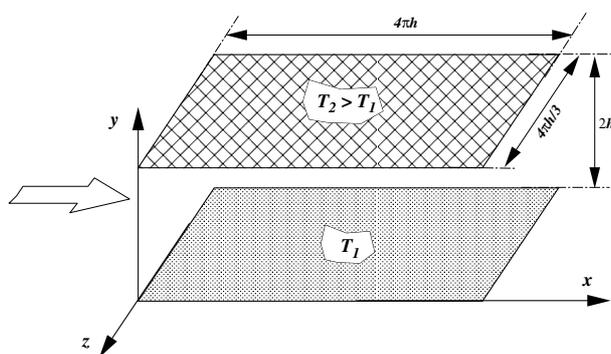


FIG. 4.1 – Domaine de calcul utilisé pour la DNS de Nicoud [42, 39]

Afin de démontrer qu'une modélisation de paroi pour les écoulements en régime non-isotherme est nécessaire, nous utiliserons les 3 cas de calculs, correspondant à  $T_2/T_1 = 1.01, 2$  et  $4$ . Cette configuration ayant le désavantage de présenter un point d'inflexion sur le profil de température au centre du canal, nous nous référerons à la simulation de Kawamura [32] en régime quasi-isotherme<sup>1</sup>.

Deux modèles de paroi sont étudiés ici : la loi de paroi standard (SWM) décrite au Paragraphe 3.2.1 et le modèle TBLE présenté au Paragraphe 3.2.3. Le frottement pariétal et le flux de chaleur, qui sont les valeurs de sortie de ces modèles de paroi, sont donnés sur la Figure 4.2. Sur cette figure, l'évolution du flux et du frottement est donnée en fonction de la distance adimensionnée  $y^+$  du point d'application du modèle de paroi. Les valeurs sont adimensionnées par la valeur issue de la simulation directe, le rapport étant à comparer à l'unité pour conclure quant à l'erreur commise entre le modèle et la DNS.

La Figure 4.2 permet de constater que le frottement donné par les deux modèles s'écarte des valeurs DNS lorsque la différence de température augmente. La forme en plateau observable pour le cas quasi-isotherme montre que les deux lois semblent robustes en terme de coordonnée du premier point de calcul. Pour les deux cas anisothermes, cette remarque ne peut être formulée à cause de la présence du point d'inflexion dans la distribution de température, impliquant aussi une dissymétrie du champ de vitesse.

Les distributions du flux de chaleur donnent le même résultat, qui était attendu, c'est-à-dire que les valeurs en sortie des modèles s'écartent des valeurs issues de la DNS lorsque l'on augmente la différence de température entre le fluide et la paroi.

Il est important de noter que les erreurs entre les simulations directes et les modèles de paroi testés sur ce cas peuvent dépasser 10% sur le frottement. Pour le flux de chaleur, les écarts sont plus importants et atteignent 20% dans les cas où le fluide est soumise aux plus grandes variations

<sup>1</sup>Calcul réalisé à température de paroi constante et réchauffement par terme source

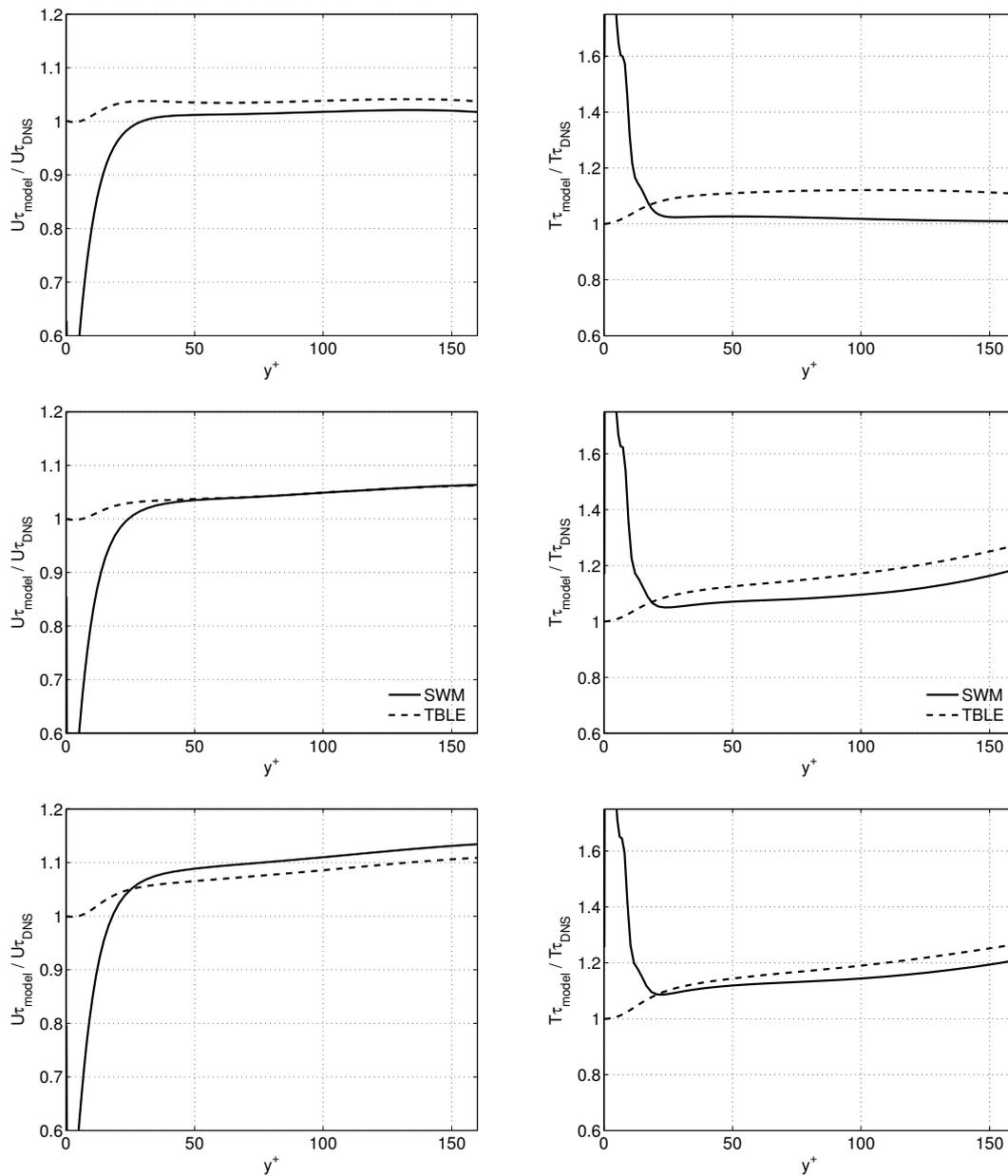


FIG. 4.2 – Vitesse (gauche) et température (droite) de frottement en sortie des modèles de paroi standard (SWM) et TBLE. Haut :  $T_2/T_1 = 1.01$ , Centre :  $T_2/T_1 = 2$ , Bas :  $T_2/T_1 = 4$

de température. De tels écarts rendent les résultats en sortie des modèles de paroi actuels inexploitable dans un contexte d'écoulement à densité variable. Le Chapitre 5 propose le développement d'une loi de paroi dédiée aux écoulements soumis à de forts gradients de température, ainsi que l'adaptation d'un modèle de paroi pour la LES (TBLE) à ce type de configuration.



## Chapitre 5

# Prise en compte des effets de densité

Dans cette partie, nous allons développer une loi de paroi capable de prendre en compte les fortes variations de densité (dilatabilité) dans la zone interne de la couche limite. Nous restons toujours dans le cadre d'écoulements à nombre de Mach faibles, les effets de compressibilité ne sont donc pas étudiés. Par ailleurs, le développement de la loi couplée en vitesse et température qui sera abordé à la Section 5.3, est réalisé dans le contexte d'un écoulement statistiquement stationnaire. Au cours de la Section 5.4, le contexte instationnaire sera envisagé en présentant l'adaptation d'un modèle de paroi pour la LES (le TBLE) au régime d'écoulements à densité variable.

### 5.1 Transformation de Van Driest

Sous les hypothèses d'un écoulement de Couette, l'équation de la quantité de mouvement projetée dans la direction de l'écoulement permet de montrer qu'il existe une zone où le frottement est constant, c'est-à-dire  $\tau = \tau_w$  [5]. Dans la zone logarithmique où la viscosité turbulente joue un rôle prédominant par rapport à la viscosité laminaire, on peut en déduire :

$$\mu_t \frac{d\tilde{u}}{dy} = \bar{\rho} \left( \kappa y \frac{d\tilde{u}}{dy} \right)^2 \approx \tau_w \quad (5.1)$$

Cette relation est obtenue sous les mêmes hypothèses que lors du développement de la loi de paroi standard (Section 3.2.1), à la seule différence que l'écoulement est à densité variable. L'utilisation d'une formule de type « longueur de mélange » pour obtenir l'équation (5.1) permet d'écrire les relations suivantes :

$$\kappa y \frac{d\tilde{u}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\bar{\rho}}} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} \sqrt{\frac{\rho_w}{\bar{\rho}}} = U_\tau \sqrt{\frac{\rho_w}{\bar{\rho}}}$$

En passant en variables adimensionnées, définies au Chapitre 2, on obtient :

$$\sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}} du^+ = \frac{dy^+}{\kappa y^+} \quad (5.2)$$

Cette expression s'intègre analytiquement en fonction de  $y^+$  et permet d'écrire la relation dite « transformation de Van Driest » [26, 40], qui s'écrit comme suit :

$$u_{vd}^+ = \int_0^{u^+} \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \right)^{1/2} du^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,vd} \quad (5.3)$$

Cette relation montre qu'une certaine pondération des coordonnées adimensionnées  $u^+$  par le rapport de densité entre le point de calcul et la paroi, permet d'obtenir une relation logarithmique similaire à celle de la loi standard en vitesse. De plus, on peut remarquer que, pour un cas quasi-isotherme, le rapport des densités vaut 1, et donc que l'on a  $u_{vd}^+ = u^+$ .

La prise en compte des gradients thermiques se fait donc par cette transformation et l'expression du rapport des densités, que nous allons calculer à présent, joue donc un rôle majeur. De la même façon que pour l'équation (5.1), on peut simplifier l'équation pour la température dans la zone logarithmique ( $\lambda_t \gg \lambda$ ,  $\mu_t \gg \mu$ ) :

$$-\lambda_t \frac{d\tilde{T}}{dy} = -\frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \frac{d\tilde{T}}{dy} \approx q_w \quad (5.4)$$

en utilisant l'analogie de Reynolds qui introduit le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$ .

Par combinaison des deux relations précédentes, équations (5.1) et (5.4), on obtient l'expression suivante :

$$\frac{q_w}{\tau_w} = -\frac{C_p}{Pr_t} \frac{\frac{d\tilde{T}}{dy}}{\frac{d\tilde{u}}{dy}}$$

On en déduit le gradient de température :

$$\frac{d\tilde{T}}{dy} = -\frac{Pr_t q_w}{\tau_w C_p} \frac{d\tilde{u}}{dy}$$

Cette relation est intégrable selon  $y$ , en considérant que les grandeurs  $Pr_t$ ,  $q_w$ ,  $\tau_w$ ,  $C_p$  sont indépendantes de la distance à la paroi<sup>1</sup> :

$$\tilde{T} = -\frac{Pr_t q_w}{\tau_w C_p} \tilde{u} + C$$

Après substitution du frottement et du flux pariétaux, et en adimensionnant la température par  $T_w$  et la vitesse par  $U_\tau$ , on obtient :

$$\frac{\tilde{T}}{T_w} = -\frac{Pr_t T_\tau}{T_w} u^+ + C'$$

Il est souvent utile de définir un nombre sans dimension,  $B_q$ , qui caractérise le flux de chaleur ainsi qu'un différentiel de température  $\Delta T$  tels que :

$$B_q = \frac{T_\tau}{T_w} \quad \Delta T = \frac{\tilde{T} - T_w}{T_w} \quad (5.5)$$

---

<sup>1</sup>La dépendance de  $C_p$  à la température a été prise en compte dans une précédente étude [17]. Néanmoins pour  $C_p$  polynome de  $T$ , l'effet est secondaire

Ces deux grandeurs adimensionnées sont alors liées par la relation suivante :

$$B_q = \frac{\Delta T}{T^+} \quad (5.6)$$

Au final, on obtient le rapport de température suivant :

$$\frac{\tilde{T}}{T_w} \approx C' - \text{Pr}_t B_q u^+ \quad (5.7)$$

La constante  $C'$  est habituellement prise égale à l'unité [5]. Nous reconsidérerons cette approximation par la suite. En effet, la détermination du rapport de température  $T/T_w$  intervient directement dans la transformée de Van Driest, et doit donc être connu pour permettre son intégration.

## 5.2 Etude de canal plan aux propriétés variables

Dans cette section, nous reprenons les simulations décrites en Section 4.3 réalisées par Nicoud [39, 42].

Ces calculs ont permis de vérifier que la transformée de Van Driest était valide, même dans le cas de plus fort gradient de température. En effet, l'adimensionnement classique des profils de vitesse aboutit à un étalement des courbes de la Figure 5.1 (gauche) en fonction de la distance à la paroi, alors que l'adimensionnement par le rapport de densité semble être plus représentatif (droite). Pour tous les cas de calcul de DNS, la vitesse transformée par Van Driest  $U_{VD}^+$  est ainsi en très bon accord avec la loi logarithmique classique.

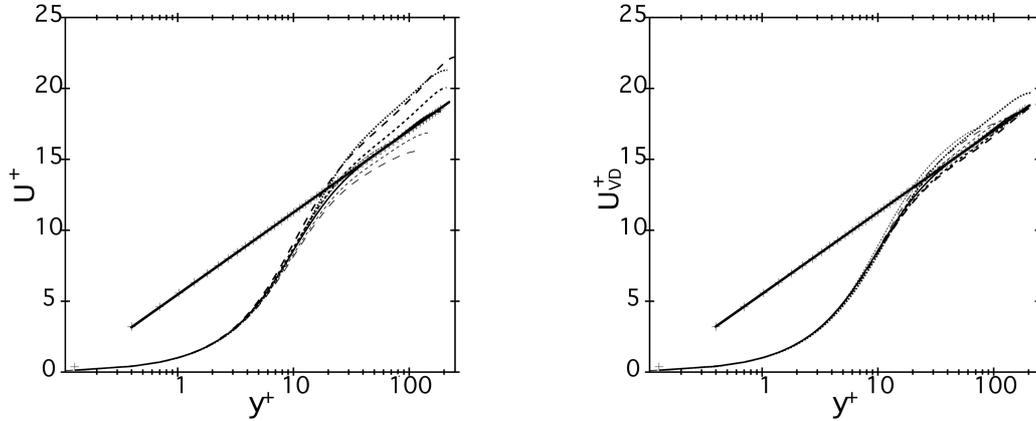


FIG. 5.1 – Profils de vitesse moyenne. Gauche : adimensionnement classique, droite : adimensionnement par la transformation de Van Driest.

Un second point de validation de la modélisation par les calculs DNS concerne la constante  $C'$  qui intervient dans le rapport de température de la relation (5.7). Selon Bradshaw [5],  $C' \approx 1$  et donc :

$$\frac{\tilde{T}}{T_w} \approx 1 - \text{Pr}_t B_q u^+ \quad (5.8)$$

Nous avons voulu vérifier cette approximation par les résultats numériques. Les courbes de la Figure 5.2 montrent bien la validité de cette évaluation numérique de  $C'$ , et ce quel que soit le degré d'anisothermie auquel est soumis le canal.

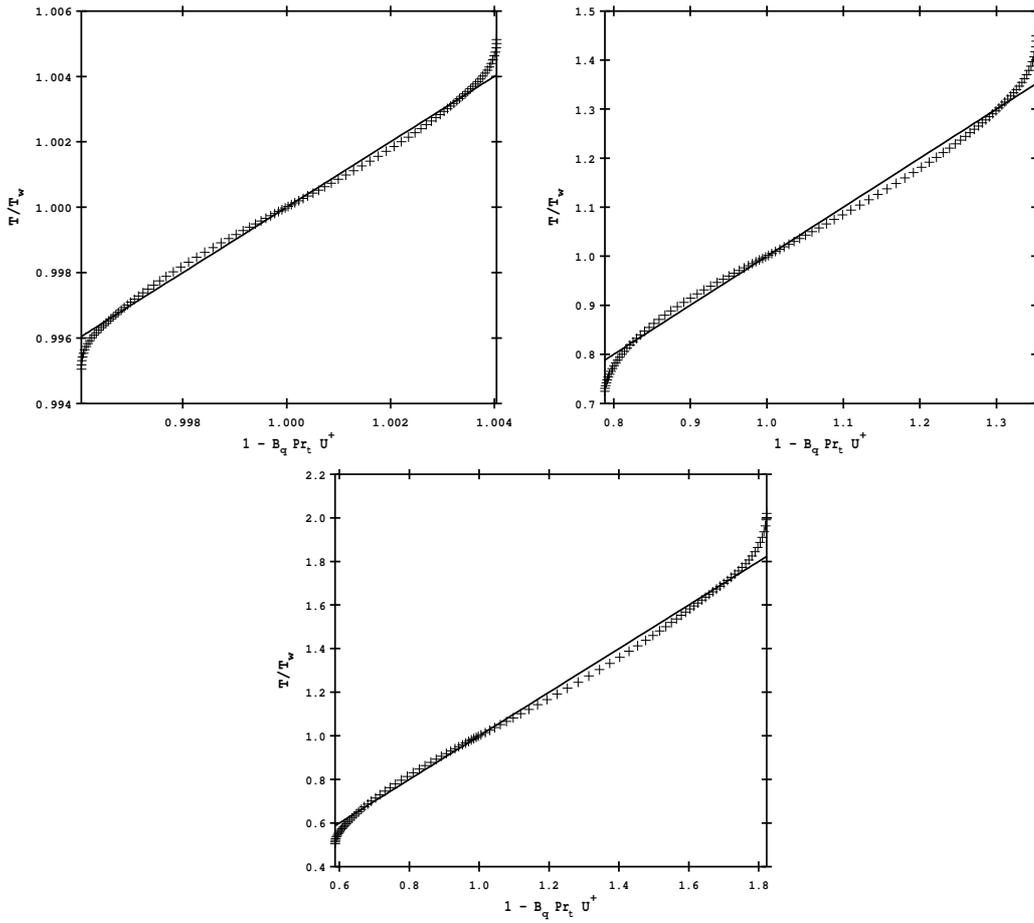


FIG. 5.2 – Rapport de température  $\tilde{T}/T_w$  en fonction de l'expression  $1 - \text{Pr}_t B_q u^+$  pour les 3 cas de calcul  $T_2/T_1 = 1.01$  (haut-gauche), 2 (haut-droite) et 4 (bas). Trait plein : Eq. (5.8), symboles : DNS.

Il est important de préciser que cette approximation de la constante  $C'$  est issue de calculs où le fluide a un nombre de Prandtl laminaire constant, et autour de 1. Néanmoins, une étude récemment publiée [52] sur les scalaires passifs à nombres de Schmidt laminaires  $Sc$  variables semble montrer que la constante varie fortement en fonction de  $Sc$ . Ceci corrobore le choix qui a été fait par la suite, à savoir que nous ne considérerons pas  $C'$  comme constante égale à 1, mais comme une constante d'ajustement de la loi de paroi développée à la Section 5.3. En effet, même si sa valeur reste proche de 1, elle peut être modifiée en fonction d'une expression plus complexe faisant intervenir le nombre de Prandtl moléculaire. C'est ce que nous verrons au Paragraphe 5.3.2.

## 5.3 Développement d'un modèle de paroi couplé : CWM

### 5.3.1 Intégration de la transformation de Van Driest

Ici, la constante  $C'$ , constante d'intégration de l'équation (5.7) n'est plus considérée comme étant égale à 1, mais dépendante éventuellement des nombres de Prandtl laminaire et turbulent, et du flux de chaleur adimensionné  $B_q$ . Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation en  $T^+$  :

$$\frac{\tilde{T}}{T_w} = C' - \text{Pr}_t B_q u^+ \quad \Rightarrow \quad T^+ = -\frac{C' - 1}{B_q} + \text{Pr}_t u^+ \quad (5.9)$$

Des considérations sur le cas asymptotique isotherme permettent de proposer une expression pour la constante  $C'$ .  $T^+$  doit avoir une valeur finie lorsque  $B_q \rightarrow 0$ , ce qui implique que  $(C' - 1) \rightarrow 0$ . On peut donc supposer :  $C' = 1 + B_q \times A$ . Par souci de simplification, et au vu de l'équation (5.9), on préfère poser  $C' = 1 - \text{Pr}_t B_q \times A$  ( $A$  constante). Ainsi, cette équation devient :

$$T^+ = \text{Pr}_t(u^+ + A) \quad (5.10)$$

La dérivation de la loi anisotherme peut donc être maintenant reprise, en gardant cette valeur de  $C'$ . Le rapport de densité intervenant dans la transformation de Van Driest, équation (5.3) peut être exprimé grâce à l'équation d'état, par le biais du rapport de température  $T_w/T$  :

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_w} = \frac{T_w}{\tilde{T}} = \frac{1}{1 - \text{Pr}_t B_q (u^+ + A)} \quad (5.11)$$

On a alors la possibilité d'intégrer l'équation (5.3) en substituant le rapport des densités par le rapport des températures de l'équation (5.11), en considérant un gaz parfait :

$$u_{vd}^+ = \int_0^{u^+} \left( \frac{1}{1 - \text{Pr}_t B_q (u^+ + A)} \right)^{1/2} du^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,vd} \quad (5.12)$$

Après intégration, on obtient :

$$\frac{-2}{\text{Pr}_t B_q} \left[ \sqrt{1 - \text{Pr}_t B_q (u^+ + A)} - \underbrace{\sqrt{1 - \text{Pr}_t B_q A}}_{\sqrt{C'}} \right] \approx \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,vd} \quad (5.13)$$

Or, on peut écrire le produit  $\text{Pr}_t B_q$  en fonction du gradient de température  $\Delta T$  :

$$\text{Pr}_t B_q = \frac{-\Delta T}{u^+ + A} \quad (5.14)$$

On peut donc reformuler l'équation (5.13) :

$$u_{vd}^+ = \frac{2(u^+ + A)}{\Delta T} \left[ \sqrt{1 + \Delta T} - \sqrt{1 + \frac{A\Delta T}{\tilde{u}/U_\tau + A}} \right] \approx \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,vd}$$

La nouvelle fonctionnelle en  $U_\tau$  pour la loi anisotherme s'écrit donc :

$$\frac{2}{\Delta T} \left( \frac{\tilde{u}}{U_\tau} + A \right) \left[ \sqrt{1 + \Delta T} - \sqrt{1 + \frac{A\Delta T}{\tilde{u}/U_\tau + A}} \right] - \left( \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,vd} \right) = 0 \quad (5.15)$$

### 5.3.2 Calibration de la loi de paroi par la constante $C'$

Il reste à présent à déterminer la constante  $A$ , et indirectement  $C'$ . Pour cela, nous considérons que la loi de paroi anisotherme doit pouvoir se dégrader, en régime quasi-isotherme, en une loi assimilable au modèle de paroi standard. Ceci implique que l'équation pour  $U$  et pour  $T$  s'écrive de façon semblable pour ces deux lois.

• En ce qui concerne la vitesse, à l'aide de développements limités en  $\Delta T$  au voisinage de 0, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta T} \left( \frac{\tilde{u}}{U_\tau} + A \right) \left[ 1 + \frac{1}{2}\Delta T - 1 - \frac{A}{2(\tilde{u}/U_\tau + A)}\Delta T \right] + O(\Delta T) \\ - \left( \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,vd} \right) = 0 \\ \left( \frac{\tilde{u}}{U_\tau} + A \right) \left[ 1 - \frac{A}{\tilde{u}/U_\tau + A} \right] + O(\Delta T) - \left( \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,vd} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la loi couplée tend vers une formulation logarithmique :

$$\frac{\tilde{u}}{U_\tau} + O(\Delta T) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{u,vd}$$

On constate que la loi anisotherme se dégrade en loi standard pour la vitesse, lorsque l'on tend vers un régime quasi-isotherme, sans condition sur la constante  $A$ .

• En ce qui concerne la température, on rappelle ici la loi de Kader, qui est communément utilisée pour donner le profil de température adimensionnée en fonction de  $y^+$  dans le modèle de paroi standard :

$$T^+ = \text{Pr} y^+ e^{-\Gamma} + \left[ 2.12 \ln \left( (1 + y^+) \frac{2.5(2 - y/\delta)}{1 + 4(1 - y/\delta)^2} \right) + \beta(\text{Pr}) \right] e^{-1/\Gamma} \quad (5.16)$$

Avec  $\delta$  la demi-hauteur du canal, et  $\Gamma$  et  $\beta(\text{Pr})$  tels que :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{10^{-2} (\text{Pr} y^+)^4}{1 + 5\text{Pr}^3 y^+} \\ \beta(\text{Pr}) &= (3.85\text{Pr}^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln \text{Pr} \end{aligned}$$

Cette relation permet une variation de l'ordonnée à l'origine en fonction du nombre de Prandtl laminaire par l'intermédiaire de la grandeur  $\beta(\text{Pr})$ .

A haut nombre de Reynolds, il existe une zone de la couche limite où  $y^+ \gg 1$  et  $y/\delta \ll 1$  ( $\delta$  : épaisseur de couche limite). Nous nous plaçons dans cette zone-là, qui correspond au cadre d'application d'une loi de paroi. Ainsi, la valeur de la partie linéaire de la loi de Kader tend vers 0, et la partie logarithmique tend vers l'expression :

$$T^+ = 2.12 \ln y^+ + \beta(\text{Pr}) \quad (5.17)$$

Nous avons choisi arbitrairement, que la loi de paroi couplée devait donner les mêmes résultats que la loi de Kader pour une ordonnée de  $y^+ = 100$ , zone dans laquelle agit la loi de paroi. On a donc pu écrire une condition d'égalité entre les deux lois :

$$2.12 \ln(100) + \beta(\text{Pr}) = -\frac{C' - 1}{B_q} + \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln(100) + \text{Pr}_t C_{u,vd}$$

Donc :

$$\begin{aligned} -\frac{C' - 1}{B_q} &= \beta(\text{Pr}) - \text{Pr}_t C_{u,vd} + \left(2.12 - \frac{\text{Pr}_t}{\kappa}\right) \ln(100) \\ C' &= 1 - B_q \left( \beta(\text{Pr}) - \text{Pr}_t C_{u,vd} + \left(2.12 - \frac{\text{Pr}_t}{\kappa}\right) \ln(100) \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ainsi, grâce à la relation (5.18) et en se rappelant que  $A = -(C' - 1)/\text{Pr}_t B_q$ , on obtient :

$$A = -C_{u,vd} + \frac{\beta(\text{Pr})}{\text{Pr}_t} + \left( \frac{2.12}{\text{Pr}_t} - \frac{1}{\kappa} \right) \ln(100) \quad (5.19)$$

A peut être considérée à la fois comme une correction de l'ordonnée à l'origine et de la pente de la loi en température. Les ordres de grandeur des différents termes de  $A$  ont été calculés pour un nombre de Prandtl moléculaire et turbulent respectivement égaux à 0.76 et 0.9 (valeurs consignées dans le Tableau (5.1)). Très clairement, on voit que, pour ces nombres de Prandtl que l'on peut considérer comme « classiques », la valeur de  $A$  n'est pas négligeable devant celle de  $u^+$ , dont un ordre de grandeur est  $10^1$ .

$A$	$-C_{u,vd}$	$\beta(\text{Pr})/\text{Pr}_t$	$(2.12/\text{Pr}_t) \times \ln(100)$	$-(1/\kappa) \times \ln(100)$
-1.3632	-5.2	4.7972	10.8477	-11.8081

TAB. 5.1 – Evaluation des différents termes de  $A$

Le choix de la constante afin que la loi développée se dégrade en la corrélation de Kader en régime quasi-isotherme, et à  $y^+ = 100$  est arbitraire. Une autre possibilité aurait pu consister à minimiser l'écart entre la loi couplée et la corrélation de Kader entre  $y^+ = 100$  et 200. Mais la première idée sera retenue par souci de simplicité.

Le système composé des équations (5.10), (5.15) et (5.19) forme la loi de paroi couplée en vitesse / température, qui permet de prendre en compte les effets de dilatabilité dans la modélisation de la paroi. Dans le paragraphe suivant, nous présentons l'adaptation du calcul de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et de la dissipation  $\epsilon$  dans la première maille dans le cadre de l'utilisation de cette loi de paroi. En effet, la mise à jour de ces deux valeurs vues par le solveur Navier-Stokes utilisé avec un modèle de turbulence de type  $k - \epsilon$  est un point crucial pour la bonne prescription de la viscosité turbulente dans la première maille de paroi.

### 5.3.3 Calcul des grandeurs turbulentes pour le modèle de paroi couplé

Dans la zone inertielle, on sait que les effets visqueux sont négligeables devant les effets turbulents. En admettant qu'il existe une zone à frottement ( $\tau$ ) constant [5] dans toute la zone interne de la couche limite, il existe donc une relation entre le frottement à la paroi et les tensions de Reynolds :

$$-\overline{\rho u'' v''} = \rho_w U_\tau^2 \quad (5.20)$$

Dans le cas de l'utilisation d'un modèle de turbulence à deux équations de type  $k - \epsilon$ , il est nécessaire de connaître  $k$  et  $\epsilon$  au point de calcul de la loi de paroi, c'est-à-dire dans la première maille. En effet, ces deux valeurs conditionnent la valeur de la viscosité turbulente, laquelle intervient dans le terme diffusif des équations de Navier-Stokes pour la quantité de mouvement et la température. C'est ainsi que le calcul du flux de chaleur et du frottement à la paroi sont corrigés dans le but de mieux prendre en compte les phénomènes liés à la présence de la paroi.

Bradshaw a montré, au travers d'une expérience décrite en [5], que le frottement dans une couche limite pouvait être directement lié à l'énergie cinétique turbulente par :

$$0.3 \tilde{\rho} \tilde{k} \approx -\overline{\rho u'' v''}$$

La valeur de 0.3 étant en fait la valeur de  $C_\mu^{1/2}$ ,  $C_\mu = 0.09$  constante du modèle  $k - \epsilon$ . De ces relations, on peut déduire que :

$$\tilde{k} = \frac{\rho_w}{\tilde{\rho}} \frac{U_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (5.21)$$

L'équation (5.21) correspond donc à la formulation de l'énergie cinétique turbulente  $k$ . Le rapport de densité qui intervient dans cette expression permet immédiatement de s'assurer qu'en régime quasi-isotherme, la valeur de  $k$  reste inchangée.

En ce qui concerne la dissipation, elle peut être exprimée par l'équilibre entre production et dissipation (hypothèse d'équilibre donnant son nom aux lois de paroi du même genre que la loi de paroi standard) :

$$\tilde{\rho} \tilde{\epsilon} = -\overline{\rho u'' v''} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$$

Donc, après substitution du terme du tenseur de Reynolds par l'équation (5.20) :

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\rho_w}{\tilde{\rho}} U_\tau^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$$

On constate que la formule pour la dissipation va être sensiblement différente car l'expression du gradient de vitesse ne sera pas la même que pour la loi logarithmique classique. Calculons donc  $\partial U / \partial y$  en prenant la dérivée de l'équation (5.15) par rapport à  $y$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \frac{2}{\Delta T U_\tau} \left[ \sqrt{1 + \Delta T} - \sqrt{1 + \frac{A \Delta T}{\tilde{u}/U_\tau + A}} \right] \\ + \frac{2}{\Delta T} \left( \frac{\tilde{u}}{U_\tau} + A \right) \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{A \Delta T}{\tilde{u}/U_\tau + A} \right)^{-1/2} \frac{\Delta T A}{U_\tau} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \left( \frac{\tilde{u}}{U_\tau} + A \right)^{-2} \right] = \frac{1}{\kappa y} \end{aligned}$$

Des simplifications peuvent être effectuées et le terme  $\partial U/\partial y$  peut être factorisé, afin d'obtenir :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \left[ \frac{2\sqrt{1+\Delta T}}{\Delta T U_\tau} - \frac{2}{\Delta T U_\tau} \left( 1 + \frac{AU_\tau \Delta T}{\tilde{u} + AU_\tau} \right)^{1/2} + \frac{A}{\tilde{u} + AU_\tau} \left( 1 + \frac{AU_\tau \Delta T}{\tilde{u} + AU_\tau} \right)^{-1/2} \right] = \frac{1}{\kappa y}$$

Posons :

$$B = 1 + \frac{AU_\tau \Delta T}{\tilde{u} + AU_\tau}$$

Finalement, la dissipation revêt la forme suivante :

$$\bar{\epsilon} = \frac{\rho_w}{\bar{\rho}} U_\tau^2 \left[ \kappa y \left( \frac{2\sqrt{1+\Delta T}}{\Delta T U_\tau} - \frac{2}{\Delta T U_\tau} B^{1/2} + \frac{A}{\tilde{u} + AU_\tau} B^{-1/2} \right) \right]^{-1} \quad (5.22)$$

Notons que le rapport des densités intervenant dans les expressions de  $k$  et  $\epsilon$  (équations (5.21) et (5.22)) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\rho_w}{\bar{\rho}} = \frac{\tilde{T}}{T_w} = 1 + \Delta T$$

Très clairement, pour un faible gradient de température, l'expression de l'énergie cinétique turbulente devient la même que l'expression standard, comme vu précédemment. De même, on peut vérifier par un développement limité en  $\Delta T$  au voisinage de 0, que la nouvelle expression de la dissipation tend bien vers l'expression utilisée dans le cadre de la loi de paroi standard. En effet, le contenu entre parenthèse de l'équation (5.22) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \left( \right) &= \frac{2(1+\Delta T/2)}{\Delta T U_\tau} - \frac{2}{\Delta T U_\tau} \left( 1 + \frac{AU_\tau}{2(\tilde{u} + AU_\tau)} \Delta T \right) \dots \\ &\quad + \frac{A}{\tilde{u} + AU_\tau} \left( 1 - \frac{AU_\tau}{2(\tilde{u} + AU_\tau)} \Delta T \right) \\ &= \frac{1}{\Delta T} \left( \frac{2}{U_\tau} - \frac{2}{U_\tau} \right) + \left( \frac{1}{U_\tau} - \frac{A}{\tilde{u} + AU_\tau} + \frac{A}{\tilde{u} + AU_\tau} \right) + O(\Delta T) \\ &= \frac{1}{U_\tau} + O(\Delta T) \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression standard de la dissipation car pour  $\rho_w/\bar{\rho} \rightarrow 1$  :

$$\epsilon \rightarrow U_\tau^2 \left[ \frac{\kappa y}{U_\tau} \right]^{-1} = \frac{U_\tau^3}{\kappa y} \quad (5.23)$$

Les développements précédents constituent la loi de paroi créée dans le cadre de cette étude pour traiter des écoulements turbulents à densité variable. Cette loi a fait l'objet d'une validation sur différents cas tests et d'une comparaison avec la loi standard ; ces applications sont présentées au Chapitre 6.

Dans la section suivante, la problématique des écoulements à densité variable est posée dans le contexte des écoulements instationnaires. Une adaption d'un modèle de paroi dédié à la LES (le modèle TBLE) est proposée, afin d'améliorer l'évaluation du frottement et des flux thermiques dans un tel environnement.

## 5.4 Adaptation d'un modèle de paroi pour la LES : TBLE- $\rho$

Dans cette section, on se place dans le contexte de la simulation aux grandes échelles d'écoulements dilatables. Bien que la loi de paroi couplée qui a été décrite précédemment peut être employée dans ce contexte, l'hypothèse forte de stationnarité sur laquelle elle est basée limite de façon significative son utilisation. Dans le but de s'affranchir de cette hypothèse, on traite ici l'adaptation d'un modèle de paroi incluant un avancement en temps à un régime d'écoulement dilatable. Ce modèle, le TBLE (cf. Paragraphe 3.2.3), fait partie des modèles dits à approche zonale, contrairement aux modèles à l'équilibre.

Au Paragraphe 3.2.3, le modèle TBLE a été introduit dans sa version originelle, c'est-à-dire dédiée aux écoulements incompressibles. Dans un premier temps, une approche faiblement compressible (cf. Section 4.2) est utilisée pour réécrire le système d'équations du modèle. Si  $y$  représente la direction normale à la paroi, alors on a :

$$P_0 = \rho RT \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \rho U_k}{\partial t} = F_k + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial U_k}{\partial y} \right] \quad (5.25)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = F_{th} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (5.26)$$

Rappelons que l'indice  $k$  dénote les deux composantes de vitesse tangentielle ( $k = 1$  ou  $3$ ). Les termes sources pouvant être imposés sont groupés sous les grandeurs  $F_k$  pour la quantité de mouvement (par exemple le gradient de pression ou encore un terme lié aux effets de gravité) et  $F_{th}$  pour la température (par exemple une puissance volumique). La pression  $P_0$  intervenant dans la loi d'état est la pression thermodynamique, qui est supposée constante dans tout le domaine et *a fortiori* dans les cellules pariétales.

### 5.4.1 Considérations sur le modèle de turbulence du TBLE

Le modèle de turbulence, dont on a auparavant souligné l'importance puisque c'est cet élément qui conditionne le passage de la sous-couche visqueuse à la sous-couche turbulente, est toujours du type « longueur de mélange ».

L'utilisation d'un tel modèle a abouti (cf. Section 3.2.1) à la dérivation de la loi logarithmique standard, impliquant qu'une formulation classique de ce modèle de turbulence implique que la loi standard en vitesse et température est respectée (avec l'hypothèse supplémentaire de stationnarité). Or, dans un contexte d'écoulement à fluides dilatables, ce n'est plus le cas.

La prescription d'un modèle de turbulence justifié par rapport à ce contexte peut ainsi être envisagée. Les précédentes considérations au cours du développement de la loi de paroi couplée (cf. Section 5.3) restent vraies pour l'approche aux grandes échelles, avec la seule différence que l'on traite des grandeurs moyennées en temps.

Néanmoins, une possible adaptation du modèle de turbulence peut être établie à partir du fait que, si la loi logarithmique standard n'est plus respectée par la grandeur  $u^+$ , en revanche, elle est encore valable pour la grandeur transformée  $u_{vd}^+$ , équation (5.3).

Si l'on considère la relation (5.25) en l'absence de termes sources et d'avancement en temps, on peut écrire dans la zone logarithmique ( $\mu \ll \mu_t$ ) :

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_t \frac{du}{dy} \right) = 0 \quad (5.27)$$

L'intégration de cette équation aboutit à la loi standard. Si à ce stade, on impose la condition suivante :

$$u_{vd}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (5.28)$$

pour que la transformation de Van Driest soit vérifiée, alors cela revient à formuler l'équation (5.27) avec une formulation différente pour le modèle de viscosité turbulente, notée  $\mu_{ta}$ , telle que :

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_{ta} \frac{du_{vd}}{dy} \right) = 0 \quad (5.29)$$

Pour déterminer cette nouvelle formulation du modèle de longueur de mélange, on utilise l'équation (5.3), qui une fois différenciée, aboutit à :

$$du_{VD}^+ = \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \right)^{1/2} du^+ \quad (5.30)$$

Le passage aux variables dimensionnées donne l'expression suivante :

$$\frac{dU_{VD}}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta T}} \frac{dU}{dy} \quad (5.31)$$

Le gradient de vitesse modifiée peut ainsi être substitué dans la relation (5.29) pour finalement obtenir :

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_t \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta T}} \frac{dU}{dy} \right) = 0 \quad (5.32)$$

Finalement, l'équation (5.32) montre que le modèle de turbulence qui prend en compte les effets de densité au travers de la vérification de la transformation de Van Driest dans un contexte stationnaire et sans terme sources, peut se formuler sous la simple expression d'une viscosité turbulente classique, agrémentée d'un facteur multiplicatif :

$$\mu_{ta} = \left( \frac{T_w}{\tilde{T}} \right)^{1/2} \mu_t \quad (5.33)$$

Ce facteur, que l'on qualifiera de facteur anisotherme, est fonction du rapport de température entre la température de paroi d'une part, et la température locale au sein du maillage fin mono-dimensionnel du modèle, d'autre part.

## 5.4.2 Résolution numérique de TBLE- $\rho$

### Discrétisation des équations sur une grille 1D

Les critères de discrétisation du maillage TBLE en terme de nombre de noeuds et de taille de cellule ne sont pas stricts. Le maillage doit être assez résolu pour capter la sous-couche visqueuse

---

de la couche limite avec un nombre suffisant de points dans celle-ci. De plus, le maillage TBLE doit s'étendre de la paroi jusqu'au premier point de calcul LES, qui doit être a priori placé dans la zone logarithmique de la couche limite. Donc, il doit comporter un nombre minimum de points, qui dépend du type de maillage employé.

Le problème TBLE est tel que le maillage sur lequel il est résolu admet un seuil en terme de nombre de points, tel qu'un raffinement plus élevé n'apporte pas de précision supplémentaire dans les résultats. Ce seuil, de la même manière que le nombre de points minimal, dépend du type de maillage que l'on utilise.

Le type de maillage le plus adapté à la résolution du problème TBLE est de loin un maillage irrégulier, car cela permet, à un moindre coût, de placer un certain nombre de points dans la sous-couche visqueuse, ainsi que dans la sous-couche tampon.

On discrétise les équations (5.25) et (5.26) sur le maillage TBLE. Les inconnues  $U$ ,  $W$ ,  $T$  (repérées par l'indice  $i$ ) sont stockées aux noeuds du maillage  $y(i)$ , alors que la viscosité, la conductivité et les gradients sont calculés aux  $yc_i$  (la Figure 3.3 illustre ces notations sur le maillage TBLE). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^p U_i^{p+1} - \rho_i^n U_i^n}{\Delta t_{LES}} &= F_i + \dots \\ \dots + \frac{1}{yc_i - yc_{i-1}} &\left[ \mu_{tot,i} \frac{U_{i+1}^{p+1} - U_i^{p+1}}{y_{i+1} - y_i} - \mu_{tot,i-1} \frac{U_i^{p+1} - U_{i-1}^{p+1}}{y_i - y_{i-1}} \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^p W_i^{p+1} - \rho_i^n W_i^n}{\Delta t_{LES}} &= F_i + \dots \\ \dots + \frac{1}{yc_i - yc_{i-1}} &\left[ \mu_{tot,i} \frac{W_{i+1}^{p+1} - W_i^{p+1}}{y_{i+1} - y_i} - \mu_{tot,i-1} \frac{W_i^{p+1} - W_{i-1}^{p+1}}{y_i - y_{i-1}} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \rho_i^p c_p \frac{T_i^{p+1} - T_i^n}{\Delta t_{LES}} &= F_{th,i} + \dots \\ \dots + \frac{1}{yc_i - yc_{i-1}} &\left[ \lambda_{tot,i} \frac{T_{i+1}^{p+1} - T_i^{p+1}}{y_{i+1} - y_i} - \lambda_{tot,i-1} \frac{T_i^{p+1} - T_{i-1}^{p+1}}{y_i - y_{i-1}} \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

L'exposant  $p$  représente la sous-itération du problème TBLE, alors que  $n$  correspond à l'état précédent de la LES.

### Méthode de résolution des équations

La méthode de résolution est décrite ici uniquement pour  $U$ , mais elle est la même que pour  $W$  et  $T$ , seuls certains coefficients changent. On part donc de l'équation (5.34) et on souhaite obtenir  $U_i^{p+1} \forall i \in [2, N - 2]$  à partir des variables à l'itération  $p + 1$  et à l'instant  $n$ .

On pose :

$$d_i = \frac{1}{yc_i - yc_{i-1}} \quad b_i = \frac{\mu_{tot,i}}{y_{i+1} - y_i} \quad (5.37)$$

On réécrit l'équation (5.34) en :

$$\left[ \frac{\rho_i^p}{\Delta t_{LES}} + d_i(b_i + b_{i-1}) \right] U_i^{p+1} = F_i + \frac{\rho_i^n U_i^n}{\Delta t_{LES}} + d_i b_i U_{i+1}^{p+1} + d_i b_{i-1} U_{i-1}^{p+1} \quad (5.38)$$

La « matrice » à résoudre est tridiagonale. Pour simplifier la résolution et la rendre explicite (méthode directe), on souhaite se ramener à une équation de la forme :

$$C_{i+1}^{p+1} U_{i+1}^{p+1} = A_{i+1}^{p+1} + d_{i+1} b_i U_i^{p+1} \quad (5.39)$$

On remplace l'expression de  $U_{i+1}^{p+1}$  provenant de l'équation (5.39) dans l'équation (5.38) et on a :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\rho_i^p}{\Delta t_{LES}} + d_i(b_i + b_{i-1}) - \frac{d_i d_{i+1} b_i^2}{C_{i+1}^{p+1}} \right] U_i^{p+1} &= F_i + \dots \\ \dots + \frac{\rho_i^n U_i^n}{\Delta t_{LES}} + d_i b_i \frac{A_{i+1}^{p+1}}{C_{i+1}^{p+1}} + d_i b_{i-1} U_{i-1}^{p+1} & \end{aligned} \quad (5.40)$$

Ainsi, on obtient les expressions respectives de  $A_i^{p+1}$  et  $C_i^{p+1}$  :

$$A_i^{p+1} = F_i + \frac{\rho_i^n U_i^n}{\Delta t_{LES}} + d_i b_i \frac{A_{i+1}^{p+1}}{C_{i+1}^{p+1}} \quad (5.41)$$

$$C_i^{p+1} = \frac{\rho_i^p}{\Delta t_{LES}} + d_i(b_i + b_{i-1}) - \frac{d_i d_{i+1} b_i^2}{C_{i+1}^{p+1}} \quad (5.42)$$

Cette discrétisation est valable pour les noeuds allant de 2 à  $N - 2$ . Les points 1 et  $N - 1$  constituent les conditions aux limites du problème TBLE.

Ainsi pour tous les noeuds, on est en mesure de calculer  $U_i^{p+1}$ ,  $W_i^{p+1}$ ,  $T_i^{p+1}$  et  $\rho_i^{p+1}$  grâce aux coefficients  $A_i^{p+1}$ ,  $C_i^{p+1}$ ,  $A_{th,i}^{p+1}$  et  $C_{th,i}^{p+1}$ , en balayant les points du maillage TBLE dans l'ordre décroissant pour l'indice  $i$ .

### Conditions aux limites

- En  $N - 1$  : L'équation (5.38) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\rho_{N-1}^p}{\Delta t_{LES}} + d_{N-1}(b_{N-1} + b_{N-2}) \right] U_{N-1}^{p+1} &= F_{N-1} + \dots \\ \dots + \frac{\rho_{N-1}^n U_{N-1}^n}{\Delta t_{LES}} + d_{N-1} b_{N-1} U_N^{p+1} + d_{N-1} b_{N-2} U_{N-2}^{p+1} & \end{aligned}$$

Pour le traitement de cette condition limite, il est donc uniquement nécessaire de prendre les coefficients  $A_{N-1}^{p+1}$  et  $C_{N-1}^{p+1}$  suivants :

$$A_{N-1}^{p+1} = F_{N-1} + \frac{\rho_{N-1}^n U_{N-1}^n}{\Delta t_{LES}} + d_{N-1} b_{N-1} U_N^{p+1}$$

$$C_{N-1}^{p+1} = \frac{\rho_{N-1}^p}{\Delta t_{LES}} + d_{N-1}(b_{N-1} + b_{N-2})$$

• En 1 : Ici, on n'a aucun problème à appliquer l'équation (5.38). En effet, l'introduction d'un noeud « fictif » permet d'écrire que le gradient de  $U$  à la paroi vaut  $(U_2 - U_1)/(y_2 - y_1)$ , ou encore  $U_2/(y_2 - y_1)$  si la paroi n'est pas défilante. Ainsi, les coefficients  $A_1^{p+1}$  et  $C_1^{p+1}$  obéissent aux relations (5.41) et (5.42).

Pour la détermination d'une variable  $U$ , on adopte la résolution suivante :

$$\begin{aligned} (A_{N-1}^{p+1}, C_{N-1}^{p+1}) &\rightarrow (A_i^{p+1}, C_i^{p+1}) \quad \forall i \in [2, N-2] \\ &\rightarrow U_i^{p+1} \quad \forall i \in [2, N-1] \end{aligned}$$

### Pour les autres équations

En ce qui concerne les autres inconnues, on adopte la même procédure. Seuls les coefficients  $A$  et  $C$  pour la température changent : on les nomme  $A_{th}$  et  $C_{th}$ . Après calculs, on trouve que :

$$A_{th,i}^{p+1} = F_{th,i} + \frac{\rho_i^p c_p T_i^n}{\Delta t_{LES}} + d_i b_{th,i} \frac{A_{th,i+1}^{p+1}}{C_{th,i+1}^{p+1}} \quad (5.43)$$

$$C_{th,i}^{p+1} = \frac{\rho_i^p c_p}{\Delta t_{LES}} + d_i (b_{th,i} + b_{th,i-1}) - \frac{d_i d_{i+1} b_{th,i}^2}{C_{th,i+1}^{p+1}} \quad (5.44)$$

Comme pour la vitesse, la condition limite au point 1 ne nécessite aucun traitement particulier ; en revanche, en  $N - 1$ , les coefficients adéquats sont :

$$\begin{aligned} A_{th,N-1}^{p+1} &= F_{th,N-1} + \frac{\rho_{N-1}^p c_p T_{N-1}^n}{\Delta t_{LES}} + d_{N-1} b_{th,N-1} T_{N+1}^{p+1} \\ C_{th,N-1}^{p+1} &= \frac{\rho_{N-1}^p c_p}{\Delta t_{LES}} + d_{N-1} (b_{th,N-1} + b_{th,N-2}) \end{aligned}$$

Une fois la température à la sous-itération  $p + 1$  connue, on en déduit la masse volumique, par une simple inversion, en tout noeud du maillage, de la loi d'état (5.24).

### Schéma récapitulatif : résolution du modèle TBLE

Le passage d'un instant  $n$  à un instant  $n + 1$  du solveur LES est représenté sur la Figure 5.3. Le critère d'arrêt mentionné est basé sur la convergence des variables elles-mêmes, mais aussi des quantités  $\tau_w$  et  $q_w$ , frottement et flux à la paroi.

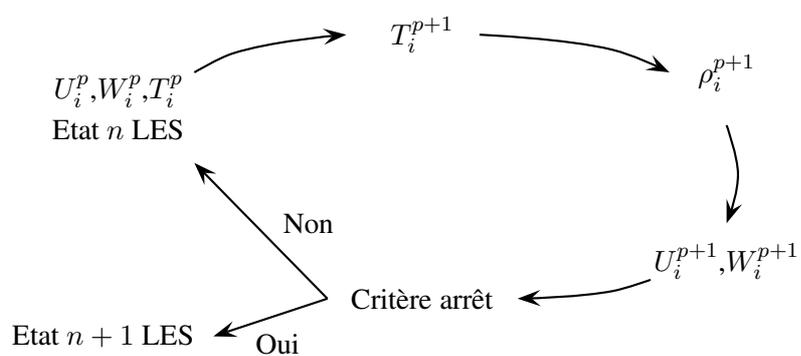


FIG. 5.3 – Schéma récapitulatif de l'algorithme de résolution de TBLE- $\rho$



## Chapitre 6

# Mise en œuvre des modèles de paroi couplé et TBLE- $\rho$

Une série de cas tests sont abordés au cours de ce chapitre. Avant d'aborder les cas tests représentatifs de l'industrie nucléaire, une étude générale sur le comportement des modèles de paroi développés précédemment est proposée.

### 6.1 Etude préliminaire sur les modèles de paroi développés

L'application de deux modèles de paroi développés précédemment (loi de paroi couplée CWM et TBLE- $\rho$ ) à un ensemble représentatif de couples  $(\tilde{u}, \tilde{T})$  est effectuée ici, et les résultats sont comparés à ceux obtenus par la loi de paroi standard SWM et la version incompressible de TBLE. Les propriétés physiques et les constantes utilisées pour ce test sont présentées dans le Tableau 6.1. Notons que ce test a été réalisé à l'aide du logiciel Matlab, et n'est donc pas couplé à l'utilisation d'un solveur de Navier-Stokes. Cela revient à étudier la réponse de chaque modèle à un point de fonctionnement donné. La prise en compte d'un éventail de valeurs de vitesse et de température extérieures permet d'appréhender des cas allant du régime quasi-isotherme vers le régime fortement non-isotherme. Les valeurs de  $y^+$  ont été *a posteriori* vérifiées et sont dans la zone logarithmique ( $50 < y^+ < 300$ ).

constante	valeur choisie
$\rho_w$	$1.17 \text{ kg/m}^3$
$\nu_w$	$10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
$T_w$	$300 \text{ K}$
$\text{Pr}_t$	$0.85$
$C_p$	$1006 \text{ J/kgK}$
$y$	$5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Intervalle de $\tilde{u}$	$[15; 60]$
Intervalle de $\tilde{T}$	$[300; 375]$

TAB. 6.1 – Propriétés physiques employées pour l'étude sur le comportement global des modèles de paroi développés

### 6.1.1 Comportement global

Les courbes de la Figure 6.1 représentent le flux de chaleur et le frottement pariétaux en fonction de  $\tilde{u}$  pour deux lois de paroi et avec comme paramètre le gradient de température. Dans la colonne de gauche, on souhaite mettre en évidence les différences de comportement entre d'une part le modèle de paroi standard, noté par « SWM », et le modèle de paroi dérivé au chapitre précédent, dénoté « CWM » pour modèle de paroi couplé. La colonne de droite est équivalente, à part qu'elle compare la version originelle du modèle TBLE, d'une part, et l'adaptation qui en a été faite au chapitre précédent dénoté par TBLE- $\rho$ . Elles donnent une vue d'ensemble des grandeurs en sortie des lois de paroi, pour les gammes de vitesse et température considérés.

Les remarques suivantes peuvent être formulées à l'examen de ces graphes concernant les modèles SWM et couplé :

- Les deux lois suivent la même tendance en fonction de la vitesse que l'on donne en entrée de la loi de paroi (une augmentation de la vitesse a pour conséquence une augmentation du frottement).
- Pour un couple  $(\tilde{u}, \tilde{T})$  donné, la loi de paroi standard donne des valeurs de flux pariétaux plus élevées, en valeur absolue, que celles données par la loi couplée. Il en est de même pour les valeurs du frottement pariétal : elles sont légèrement supérieures en sortie de la loi de paroi standard.
- L'écart absolu entre les deux lois est d'autant plus grand que  $\tilde{u}$  et  $\Delta T$  augmentent. On peut rappeler ici que  $\Delta T$  est défini comme une différence de température entre le point extérieur (fluide) et la paroi adimensionnée par cette dernière (cf. équation (5.5)).
- Par définition, à  $\tilde{u} = cte$ , la loi de paroi standard donne un frottement pariétal constant quelque soit  $\tilde{T}$ , alors que pour le modèle couplé, celui-ci varie, conséquence du couplage entre  $T_\tau$  et  $U_\tau$ . Ceci est visible sur la Figure 6.1 (en haut à gauche).
- Pour des gradients de température de plus en plus forts, la loi de paroi standard donne des valeurs de flux de chaleur pariétal bien plus élevées que la loi couplée. Ainsi, le comportement à  $\Delta T$  élevé des deux modèles est sensiblement différent (cf. Figure 6.1 en bas à gauche).

On observe un comportement très proche pour les deux versions du modèle TBLE (cf. Figure 6.1, colonne de droite). Toutes les remarques précédentes restent valables, si ce n'est que le frottement donné par la version incompressible du modèle TBLE varie légèrement lorsque le gradient de température qui est imposé augmente (en haut à droite), contrairement à la loi de paroi standard SWM (en haut à gauche).

### 6.1.2 Comportement en $\Delta T$ faible

Il est essentiel de connaître le comportement des lois de paroi étudiées dans le cas quasi-isotherme afin de vérifier que l'on tend bien vers la solution que donnent les modèles développés avec une approche incompressible. Pour cela, nous allons voir les conséquences d'un faible gradient de température dans l'écriture des équations qui constituent les modèles développés pour prendre en compte les effets de densité.

En faisant tendre  $\Delta T$  vers 0, on montre, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 en  $\Delta T$ , que le modèle de paroi couplé tend vers le modèle de paroi standard en ce qui concerne la vitesse.

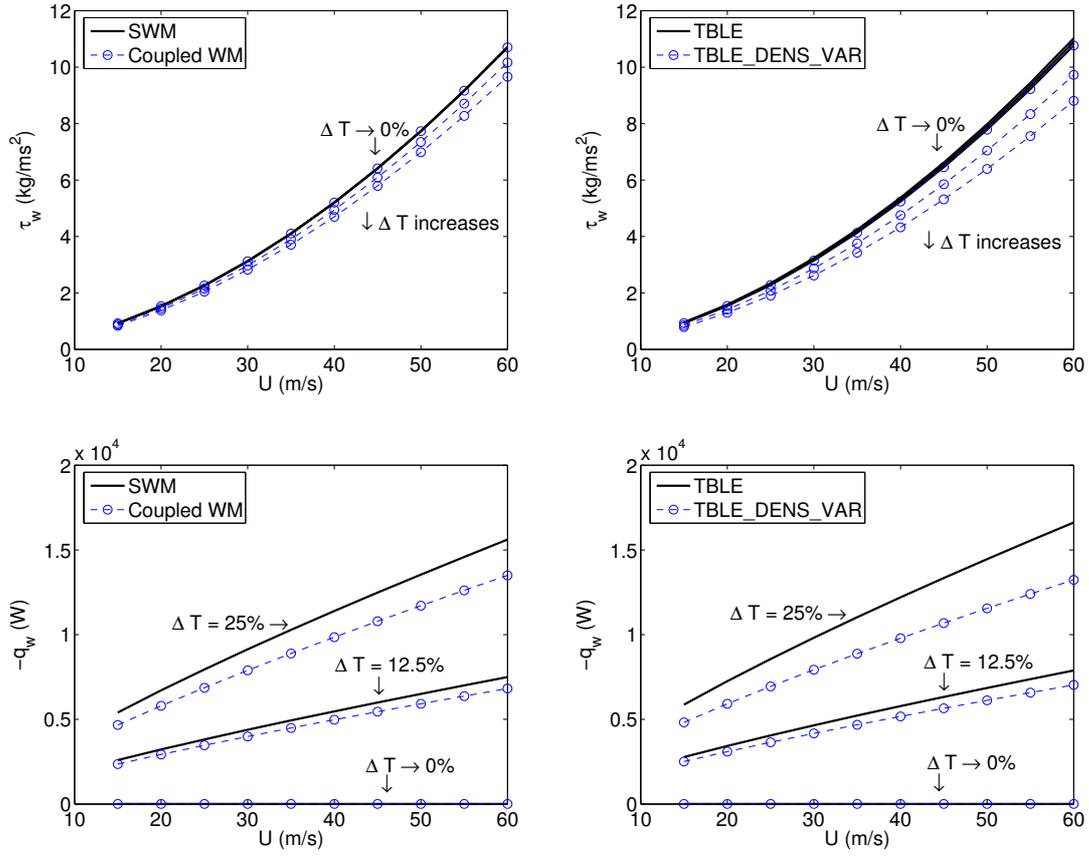


FIG. 6.1 – Frottement et flux de chaleur en sortie des modèles de paroi ; Gauche : Comparaison entre SWM et Loi couplée. Droite : Comparaison entre TBLE et TBLE- $\rho$

En effet, on a :

$$\frac{\tilde{u}}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{yU_\tau}{\nu_w} \right) + C_{u,vd} \quad (6.1)$$

En d'autres termes, la loi couplée garantit un comportement similaire à la loi logarithmique classique pour de faibles gradients de température. Cela explique que sur les courbes des Figures 6.1, plus le gradient de température est faible, plus l'évaluation de  $q_w$  et  $\tau_w$  faite par les deux lois est proche (rapprochement des courbes).

Il en est de même pour le modèle TBLE, dont la version dilatable redonne la version incompressible, lorsque le rapport des densités intervenant dans le modèle de turbulence, équation (5.33), tend vers l'unité.

### 6.1.3 Conclusions sur cette étude préliminaire

- Pour l'éventail des couples  $(\tilde{u}, \tilde{T})$  balayés, les deux modèles de paroi SWM et TBLE d'une part, et leur pendant développés pour les écoulements dilatables d'autre part, donnent des frottements et flux pariétaux qui varient fortement. L'écart est d'autant plus grand que le gradient de température imposé est important.

- Le comportement en  $\Delta T$  faible est tel que l'on retrouve le même cas limite :  $q_w \rightarrow 0$ ,  $\tau_w$  fini et fonction de  $\tilde{u}$ , quelque soit le modèle de paroi.
- La loi couplée se rapproche du modèle standard pour des gradients de température faible. Il en est de même pour TBLE- $\rho$  avec TBLE.

## 6.2 Etude de canal plan turbulent aux propriétés physiques variables

Dans cette section, nous utilisons une nouvelle fois les résultats des simulations numériques directes de Nicoud [39, 42] en régime non-isotherme. La description de ces calculs a été faite précédemment (cf. Section 4.3). Un rappel des trois cas investigués, l'un quasi-isotherme (issu des DNS de Kawamura *et al.* [32]), les deux autres non-isothermes, est fourni dans le Tableau 6.2.

Dans un premier temps, nous allons décrire et analyser les résultats en sortie de la loi de paroi couplée dédiée au traitement des écoulements non-isothermes (cf. Chapitre 5). Ces résultats sont comparés d'une part avec le modèle de paroi standard (Section 3.2.1), et d'autre part avec le modèle TBLE dans sa version incompressible (Section 3.2.3).

Case	Configuration	$Re_\tau = \frac{U_\tau h}{\nu_w}$	Reference data
1	$T_c = 1.005T_1$	180	Kawamura <i>et al.</i> [32]
2	$T_2 = 2T_1$	195	Nicoud <i>et al.</i> [39, 42]
3	$T_2 = 4T_1$	212	Nicoud <i>et al.</i> [39, 42]

TAB. 6.2 – Les 3 cas de simulation numérique directe utilisés

Les figures 6.2, 6.3 et 6.4 décrivent les valeurs de  $U_\tau$  et  $T_\tau$  obtenues grâce aux trois modèles mis en œuvre sur les trois cas de DNS (Table 6.2). Les courbes sont établies en fonction de  $y^+$  qui représente la distance à la paroi adimensionnée du point de calcul des modèles de paroi (1<sup>ère</sup> cellule de calcul d'un maillage grossier), et les valeurs en ordonnées sont adimensionnées par les valeurs de  $U_\tau$  et  $T_\tau$  issues de la DNS.

Le cas quasi-isotherme, traité sur la Figure 6.2, montre un léger écart entre le modèle TBLE et les lois à l'équilibre. Cette différence est expliquable par le fait que les constantes du modèle de paroi ont été modifiées pour respecter leur variation qui a été démontrée dans les écoulements à très faible nombre de Reynolds. Ici, le nombre de Reynolds de frottement (180) est extrêmement faible ; s'il était plus élevé, le modèle TBLE et les lois à l'équilibre donneraient des résultats quasi-identiques dans la zone turbulente.

Malgré cela, les valeurs obtenues sont proches de la DNS, que ce soit pour le frottement où le flux de chaleur. L'écart maximal est d'environ 5% sur  $U_\tau$  et 10% sur  $T_\tau$ . Comme lors de l'analyse de la Section 4.3, la robustesse de la loi couplée est plutôt satisfaisante et est assurée par la forme en plateau des courbes en fonction de l'ordonnée adimensionnée  $y^+$ . En effet, cela démontre que les valeurs en sortie du modèle de paroi sont quasiment constante au-delà d'un certain  $y^+$  (environ 60). En terme de modélisation de paroi dans un calcul à maillage grossier, cela signifie que la taille de maille à la paroi pourra varier significativement, sans pour autant affecter le résultat.

Sur les deux cas suivants, Figures 6.3 and 6.4, on constate que les effets de dilatabilité impactent considérablement les résultats en sortie des trois modèles de paroi. Les deux modèles déjà existant

(SWM et TBLE incompressible) sont mis en défaut, comme démontré au cours de la Section 4.3. Hormis l'inflexion des courbes de flux due à la configuration asymétrique de la distribution de température, les résultats obtenus grâce à la loi couplée sont nettement meilleurs, aboutissant à une faible erreur par rapport à la DNS. Par ailleurs, cet écart reste faible, ce qui signifie que les effets de densité sont en quelque sorte compensés par la loi anisotherme.

L'utilisation de la loi couplée apporte une amélioration dans le cadre de la modélisation de paroi pour les écoulements à densité variable. Le flux de chaleur est bien représenté, sans pour autant dégrader les valeurs de frottement. La robustesse paraît satisfaisante, même si la présence du point d'inflexion sur la température ne permet pas d'en juger de façon quantitative.

Nous souhaitons à présent qualifier l'apport de la version dilatable du modèle TBLE par rapport à son pendant incompressible. Les mêmes courbes que précédemment sont présentées sur les Figures 6.5, 6.6 et 6.7 correspondant respectivement aux cas quasi-isotherme et aux deux cas non-isothermes.

Le cas quasi-isotherme permet de vérifier que le TBLE- $\rho$  a bien le comportement asymptotique attendu lorsque le gradient de température tend à être nul. En effet, les résultats de TBLE et TBLE- $\rho$  sont identiques pour ce cas. De ces courbes, on peut aussi déduire deux avantages majeurs :

- Comme précédemment pour la loi couplée, l'existence d'un plateau sur les courbes de flux et frottement en fonction de  $y^+$  confèrent au TBLE une robustesse quant au placement de la première cellule de paroi d'un maillage grossier dans un calcul Navier-Stokes.
- La qualité des résultats pour des  $y^+$  très faibles impliquant une localisation dans la sous-couche visqueuse voire tampon, est nettement supérieure que pour l'emploi d'une loi de paroi à l'équilibre. En effet, la prise en compte par le maillage TBLE de l'ensemble de la distribution de vitesse et température au travers de toute la zone interne de la couche limite permet garantir un comportement en  $y^+$  faible cohérent (à l'opposé des lois de paroi à l'équilibre, qui nécessiteraient de considérer deux voire trois couches distinctes pour aboutir au même résultat).

En ce qui concerne les deux cas non-isothermes, le modèle TBLE- $\rho$  présente des résultats plus proches de la DNS que la version incompressible originelle. En effet, l'écart sur le frottement et le flux de chaleur restent dans une marge de quelques 5% que l'on peut qualifier de satisfaisante. Comme avec la loi couplée, cet écart n'augmente pas lorsque l'on augmente la différence de température. Au contraire, l'écart entre TBLE incompressible et la DNS a tendance à augmenter avec le gradient de température, pour atteindre, sur ces cas par exemple, des différences de l'ordre de 20%. Cette prise en compte des effets de densité est réalisée grâce à l'adaptation du modèle de turbulence de TBLE- $\rho$ , aux fluides dilatables.

Au travers de ces trois cas, on a pu d'une part valider que l'adaptation de TBLE à TBLE- $\rho$  respecte bien le comportement asymptotique souhaité initialement (TBLE- $\rho$  tend bien à donner les mêmes résultats que TBLE en régime quasi-isotherme). De plus, les apports de la loi couplée et de TBLE- $\rho$  mis en œuvre sur les cas non-isothermes sont indiscutables. Les résultats issus de ces deux modèles sont significativement plus proches de la DNS, comparé aux modèles SWM et TBLE incompressible.

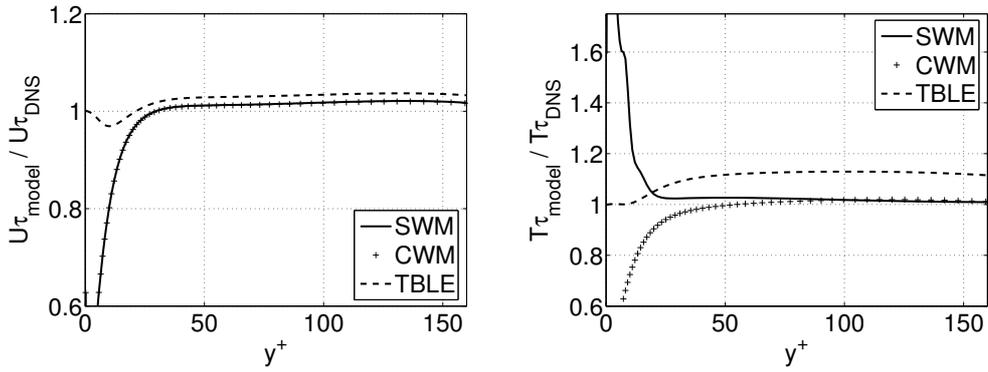


FIG. 6.2 – Vitesse de frottement  $U_{\tau}$  (gauche) et température de frottement  $T_{\tau}$  (droite) pour SWM, CWM et TBLE, adimensionnés par les valeurs DNS. Cas 1

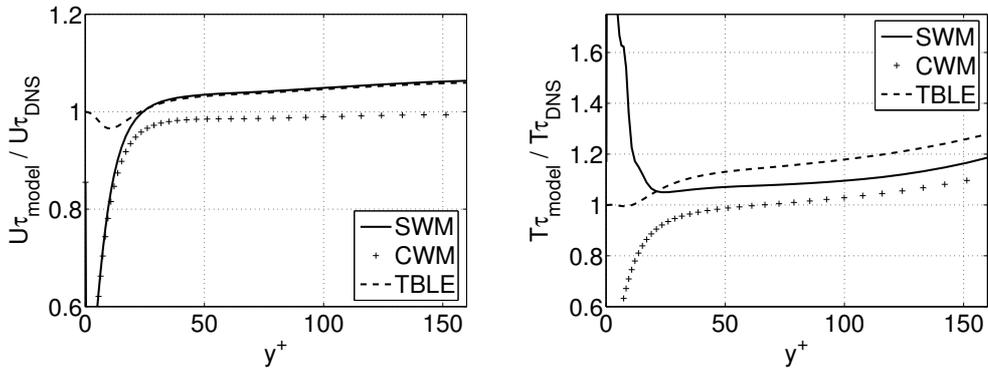


FIG. 6.3 – Vitesse de frottement  $U_{\tau}$  (gauche) et température de frottement  $T_{\tau}$  (droite) pour SWM, CWM et TBLE, adimensionnés par les valeurs DNS. Cas 2

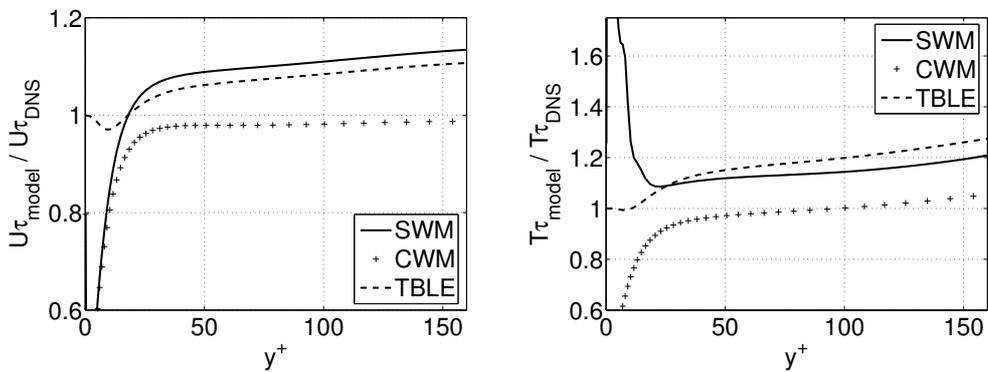


FIG. 6.4 – Vitesse de frottement  $U_{\tau}$  (gauche) et température de frottement  $T_{\tau}$  (droite) pour SWM, CWM et TBLE, adimensionnés par les valeurs DNS. Cas 3

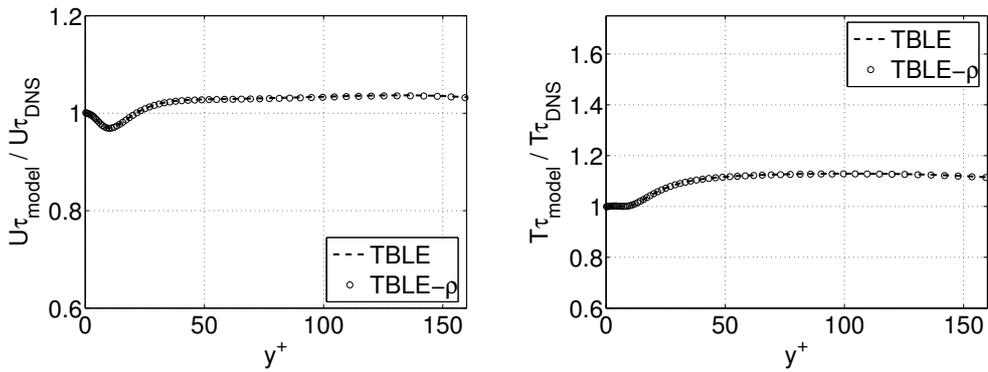


FIG. 6.5 – Vitesse de frottement  $U_{\tau}$  (gauche) et température de frottement  $T_{\tau}$  (droite) pour TBLE et TBLE- $\rho$ , adimensionnés par les valeurs DNS. Cas 1

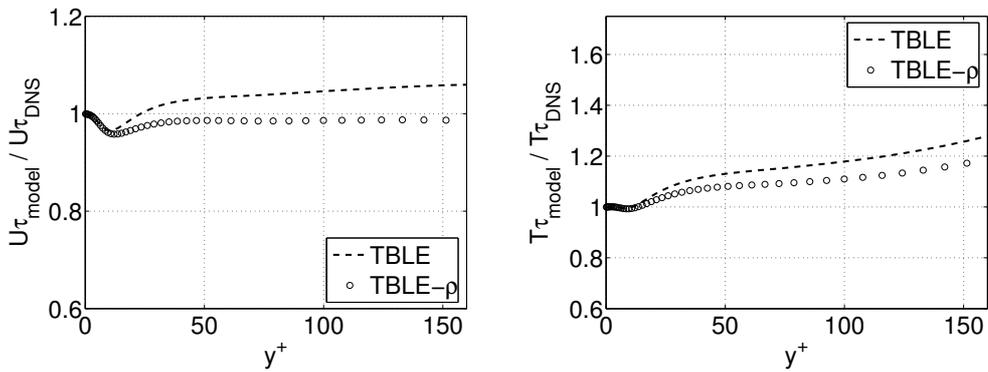


FIG. 6.6 – Vitesse de frottement  $U_{\tau}$  (gauche) et température de frottement  $T_{\tau}$  (droite) pour TBLE et TBLE- $\rho$ , adimensionnés par les valeurs DNS. Cas 2

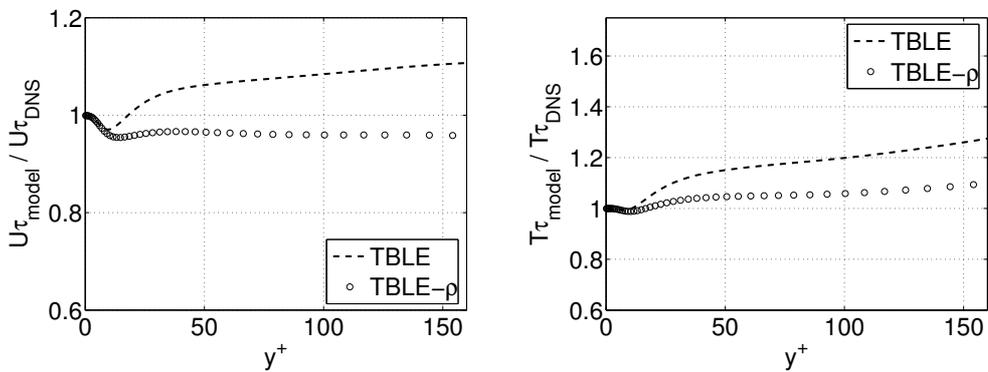


FIG. 6.7 – Vitesse de frottement  $U_{\tau}$  (gauche) et température de frottement  $T_{\tau}$  (droite) pour TBLE et TBLE- $\rho$ , adimensionnés par les valeurs DNS. Cas 3

### 6.3 Le code de calcul Trio\_U

Les calculs présentés dans les deux sections suivantes ont été réalisés à l'aide du code de calcul Trio\_U. Ce code développé au sein du Service de Simulation Thermo-Hydraulique du CEA Grenoble est dédiée à la simulation d'écoulements de l'industrie nucléaire. Il a été conçu en C++ [9] et utilise une approche de type volumes finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes filtrées ou moyennées sur des maillages structurés ou non-structurés. A l'origine, les équations résolues sont celles d'un fluide incompressible, mais un module du code permet le traitement des fluides dilatables (approche Quasi-Compressible) et résout donc les équations énoncées en Section 4.2.

Deux approches de la simulation de la turbulence sont envisageables : la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées ou filtrées, permettant dans un cas de réaliser des simulations RANS, et dans l'autre des simulations aux grandes échelles (LES).

#### 6.3.1 Avancement en temps

Pour les simulations moyennées, l'avancement temporel revient juste à assurer la convergence vers un état stable. L'utilisation de schémas implicites (tels que Crank-Nicholson) est généralement privilégiée, afin de s'affranchir de la restriction sur le pas de temps. Néanmoins pour des soucis de simplicité de programmation et de robustesse, les schémas explicites sont aussi employés pour cette approche.

Dans le code Trio\_U, deux méthodes numériques d'avancement en temps sont disponibles : le schéma Euler explicite, d'ordre 1, et le schéma Runge Kutta à trois étapes, d'ordre 3. Pour réaliser des simulations aux grandes échelles, il est conseillé d'utiliser un schéma temporel assez précis et robuste, ce qui tend à opter pour le schéma de Runge-Kutta. En revanche, pour des simulations RANS, la précision du schéma temporel mis en œuvre n'a pas d'importance puisque l'on cherche à atteindre une solution stable. L'équation que l'on souhaite discrétiser temporellement est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) \quad (6.2)$$

où  $f(u)$  désigne le résidu en fonction des variables conservatives. La discrétisation de l'équation (6.2) par le schéma d'Euler est très basiquement l'avancement entre l'instant courant  $n$  et le suivant  $n + 1$ , selon :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^n)$$

Pour ce qui est du schéma Runge-Kutta à trois étapes, l'avancement entre l'état  $n$  et  $n + 1$  se décompose en trois étapes :

$$\begin{aligned} u^* &= u^n + b_1 \Delta t f(u^n) \\ u^{**} &= u^* + b_2 \Delta t [f(u^*) + a_1 f(u^n)] \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t \left[ \frac{1}{6} f(u^n) + \frac{3}{10} f(u^*) + \frac{8}{15} f(u^{**}) \right] \end{aligned}$$

avec  $b_1 = 1/3$ ,  $b_2 = 15/16$  et  $a_1 = -5/9$ .

### 6.3.2 Schémas de discrétisation spatiale pour la convection

La discrétisation spatiale pour l'approche structurée, qui sera la seule utilisée dans les simulations, se fait sur une grille décalée (staggered grid), où la vitesse est donnée aux centres des faces, et la température et la pression sont stockées aux centres des cellules (cf. Figure 6.8).

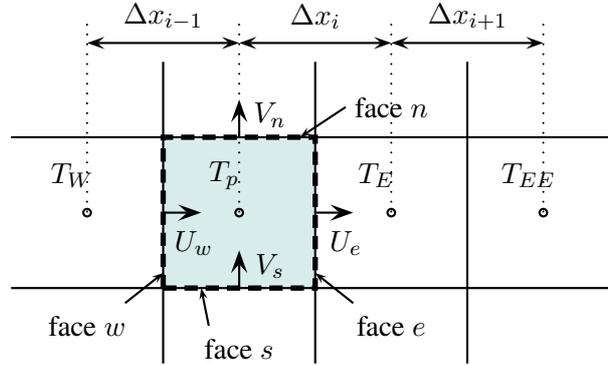


FIG. 6.8 – Discrétisation spatiale sur un maillage structuré

Deux schémas sont généralement utilisés avec Trio\_U pour la discrétisation spatiale des termes de convection : le schéma centré d'ordre 4 et le schéma Quick décentré d'ordre 3. Afin de déterminer l'intégrale du terme convectif des équations sur le volume de contrôle d'une cellule (colorée sur la Figure 6.8), il est nécessaire d'évaluer certaines grandeurs aux faces (dénotées par les lettres  $n$ ,  $s$ ,  $e$  et  $w$ ).

Avec le schéma Quick (acronyme pour Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinetics), cette évaluation se fait par une interpolation sur trois points, deux points amont et un point aval. Si on prend, par exemple, le calcul de la température sur la face  $e$ , on a :

$$T_e = \frac{1}{2}(T_P + T_E) - \frac{1}{8}\Delta x_i^2 \text{curv} \quad (6.3)$$

où  $\text{curv}$  est un terme tel que :

$$\text{curv} = \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \left( \frac{T_E - T_P}{\Delta x_i} + \frac{T_P - T_W}{\Delta x_{i-1}} \right) \quad U_e \cdot n_e > 0 \quad (6.4)$$

$$= \frac{1}{\Delta x_i} \left( \frac{T_{EE} - T_E}{\Delta x_{i+1}} + \frac{T_E - T_P}{\Delta x_i} \right) \quad U_e \cdot n_e < 0 \quad (6.5)$$

La formulation du schéma centré d'ordre 4 est telle que la température à la face  $e$  est évaluée par :

$$T_e = g_1 T_W + g_2 T_P + g_3 T_E + g_4 T_{EE} \quad (6.6)$$

où les 4 coefficients sont définis par :

$$g_1 = \frac{-\Delta x_i^2 \left( \frac{\Delta x_i}{2} + \Delta x_{i+1} \right)}{4(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + \Delta x_{i+1})(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})\Delta x_{i-1}} \quad (6.7)$$

$$g_2 = \frac{(\Delta x_i + 2\Delta x_{i+1})(\Delta x_i + 2\Delta x_{i-1})}{8(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})\Delta x_{i-1}} \quad (6.8)$$

$$g_3 = \frac{(\Delta x_i + 2\Delta x_{i+1})(\Delta x_i + 2\Delta x_{i-1})}{8(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})\Delta x_{i+1}} \quad (6.9)$$

$$g_4 = \frac{-\Delta x_i^2 \left( \frac{\Delta x_i}{2} + \Delta x_{i-1} \right)}{4(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + \Delta x_{i+1})(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})\Delta x_{i+1}} \quad (6.10)$$

Pour la simulation RANS, il est plutôt recommandé d'utiliser ce schéma (Quick), car les schémas décentrés étant par nature plus dissipatifs que les schémas centrés, ils permettent d'atténuer les oscillations à haute fréquence et facilitent l'obtention d'une solution stationnaire et convergée.

En ce qui concerne les simulations aux grandes échelles, la pratique la plus courante est d'utiliser des schémas centrés d'ordre élevés, afin de restituer le plus fidèlement possibles les variations spatiales des champs discrétisés. Néanmoins, une étude sur les performances de différents schémas de convection pour un scalaire a été réalisée [12] et tend à montrer le bon comportement du schéma décentré d'ordre 3 avec limiteur de pente de type FRAM, en comparaison avec le schéma centré d'ordre 2 ou 4, dans ce cadre-là.

### 6.3.3 Algorithme de résolution en Quasi-compressible

Un algorithme de résolution adapté aux simulations à faibles nombres de Mach est utilisé.

1. On résout l'équation de la température afin de déterminer en chaque cellule la température au pas  $n + 1$  :  $T^{n+1}$
2. On recalcule les propriétés du fluide au pas  $n + 1$  : la viscosité  $\mu^{n+1}$  et la conductivité thermique  $\lambda^{n+1}$
3. La pression thermodynamique  $P_0^{n+1}$  est ensuite évaluée, par une des trois possibilités évoquées dans le paragraphe 4.2 :
  - par le choix  $P_0 = cte$
  - par conservation de la masse
  - par conservation de l'énergie globale
4. La masse volumique  $\rho^{n+1}$  peut être évaluée grâce à l'équation d'état du fluide
5. Une vitesse intermédiaire  $\bar{u}^n$  est calculée par l'équation de la quantité de mouvement, sans gradient de pression
6. Le champ  $P_1^{n+1}$  est calculé par une équation de Poisson, dont la résolution est assurée soit par méthode directe avec une factorisation de type Cholesky, soit par méthode itérative de type Gradient-Conjugué avec préconditionnement SSOR
7. Enfin, on peut calculer le champ de vitesse  $u^{n+1}$  en fonction de  $P_1^{n+1}$  et  $\bar{u}^n$

## 6.4 Comparaison entre résultats de simulation moyennées et corrélations

Un autre point de validation consiste à s'assurer que les résultats numériques vérifient bien les corrélations sur le coefficient de frottement  $C_f$  et le nombre de Nusselt  $Nu$ , qui ont été introduites au Paragraphe 3.1. Rappelons ici l'existence de corrélations pour les cas quasi-isothermes et ceux fortement non-isothermes.

### 6.4.1 En régime quasi-isotherme

La dépendance au nombre de Reynolds des coefficients de frottement et d'échange globaux est testée par le biais de calculs simples à cinq valeurs différentes du nombre de Reynolds, pour un faible différentiel de température. On peut ensuite déduire les  $C_f$  et  $Nu$  des simulations, et les comparer aux valeurs correspondantes données par les corrélations (Eqs. (3.3) et (3.7)).

Les calculs sont des simulations moyennées et ont été effectuées à l'aide du code Trio\_U précédemment décrit. Les maillages utilisés sont structurés. Le nombre de mailles dans la hauteur du canal  $N_y$  est adapté au nombre de Reynolds de l'écoulement, afin d'avoir un centre de cellule pariétale autour de  $y^+ \approx 100$ , et varie entre  $26 < N_y < 62$ . L'intégration temporelle se fait par le schéma Euler explicite, et la discrétisation spatiale est obtenue par le schéma Quick, aussi bien pour la vitesse que pour la température. Le modèle de turbulence est le modèle  $k - \epsilon$ . Enfin, le traitement pour la pression thermodynamique est  $P_0 = cte$ .

La configuration retenue pour réaliser ce test est un écoulement de canal plan turbulent constitué de deux parois isothermes à  $T_w = 300K$  et chauffé par un dégagement de chaleur constant sur tout le domaine, afin d'assurer un gradient de température faible entre les parois et le centre du canal. Celui-ci est de l'ordre de  $5K$ , la température moyenne assurée par le terme source étant située autour de  $305K$ .

Les résultats sont présentés sur les courbes de la Figure 6.9. L'accord entre les résultats numériques et les corrélations quasi-isothermes est satisfaisant. Une nouvelle fois, ces cas permettent de s'assurer du bon comportement de la loi couplée dans les cas de faible gradient de température. En effet, celle-ci aboutit aux mêmes résultats que le modèle de paroi standard, indépendamment du nombre de Reynolds. L'accord est cependant moins bon sur le nombre de Nusselt. Ceci étant, les valeurs de  $Nu$  sont plus difficiles à évaluer et il existe de nombreuses corrélations dans la littérature [27], ce qui prouve le manque d'accord qu'il peut exister autour de cette quantité.

Une simulation aux grandes échelles dans la même configuration de canal plan turbulent a été réalisée afin de tester le modèle TBLE- $\rho$ . Le nombre de Reynolds correspond au cas de Kravchenko *et al.*. Ce calcul a été réalisé à l'aide du code de calcul Trio\_U également, mais sur un maillage  $32^3$ . Le modèle de turbulence utilisé pour ce cas est le modèle à fonction de structure sélective (cf. Section 1.4). Le point correspondant à ce calcul a été ajouté sur les courbes de la Figure 6.9. On observe que les valeurs de  $C_f$  et  $Nu$  obtenues sont assez proches des simulations moyennées précédentes ainsi que des corrélations. Dans le paragraphe suivant, cette même configuration a été traitée, mais en imposant un fort gradient de température dans l'écoulement.

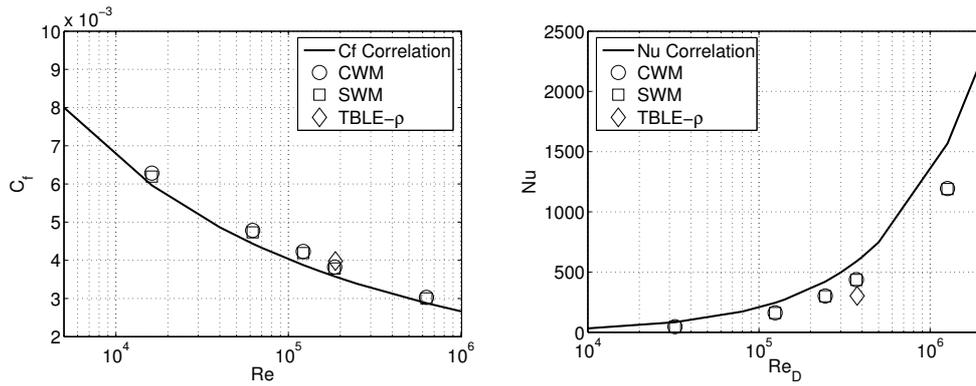


FIG. 6.9 – Comparaison entre corrélations et simulations pour le  $C_f$  (gauche) et le  $Nu$  (droite), régime quasi-isotherme

### 6.4.2 En régime non-isotherme

La même configuration a été modifiée afin de simuler un écoulement non-isotherme, en imposant un dégagement de chaleur sur le domaine plus fort, de sorte que le rapport entre la température de paroi et la température moyenne soit autour de 2. En effet, la température moyenne ciblée par le terme source de puissance volumique est de  $600K$ , alors que la paroi est isotherme à  $T_w = 300K$ . Ici encore, afin d'étudier la dépendance au nombre de Reynolds, cinq nombres de Reynolds ont été visés.

Les courbes de la Figure 6.10 comparent les valeurs issues des simulations et celles données par les corrélations, quasi-isotherme d'une part, et non-isotherme d'autre part (Eqs. (3.8) et (3.9)).

Les résultats numériques issus des deux modèles de paroi, modèle standard SWM et loi couplée CWM, sont fortement éloignés. Les valeurs de  $C_f$  obtenues par l'usage du modèle de paroi standard s'avèrent relativement éloignées de la corrélation valable en régime non-isotherme. En revanche, on peut noter que les valeurs de  $C_f$  obtenues à l'aide de la loi de paroi couplée sont plus proches de cette corrélation, ce qui prouve qu'elle permet de mieux approcher les cas fortement non-isothermes. Le même constat peut être fait pour le nombre de Nusselt, avec un accord encore meilleur entre la corrélation valable en non-isotherme et les simulations avec la loi de paroi couplée.

Le cas traité par simulation aux grandes échelles sur la configuration de Kravchenko *et al.* avec le modèle TBLE est repris ici, mais en imposant cette fois un fort gradient de température par ajout d'un terme source sur l'équation de l'énergie. Ce terme source est du même type que pour les simulations moyennées, c'est-à-dire que la température moyenne dans le canal est imposée à  $600K$ , alors que la température des parois est de  $300K$ . Les résultats semblent assez proches des corrélations valable en écoulement non-isotherme, même si la valeur du frottement semble légèrement sous-estimée.

Grâce à cette étude comparative entre simulations numériques et corrélations, nous avons pu conforter les conclusions des précédents cas tests, tous tendant à prouver que la loi de paroi couplée CWM semble bien appréhender les cas fortement non-isothermes, contrairement à la loi de paroi standard SWM, qui a montré ses limites de validité dans ce domaine-là.

Les simulations aux grandes échelles effectuées avec le modèle TBLE- $\rho$ , bien qu'insuffisantes

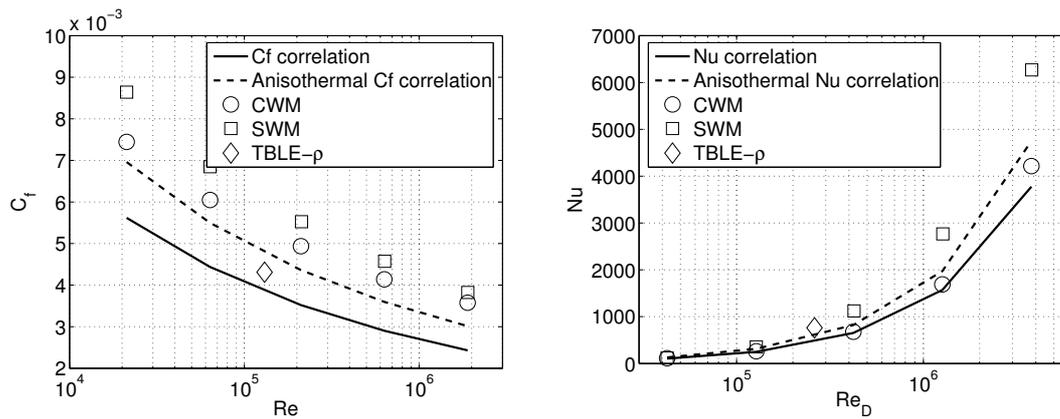


FIG. 6.10 – Comparaison entre corrélations et simulations pour le  $C_f$  (gauche) et le  $Nu$  (droite), régime non-isotherme

pour juger des performances de ce modèle de paroi, semblent prometteuses pour le traitement de cas présentant de forts gradients de température. Un effort supplémentaire en terme de validation sera nécessaire pour conforter ce point.

## 6.5 Simulation d'une lame de fluide dans un assemblage de combustible (RCG)

Dans cette section, on teste les modèles de paroi standard (SWM) et couplé (CWM) sur un cas représentatif des préoccupations du CEA en matière d'échange thermique, décrit dans le paragraphe suivant.

### 6.5.1 Contexte industriel du cas test

Alors que les centrales actuelles, de seconde génération, vont progressivement être remplacées par celles de troisième génération, les travaux de recherche et développement se penchent déjà depuis quelques années sur les concepts qui constitueront la quatrième génération. Parmi les concepts envisagés pour la génération IV, le CEA soutient le concept de réacteurs à neutrons rapides (RNR) refroidis au gaz, et propose le projet appelé GFR (Gas cooled Fast Reactor).

En soutien aux recherches et études de conception menées sur le GFR, le CEA propose également le développement d'un réacteur de démonstration de la filière des réacteurs à caloporteur gaz à spectre rapide, le REDT (Réacteur d'Etudes et de Développement Technologiques). Il est prévu de pouvoir placer dans le REDT deux types d'assemblages de combustible afin de pouvoir tester les comportements mécaniques, neutroniques et thermohydrauliques des assemblages des futurs réacteurs : des assemblages à faisceaux d'aiguilles, ou des assemblages à faisceaux de plaques (cf. Figure 6.11).

Le cas test qui nous intéresse dans le cadre de ce travail concerne un écoulement dans un assemblage à plaques du cœur du REDT. Un assemblage à faisceaux de plaques est constitué d'un boîtier hexagonal contenant 18 plaques combustibles disposées en trois sous-losanges. La puissance li-

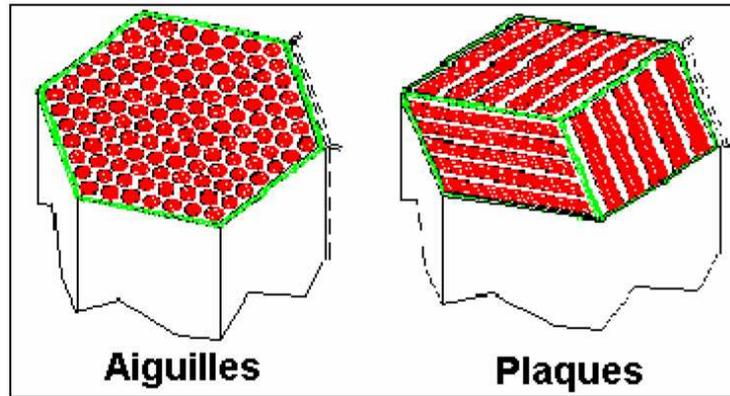


FIG. 6.11 – Schématisation des deux types d'assemblages : à aiguilles ou à plaques

néique par élément combustible est bien plus élevée que dans le cas des assemblages à aiguilles et les niveaux de température également. L'Hélium circule entre les éléments combustibles en entrant à  $480^{\circ}C$  et en sortant à  $850^{\circ}C$ . Le débit massique est de  $26kg.s^{-1}$ , ce qui correspond à une vitesse moyenne de  $47m.s^{-1}$  entre plaques. La fraction de caloporteur, 30%, est plus faible que pour les assemblages à aiguilles. Ce type de combustibles constituera *a priori* le combustible de référence des futurs RNR-G.

### 6.5.2 Présentation du cas test

Le cas test retenu consiste à étudier l'écoulement d'Hélium entre deux plaques de combustibles d'un assemblage du REDT, en régime de fonctionnement nominal et constitue une simplification de l'assemblage en faisceau de plaques.

L'écoulement de fluide caloporteur, autour de matériau à très haute température (généralement du graphite, sous forme de plaques) peut être schématiquement assimilé à une lame (canal mince) de ce même fluide entre deux plaques parallèles de combustible, pour lesquelles la température de surface est régie par le dégagement de puissance. Un schéma de cette configuration simplifiée est présenté en Figure 6.12.

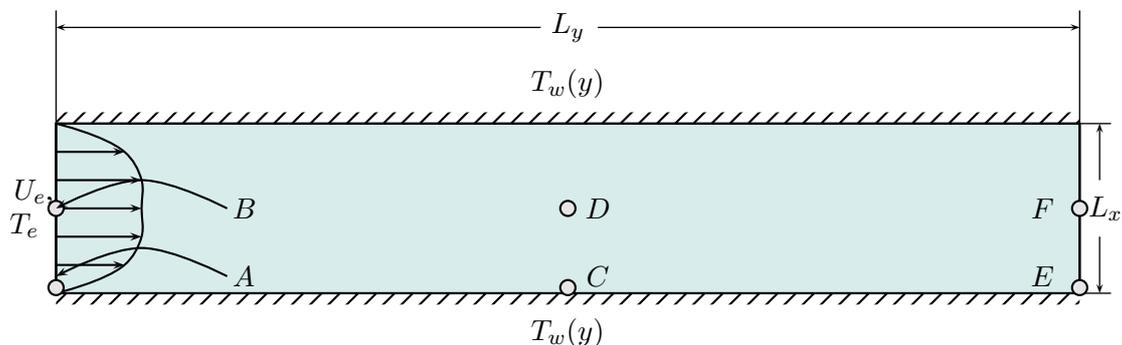


FIG. 6.12 – Schéma de la configuration RCG simulée

Les dimensions de ce problème bi-dimensionnel sont  $L_x = 2.52mm$  et  $L_y = 300mm$ . Par

souci de clarté, la lame fluide a été épaissie sur le schéma 6.12, ainsi que sur les figures suivantes.

Le fluide qui circule entre les deux plaques est ici de l'hélium, dont les propriétés physiques sont décrites dans le Tableau 6.3.

Pression $P_0$	$7.10^6 Pa$
Viscosité	Sutherland
$\mu_0$	$1.6.10^{-5} kg/m.s$
$T_0$	$273.15K$
$C_0$	235
Prandtl	0.67
$c_p$	$5194kJ/kgK$
$\gamma$	1.666

TAB. 6.3 – Propriétés physiques de l'Hélium

Initialement, le fluide a une distribution parabolique de vitesse, et une température uniforme. La condition d'entrée a une vitesse débitante de  $U_e = 47m/s$ , et une température  $T_e = 753.15K$ . Le nombre de Reynolds de l'écoulement basé sur la vitesse débitante et le diamètre hydraulique  $D_h = 2L_x$  est donc environ  $Re_D = U_e D_h \rho / \mu \approx 28150$ .

En ce qui concerne la thermique de la configuration, le fluide entre à la température  $T_e$  et est progressivement réchauffé par l'intermédiaire des parois. En effet, celles-ci sont soumises à une distribution de température telle que :

$$T_w(y) = 889.0 + 356.6 \times y \quad (6.11)$$

Ces valeurs proviennent de spécifications techniques, fonction du matériau constituant les parois, mais aussi du flux de chaleur transmis par ces mêmes parois.

### 6.5.3 Simulation Bas-Reynolds

Une simulation sur un maillage raffiné a été dans un premier temps réalisée afin de pouvoir obtenir des résultats fiables pour les comparaisons avec les simulations sur maillages grossiers avec utilisation de lois de paroi.

Le maillage utilisé dans ce cas est constitué de  $N_x = 61$  nœuds dans l'épaisseur de la lame fluide, et  $N_y = 201$  nœuds dans la longueur. Une raison géométrique de 1.15 est attribuée à la distribution des points dans la direction normale à la paroi, ce qui permet d'atteindre une hauteur de première maille à la paroi autour de  $y^+ \approx 0.8$ .

En entrée du domaine fluide, un profil de vitesse établi, obtenu au préalable en écoulement isotherme, est introduit. Le traitement utilisé pour la pression thermodynamique est tel que  $P_0 = cte$ .

Les champs obtenus sont représentés sur les Figures 6.13 à 6.17.

Le gradient de pression dans l'écoulement peut être approximé analytiquement par le fait que dans un écoulement isotherme de canal, l'équation de quantité de mouvement se simplifie en :

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (6.12)$$

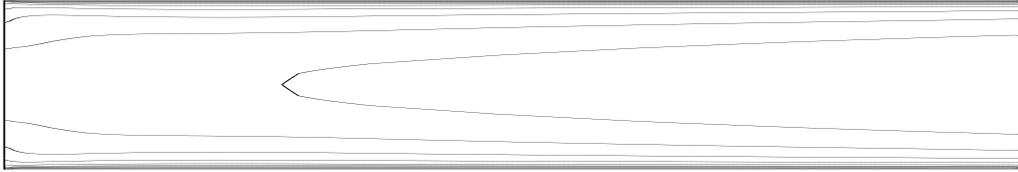


FIG. 6.13 – Iso-contours de vitesse (composante longitudinale). Min :  $0.96m/s$ , max :  $61.06m/s$ , pas :  $5.46m/s$

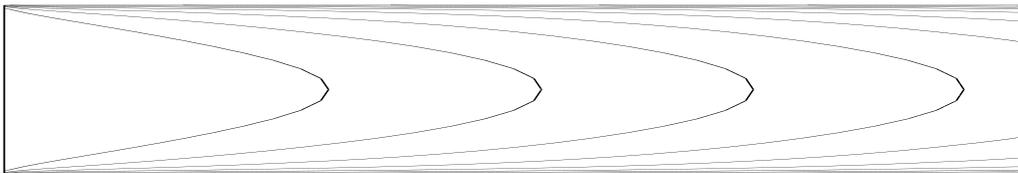


FIG. 6.14 – Iso-contours de température. Min :  $753.15K$ , max :  $993.40K$ , pas :  $21.84K$

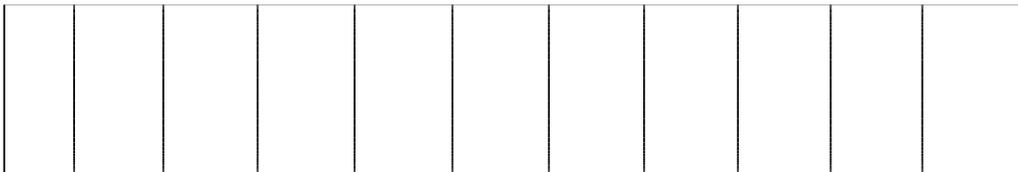


FIG. 6.15 – Iso-contours de pression hydrodynamique  $P_1$ . Min :  $-0.12.10^3 Pa$ , max :  $8.66.10^3 Pa$ , pas :  $7.99.10^2 Pa$

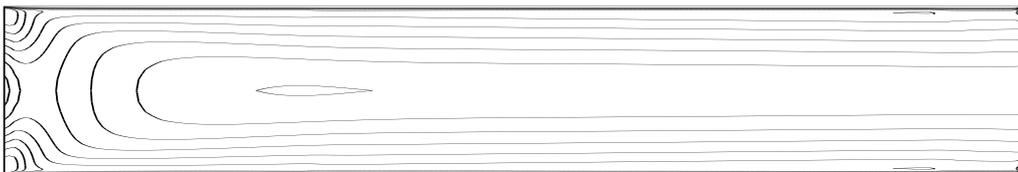


FIG. 6.16 – Iso-contours d'énergie cinétique turbulente  $k$ . Min :  $0m^2/s^2$ , max :  $130.3m^2/s^2$ , pas :  $11.84m^2/s^2$



FIG. 6.17 – Iso-contours de la dissipation  $\epsilon$ . Min :  $1.13.10^4 m^2/s^3$ , max :  $5.90.10^6 m^2/s^3$ , pas :  $5.36.10^5 m^2/s^3$

Cette équation peut être intégrée selon  $y$ , direction normale à la paroi pour obtenir que :

$$\frac{\tau_w}{h} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (6.13)$$

On peut ainsi vérifier que le gradient de pression obtenu sur la Figure 6.15 est bien cohérent avec ceci. Dans la simulation, ce calcul peut être comparé à la différence de pression hydraulique  $P_1$  entre l'entrée et la sortie (cf. Tableau 6.4).

$$\frac{\tau_w L_x / h = 2\tau_w L_x / L_y}{8610 Pa} \quad \Bigg| \quad \frac{-\Delta P_1}{8780 Pa}$$

TAB. 6.4 – Comparaison gradient de pression / frottement

Les valeurs de température à différents points du domaine (entrée, demi-longueur, sortie) sont stockées dans le Tableau 6.5.

entrée : A	$x = 0mm, y = 0.1mm$	761.95K
B	$x = 0mm, y = 1.26mm$	753.15K
demi-longueur : C	$x = 150mm, y = 0.1mm$	853.40K
D	$x = 150mm, y = 1.26mm$	793.90K
sortie : E	$x = 300mm, y = 0.1mm$	903.75K
F	$x = 300mm, y = 1.26mm$	846.95K

TAB. 6.5 – Valeurs de température à différents points du domaine

L'augmentation de la température maximale entre la section d'entrée et la section de sortie est de 93.8K.

#### 6.5.4 Tests des modèles de paroi

Deux simulations sur maillages grossiers ont été effectuées : l'une avec le modèle de paroi standard (SWM), l'autre avec le modèle couplé (CWM).

Le maillage utilisé pour ces deux calculs est constitué de  $N_x = 15$  nœuds dans l'épaisseur de la lame fluide, et toujours  $N_y = 201$  nœuds dans la longueur. Une raison géométrique de 0.9 est affectée à la distribution des points dans la direction normale à la paroi. On a ainsi un léger raffinement des cellules vers le centre du canal. A la paroi, l'ordonnée adimensionnée du premier point de calcul est de l'ordre de  $y^+ \approx 30$ . La difficulté réside dans le fait qu'à ce nombre de Reynolds, somme toute modéré, l'utilisation de la loi de paroi avec un point d'application dans la zone logarithmique de la couche limite implique qu'un nombre restreint de cellule peut être placé dans l'écoulement.

La distance adimensionnée du premier point à la paroi varie entre  $30 < y^+ < 35$  suivant la distance dans la direction longitudinale, à cause de la variation de température de paroi qui est imposée.

Les Figures 6.18 à 6.22 représentent les mêmes quantités de l'écoulement que pour la simulation Bas Reynolds, issues de la simulation avec le modèle k- $\epsilon$  standard et la loi de paroi standard du code (SWM). Les Figures 6.23 à 6.27 sont issues, quant à elles, de la simulation avec la loi de paroi couplée (CWM).

On remarque en premier lieu que les topologies de ces grandeurs sont approximativement les mêmes pour les calculs Haut Reynolds + loi de paroi. En revanche on s'aperçoit que les valeurs maximales de température sur le domaine sont significativement différentes. L'analyse des valeurs de la température aux 6 points du domaine de calcul (les mêmes que ceux du Tableau 6.5) montre ces écarts (cf. Tableau 6.6).

Il est assez évident de conclure que l'utilisation du modèle couplé CWM offre une amélioration significative du champ de température, notamment au centre du canal en section de sortie où l'erreur absolue est de l'ordre de quelques dizaines de degrés pour SWM lorsque cette même erreur reste très limitée pour CWM. De plus, si la configuration n'avait pas été tronquée à  $L_x = 300mm$ , on peut supposer que la différence de température en sortie aurait été significativement plus grande, entre les deux modèles de parois.

	Bas Reynolds	SWM	CWM	écart SWM Bas Reynolds	écart CWM Bas Reynolds
A	761.95K	759.2K	756.2K	0.03%	0.7%
B	753.15K	753.2K	753.2K	$\approx 0$	$\approx 0$
C	853.40K	869.1K	838.3K	1.8%	1.7%
D	793.90K	814.3K	796.2K	2.6%	0.3%
E	903.75K	930.6K	893.9K	3.0%	1.1%
F	846.95K	882.8K	852.2K	4.2%	0.6%

TAB. 6.6 – Comparaison des valeurs de température à différents points du domaine

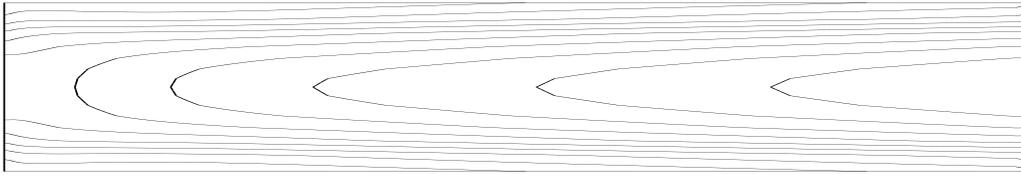


FIG. 6.18 – Iso-contours de vitesse (composante longitudinale) de la simulation  $k-\epsilon$ +SWM. Min :  $39m/s$ , max :  $62.94m/s$ , pas :  $2.716m/s$

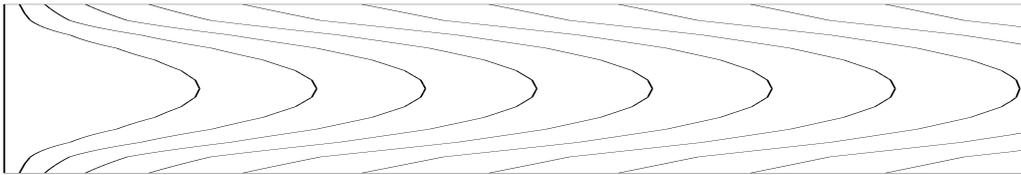


FIG. 6.19 – Iso-contours de température de la simulation  $k-\epsilon$ +SWM. Min :  $753.2K$ , max :  $930.8K$ , pas :  $16.1K$

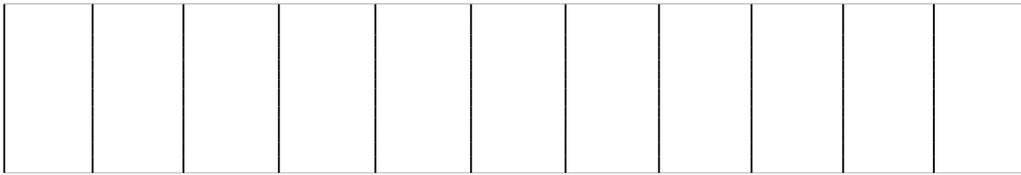


FIG. 6.20 – Iso-contours de pression hydrodynamique  $P_1$  de la simulation  $k-\epsilon$ +SWM. Min :  $-19.08Pa$ , max :  $1.06 \cdot 10^4 Pa$ , pas :  $9.63 \cdot 10^3 Pa$

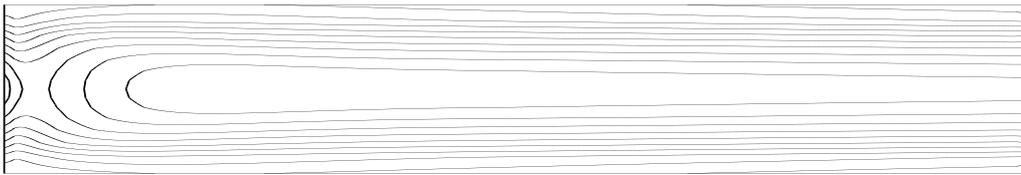


FIG. 6.21 – Iso-contours d'énergie cinétique turbulente  $k$  de la simulation  $k-\epsilon$ +SWM. Min :  $26.60m^2/s^2$ , max :  $133.3m^2/s^2$ , pas :  $9.70m^2/s^2$

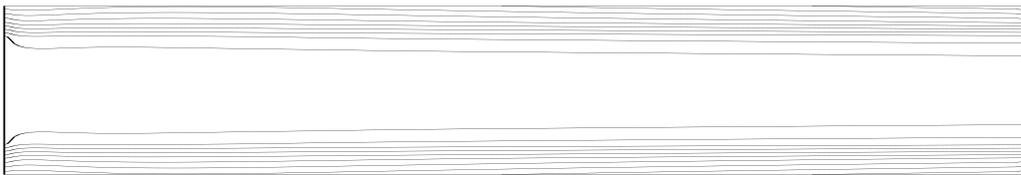


FIG. 6.22 – Iso-contours de la dissipation  $\epsilon$  de la simulation  $k-\epsilon$ +SWM. Min :  $1.10 \cdot 10^4 m^2/s^3$ , max :  $2.66 \cdot 10^6 m^2/s^3$ , pas :  $2.41 \cdot 10^5 m^2/s^3$

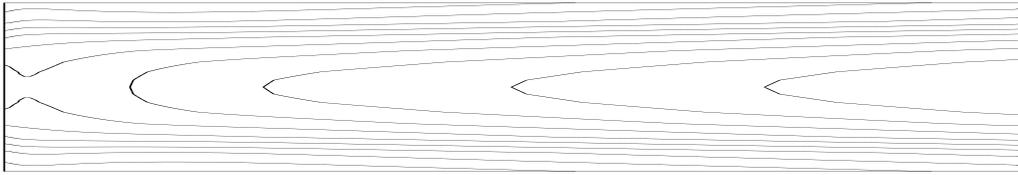


FIG. 6.23 – Iso-contours de vitesse (composante longitudinale) de la simulation k- $\epsilon$ +CWM. Min :  $39.30m/s$ , max :  $60.66m/s$ , pas :  $1.94m/s$

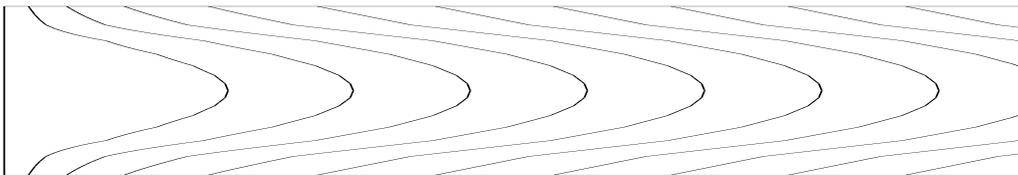


FIG. 6.24 – Iso-contours de température de la simulation k- $\epsilon$ +CWM. Min :  $753.2K$ , max :  $893.9K$ , pas :  $12.8K$

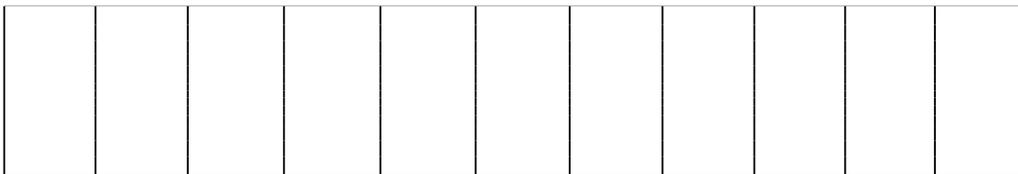


FIG. 6.25 – Iso-contours de pression hydrodynamique  $P_1$  de la simulation k- $\epsilon$ +CWM. Min :  $-18.30Pa$ , max :  $1.04.10^4Pa$ , pas :  $9.48.10^3Pa$

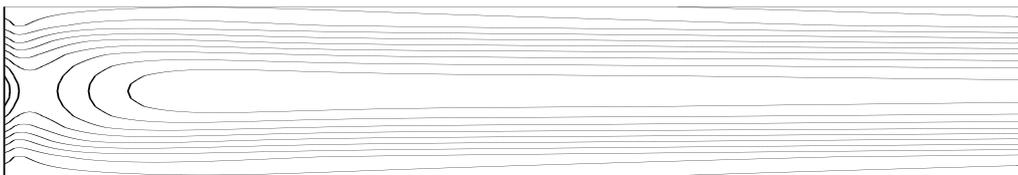


FIG. 6.26 – Iso-contours d'énergie cinétique turbulente  $k$  de la simulation k- $\epsilon$ +CWM. Min :  $28.95m^2/s^2$ , max :  $121.0m^2/s^2$ , pas :  $8.36m^2/s^2$

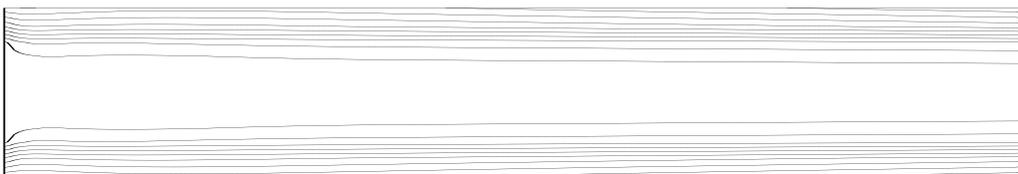


FIG. 6.27 – Iso-contours de la dissipation  $\epsilon$  de la simulation k- $\epsilon$ +CWM. Min :  $1.09.10^4m^2/s^3$ , max :  $2.0.10^6m^2/s^3$ , pas :  $1.81.10^5m^2/s^3$

## **Troisième partie**

# **Sur les effets instationnaires dans la modélisation de paroi**



# Chapitre 7

## Etat de l'art

### 7.1 Caractéristiques temporelles des modèles de paroi

Dans la littérature, mais aussi dans les précédents chapitres de ce rapport, il est classique de faire l'hypothèse de couche limite stationnaire, au cours de la dérivation d'une loi de paroi. C'est le cas pour la loi de paroi standard, dont le développement est rappelé au Chapitre 2. Mais c'est aussi une des hypothèses limitantes dans le développement de la loi anisotherme qui a été précédemment décrite de façon détaillée au Chapitre 5.

A contrario, le modèle TBLE (en version initiale [2] et celle modifiée de la Section 5.4) est écrit dans le but de prendre en compte le terme temporel des équations de Navier-Stokes dans la modélisation de la couche limite. Ceci implique qu'un terme supplémentaire par rapport aux équations des lois de paroi « RANS » est conservé. Il a pour but d'obtenir une meilleure réponse instationnaire en ce qui concerne les grandeurs pariétales.

La variation temporelle des grandeurs physiques de l'écoulement hors de la zone proche paroi impacte directement flux et frottement pariétaux, par le biais de la loi de paroi. Or, cet impact est directement répercuté comme si l'écoulement à l'instant  $n + 1$  était un champs stationnaire, ce qui est bien sûr faux. Le but de ce chapitre est de déterminer l'influence d'une variation temporelle sur les grandeurs pariétales, et de tenter de constituer un modèle de paroi adapté à ce genre d'écoulements ou tout au moins un intervalle de fréquences de variation temporelle supporté par la loi de paroi concernée.

### 7.2 Physique des écoulements pulsés

A notre connaissance, très peu d'études sur le domaine de validité dans le monde instationnaire des lois de paroi ont été réalisées [22].

D'un point de vue physique, on peut s'inspirer des travaux en canaux pulsés [23, 53, 57]. Il a été mis en évidence qu'il existe une plage de fréquences (très basses fréquences) où la physique de l'écoulement en proche paroi peut être considérée comme quasi-stationnaire. Un autre régime de fonctionnement a été établi pour des fréquences relativement élevées, dans lequel l'écoulement est dit quasi-laminaire, c'est-à-dire que ce sont les effets visqueux qui dictent le comportement

de proche paroi. Enfin, entre les deux, on peut considérer qu'il existe une sorte de zone tampon, dans laquelle les effets instationnaires ne sont pas clairement identifiés en terme de dynamique d'écoulement.

Une grandeur apparaît comme étant un paramètre universel pour l'étude des canaux pulsés et *a fortiori* pour n'importe quel type d'écoulement oscillant :  $l_s^+$ . Cette grandeur est l'épaisseur de la couche visqueuse de Stokes  $l_s = \sqrt{2\nu/\omega}$  adimensionnée par le rapport entre la vitesse de frottement moyenne  $\overline{U}_\tau$  et la viscosité  $\nu$ .

$$l_s^+ = l_s \frac{\overline{U}_\tau}{\nu} \quad (7.1)$$

Cette variable est directement liée à une pulsation adimensionnée qui est généralement utilisée, par la relation :

$$\omega^+ = \frac{2}{l_s^{+2}} = \omega \frac{\nu}{\overline{U}_\tau^2} \quad (7.2)$$

L'étude de Gündoğdu et al. [23] et Tardu et al. [57] font état de mesures expérimentales pour un intervalle de pulsations adimensionnées assez large. Les différents régimes de fonctionnement qui ont été mis en évidence sont recensés dans le Tableau 7.1.

$\omega^+ \leq 0.001$	écoulement quasi-stationnaire
$0.001 \leq \omega^+ \leq 0.05$	zone tampon
$0.05 \leq \omega^+$	écoulement quasi-laminaire

TAB. 7.1 – Régimes mis en évidence dans les cas d'écoulements pulsés en vitesse

L'existence de tels régimes implique que la validité des modèles de paroi utilisés dans des configurations instationnaires doit être clairement étudiée.

Une propriété importante dans le traitement d'écoulements oscillants est l'existence de zones où l'on observe une inversion de l'écoulement. En effet, pendant une période de l'oscillation, il se peut, selon l'amplitude et la fréquence du mouvement, que le cisaillement à la paroi change de signe, sous l'influence combinée des effets visqueux et inertiels à la paroi.

Les expériences dans de telles situations ont permis d'établir un critère de retournement de l'écoulement. Il se formule comme suit, en considérant que  $A$  est l'amplitude de variation de la vitesse moyenne :

$$\begin{cases} \frac{A}{\overline{U}_\tau} > \frac{1}{\omega^+} & \rightarrow \text{retournement} \\ \frac{A}{\overline{U}_\tau} < \frac{1}{\omega^+} & \rightarrow \text{non-retournement} \end{cases}$$

### 7.3 Second problème de Stokes et épaisseur de pénétration

Une situation d'intérêt concernant les écoulements soumis à des variations temporelles est le second problème de Stokes [49], problème pour lequel une solution des équations de Navier-Stokes peut être donnée analytiquement.

On considère une plaque plane infinie soumise à des oscillations longitudinales d'amplitude  $U$ , et au-dessus de laquelle le fluide est initialement au repos. Ce fluide va se mettre à osciller près de cette plaque, dans une épaisseur donnée. La Figure 7.1 représente une telle configuration.

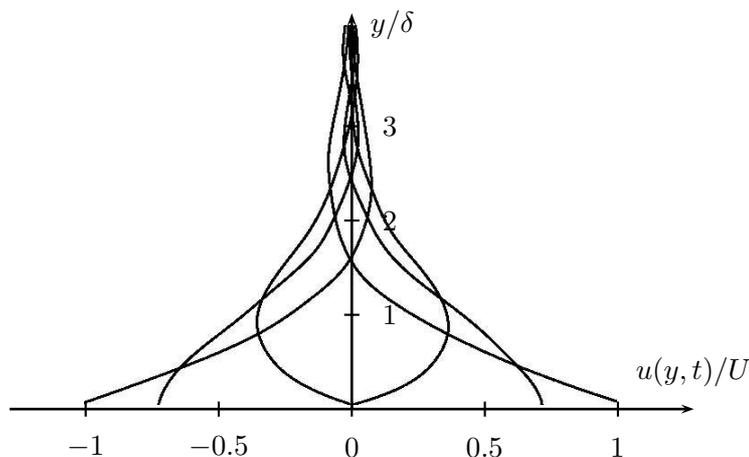


FIG. 7.1 – Schématisation du second problème de Stokes [49]

La convection est négligée et seule la diffusion est prise en compte. L'équation pour la quantité de mouvement se limite simplement à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.3)$$

Cette relation est facilement intégrable par la méthode de séparation de variables et en utilisant les conditions aux limites, qui sont telles que : 1- la vitesse est nulle loin de la plaque oscillante,  $2- u(0, t) = U \Re \{ \exp(i\omega t) \}$ .

La solution revêt alors la forme suivante :

$$u(y, t) = U \Re \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} y + i \left( \omega t - \left( \frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} y \right) \right] \right\} \quad (7.4)$$

On en déduit qu'une longueur caractéristique de pénétration des oscillations est :

$$\delta_s = \left( \frac{2\nu}{\omega} \right)^{1/2} \quad (7.5)$$

Cette longueur est telle que la valeur en  $y = \delta$  correspond à une vitesse amortie de  $e^{-1}$  par rapport à sa valeur pariétale, et est appelée épaisseur de Stokes. On peut ainsi déduire une zone dans laquelle les effets de l'oscillation imposée en paroi sont significatifs, qui peut être estimée à quelques  $\delta$ .

Il est intéressant de remarquer que, pour un fluide ayant une composante longitudinale de vitesse non nulle initialement, et, par exemple fonction linéaire de  $y$ , l'épaisseur de Stokes  $\delta$  garde la même expression. La démonstration est rapidement donnée ici, grâce à la méthode de séparation des variables  $y$  et  $t$ .

Supposons l'écoulement sur une plaque plane dont la vitesse varie au cours du temps, tel que :

$$u(0, t) = U \Re \{ \exp(i\omega t) \} \quad (7.6)$$

De plus, on suppose que la vitesse peut se mettre sous la forme :

$$u(y, t) = u_0 \cdot y + f(t) \cdot g(y) \quad (7.7)$$

c'est-à-dire que l'on impose à l'extérieur non plus que le fluide est au repos, mais qu'il avance parallèlement à la paroi, à la vitesse  $u_0$ . On a les égalités suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{f}g \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = fg'' \quad (7.9)$$

L'équation (7.3) devient ainsi :

$$\frac{\dot{f}}{f} = \nu \frac{g''}{g} = k \quad (7.10)$$

avec  $k$  constante. Ainsi, on a deux équations différentielles pour  $f$  et  $g$ , qui ont pour solution :

$$f = C_1 \exp(kt) \quad (7.11)$$

$$g = C_2 \exp\left(-y(k/\nu)^{1/2}\right) + C_3 \exp\left(y(k/\nu)^{1/2}\right) \quad (7.12)$$

Pour  $y$  grand, on a :

$$u = u_0 y + C_1 C_3 \exp(kt) \exp\left(y(k/\nu)^{1/2}\right) \quad (7.13)$$

Loin de la paroi ne doit subsister que la partie linéaire du profil de vitesse, ce qui implique que  $C_3 = 0$ . Par ailleurs, à la paroi, la condition de plaque oscillante permet d'écrire :

$$u = C_1 C_2 \exp(kt) \quad (7.14)$$

On en conclut que  $C_1 C_2 = U$ , et  $k = i\omega$ , et que le profil de vitesse  $u$  a finalement pour expression :

$$u = u_0 \cdot y + U \exp\left(i\omega t - y \left(\frac{i\omega}{\nu}\right)^{1/2}\right) \quad (7.15)$$

Comme  $i^{1/2} = (i+1)/\sqrt{2}$ , on obtient :

$$u = u_0 \cdot y + U \exp\left(-y \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} + i \left(\omega t - y \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2}\right)\right) \quad (7.16)$$

Cette expression est très proche de la relation (7.4). On conclut ainsi que la superposition d'un écoulement linéaire au champ de vitesse ne modifie pas les échelles caractéristiques des oscillations à la paroi, notamment l'épaisseur de Stokes  $\delta_s$ , qui garde la même expression que dans l'équation (7.5).

Au cours du Chapitre 8, nous tenterons de faire l'analogie entre le second problème de Stokes et le cas de forçage d'un scalaire passif pulsé temporellement par la paroi dans un écoulement de canal plan turbulent pleinement développé.

## Chapitre 8

# Expérience numérique sur le transport de scalaires passifs pulsés

Nous allons à présent analyser les propriétés temporelles propres au transport de scalaires passifs dans une couche limite turbulente, par l'intermédiaire d'une simulation numérique directe. Plus précisément, ce chapitre porte sur une tentative de forçage temporel d'un scalaire passif au voisinage d'une paroi. Le but est de déduire des données fiables sur l'évolution temporelle de grandeurs passives de l'écoulement et d'en tirer des conséquences pour la modélisation à la paroi dans un régime instationnaire.

### 8.1 Equations de conservation et propriétés pariétales

L'utilisation de scalaires passifs, qui seront aussi bien dénotés par la suite par les termes de « traceurs » ou d'« espèces fictives », permet de s'affranchir du couplage que la température aurait dans un écoulement non-isotherme avec la dynamique de l'écoulement. Les scalaires passifs n'affectent pas l'écoulement et se comportent comme des colorants (d'où le nom de traceur). Ainsi ils peuvent varier fortement et même être contrôlés numériquement assez facilement. Leur évolution est soumise à la convection par le champ de vitesse et leur diffusion au sein du milieu.

L'équation de transport pour la fraction massique  $Y_k$  de l'espèce fictive  $k$  s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho Y_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho Y_k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \right) \quad (8.1)$$

dans laquelle  $D_k$  est la diffusivité associée à l'espèce  $k$ . Celle-ci peut être formulée en fonction de la viscosité moléculaire  $\mu$  par l'intermédiaire d'un nombre de Schmidt  $Sc_k$  pour l'espèce  $k$ , nombre sans dimension caractérisant les effets de la diffusion moléculaire par rapport à la diffusion massique.

$$\rho D_k = \frac{\mu}{Sc_k}$$

Par simplicité, le nombre de Schmidt pour chaque traceur considéré dans cette étude sera pris égal à l'unité. Ainsi, la diffusivité du scalaire sera égale à la viscosité. Ceci équivaut à considérer

une température en tant que scalaire passif pour un fluide dont le nombre de Prandtl serait égal à l'unité.

Une conséquence directe est que les propriétés de ces espèces fictives en proche paroi sont de même nature que pour la température lorsque celle-ci est une variable passive de l'écoulement.

On peut ainsi déduire, grâce à l'équation (8.1), un adimensionnement pour la fraction massique de l'espèce  $k$ . On notera  $Y_{k,\tau}$  une grandeur caractéristique de la fraction massique de frottement, de la même manière que l'on note  $U_\tau$  et  $T_\tau$  respectivement pour la vitesse et la température. Son expression, obtenue par analyse dimensionnelle, est la suivante :

$$Y_{k,\tau} = \frac{D_{k,w} Sc_k}{U_\tau} \frac{\partial Y_k}{\partial y} \Big|_w = \frac{\mu_w}{\rho_w U_\tau} \frac{\partial Y_k}{\partial y} \Big|_w = \frac{\nu_w}{U_\tau} \frac{\partial Y_k}{\partial y} \Big|_w \quad (8.2)$$

Par la suite, on notera  $Y_k^+$  la fraction massique adimensionnée de l'espèce  $k$  :

$$Y_k^+ = \frac{Y_k}{Y_{k,\tau}} \quad (8.3)$$

Avant de s'intéresser plus en détail à la configuration qui a été traitée dans cette partie de la thèse, le code de calcul qui a servi à la réalisation des simulations numériques directes est présenté dans la section suivante.

## 8.2 Le code de calcul AVBP

AVBP [14, 51] est un code parallèle de CFD développé conjointement au CERFACS et à l'IFP (Institut Français du Pétrole). Il résout les équations de Navier-Stokes compressibles multi-espèces réactives sur des maillages hybrides. Il a été intensivement utilisé pour la simulation numérique d'écoulements turbulents réactifs rencontrés dans les chambres de combustion en utilisant une approche LES. Néanmoins, il a été particulièrement employé et validé pour la réalisation de simulation numérique directe [1, 19, 37, 43] ou de LES résolues à la paroi (c'est-à-dire dont le maillage est suffisamment raffiné près de la paroi pour correctement représenter les phénomènes pariétaux).

Une description succincte sur les schémas numériques d'AVBP ainsi que sur l'approche cell-vertex qui est utilisée est donnée dans les paragraphes suivants.

### 8.2.1 L'approche cell-vertex

Dans le code de calcul AVBP, la méthode des volumes finis est utilisée pour la discrétisation spatiale. Dans cette méthode, la formulation des lois de conservation est intégrée de façon approximée. Cette discrétisation numérique des équations s'apparente à la technique cell-vertex ; les valeurs discrètes des variables conservatives sont stockées aux nœuds de la cellule. Les équations de conservations sont considérées sous leur forme conservative ( $\mathbf{w}$  correspond au vecteur des variables conservatives) :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}} = \mathbf{0} \quad (8.4)$$

Le tenseur des flux  $\vec{\mathcal{F}}$  tient compte des flux non-visqueux (ou convectifs)  $\vec{\mathcal{F}}^I$  et visqueux (ou diffusifs)  $\vec{\mathcal{F}}^V$ .

$$\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{w}, \vec{\nabla} \mathbf{w}) = \vec{\mathcal{F}}^I(\mathbf{w}) + \vec{\mathcal{F}}^V(\mathbf{w}, \vec{\nabla} \mathbf{w}) \quad (8.5)$$

L'approche cell-vertex permet de n'avoir qu'un seul maillage primaire délimitant les cellules de conservation et le stockage des inconnues. Le traitement de la métrique est simplifié et s'applique à toutes les géométries d'éléments (tétraèdres, prismes, hexaèdres, ...). De plus, le nombre d'inconnues stockées dans le cas d'un maillage de tétraèdres (très largement employé en LES) est largement diminué, puisque ce type de maillage présente moins de noeuds de maillage que de cellules. Enfin cette discrétisation est très adaptée aux codes parallèles puisqu'elle limite les passages d'information entre les blocs de maillage.

La discrétisation spatiale pour cette approche cell-vertex est réalisée en deux temps. Les opérateurs discrets gradient ou résidu sont d'abord approximatés à la cellule puis distribués aux sommets de celle-ci.

#### Calcul des résidus :

En intégrant le terme  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}$  sur chaque cellule primaire  $\Omega_j$  délimitée par la surface  $\partial\Omega_j$  (cf. Figure 8.1), le théorème de Green-Ostrogradsky donne l'expression du résidu pondéré à la cellule :

$$\mathbf{R}_{\Omega_j} = \frac{1}{V_{\Omega_j}} \int_{\Omega_j} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}} dV = \frac{1}{V_{\Omega_j}} \int_{\partial\Omega_j} \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{n} dS \quad (8.6)$$

La discrétisation de l'expression du résidu donnée à l'équation (8.6) s'effectue par sommation sur les sommets de la cellule avec  $\vec{S}_k$  la normale pondérée et orientée entrante définie au sommet  $k$  de la cellule  $\Omega_j$ .

$$\mathbf{R}_{\Omega_j} = -\frac{1}{n_{dim} V_{\Omega_j}} \sum_{k|k \in \Omega_j} \vec{\mathcal{F}}_k \cdot \vec{S}_k \quad (8.7)$$

Les résidus ainsi obtenus à la cellule sont alors distribués aux sommets selon la formule (8.8) avec  $V_i$  le volume de la cellule duale au noeud  $i$  défini par l'expression (8.9).

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j|i \in \Omega_j} D_{\Omega_j}^i \frac{V_{\Omega_j}}{n_v(\Omega_j)} \mathbf{R}_{\Omega_j} \quad (8.8)$$

$$V_i = \sum_{j|i \in \Omega_j} \frac{V_{\Omega_j}}{n_v(\Omega_j)} \quad (8.9)$$

Les tenseurs  $D_{\Omega_j}^i$  pondèrent les résidus à la cellule. Dans AVBP, ils sont définis par le schéma d'avancement temporel employé.

#### Calcul de gradients :

Les flux visqueux  $\vec{\mathcal{F}}^V$  sont calculés à partir des gradients des variables conservatives  $\vec{\nabla} \mathbf{w}$ . Le calcul de ces gradients est réalisé de la même manière, en deux étapes. Le gradient est d'abord approximaté au centre de la cellule  $\Omega_j$  à partir des valeurs de  $\mathbf{w}$  aux sommets de la cellule considérée.

$$\left( \vec{\nabla} \mathbf{w} \right)_{\Omega_j} = -\frac{1}{n_{dim} V_{\Omega_j}} \sum_{k|k \in \Omega_j} \mathbf{w}_k \vec{S}_k \quad (8.10)$$

Ensuite, les flux visqueux au noeud  $i$  sont calculés par le théorème de Green appliqué sur la surface de la cellule duale  $\Omega_i$  à partir des gradients calculés pour chaque cellule  $\Omega_j$ .

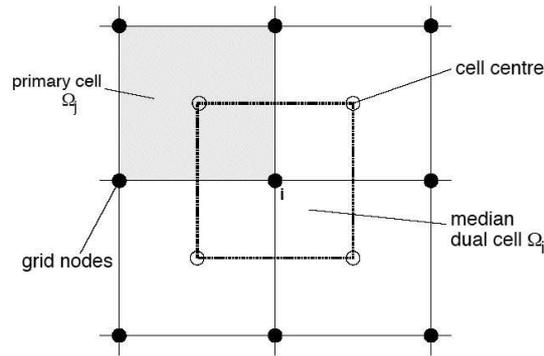


FIG. 8.1 – Visualisation des cellules primaires et duales d'un maillage bidimensionnel

### 8.2.2 Les schémas numériques

Le schéma généralement utilisé pour l'étude des configurations industrielles est le schéma centré de Lax-Wendroff en volumes finis ; il est d'ordre deux en espace et en temps. Les schémas centrés du second ordre ont l'inconvénient de générer des oscillations au voisinage des discontinuités telles que les ondes de choc. Des termes de dissipation artificielle [28] peuvent être ajoutés pour lisser ces oscillations. Par ailleurs, ils permettent une convection correcte des gros tourbillons mais présentent une erreur dispersive pour les structures plus petites. Il est alors nécessaire d'utiliser une résolution du maillage plus fine sans quoi les erreurs commises sur la convection des grandes échelles seraient trop importantes. Cette réduction de l'erreur par le raffinement du maillage implique une augmentation importante du coût CPU requis. C'est le problème clef qui demande un bon compromis entre la taille minimale des cellules, le nombre de cellules et le temps nécessaire de calcul.

Un autre schéma numérique est implémenté dans le code AVBP spécifiquement pour la LES. Il s'agit du schéma éléments-finis TTGC [14] du troisième ordre en temps et en espace. Ce schéma de type Taylor-Galerkin est peu dissipatif et peu dispersif et permet d'obtenir des résultats plus précis que ceux obtenus avec le schéma Lax-Wendroff. Néanmoins, c'est le schéma de Lax-Wendroff qui a été utilisé pour la réalisation des simulations présentées par la suite.

### 8.2.3 Le pas de temps

Le pas de temps est déterminé par le minimum des pas de temps convectif et diffusif. Le pas de temps est relatif au temps nécessaire à l'onde pour parcourir la distance entre deux nœuds successifs à la vitesse  $u + c$ . On parle encore de condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), où  $\Delta$  est la taille de la cellule.

$$\Delta t_{max} < CFL \text{ Min} \left( \frac{\Delta}{|\vec{u}| + c} \right) \quad (8.11)$$

Le pas de temps diffusif est imposé par un critère de type Fourier. Il correspond au temps nécessaire à la diffusion pour traverser la cellule :

$$\Delta t_{max} < F_0 \text{ Min} \left( \frac{\Delta^2}{\nu + \nu_t} \right) \quad (8.12)$$

où le nombre de Fourier  $F_0$  est de l'ordre de 0.5. Le pas de temps de référence est le minimum des pas de temps convectif et diffusif.

### 8.3 Validation du code AVBP pour l'étude de scalaires passifs pulsés

Deux cas tests simples pour la validation du code AVBP ont été envisagés. Ils consistent en un écoulement de canal plan laminaire  $2D$  sur un maillage périodique de demi-hauteur  $h$  (cf. Figure 8.2), sur lequel on étudie le comportement de scalaires passifs pulsés temporellement de deux façons :

- la condition limite pour le scalaire à la paroi basse du canal est une sinusoïde en temps (condition de Dirichlet)
- un terme source constant en espace et pulsé en temps est imposé sur le domaine

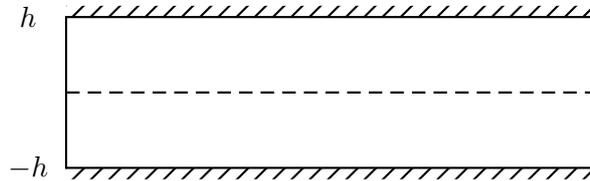


FIG. 8.2 – Domaine de calcul du canal plan 2D

Lorsque la dynamique de l'écoulement est établie<sup>1</sup>, le problème pour les scalaires passifs devient  $1D$  et l'équation se résume à une équation du même type que pour le problème de Stokes (Section 7.3), une solution analytique peut donc être calculée.

#### 8.3.1 Oscillation de la condition de paroi

Le problème peut être mis sous la forme mathématique suivante, en notant la fraction massique du scalaire passif  $\phi$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \phi(-h) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \\ \phi(h) = \gamma \end{cases} \quad (8.13)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres du forçage et des conditions limites. La solution au problème étant périodique de période  $\xi = 2\pi/\omega$ , il n'est pas nécessaire de spécifier de condition initiale à cette équation, dont une solution est cherchée ci-dessous.

La résolution du système (8.13) dans l'espace fréquentiel est possible grâce à une méthode de séparation de variables, en posant :

$$\phi(t, y) = f(y) + g(y) \exp(i\omega t) \quad (8.14)$$

La substitution de (8.14) dans (8.13) conduit à un système de deux équations pour  $f$  et  $g$  séparément :

$$\begin{cases} i\omega g - \nu g'' = 0 \\ \nu f'' = 0 \end{cases} \quad (8.15)$$

<sup>1</sup>Le nombre de Reynolds de l'écoulement vaut 460

En notant que  $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ,  $f$  et  $g$  solutions du système (8.15) sont de la forme :

$$\begin{cases} f(y) = Cy + D \\ g(y) = A \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y\right) \end{cases} \quad (8.16)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $D$  sont des constantes d'intégration, les deux premières étant complexes. Leur détermination se fait selon les conditions limites en  $-h$  et  $h$ , aboutissant à 4 équations (parties réelles et imaginaires pour chaque condition limite). On pose  $K = \sqrt{\omega/2\nu}$ . On obtient :

$$\begin{cases} A \exp(-K(1+i)h) + B \exp(K(1+i)h) = \alpha \\ -Ch + D = \beta \\ A \exp(K(1+i)h) + B \exp(-K(1+i)h) = 0 \\ Ch + D = \gamma \end{cases} \quad (8.17)$$

Après calcul les constantes ont pour forme :

$$\begin{cases} A = -\alpha \exp(K(1+i)h) \left( \frac{1}{\exp(4K(1+i)h) - 1} \right) \\ B = \alpha \exp(-K(1+i)h) \left( 1 + \frac{1}{\exp(4K(1+i)h) - 1} \right) \\ C = \frac{\gamma - \beta}{2h} \\ D = \frac{\beta + \gamma}{2} \end{cases} \quad (8.18)$$

La solution au problème est finalement :

$$\phi(t, y) = Cy + D + \Re \left\{ e^{i\omega t} \left( A e^{K(1+i)y} + B e^{-K(1+i)y} \right) \right\} \quad (8.19)$$

Les simulations avec le code AVBP ont été effectuées pour deux fréquences et deux amplitudes (l'une permettant un changement de signe du flux à la paroi, l'autre non). Les résultats sont présentés sur les Figures 8.3 et 8.4, où seulement un quart inférieur du domaine est montré. Les paramètres des calculs sont listés dans le Tableau 8.1. Dans toutes les simulations, on a  $h = 1.15 \cdot 10^{-4}m$  et  $\nu = 10^{-5}m^2.s^{-1}$ .

Cas	$\omega$ (rd.s <sup>-1</sup> )	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
A	$3.14 \cdot 10^5$	0.1	2	0
B	$3.14 \cdot 10^5$	10	2	0
C	$7.85 \cdot 10^4$	0.1	2	0
D	$7.85 \cdot 10^4$	10	2	0

TAB. 8.1 – Paramètres des calculs AVBP

On observe un parfait accord entre la théorie et la simulation, quelles que soient la fréquence et l'amplitude des variations à la paroi basse.

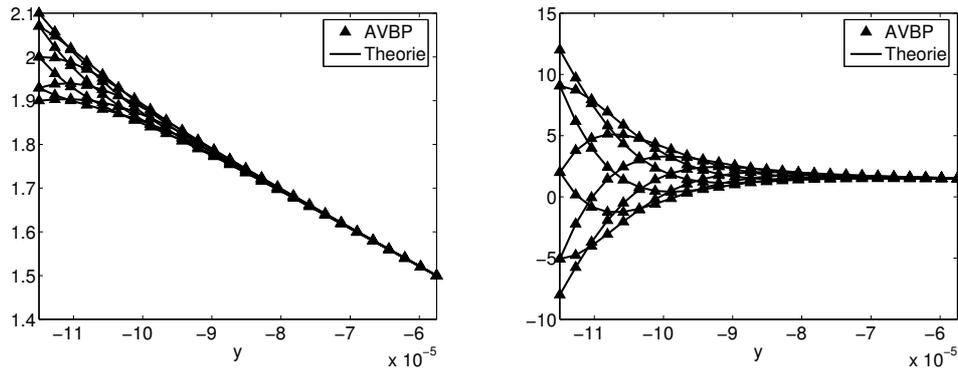


FIG. 8.3 – Comparaison entre la solution analytique (Eq. (8.19)) et la simulation AVBP. Gauche : cas A, droite : cas B

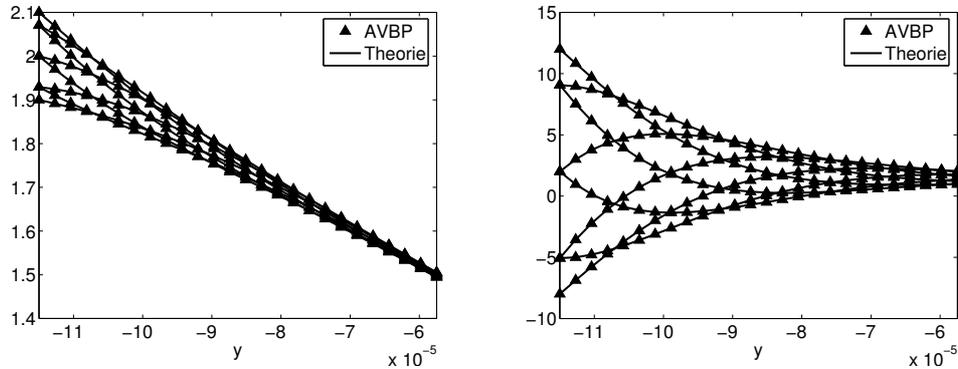


FIG. 8.4 – Comparaison entre la solution analytique (Eq. (8.19)) et la simulation AVBP. Gauche : cas C, droite : cas D

### 8.3.2 Oscillation par imposition du terme source

Ici, le problème est proche du cas test précédent, si ce n'est que les conditions limites sont à fraction massique constante, et un terme source est introduit dans les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \alpha \cos(\omega t) + \beta \\ \phi(-h) = \phi_0 \\ \phi(h) = \phi_1 \end{cases} \quad (8.20)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les amplitudes du forçage, adimensionnées par la période  $\xi = 2\pi/\omega$  pour assurer l'homogénéité de l'équation. Les conditions limites  $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont des paramètres du problèmes.

On utilise la même démarche que pour le premier cas test, en réutilisant une solution de la forme de l'équation (8.14) et la méthode de séparation des variables pour écrire :

$$\begin{cases} i\omega g - \nu g'' = \alpha \\ f'' = -\frac{\beta}{\nu} \end{cases} \quad (8.21)$$

La solution pour  $f$  est immédiate et similaire au premier cas test :

$$f(y) = -\frac{\beta}{2\nu}y^2 + Cy + D \quad (8.22)$$

En revanche, l'équation pour  $g$  présente ici un second membre non-nul. La forme de  $g$  est donc :

$$g = -\frac{i\alpha}{\omega} + A \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y\right) \quad (8.23)$$

Après utilisation des conditions limites, les constantes sont calculées et leur expression est donnée par le système suivant (on pose toujours  $K = \sqrt{\omega/2\nu}$ ).

$$\begin{cases} A = B = \frac{i\alpha}{\omega} \frac{\exp(K(1+i)h)}{1 + \exp(2K(1+i)h)} \\ C = \frac{\phi_1 - \phi_0}{2h} \\ D = \frac{\phi_1 + \phi_0 + \frac{\beta h^2}{\nu}}{2} \end{cases} \quad (8.24)$$

La solution au problème est finalement :

$$\phi(t, y) = -\frac{\beta}{2\nu}y^2 + Cy + D + \Re\left\{e^{i\omega t} A \left(e^{K(1+i)y} + e^{-K(1+i)y}\right)\right\} \quad (8.25)$$

Comme précédemment, les simulations avec le code AVBP ont été réalisées pour deux fréquences et deux amplitudes (permettant ou non un changement de signe du flux à la paroi). Les résultats sont présentés sur les Figures 8.5 et 8.6. Le Tableau 8.2 résume les quatre cas traités.

Cas	$\omega$ (rd.s <sup>-1</sup> )	$\alpha$	$\beta$	$\phi_0$	$\phi_1$
E	$3.14 \cdot 10^5$	$2.5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^5$	0	0
F	$3.14 \cdot 10^5$	$2.5 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^5$	0	0
G	$7.85 \cdot 10^4$	$6.25 \cdot 10^5$	$1.25 \cdot 10^5$	0	0
H	$7.85 \cdot 10^4$	$6.25 \cdot 10^6$	$1.25 \cdot 10^5$	0	0

TAB. 8.2 – Paramètres des calculs AVBP

On observe, pour ce cas test aussi, un parfait accord entre la théorie et la simulation, quelles que soient la fréquence et l'amplitude des variations à la paroi basse.

Ces deux cas tests laminaires valident l'emploi de scalaire passifs dans la configuration d'étude qui est proposée en Section 8.4.

## 8.4 Configuration d'étude

Afin de rester dans une configuration simple et disposant de résultats de référence, une géométrie de canal plan turbulent a été adoptée. Celle-ci est composée de 2 parois infinies aux ordonnées  $y = \pm h$ ,  $h$  étant la demi-hauteur du canal, et l'écoulement se fait dans la direction longitudinale  $x$  (Figure 8.7). Des conditions de périodicité sont appliquées dans les directions longitudinale  $x$  et transverse  $z$ .

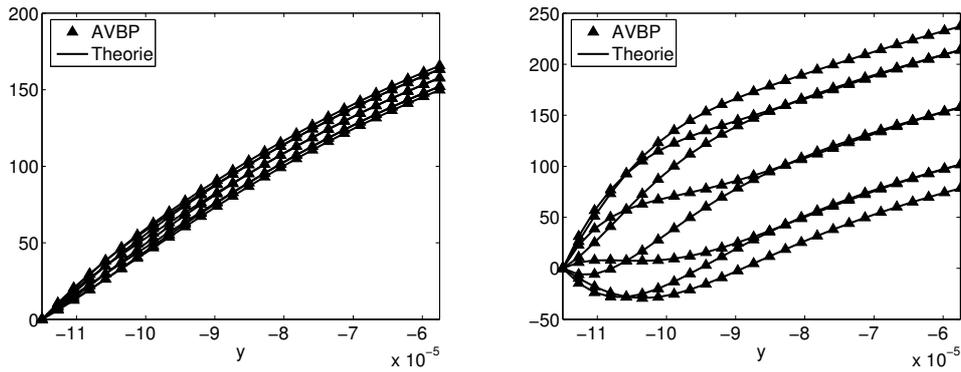


FIG. 8.5 – Comparaison entre la solution analytique (Eq. (8.25)) et la simulation AVBP. Gauche : cas E, droite : cas F

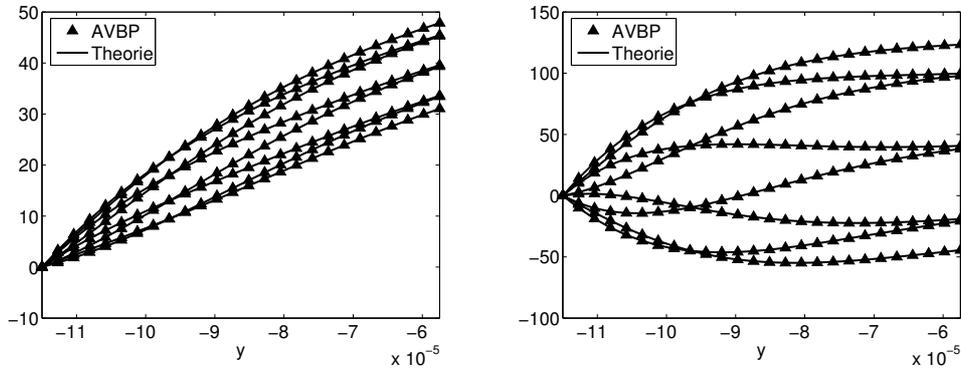


FIG. 8.6 – Comparaison entre la solution analytique (Eq. (8.25)) et la simulation AVBP. Gauche : cas G, droite : cas H

### 8.4.1 Propriétés dynamiques et thermiques de l'écoulement

Le coût d'une simulation numérique directe est, comme on l'a vu au cours de la Section 1.2.1, lié au nombre de Reynolds de l'écoulement. Pour que le temps de restitution soit le plus faible possible, les simulations ont été effectuées à un Reynolds de frottement  $Re_\tau = 180$ .

On se place à un nombre de Mach faible (0.2) afin d'éviter les effets de compressibilité. A  $300K$ , il est donc possible de connaître la valeur maximale de la vitesse dans le canal, c'est-à-dire la vitesse au centre, en fonction de la vitesse du son  $a_c$  :  $U_c = M \times a_c$ . Ici, cette vitesse au centre se situe autour de  $75m/s$ . La corrélation de Dean [18] (cf. Eq. (3.4)) lie de façon simple la vitesse au centre du canal à la vitesse de frottement et permet une estimation *a priori* de  $U_\tau$ . Le nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau = U_\tau h / \nu_w$ , est arbitrairement pris à 180 (cf. Section 2.3), qui aboutit à un écoulement particulièrement documenté [32, 34]. Le fait de prendre de très fortes vitesses d'écoulement ( $Mach = 0.2$ ) permet alors de considérer un canal de taille limitée. Dans ces conditions d'écoulement, la demi-hauteur du canal est évaluée à  $h = 1.15 \times 10^{-4}m$ .

Afin que les plus petites structures de l'écoulement soit correctement capturées grâce à un maillage très raffiné, le nombre de points ainsi que les dimensions du domaine de calcul ont été choisies en accord avec les recommandations disponibles dans la littérature concernant le canal

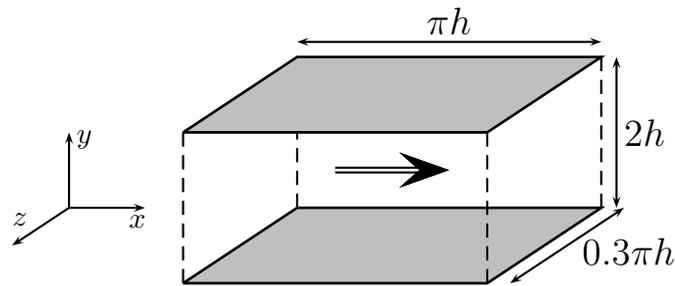


FIG. 8.7 – Configuration de canal plan turbulent étudié

minimal [29]. Celles-ci indiquent que la longueur du domaine de calcul, en unité de paroi  $L_z^+$ , doit être supérieure à 100, et celle dans la direction de l'écoulement doit être supérieure à une limite identifiée autour de 250 – 350. Les dimensions ainsi que le nombre de nœuds par direction est mis en évidence dans le Tableau 8.3.

Direction	X	Y	Z
Longueurs domaine	$L_x = \pi h$	$L_y = 2h$	$L_z = 0.3\pi h$
Longueurs en unité de paroi	$L_x^+ = 560$	$L_y^+ = 360$	$L_z^+ = 160$
Nombre de nœuds	$N_x = 17$	$N_y = 130$	$N_z = 33$
Distribution des nœuds	uniforme	variable en tanh	uniforme
Distance adimensionnée	$\Delta_x^+ = 35$	$\Delta_y^+ = 0.9$ (paroi) $\Delta_y^+ = 5$ (centre)	$\Delta_z^+ = 5$

TAB. 8.3 – Récapitulatif des données clé du maillage DNS

Rappelons que les longueurs sont adimensionnées par la longueur caractéristique des échelles turbulentes à la paroi :  $y_\tau = \nu_w / U_\tau$  (cf. Section 2.2).

Afin de maintenir un frottement constant en moyenne aux parois, correspondant à  $Re_\tau = 180$ , un terme source est ajouté à l'équation de quantité de mouvement résolue dans le code de calcul. Celui-ci est de la forme :

$$S_{qdm} = \frac{\tau_w}{h} = \frac{3.02 \times 10^{-3} \rho_c U_c^2}{h} \quad (8.26)$$

L'apport en énergie de ce terme source est ajouté à l'équation de l'énergie en le multipliant par la vitesse.

La convergence de la partie dynamique de ce calcul a été obtenue rapidement, car au lieu de démarrer d'un champ initial à vitesse nulle, une solution existante sur cette configuration a été utilisée initialement.

La Figure 8.8 montre par l'inspection de quelques grandeurs-clés de l'écoulement que la convergence du canal est bien atteinte.

La partie dynamique de l'écoulement a été validée par le tracé des profils de vitesse moyenne adimensionnée en fonction de la distance à la paroi adimensionnée, visible sur la Figure 8.9 (gauche). Ceci permet de bien retrouver la loi logarithmique standard, Eq. (3.10), avec les constantes adaptées aux faibles nombres de Reynolds :  $u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.5$ , dont les constantes, auparavant introduites comme  $\kappa = 0.415$  et  $C_{u,0} = 5.32$ , ont été ajustées aux faibles nombres

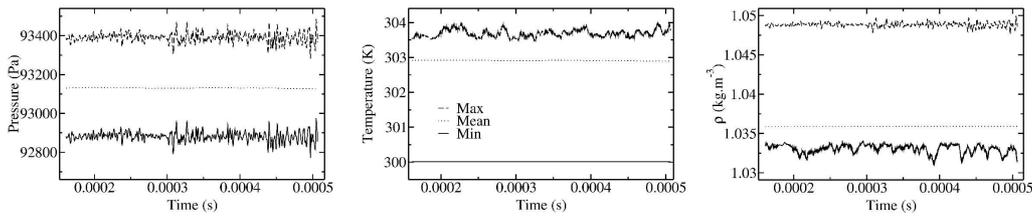


FIG. 8.8 – Evolution temporelle des quantités moyennes, minimum et maximum au cours du calcul

de Reynolds de l'écoulement ( $\kappa = 0.4$  et  $C_{u,0} = 5.5$ ). Le tracé des fluctuations adimensionnées (Figure 8.9 – droite) nous montre que l'on retrouve bien les données de la DNS de Kim et al. [34] qui font office de référence pour ce calcul (ces données sont dénotées par KMM sur le graphe). Les écarts qui apparaissent peuvent être dus à la taille relativement étroite du canal, qui ne permet pas de bien reproduire les fluctuations sur  $w^+$ .

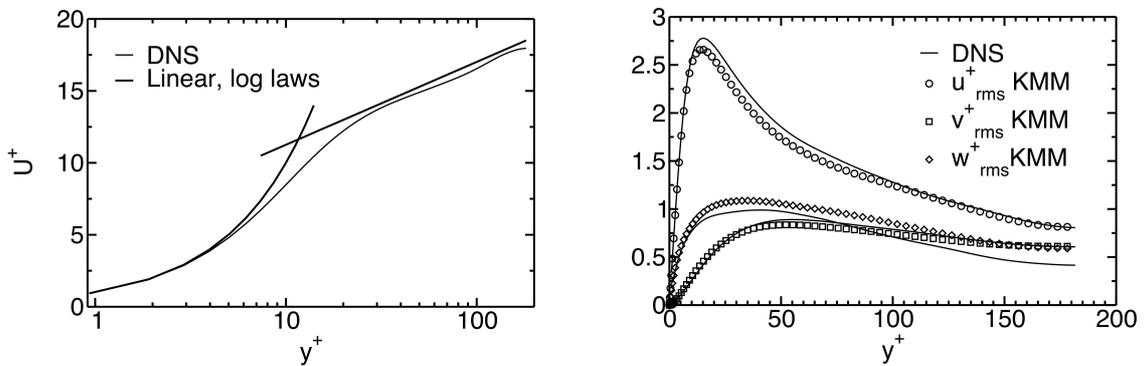


FIG. 8.9 – Vitesses moyenne (gauche) et RMS (droite) adimensionnées sur une demi-hauteur de canal

### 8.4.2 Mode de forçage des espèces fictives

L'aspect auquel a été accordé le plus d'importance est la représentativité du calcul par rapport aux situations réelles connues de l'industrie en termes d'étude des flux de chaleurs pariétaux. On peut envisager physiquement les deux cas suivants.

#### Variation temporelle par les conditions extérieures

La situation la plus naturelle est celle où une paroi à température constante est balayée par un fluide alternativement chaud ou frais. On retrouve ce genre de situations dans les chambres de combustion de turbines à gaz par exemple, dans lesquelles la position de la flamme peut osciller, ou encore, dans les problématiques de Tés de mélange, couramment rencontrés dans l'industrie nucléaire. Localement, dans les ces cas, il peut y avoir une alternance de poches de gaz frais et chauds.

La simulation d'une telle situation a été réalisée en pulsant la moitié supérieure du canal, grâce

à un terme source  $S(t)$  :

$$S_k(t) = 2\rho(y - y_c) \frac{Y_{k_{ref}} - \langle Y_k \rangle}{\tau_k} \quad (8.27)$$

La grandeur  $\langle Y_k \rangle$  représente la valeur moyenne volumique sur tout le domaine de calcul de la fraction massique  $Y_k$ , tandis que  $Y_{k_{ref}}$  est la valeur cible, qui évolue au cours du temps comme :

$$Y_{k_{ref}} = 2000 + A_k \sin(\omega_k t) \quad (8.28)$$

Le facteur  $(y - y_c)$  permet d'avoir un terme source progressif, en fonction de la distance au centre, et tel que celui-ci s'annule au centre, et devient maximum près de la paroi haute. Cela permet d'avoir toute la moitié basse du canal qui n'est pas affectée par le terme source, et où l'équation (8.1) est résolue directement. Le flux de l'espèce sur la paroi haute est fixe et nul, ce qui évite que la quantité d'espèce introduite par le terme source ne soit en grande partie diffusée par le gradient pariétal. En d'autres termes, cela signifie qu'il n'y a pas variation de masse. Si l'on fait l'analogie avec la température, cela implique que l'on considère une paroi adiabatique.

La paroi basse, qui est la paroi d'observation, a pour spécificité que la valeur pariétale de  $Y_k$  est fixée à 500 et le flux d'espèce à la paroi est déduit de la simulation. Les alternances de poches à respectivement forte ou faible concentration d'espèce sont alors imposées par l'évolution au centre du canal de la grandeur  $Y_k$ . Le terme source qui est imposé plus haut dans le canal, a pour conséquence un signal de  $Y_k$  au centre du canal qui varie autour de 1000. Le choix de l'amplitude  $A_k$  sera explicité plus tard afin d'imposer des variations significatives.

Un schéma récapitulatif est proposé en Figure 8.10.

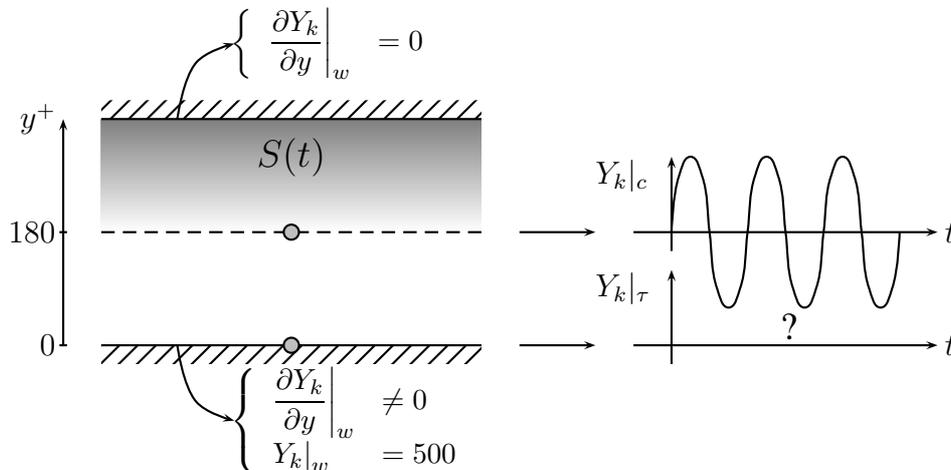


FIG. 8.10 – Forçage par l'extérieur

L'intérêt de ce montage numérique est d'obtenir une situation comparable à celle que peut subir une cellule de calcul LES proche de la paroi. En effet, l'ordonnée du centre du canal est de l'ordre de  $y^+ = 180$ , valeur du même ordre de grandeur qu'une ordonnée de centre de cellule pariétale dans une simulation avec utilisation d'un modèle de paroi.

Par cette simulation numérique directe, nous allons donc tenter de comprendre le comportement instationnaire de la diffusion au sein d'une cellule de calcul, lorsque celle-ci est soumise à de fortes variations de température. Ainsi ces phénomènes, qui sont « cachés » par l'utilisation d'un modèle de paroi, sera mis en lumière par les résultats numériques de cette simulation.

### Variation temporelle au niveau de la paroi

La situation inverse peut aussi être envisagée, où ce sont les conditions directement à la paroi qui changent. En effet, dans les calculs d'aérothermique de l'industrie nucléaire, la température de paroi est une variable susceptible d'être soumise à des variations temporelles. La prise en compte du problème couplé est alors nécessaire.

Ainsi, en ce qui concerne le calcul de canal plan, Figure 8.11, nous considérons une condition limite pour l'espèce  $k$  qui pulse directement la fraction massique  $Y_k$  par le biais d'un signal sinusoïdal de la forme  $2 + A_k \sin(\omega_k t)$ . A la paroi opposée, une fraction massique imposée constante et nulle, permet d'avoir en moyenne sur l'ensemble d'une phase un gradient d'espèce  $k$  (puisque la fraction massique varie de 0 à 2).

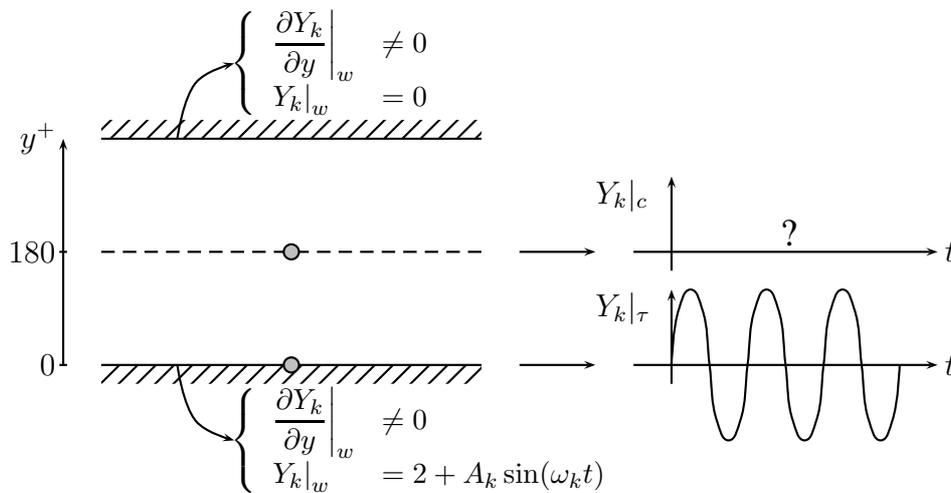


FIG. 8.11 – Forçage par la paroi

### 8.4.3 Paramètres de forçage

#### Fréquences

Le choix des fréquences représentatives de la configuration simulée est issu de considérations sur les écoulements oscillants mais aussi des temps de restitution de la DNS qui se doivent de rester raisonnable.

Si le fait d'imposer une fréquence élevée permet un temps de restitution faible pour l'obtention d'un nombre de cycles permettant d'établir des statistiques, en revanche, celle-ci peut ne pas être représentative de la physique que l'on souhaite simuler.

C'est en cela que la brève étude bibliographique (cf. Section 7.2) sur les écoulements oscillants nous permet d'établir des fréquences identifiées comme critiques, car délimitant des domaines de comportement aux propriétés différentes. On sait ainsi que les fréquences faibles donneront lieu à des écoulements quasi-stationnaires. Les fréquences d'intérêt correspondent donc à la zone tampon, mise en évidence au paragraphe 7.2, où la dynamique d'un écoulement devient quasi-laminaire. C'est pour cela que les fréquences choisies correspondent approximativement à cet

intervalle tampon, c'est-à-dire à des pulsations réduites  $\omega^+$  entre 0.01 et 0.05. Les valeurs plus précises sont données dans le Tableau 8.4.

$F (H_z)$	$\omega^+$
50000	$5.6 \times 10^{-2}$
25000	$2.8 \times 10^{-2}$
12500	$1.4 \times 10^{-2}$

TAB. 8.4 – Fréquences en jeu dans la DNS

Compte tenu des temps de restitution pour avancer le calcul sur un nombre de périodes (convergence, puis statistiques), il était difficile d'atteindre des fréquences plus faibles que  $12500H_z$ .

Remarque : les résultats concernant les écoulements pulsés sont par analogie utilisés ici, mais sans garantie *a priori* que les pulsations choisies arbitrairement correspondent à la gamme de fréquences intéressantes en termes d'analyse des modèles de paroi pour l'aspect thermique. En effet, les effets thermiques ont des fréquences caractéristiques généralement plus faibles. Néanmoins, on peut penser que l'ordre de grandeur des fréquences caractéristiques dans le cas pulsé dynamiquement ou thermiquement reste le même.

De plus, les fréquences choisies doivent pouvoir représenter des basses fréquences de l'écoulement, comme c'est le cas pour des phénomènes de battement de jet ou encore les fluctuations de température en proche paroi. A cause de la dimension très réduite du domaine de calcul, les fréquences caractérisant la turbulence sont relativement élevées, on ne peut donc pas comparer directement ces fréquences aux fréquences physiques de tels phénomènes. On peut en revanche calculer une fréquence adimensionnée, qui compare la fréquence du forçage ou du phénomène physique à observer, à la fréquence caractéristique de la convection dans la configuration étudiée. C'est la définition du nombre de Strouhal :

$$St = \frac{fD}{U} \quad (8.29)$$

où  $D$  et  $U$  sont respectivement une longueur et une vitesse caractéristique (grandeurs moyennes). Dans le cas étudié ici, les fréquences considérées correspondent à des nombres de Strouhal entre 0.1 et 0.4. Ces valeurs sont assez représentatives de phénomènes dits basses fréquences, dans la littérature.

Ces considérations nous confortent ainsi dans la représentativité de phénomènes à basses fréquences dans la configuration qui est étudiée.

### Amplitudes

Pour ce qui est de la configuration de forçage des conditions extérieures, les amplitudes ont été choisies de telle sorte qu'une amplitude soit assez forte pour que le signal de  $Y_k$  au centre du canal varie significativement entre les valeurs correspondant à une température de gaz frais (500) et de gaz brûlés (2000). En guise de témoin, une amplitude plus faible, d'un ordre de grandeur environ, a aussi été retenue pour le calcul.

En ce qui concerne le forçage par la paroi, deux amplitudes ont été testées : une assez faible pour ne pas générer de changement de signe dans le flux de l'espèce  $k$  à la paroi, une autre plus

élevée avec changement de signe du flux qui impose des variations plus marquées dans le temps. Il convient ici de noter que l'amplitude critique pour l'existence d'une alternance entre flux positifs et négatifs est dépendante à la fréquence de variation que l'on impose.

#### Critère de retournement

De la même manière qu'une condition de non-retournement de fluide peut être exprimée pour un écoulement pulsé, on peut rapporter cette expression au cas de scalaire passif de façon logique.

Dans l'équation (7.2), l'amplitude d'oscillation était adimensionnée par la vitesse de frottement  $U_\tau$  puis comparée à la valeur de  $1/\sqrt{\omega^+}$ . Ici, l'amplitude de l'oscillation de  $Y_k$  est adimensionnée de la même manière par  $Y_{k,\tau}$ . Le critère de non-retournement, ici de non-changement de signe du flux d'espèce pariétal, devient :

$$\frac{A_k}{Y_{k,\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^+}} \quad (8.30)$$

Une valeur indicative de  $Y_{k,\tau}$  peut être calculée *a posteriori*, de telle sorte que l'on puisse choisir de façon raisonnable les amplitudes à mettre en œuvre, et vérifier un tel critère. Sans aucun forçage (amplitude à 0), et avec les conditions pariétales conformes à la configuration d'excitation par la paroi, on obtient :

$$Y_{k,\tau} = 4.5 \times 10^{-2}$$

Pour chacune des fréquences choisies, on peut ainsi déterminer le critère de changement de signe du flux d'espèce. Les amplitudes critiques  $A_c$  calculées sont présentées dans le Tableau 8.5.

$F (H_z)$	$A_c$
50000	0.19
25000	0.27
12500	0.38

TAB. 8.5 – Amplitudes critiques pour le changement de signe du flux pariétal d'espèce

Afin de garder les mêmes amplitudes pour chacune des fréquences traitées, deux amplitudes seront prises en compte : l'une n'autorisant pas de changement de signe du flux ( $A_1 = 10^{-1}$ ), l'autre si ( $A_2 = 10$ ). Remarque : le choix de l'amplitude  $A_2$ , nous le verrons par la suite, peut être critiqué dans le sens où la consigne ainsi imposée à la paroi semble être trop forte. Néanmoins, cela correspond bien à un écoulement avec changement de signe du flux pariétal du scalaire passif.

### Récapitulatif des simulations réalisées

Le Tableau 8.6 offre un synoptique des espèces fictives ayant été introduites dans les DNS réalisées, et dont les résultats sont décrits et analysés au cours de la section suivante. Au total, trois DNS ont été réalisées, mettant en œuvre ce forçage aux trois fréquences précédemment citées : 50000, 25000 et 12500  $H_z$ . Dans le Tableau 8.6, les deux termes sources, dénotés par faible et fort, correspondent respectivement aux deux amplitudes de variation de  $Y$  au centre du canal : 50 et 500.

	Forçage	C.L. : $y = -h$	C.L. : $y = h$	Terme source	Amplitude
$Y_0$	aucun	$Y_0 _w = 2$	$Y_0 _w = 0$	aucun	
$Y_1$	paroi	$Y_1 _w = 2$	$Y_1 _w = 0$	aucun	0.1
$Y_2$	paroi	$Y_2 _w = 2$	$Y_2 _w = 0$	aucun	10
$Y_1$	ext.	$Y_1 _w = 500$	$\frac{\partial Y_1}{\partial y} _w = 0$	oui	faible
$Y_2$	ext.	$Y_2 _w = 500$	$\frac{\partial Y_2}{\partial y} _w = 0$	oui	fort

TAB. 8.6 – Récapitulatif des DNS réalisées

## 8.5 Résultats numériques

Comme expliqué précédemment, l’analogie entre la température à nombre de Prandtl égal à 1 et les scalaires passifs à nombre de Schmidt égal à 1 aussi peut être vérifiée. La Figure 8.12 nous montre que la corrélation de Kader pour un nombre de Prandtl de 1 est bien vérifiée par une espèce fictive qui n’est pas pulsée temporellement (espèce  $Y_0$  du Tableau 8.6). Notons que

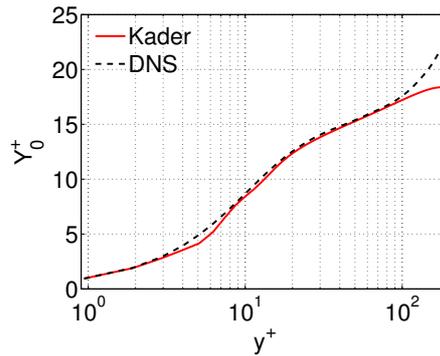
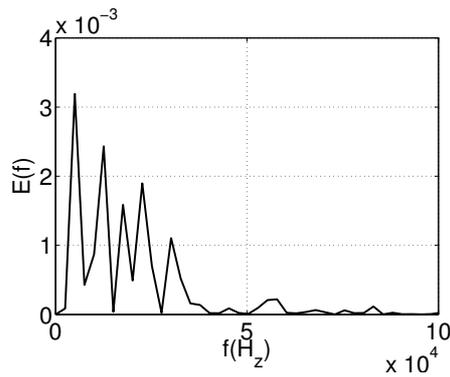


FIG. 8.12 – Profil de fraction massique adimensionnée  $Y_0^+$  pour le scalaire passif non pulsé

la présence d’un point d’inflexion dans le profil de  $Y_0$  a pour conséquence que la loi de Kader au centre n’est pas applicable. En effet, celle-ci prend en compte les écoulements de canaux ou conduites, tels que la dérivée de  $T$  au centre du canal soit nulle. Or, la dérivée de  $Y_0$  n’est pas nulle au centre du canal, à cause du point d’inflexion. En revanche, sur tout le reste de la couche limite, les profils issus de la DNS sont en accord avec la corrélation de Kader.

Le signal décomposé en fréquence de la Figure 8.13 de  $Y_\tau$  au cours du temps pour cette espèce non pulsé servira par la suite de point de comparaison pour l’analyse des fréquences caractéristiques de l’écoulement.

Tous les résultats qui seront présentés par la suite sont des données moyennées spatialement, dans les plans d’homogénéité que sont les plans parallèles aux parois du canal. Dans les deux configurations de forçage, on ne s’intéresse qu’à la moitié inférieure du canal. De plus, les profils de moyenne de phase qui seront montrés plus loin, ont été réalisés pour huit phases au cours d’une même période  $T$  de l’oscillation, soit prises à chaque  $T/8$ .

FIG. 8.13 – Transformée de Fourier du signal DNS :  $Y_\tau = f(t)$  pour un scalaire passif non pulsé

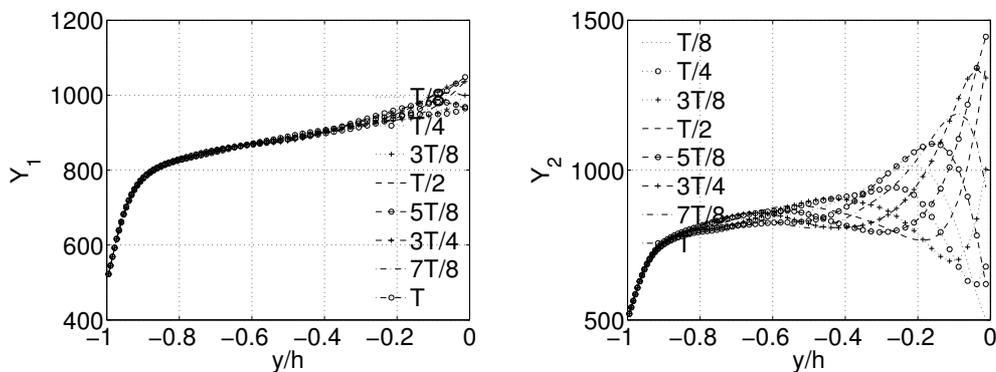
### 8.5.1 Forçage par les conditions extérieures

$$f = 50000H_z$$

Les résultats obtenus avec un forçage à la fréquence la plus élevée, soit  $f = 50000H_z$ , sont tout d'abord analysés. La Figure 8.14 montre les profils de fraction massique pour les traceurs étudiés, l'un variant avec une faible amplitude  $Y_1$ , l'autre avec une forte amplitude  $Y_2$ .

Le forçage à faible amplitude a un effet assez limité sur la distribution de l'espèce au travers de cette moitié inférieure du canal. En revanche, on vérifie que les variations obtenues au centre du canal avec la forte amplitude, correspondent bien à des écarts d'environ 500 par rapport à la valeur moyenne (qui est légèrement en-deçà de 1000). De plus il semble que la pénétration de l'oscillation depuis le centre du canal vers la paroi soit assez grande devant l'épaisseur de la couche limite.

Les profils adimensionnés (Figure 8.15) nous confortent dans le fait que la distribution de fraction massique de l'espèce variant faiblement n'est pas significativement influencée par le forçage. En effet, on peut admettre que la corrélation de Kader pour un nombre de Prandtl de 1 est représentative de la situation. Au contraire, la zone logarithmique pour la seconde espèce est plus affectée notamment pour un  $y^+$  entre 100 et 200. Mais l'effet est totalement amorti en dessous de  $y^+ \approx 50$ .

FIG. 8.14 – Profils de  $Y_k$ , forçage à  $f = 50000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

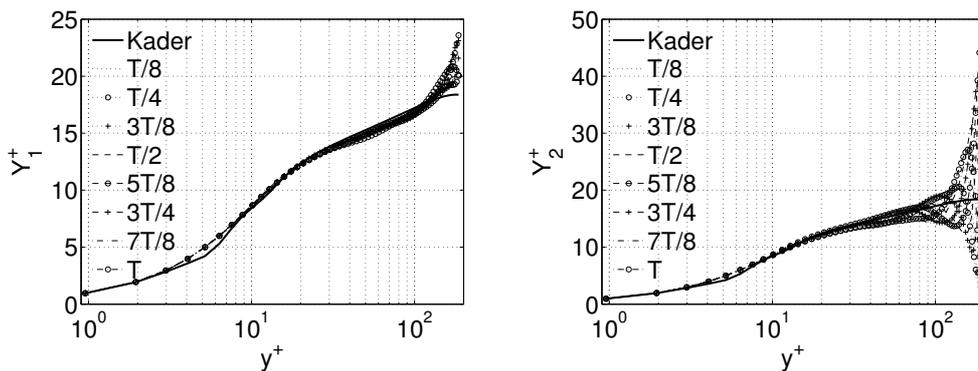


FIG. 8.15 – Profils de  $Y_k^+$ , forçage à  $f = 50000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

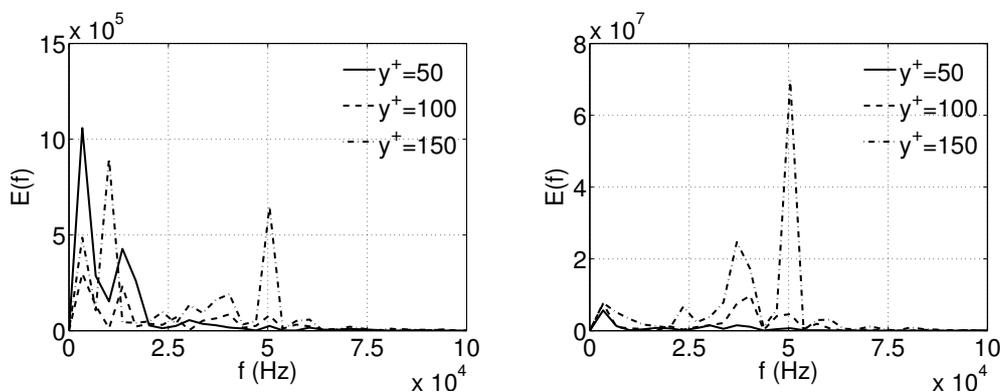


FIG. 8.16 – Transformées de Fourier des signaux temporels de  $Y_k$  à  $y^+ = 50, 100$  et  $150$ , forçage à  $f = 50000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

Ce résultat est corroboré par les transformées de Fourier des signaux temporels obtenus par des sondes à trois distances à la paroi :  $y^+ = 50, 100$  et  $150$  (Figure 8.16).

On peut voir qu'à  $y^+ = 150$ , c'est-à-dire proche du centre du canal, on note un pic à la fréquence exacte de  $50000H_z$ . Dans le cas de forçage à forte amplitude, ce pic est dominant par rapport aux autres fréquences, contrairement au cas de faible amplitude. A une distance à la paroi plus faible,  $y^+ = 100$ , aucun pic n'est visible pour l'espèce  $Y_1$ , alors que pour  $Y_2$ , il reste un pic à  $f = 50000H_z$ , qui correspond au forçage de la zone externe. Néanmoins, son influence est largement amortie par rapport à l'ordonnée  $y^+ = 150$ . Enfin, à  $y^+ = 50$ , il est impossible de dénoter une influence visible de l'oscillation imposée par les conditions extérieures.

Pour cette fréquence de  $50000H_z$ , on conclut que l'amortissement entre le centre du canal et la paroi est tel qu'on n'a pas d'influence du forçage des conditions loin de la paroi, sur les données pariétales. Ceci est confirmé par la transformée de Fourier du signal temporel de  $Y_{k,\tau}$ , tracée sur la Figure 8.17 pour les deux amplitudes de variation. Cette grandeur n'est sensible au forçage des conditions extérieures, pour aucune des deux espèces fictives. Ces courbes sont à comparer avec celles de la Figure 8.13, qui représente la même grandeur, pour l'espèce témoin non pulsée.

Ce constat ne signifie pas pour autant que les effets instationnaires sont négligeables et que l'écoulement près de la paroi peut être bien représenté par une approche stationnaire (Chapitre 9).

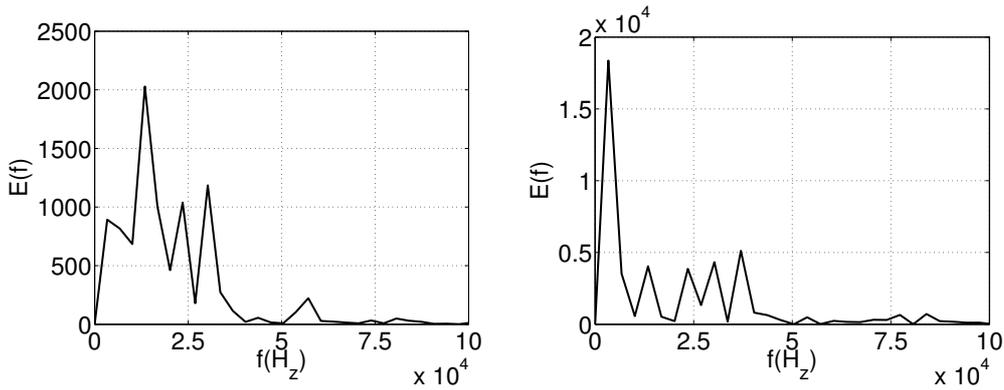


FIG. 8.17 – Transformée de Fourier des signaux DNS :  $Y_{k,\tau} = f(t)$ , pour la fréquence  $50000H_z$

$f = 25000H_z$

Les figures présentées dans ce paragraphe sont les analogues aux précédentes, sauf en ce qui concerne la fréquence imposée dans la moitié supérieure du canal, qui est deux fois moindre. Cette fréquence constitue un intermédiaire entre la fréquence la plus élevée et la plus faible qui sont analysées dans ce document.

Les courbes de moyenne de phase des profils dimensionnés de fraction massique, cf. Figure 8.18, nous montrent que la distribution des deux espèces pulsées respectivement avec une forte et une faible amplitude a sensiblement varié par rapport au cas à  $50000H_z$ .

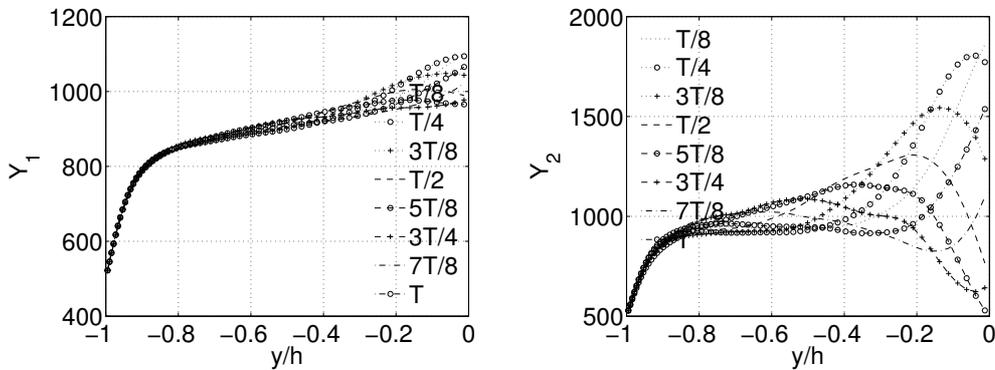


FIG. 8.18 – Profils de  $Y_k$ , forçage à  $f = 25000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

Au vu des courbes précédentes, ainsi que des profils adimensionnés, Figure 8.19, la pénétration des oscillations a augmenté en divisant la fréquence de pulsation par 2. Ceci met en évidence la sensibilité du comportement des traceurs dans la couche limite, par rapport à la fréquence de forçage.

Sur les transformées de Fourier des signaux temporels à trois coordonnées différentes (Figure 8.20), un pic à  $25000H_z$  apparaît plus clairement pour  $y^+ = 100$ , dans le cas de variation à forte amplitude.

La présence d'un pic, bien que de très faible intensité, sur la transformée de Fourier de  $Y_{k,\tau}$  pour

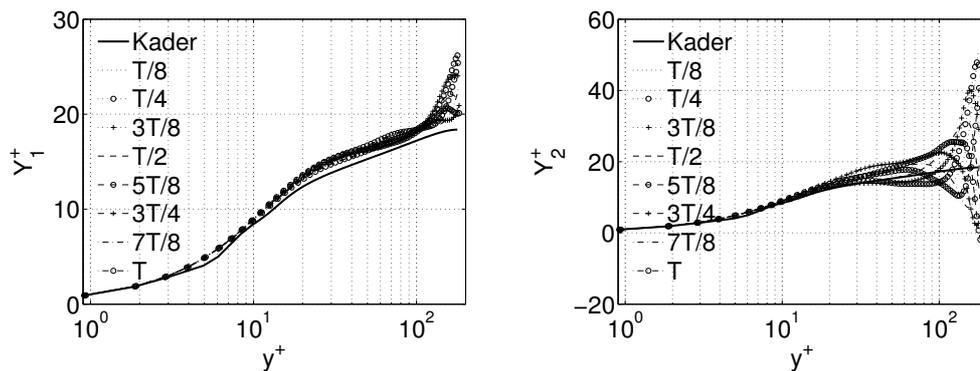


FIG. 8.19 – Profils de  $Y_k^+$ , forçage à  $f = 25000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

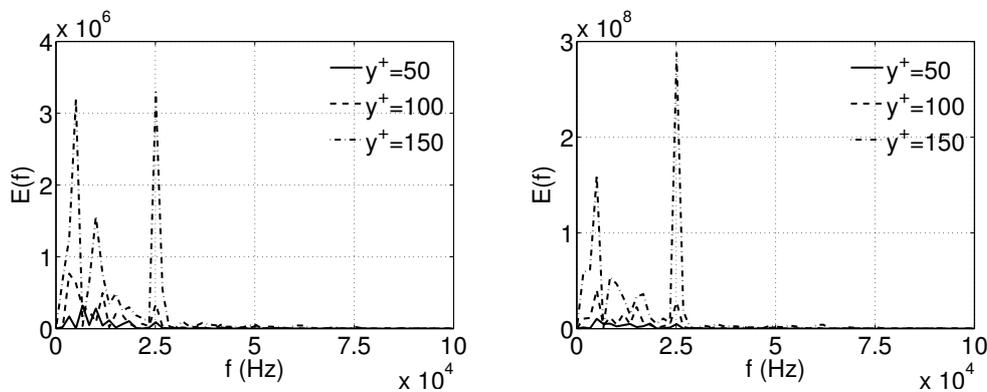


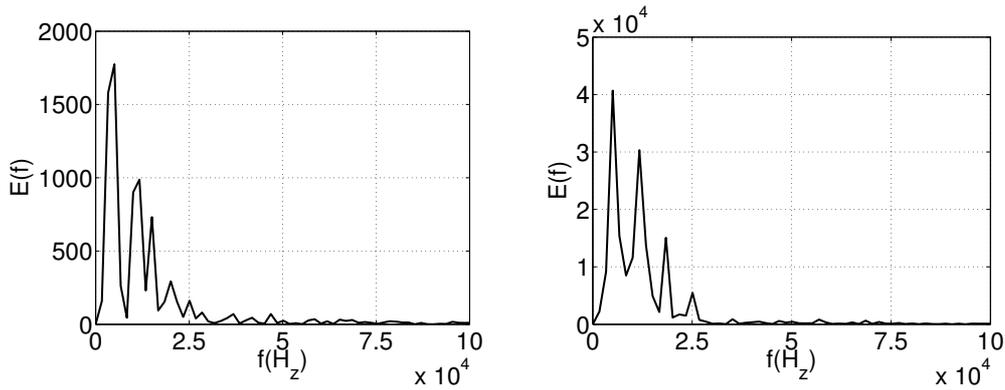
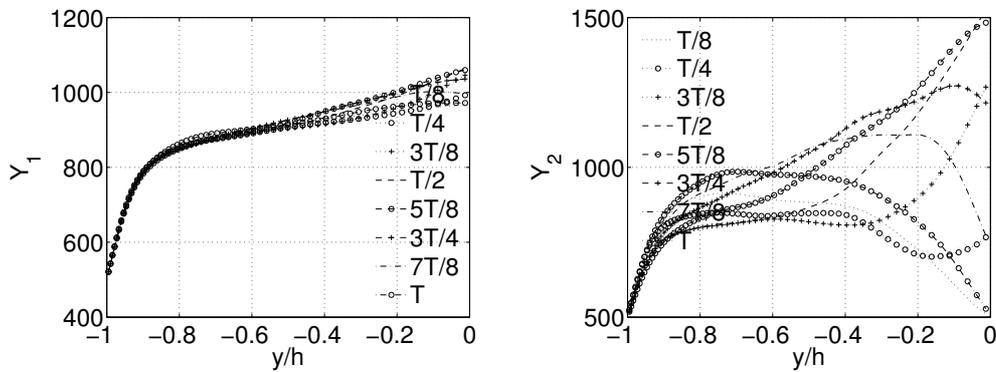
FIG. 8.20 – Transformées de Fourier des signaux temporels de  $Y_k$  à  $y^+ = 50, 100$  et  $150$ , forçage à  $f = 25000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

l'espèce variant fortement, laisse penser que l'influence des oscillations extérieures pourraient arriver jusqu'à la paroi, pour une fréquence de forçage plus forte, ou encore pour des variations plus importantes.

### $f = 12500H_z$

Les profils de fraction massique de la Figure 8.22 montrent une influence du forçage plus importante que pour les deux fréquences précédentes. Plus précisément pour le cas de forte amplitude de variations, on observe que les résultats au cours d'un cycle sont plus éparpillés, et ce jusqu'à la paroi. Les courbes adimensionnées (Figure 8.23), en revanche, ne diffèrent que légèrement des précédentes, à cause de l'échelle logarithmique.

Néanmoins, les transformées de Fourier des signaux à différentes ordonnées de la Figure 8.24 montrent bien que le forçage à  $12500H_z$  est assez différent du cas à  $50000H_z$ . En effet, la pénétration des oscillations extérieures est plus élevée, et l'on observe que les signaux temporels du flux pariétal d'espèce (Figure 8.25) font apparaître un pic à la fréquence  $f = 12500H_z$ , ce qui n'était pas le cas pour les cas précédents. Même si ce pic est d'intensité limitée par rapport aux basses fréquences de la turbulence de couche limite, il confirme le fait qu'un forçage de l'écou-

FIG. 8.21 – Transformée de Fourier des signaux DNS :  $Y_{k,\tau} = f(t)$ , pour la fréquence  $25000H_z$ FIG. 8.22 – Profils de  $Y_k$ , forçage à  $f = 12500H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

lement lointain de la paroi, sous certaines conditions de fréquence et d'amplitude, peut influencer l'écoulement très proche de la paroi ainsi que les grandeurs pariétales.

### Épaisseur de pénétration des oscillations

Dans ce cas de forçage où les oscillations sont imposées loin de la paroi, il est possible d'évaluer une distance de pénétration de façon analogue à l'épaisseur de Stokes (décrite en Section 7.3), telle que la valeur de  $Y_k$  est amortie de  $e^{-1}$  par rapport à sa valeur au centre du canal. Étant donné que les oscillations sont générées par un terme source, la valeur moyenne n'est pas imposée au centre du canal, ce qui rend le calcul d'une telle épaisseur de pénétration approximatif. Néanmoins, une valeur approchée de cette grandeur a été obtenue grâce aux courbes  $Y_2$  des Figures 8.14, 8.18 et 8.22, que l'on peut tracer en fonction de  $1/\sqrt{\omega}$  (cf. Figure 8.26). Malgré le fait qu'il n'y ait pas une analogie directe entre cette configuration-là et le second problème de Stokes, on s'aperçoit que l'épaisseur de pénétration des oscillations semble bien proportionnelle à  $1/\sqrt{\omega}$ . De plus, le coefficient de proportionnalité  $\alpha$  entre cette épaisseur de pénétration et  $\omega^{-1/2}$  est de l'ordre de la viscosité laminaire ( $\alpha \approx 0.00322$  tandis que  $\sqrt{2\nu} \approx 0.0022$ ).

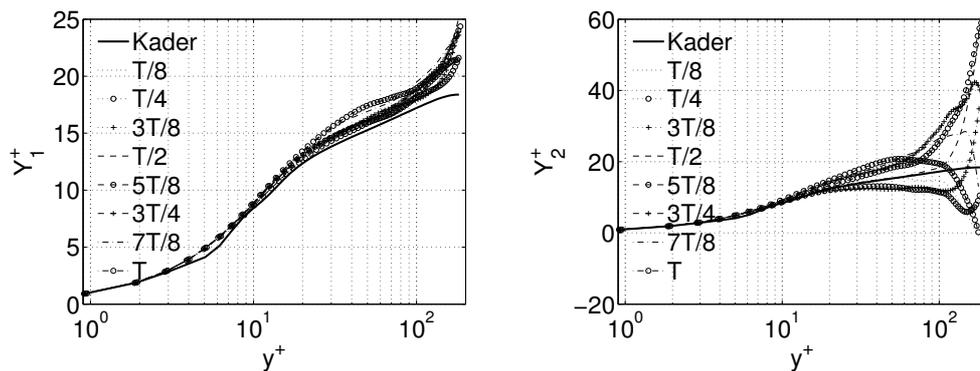


FIG. 8.23 – Profils de  $Y_k$ , forçage à  $f = 12500H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

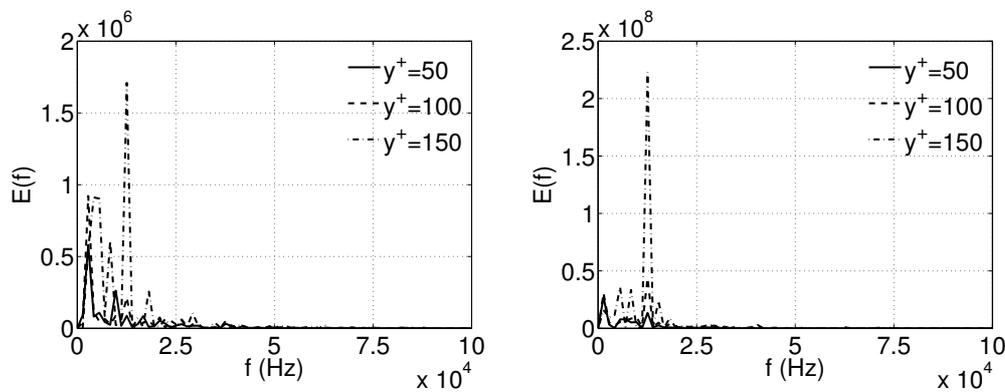


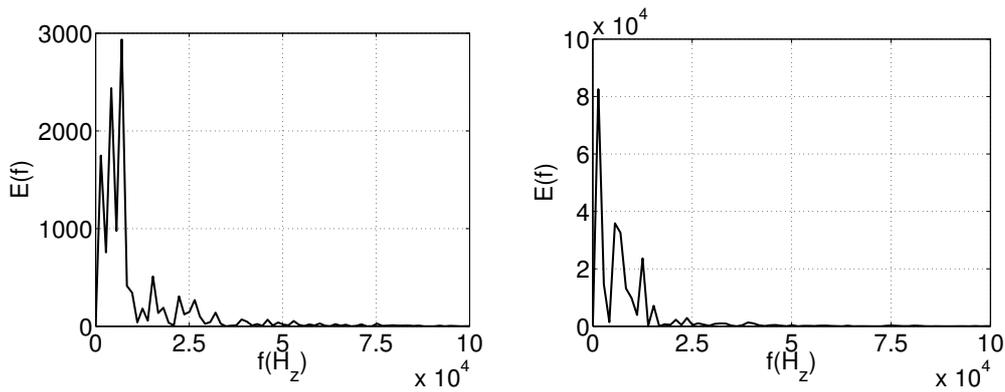
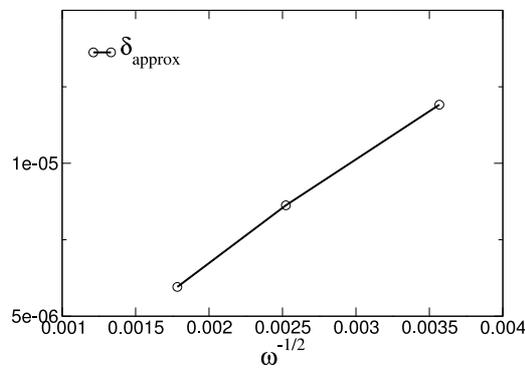
FIG. 8.24 – Transformées de Fourier des signaux temporels de  $Y_k$  à  $y^+ = 50, 100$  et  $150$ , forçage à  $f = 12500H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

### Conclusions

- A amplitude égale, la diminution de la fréquence imposée à l'écoulement externe entraîne une influence plus forte sur la distribution de fraction massique dans toute la moitié inférieure du canal, c'est-à-dire dans toute la couche limite.
- Une conséquence est que la corrélation de Kader reste valide uniquement dans une zone proche de la paroi (incluant la sous-couche visqueuse et une partie de la sous-couche tampon), mais n'est plus représentative au delà.
- Des variations d'amplitude représentatives des situations de transfert thermique (dans des réacteurs ou des chambres de combustion par exemple) ont un impact significatif sur les profils de  $Y_k$  comparé à la situation où les variations sont de plus faible amplitude.

### 8.5.2 Forçage par la paroi

Dans cette configuration, les profils de fraction massique varient entre 0 et 2 sur toute la hauteur du canal, et des oscillations de  $Y_w$  à la paroi inférieure sont imposées autour de 2, avec une amplitude très faible ( $A_1 = 10^{-1}$  correspondant à  $Y_1$ ) et une amplitude plus forte ( $A_2 = 10$ , correspondant à  $Y_2$ ).

FIG. 8.25 – Transformée de Fourier des signaux DNS :  $Y_{k,\tau} = f(t)$ , pour la fréquence  $12500H_z$ FIG. 8.26 – Valeurs de l'épaisseur de pénétration des oscillations en fonction de  $1/\sqrt{\omega}$ 

$f = 50000H_z$

Les profils de fraction massique d'espèce  $Y_1$  et  $Y_2$  sont affichés sur la Figure 8.27. Ces courbes montrent que l'influence d'une faible amplitude d'oscillation n'est pas significative en coordonnée externe. Dans le cas d'une forte amplitude de variation, l'impact du forçage sur les profils de fraction massique est plus important, mais reste cantonné à une zone proche de la paroi. Ici, cela correspond à une épaisseur adimensionnée par la demi-hauteur du canal de  $\delta_o/h = 0.4$ , soit autour de  $y^+ \approx 60$ . Au delà de cette épaisseur, toute variation est amortie.

La distribution de fraction massique adimensionnée (Figure 8.28) apporte des informations supplémentaires.

Pour le forçage de faible amplitude, les variations de la valeur pariétale de  $Y_1$  influent sur tout le profil, jusqu'à la zone logarithmique. Ceci est dû aux variations de  $Y_{k,\tau}$  qui imposent alors un adimensionnement sensiblement différent pour chaque phase d'un cycle. Au final, on a un éparpillement des profils de  $Y_k^+$  autour de la corrélation de Kader, qui ne semble pas représentative du comportement du traceur pulsé.

L'effet est bien sûr encore plus important pour le cas de forte amplitude. On a là des variations de près d'un ordre de grandeur sur  $Y^+$  en fonction de la phase au cours du cycle. De plus, les profils

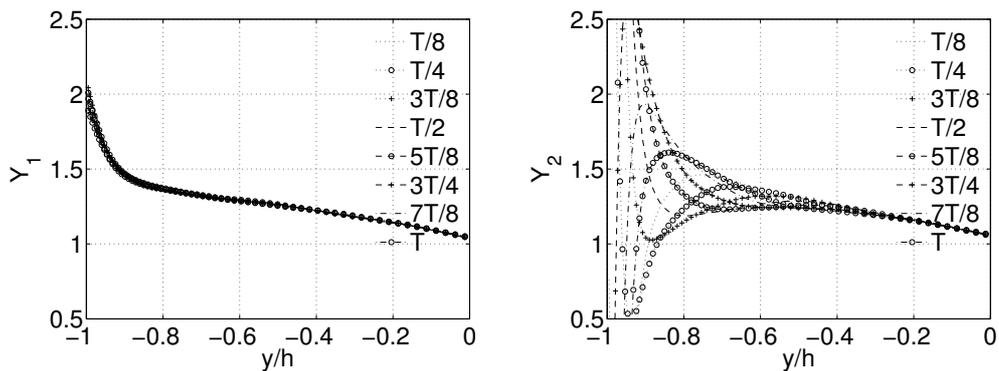


FIG. 8.27 – Profils de  $Y_k$ , forçage à  $f = 50000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

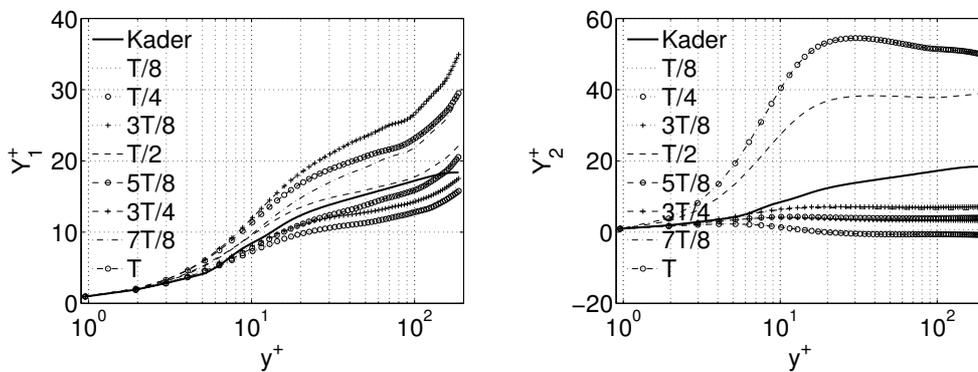


FIG. 8.28 – Profils de  $Y_k^+$ , forçage à  $f = 50000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

atteignent des valeurs négatives à certaines phases, ce qui implique l'existence d'un retournement, c'est-à-dire d'un changement de signe de  $Y_{k,\tau}$ , ce qui n'est pas le cas pour le forçage à faible amplitude. Ceci est cohérent avec le critère de retournement énoncé au Paragraphe 8.4.3.

Le spectre des signaux temporels à  $y^+ = 50, 100$  et  $150$ , dans le cas d'une faible amplitude d'oscillation, Figure 8.29, est quasiment identique au spectre du même écoulement non-pulsé, ce qui signifie que l'influence du forçage à ces ordonnées est négligeable. Pour ce qui est des variations plus fortes, on observe que la fréquence du forçage est la fréquence dominante de l'écoulement dans la sous-couche visqueuse et tampon, puis son influence décroît progressivement dans la zone logarithmique.

Ces résultats sont à comparer aux expériences numériques entreprises pour des fréquences respectivement divisée par 2 et 4.

$f = 25000H_z$

Comme pour le forçage à fréquence élevée, les effets instationnaires sur la distribution de fraction massique des traceurs restent confinés dans une zone de proche paroi, dont l'épaisseur a néan-

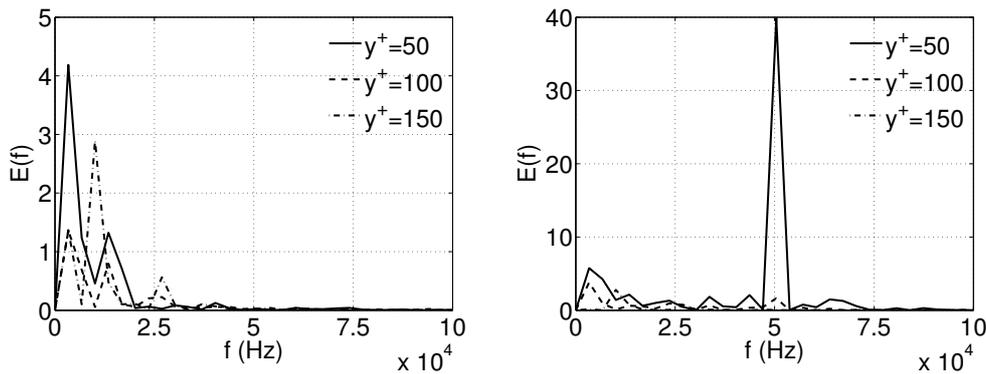


FIG. 8.29 – Transformées de Fourier des signaux temporels de  $Y_k$  à  $y^+ = 50, 100$  et  $150$ , forçage à  $f = 50000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

moins augmenté sensiblement (Figure 8.30). De même, les profils adimensionnés (Figure 8.31) nous montrent que les résultats au cours d'un cycle sont bien différents de la courbe donnée par la loi de Kader. La présence de valeurs négatives de  $Y_2^+$  confirme le fait que le flux de masse change de signe à certains moments du cycle, vérifiant ainsi le critère de retournement à nouveau.

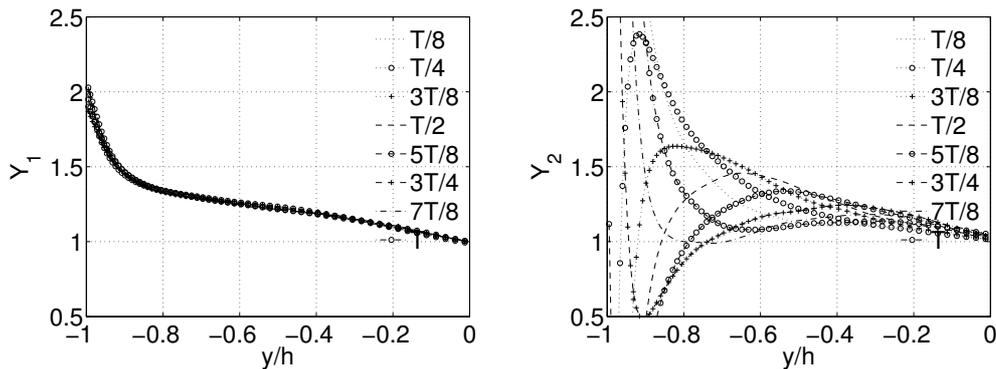


FIG. 8.30 – Profils de  $Y_k$ , forçage à  $f = 25000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

La Figure 8.32 permet de constater que le cas de faible amplitude de variation n'apparaît pas en terme de propriétés fréquentielles de l'écoulement, même pour la sonde située le plus près de la paroi (à  $y^+ = 50$ ). En revanche, de fortes amplitudes de variation (espèce 2) peuvent jouer un rôle jusqu'à la sous-couche tampon, voire la sous-couche logarithmique.

$f = 12500H_z$

L'inspection des courbes de  $Y_k$  (Figure 8.33) montre une pénétration des oscillations pariétales plus importante que pour les fréquences plus élevées, dans le cas d'une forte amplitude. Les profils adimensionnés (Figure 8.34), en revanche, montrent que dans le cas de faible amplitude, la baisse de la fréquence de forçage permet un regroupement des courbes de moyennes de phase autour de la corrélation de Kader. Comparé aux cas  $f = 25000H_z$  et  $50000H_z$ , on tend à se rapprocher du domaine de validité de cette formule, à savoir les écoulements stationnaires en moyenne. Cela se

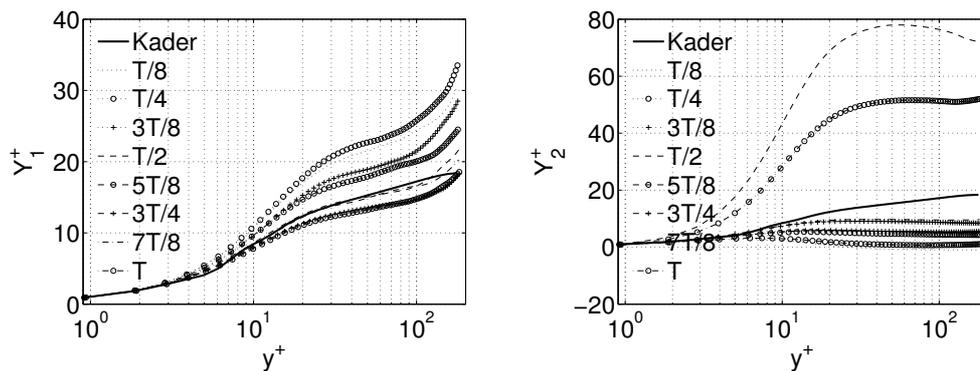


FIG. 8.31 – Profils de  $Y_k^+$ , forçage à  $f = 25000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

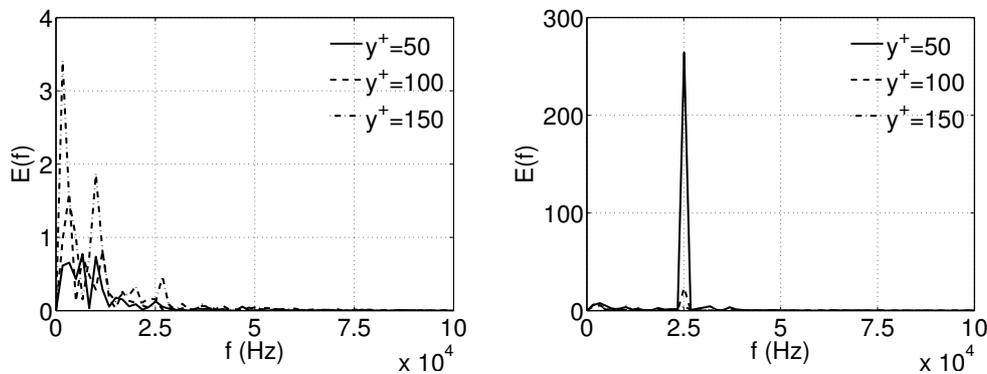


FIG. 8.32 – Transformées de Fourier des signaux temporels de  $Y_k$  à  $y^+ = 50, 100$  et  $150$ , forçage à  $f = 25000H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

retrouve bien pour l'espèce de faible variation d'amplitude pour laquelle les moyennes de phases tendent à moins s'éparpiller autour de la formule de Kader. En revanche, le cas à forte amplitude affiche des profils de  $Y_k^+$  toujours aussi éloignés de celle-ci.

Une analyse en fréquence des signaux à  $y^+ = 50, 100$  et  $150$  de la Figure 8.35 montre une nette domination de la fréquence de forçage par rapport aux autres fréquences de l'écoulement dans le cas de forte amplitude, et ce même dans la zone logarithmique. Ceci conforte le fait que la distance de pénétration des oscillations est considérablement plus grande que pour les autres fréquences imposées auparavant. Par contre, dans le cas de faible variation à la paroi, la fréquence  $12500H_z$  n'apparaît pas comme une des fréquences représentatives de l'écoulement, même au point d'ordonnée  $y^+ = 50$ .

### Epaisseur de Stokes

Afin de comparer les grandeurs caractéristiques de la pénétration des oscillations, de façon analogue à l'épaisseur de Stokes (cf. Section 7.3) dans le cas du second problème de Stokes, il est possible ici de calculer une distance, telle que la valeur de  $Y_k$  est amortie de  $e^{-1}$  par rapport à sa valeur pariétale. Une approximation de cette quantité par rapport aux courbes des Figures 8.27,

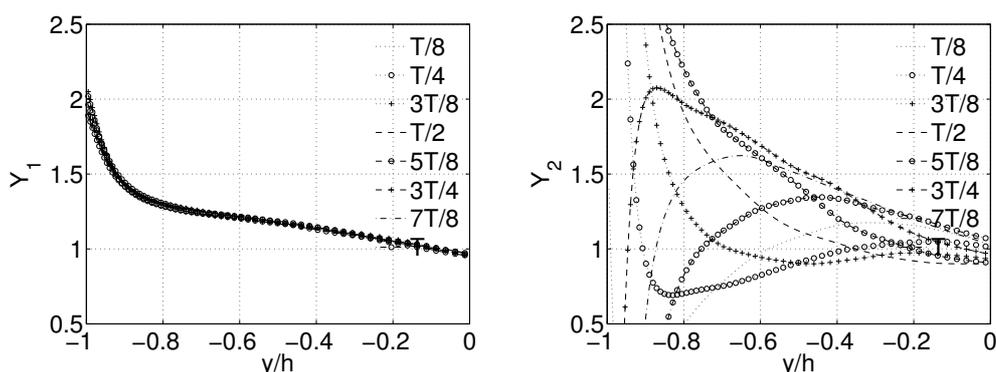


FIG. 8.33 – Profils de  $Y_k$ , forçage à  $f = 12500H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

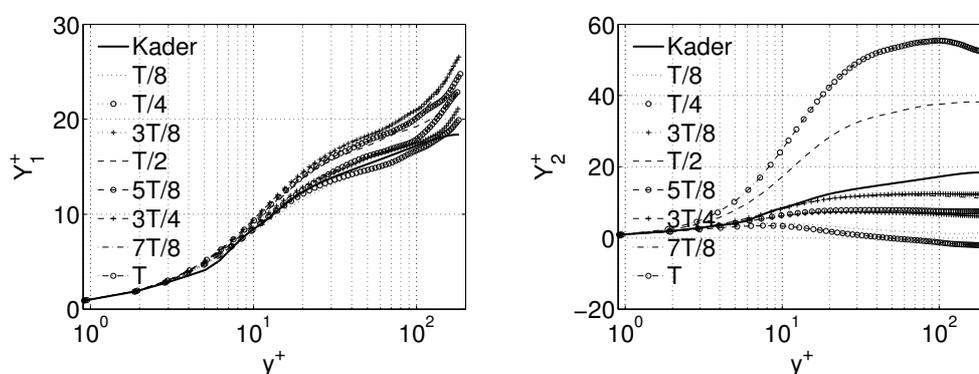


FIG. 8.34 – Profils de  $Y_k^+$ , forçage à  $f = 12500H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

8.30 et 8.33, peut être déduite. Les valeurs sont à comparer aux valeurs théoriques données par l'équation (7.5), et récapitulées dans le Tableau 8.7.

Fréq. de forçage ( $H_z$ )	$\delta/h = \left(\frac{2\nu}{\omega}\right)^{1/2} / h$	DNS
50000	$3.44 \times 10^{-2}$	$3.25 \times 10^{-2}$
25000	$4.87 \times 10^{-2}$	$4.30 \times 10^{-2}$
12500	$6.89 \times 10^{-2}$	$6.10 \times 10^{-2}$

TAB. 8.7 – Épaisseur de Stokes théorique du cas de paroi pulsée et valeur analogue obtenue par la DNS

Les valeurs obtenues montrent que l'analogie entre la dynamique (le problème de Stokes est pulsé en vitesse) et la fraction massique d'un scalaire passif peut être faite en première approximation pour estimer une épaisseur caractéristique de la pénétration pariétale dans l'écoulement. Cela rejoint le fait que l'on a pu déterminer analytiquement en Section 7.3 que l'épaisseur caractéristique des oscillations ne varie pas, même lorsque la valeur infinie est non nulle.

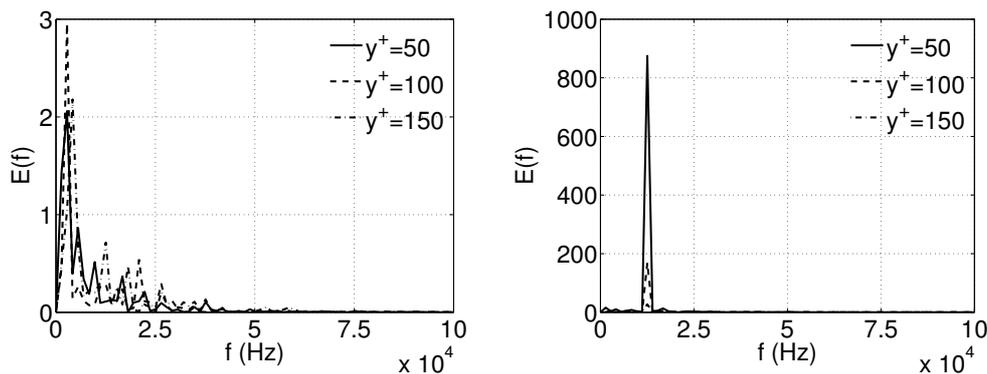


FIG. 8.35 – Transformées de Fourier des signaux temporels de  $Y_k$  à  $y^+ = 50, 100$  et  $150$ , forçage à  $f = 12500H_z$ , faible amplitude (gauche) et forte amplitude (droite)

### Conclusions

- L'espèce soumise à une faible amplitude de variation garde une distribution homogène de l'espèce au cours d'un cycle, indépendamment de la fréquence des oscillations imposées.
- Plus la fréquence imposée en paroi est faible, plus l'adimensionnement par  $Y_{k,\tau}$  est représentatif de l'écoulement de proche paroi et est en accord avec la loi de Kader. A l'opposé, plus la fréquence des oscillations augmente, et plus les profils adimensionnés par  $Y_{k,\tau}$  sont éparpillés autour de la corrélation expérimentale.
- L'analogie entre la solution analytique du second problème de Stokes et les courbes obtenus par forçage des conditions pariétales est approximativement supportée.

### 8.5.3 Conclusions sur les résultats dans les deux configurations

Comme nous avons pu le voir, les oscillations pariétales restent confinées dans une région proche de la paroi, qui s'épaissit lorsque la fréquence de forçage diminue. Ce point théorique est bien démontré grâce notamment à l'évaluation de l'épaisseur de cette région. Les oscillations provenant de l'écoulement externe, quant à elles, affectent plus fortement la distribution de l'espèce dans toute la couche limite. Ceci peut être attribué au fait que la convection par l'écoulement au centre du canal joue un rôle plus important dans le transport des scalaires passifs vers la paroi. En revanche, Les oscillations pariétales sont principalement communiquées au fluide environnant par diffusion.

Ainsi, les deux configurations envisagées sont soumises à des mécanismes différents, qui se retrouvent néanmoins dans les configurations réelles.

La quantité significative de résultats qui a été obtenue grâce à ces simulations numériques directes sont, au cours du Chapitre 9, prises comme données d'entrée pour l'étude de modèles de paroi en régime instationnaire. Le but sera d'établir les limites de validité des modèles analysés, et de comparer deux modèles sur leur précision.

## Chapitre 9

# Réponse dynamique des modèles de paroi

Les résultats obtenus par l'expérience numérique précédente ont montré que les phénomènes basses fréquences pouvaient avoir un effet assez varié au niveau de la paroi, lorsqu'une variation cyclique est imposée, et ce, qu'elle provienne de la paroi même ou bien de l'écoulement extérieur.

Ce chapitre tente de décrire l'impact de ces différentes phénoménologies sur la modélisation à la paroi, mais aussi la réponse temporelle que peuvent donner les modèles de paroi utilisés dans le domaine de la simulation aux grandes échelles.

Pour cela, deux modèles de paroi ont été retenus : la loi de paroi standard (Paragraphe 3.2.1), et le modèle TBLE sous sa forme incompressible (Paragraphe 3.2.3). Ce choix est motivé par le fait que nous souhaitons ici dissocier les effets de densité qui ont été pris en compte tout au long de la Partie II, des effets instationnaires. De plus, ceci permet d'utiliser de façon cohérente, les données issues des simulations numériques directes du Chapitre 8, qui ont permis d'étudier le comportement temporel de scalaires passifs pulsés dans deux configurations différentes.

### 9.1 Mise en œuvre des modèles hors code

#### 9.1.1 Principe du test numérique

Les deux modèles de paroi, loi de paroi standard et modèle TBLE, ont été implémentés dans le logiciel de mathématiques Matlab. Ce mode d'action permet de s'affranchir de toute influence du solveur d'équations Navier-Stokes, qui est habituellement utilisé en combinaison avec les modèles de paroi, et donc d'un coût CPU appréciable.

Les signaux temporels issus de l'expérience numérique du Chapitre 8 ont été utilisés en tant que conditions aux limites pour le fonctionnement des modèles de paroi. Ceux-ci sont au préalable moyennés en espace, par plans d'homogénéité (plans parallèles aux parois du canal plan), permettant ainsi d'éliminer au moins en partie les effets instationnaires dus aux fluctuations de fraction massique des scalaires passifs au sein de l'écoulement.

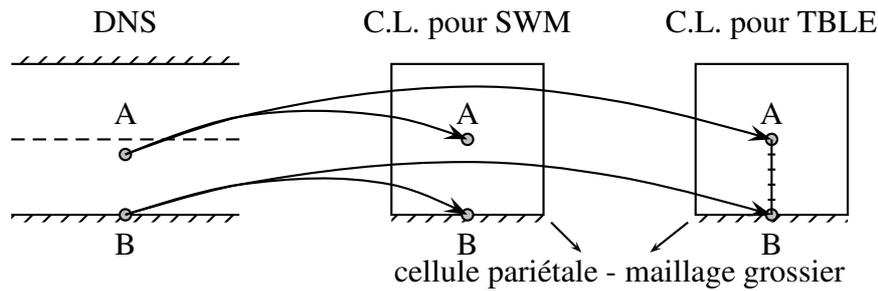


FIG. 9.1 – Schéma de principe du test hors-code et conditions aux limites des modèles de paroi

Les grandeurs temporelles qui sont nécessaires à la bonne prescription des conditions aux limites pour le modèle de paroi sont d'une part les signaux à la paroi, et d'autre part les signaux à une altitude représentative de la taille des cellules pariétales d'un calcul aux grandes échelles, soit autour de  $y^+ \approx 100$ . La Figure 9.1 montre le principe des tests hors-code qui ont été réalisés.

### 9.1.2 Résultats

Les valeurs en sortie des modèles de paroi, pour chaque point de calcul au cours du temps, sont représentés dans les graphes suivants. Les deux cas précédemment envisagés dans la simulation numérique directe sont repris ici : conditions extérieures ou pariétales pulsées.

Afin d'obtenir une meilleure comparaison de courbes entre différentes configurations, la quantité  $Y_{k,\tau}$  sera adimensionnée par un différentiel de fraction massique  $Y_{k,w} - Y_{k,ext}$ , à la manière d'un coefficient d'échange thermique  $h$ , et notée  $Y_{k,\tau}^*$ .

#### Forçage par les conditions extérieures

Intéressons-nous tout d'abord au cas pulsé à la fréquence la plus élevée, c'est-à-dire  $50000H_z$ .

La Figure 9.2 décrit les signaux temporels de  $Y_{k,\tau}$  provenant de la DNS, et obtenus par les deux modèles de paroi, pour les deux amplitudes de variations, faible (graphe du haut de la figure) et forte (graphe de bas de la figure). Pour ces deux espèces, on observe que la grandeur  $Y_{k,\tau}$  issue de la simulation directe ne présente pas de fréquence nette, correspondant au forçage imposé. La transformée de Fourier en fréquence du signal issu de la simulation directe confirme l'absence d'un pic fréquentiel à  $50000H_z$  (cf. Figure 8.17).

La loi de paroi standard (SWM), en revanche, retranscrit très nettement les variations directement observées par le point extérieur. Ceci montre que ce modèle de paroi ne tient, en aucun cas, compte de l'amortissement du forçage externe dans le calcul de la fraction massique pariétale.

Un tout autre comportement est observé à la sortie du modèle TBLE. En effet, la fréquence de forçage n'est pas visible sur le signal de  $Y_{k,\tau}$ . Des variations de plus basses fréquences sont observées, donnant l'impression d'une meilleure prise en compte des phénomènes d'amortissement dans la couche limite.

Ainsi, bien que ces résultats ne constituent pas un avantage fondamental dans le choix d'un

des deux modèles de paroi, il semble que TBLE donne lieu à une meilleure représentation des phénomènes temporels.

À mesure que la fréquence de l'excitation externe diminue (Figures 9.3 et 9.4), il est possible d'observer que le TBLE aboutit aux mêmes tendances que le signal de la DNS. À l'opposé, le modèle standard a toujours une dynamique calquée sur l'oscillation externe. Cette différence de comportement entre les deux modèles est à l'avantage du modèle TBLE, qui fournit ainsi une réponse temporelle plus représentative de la DNS, et donc *a priori* de ce que serait le flux instantané à la paroi d'une configuration réelle.

L'examen du rapport entre la valeur *rms* du flux pariétal et sa valeur moyenne au cours du temps (Figure 9.5) confirme ces conclusions, et montre un meilleur accord entre la DNS et le modèle TBLE pour le cas de forte amplitude. En revanche, pour une faible amplitude de variation, il semble que SWM donne un meilleur résultat.

### **Forçage par la paroi**

Dans cette autre situation de forçage, deux réponses temporelles différentes sont à nouveau fournies par les deux modèles, SWM et TBLE.

L'analyse des Figures 9.6, 9.7 et 9.8 montre que la loi de paroi standard reproduit bien le comportement oscillant du flux de masse à la paroi. Ceci étant, on constate tout de même que le signal temporel issu de la loi standard est en léger décalage par rapport à celui de la DNS, impliquant une mauvaise estimation du flux instantané. Cette remarque est apparemment valable quelles que soient la fréquence et l'amplitude du forçage, même si on peut penser que ce déphasage pourrait s'atténuer au fur et à mesure que l'on se rapproche du domaine des fréquences les plus basses (écoulement quasi-stationnaire).

Le modèle TBLE permet, au contraire, de bien reproduire la dynamique oscillante du flux de chaleur pariétal. Les résultats à faible amplitude de variation (graphes en haut de chaque figure) sont certes moins précis, mais uniquement à cause des fluctuations propres à l'écoulement turbulent qui balaye la paroi. On remarque aussi que les signaux de TBLE et de la DNS sont parfaitement en phase, indépendamment de la fréquence du forçage.

Les valeurs *rms* du flux pariétal adimensionnés (Figure 9.9) confirment largement que TBLE fournit des résultats en accord très satisfaisants avec la DNS.

La réponse dynamique du TBLE semble donc mieux correspondre à la dynamique de la simulation numérique directe. Il est possible d'expliquer ce comportement (meilleur, donc, que celui de SWM) par le fait que le raffinement du maillage monodimensionnel dans la sous-couche visqueuse et tampon permet de bien prendre en compte le phénomène de diffusion qui y est prédominant. En effet, les termes convectifs n'ont pas une influence significative dans la zone linéaire et le début de la zone tampon, ce qui implique que les équations résolues par le modèle TBLE donnent une représentation particulièrement bien adaptée à cette région.

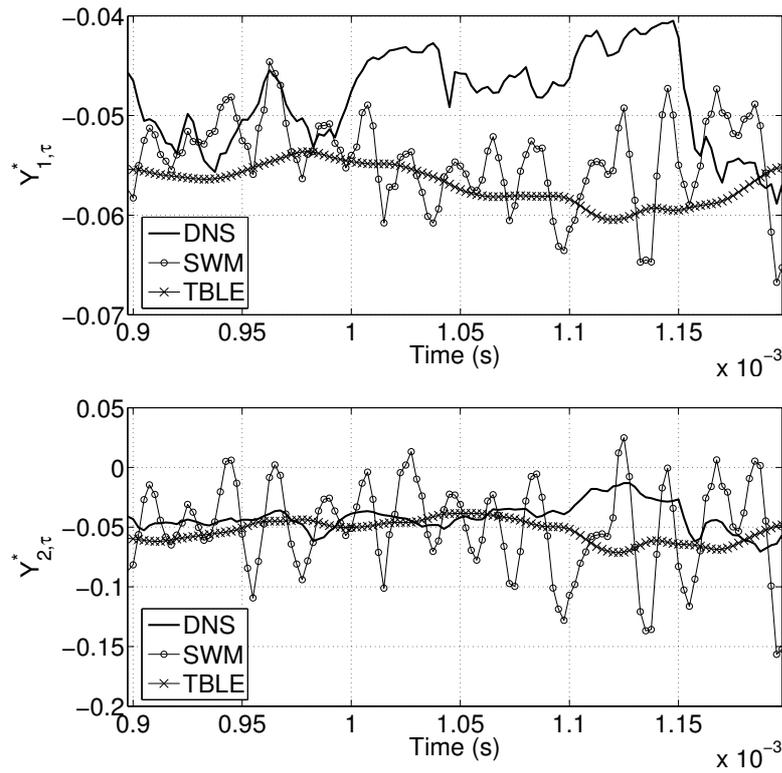


FIG. 9.2 – Evolution temporelle de  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des modèles de paroi,  $f = 50000H_z$

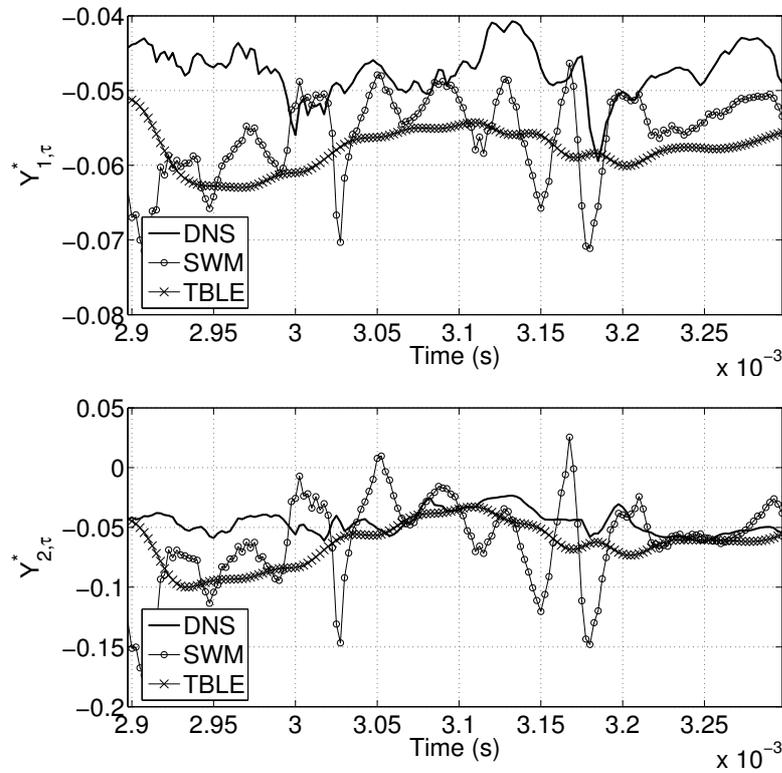


FIG. 9.3 – Evolution temporelle de  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des modèles de paroi,  $f = 25000H_z$

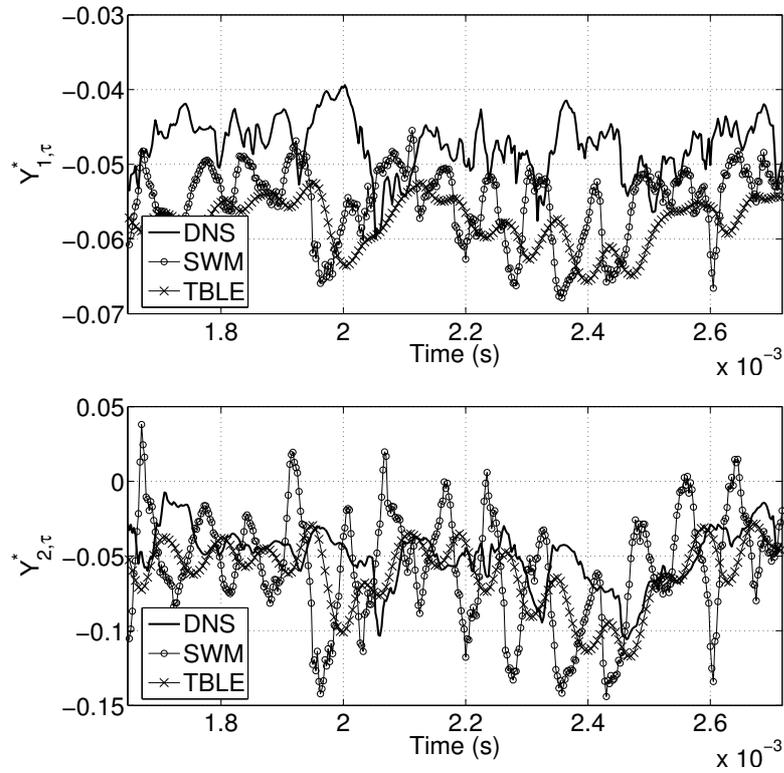


FIG. 9.4 – Evolution temporelle de  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des modèles de paroi,  $f = 12500H_z$

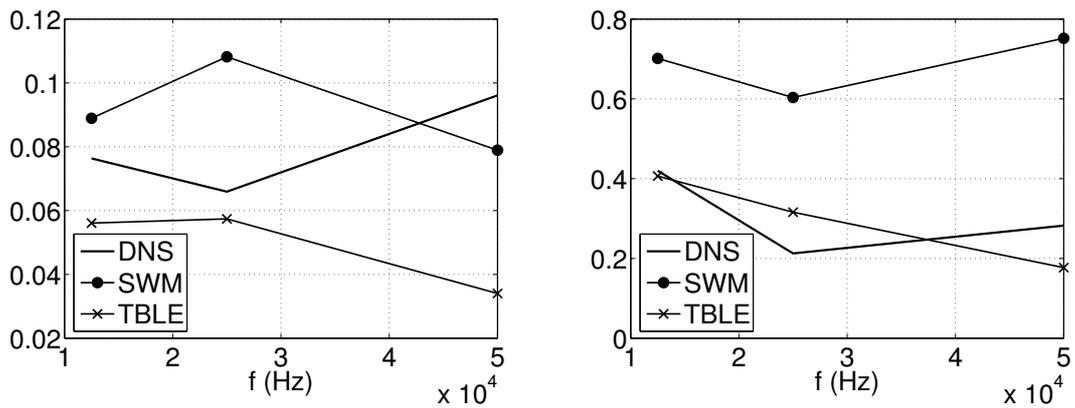


FIG. 9.5 –  $Y_{k,\tau}^* / \langle Y_{k,\tau}^* \rangle$  issu de la DNS et des modèles de paroi SWM et TBLE. Gauche : faible amplitude, droite : forte amplitude

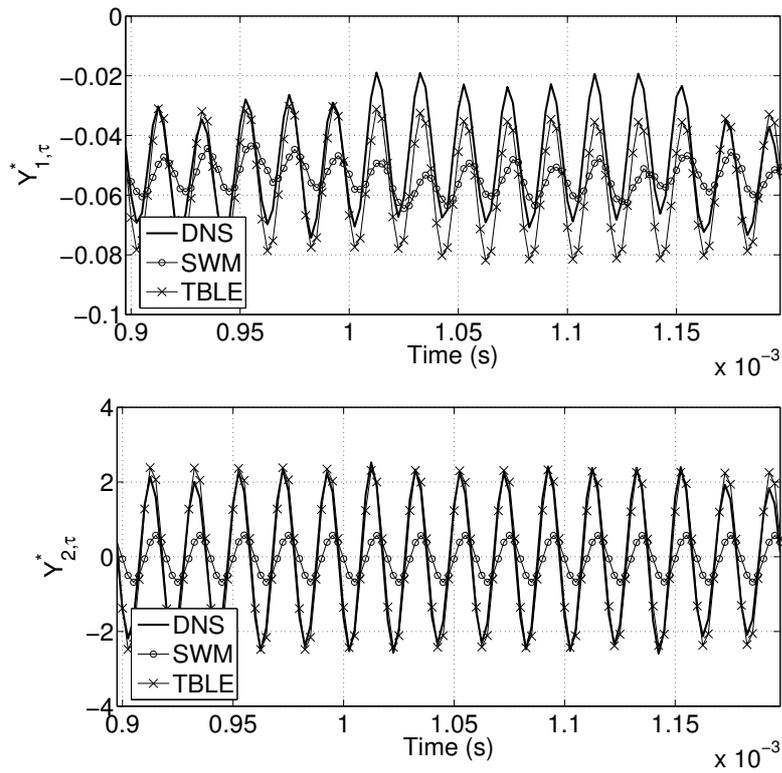


FIG. 9.6 – Evolution temporelle de  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des modèles de paroi,  $f = 50000H_z$

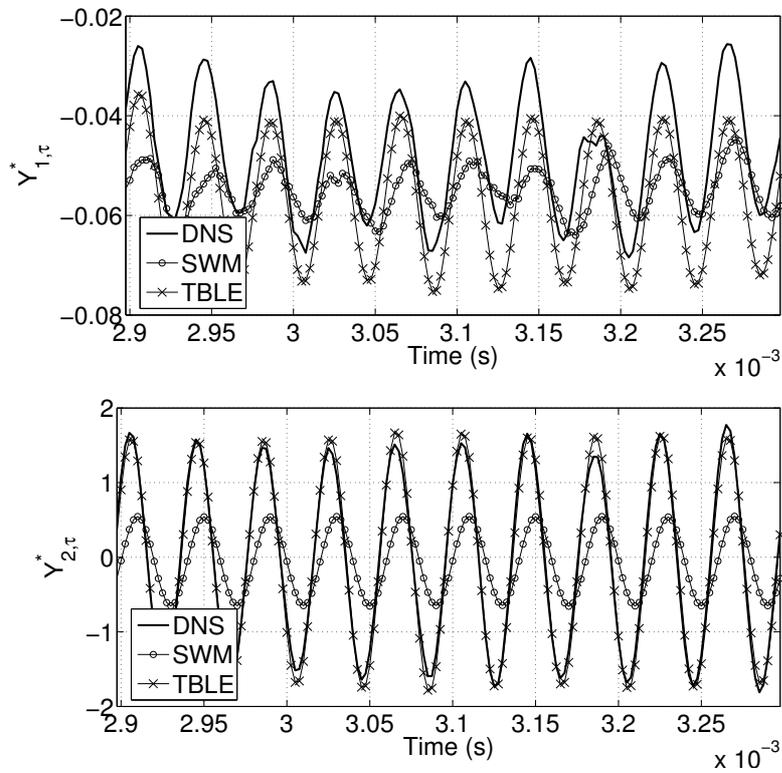


FIG. 9.7 – Evolution temporelle de  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des modèles de paroi,  $f = 25000H_z$

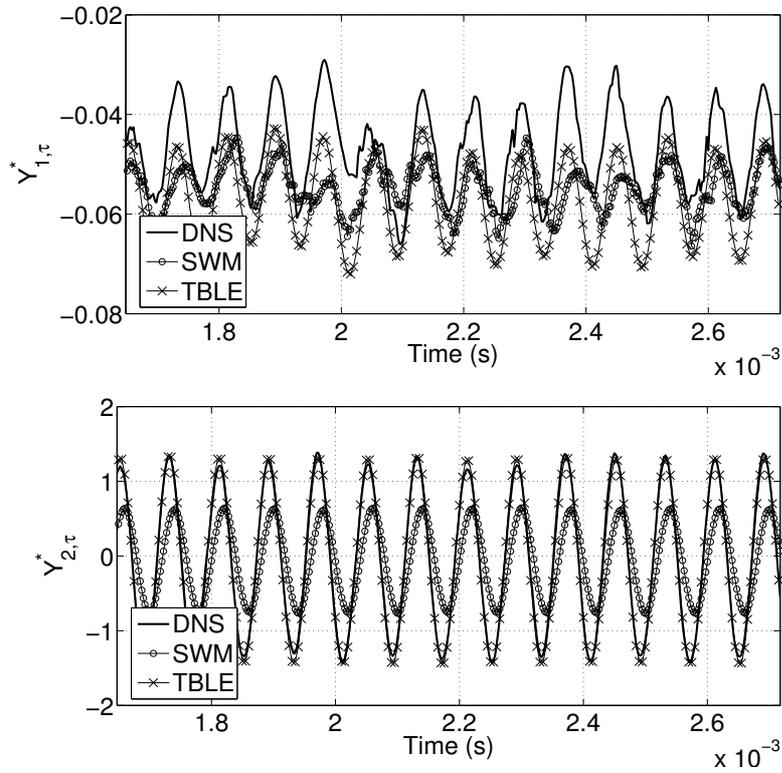


FIG. 9.8 – Evolution temporelle de  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des modèles de paroi,  $f = 12500H_z$

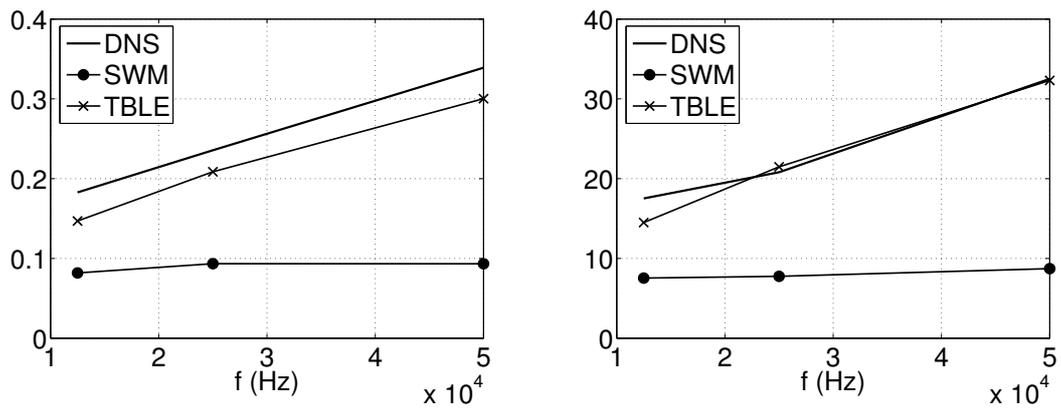


FIG. 9.9 –  $Y_{k,\tau,rms}^* / \langle Y_{k,\tau}^* \rangle$  issu de la DNS et des modèles de paroi SWM et TBLE. Gauche : faible amplitude, droite : forte amplitude

## 9.2 Approfondissements relatifs au modèle TBLE

Dans la section précédente, nous avons montré que le modèle TBLE, grâce à sa prise en compte du pas de temps externe, donnait de meilleurs résultats dans la tentative de prise en compte d'effets instationnaires, par comparaison au modèle standard. Afin de comprendre l'apport de l'utilisation d'un tel modèle, comparé à une simple loi de paroi à l'équilibre (dont le modèle standard), quelques spécificités sont explorées par la suite.

### 9.2.1 Influence de l'état initial

L'emploi du modèle TBLE, contrairement à un modèle standard, est soumis à la prescription d'une condition initiale visant à affecter, à chaque point du maillage fin et à chaque inconnue, une valeur finie. Dans le souci d'obtenir une meilleure convergence, un profil initial linéaire peut être imposé, ou encore un polynôme.

Dans la section précédente, les résultats fournis par TBLE ont été obtenus après l'avoir fait converger vers un état stationnaire servant de condition initiale. Ainsi, le profil de vitesse initial correspond à un profil de vitesse de type couche limite turbulente. De façon identique, on initialise les scalaires passifs par une distribution caractéristique d'un écoulement de couche limite établi stationnaire.

Le problème de la condition initiale pour l'investigation temporelle a donc été détourné grâce à cette technique.

Afin de comprendre l'influence de l'état initial sur les premiers pas de temps du solveur Navier-Stokes, nous comparons ici les données en sortie du TBLE avec une initialisation par convergence de profil, ou avec une initialisation par profil linéaire (dénnoté par TBLE n). Une schématisation de ces deux types d'initialisation est représentée sur la Figure 9.10.

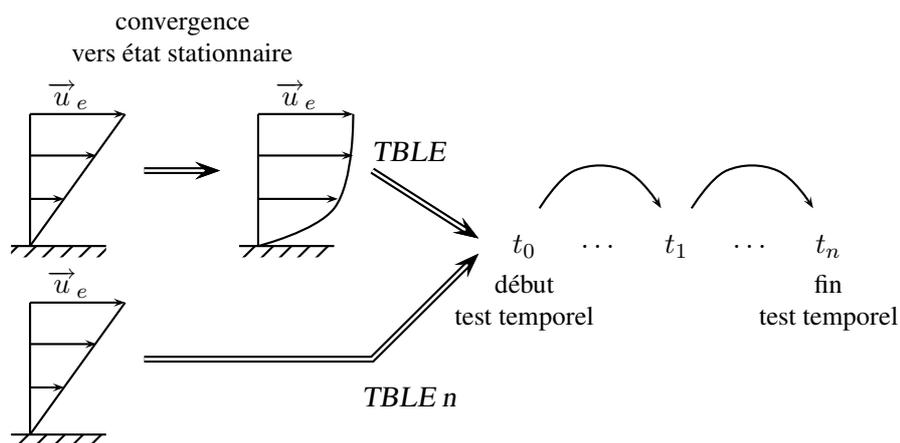


FIG. 9.10 – Deux types d'initialisation du modèle TBLE testés

Les Figures 9.11 et 9.12 correspondent respectivement au forçage par l'écoulement extérieur et la paroi.

Il est intéressant de noter que le temps d'établissement du modèle est relativement grand. Celui-ci est de l'ordre de quelques périodes, si l'on considère le temps nécessaire pour que l'écart relatif

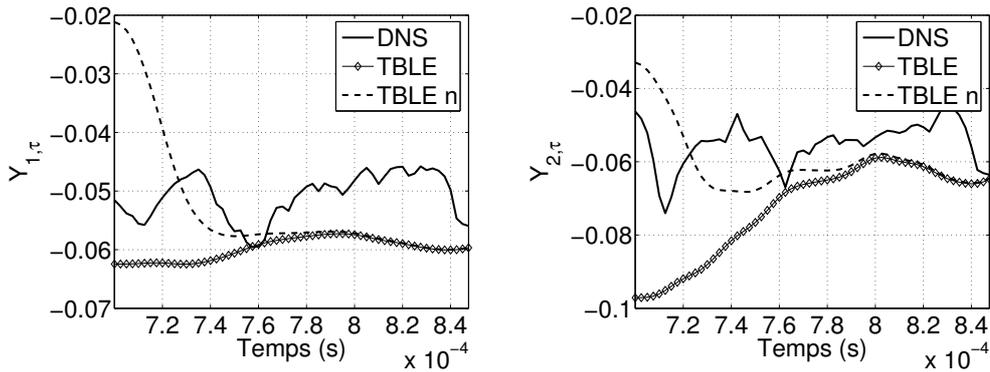


FIG. 9.11 – Influence de l’initialisation de TBLE, oscillations provenant de l’extérieur à  $f = 50000H_z$

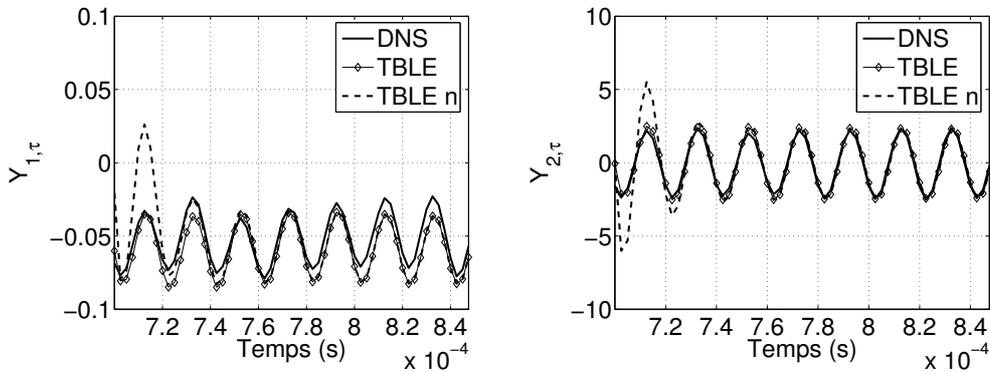


FIG. 9.12 – Influence de l’initialisation de TBLE, oscillations provenant de la paroi à  $f = 50000H_z$

entre les données de TBLE et TBLE n devienne inférieur à 1%. Les deux cas de forçage (externe et paroi) aboutissent au même ordre de grandeur.

L’amplitude des variations conditionne le temps d’établissement du modèle TBLE, de telle sorte que celui-ci augmente à mesure que les variations augmentent. Ainsi, un écoulement présentant de fortes variations temporelles posera d’autant plus problème en ce qui concerne l’influence de la condition initiale sur le comportement du modèle TBLE.

Enfin, les résultats pour les fréquences plus faibles,  $f = 25000H_z$  et  $f = 12500H_z$ , tendent à montrer que cette durée d’établissement diminue par rapport à la période caractéristique, lorsque la fréquence d’excitation diminue (cf. Tableau 9.1). Mais, cette tendance n’est pas vraiment significative, la durée gardant environ le même ordre de grandeur (de l’ordre de la période).

	50000	25000	12500
Extérieur pulsé	5T	3T	1T
Paroi pulsée	3.1T	2T	1.2T

TAB. 9.1 – Temps de mémoire de la condition initiale (forte amplitude de forçage)

La conclusion est qu’il n’y a pas d’évolution nette de la période transitoire lors de l’emploi de

TBLE, en fonction de la fréquence imposée à l'écoulement. Néanmoins, cette durée peut être un inconvénient certain lorsque la fréquence de forçage est élevée.

### 9.2.2 Influence du pas de temps externe

Les calculs à  $f = 50000H_z$  sont basés sur un échantillonnage de 8 points par période, ce qui semble être le minimum admissible pour décrire un phénomène cyclique. En revanche, les simulations pour une fréquence respectivement à 25000 et 12500 $H_z$  ont des fréquences d'échantillonnage 2 et 4 fois plus grande. Il est alors possible de comparer les réponses du modèle au cours du temps, lorsque le signal est résolu avec la même fréquence d'échantillonnage. Ceci revient à augmenter le pas de temps externe au modèle, et apparaissant dans les équation (5.34), (5.35) et (5.36).

Les résultats obtenus prouvent que l'influence du pas de temps externe au modèle TBLE est assez limitée. En effet, les signaux temporels en sortie de modèle sont invariants par rapport au pas de temps, du moment que celui-ci reste suffisamment petit devant la période du phénomène instationnaire étudié.

## 9.3 Discussion en termes de modélisation de paroi

Les conclusions de ce test hors-code sont globalement à l'avantage du modèle TBLE.

En effet, en ce qui concerne la loi de paroi standard, les résultats démontrent une assez mauvaise évaluation des flux pariétaux, quelles que soient la fréquence, l'amplitude, et la configuration d'oscillations. Un déphasage par rapport aux résultats de la DNS est observable lorsque des oscillations proviennent de la paroi, de même l'amplitude du flux pariétal n'est pas correctement évaluée. Dans la configuration de forçage par l'écoulement externe, le comportement oscillant du flux pariétal obtenu par la loi de paroi standard n'est pas représentatif de la DNS et implique que la valeur de  $Y_{k,\tau}$  présente des pics de forte amplitude.

Le modèle TBLE a quant à lui un comportement plutôt avantageux par rapport à la loi de paroi standard, dans l'étude de phénomènes instationnaires. Tout d'abord, l'atténuation des hautes fréquences dans la configuration d'écoulement externe forcé. L'amortissement des oscillations est aussi représentatif des résultats de la DNS. Dans la configuration d'oscillations pariétales, la diffusion est correctement prise en compte dans la sous-couche visqueuse et tampon, ce qui confère au modèle TBLE de bonnes propriétés d'évaluation des flux pariétaux dans ce cas là.

## Chapitre 10

# Vers une une loi de paroi instationnaire ?

L'utilisation d'un modèle de paroi mettant en œuvre une approche zonale peut conduire à la réflexion sur les modèles de paroi algébriques et leur adaptation à des cas non stationnaires en moyenne. Il semble que peu d'études soient disponibles dans la littérature, et nous proposons ici une étude générale sur ce thème.

L'équation résolue dans le modèle TBLE pour le scalaire passif est pris comme point de départ pour étudier la faisabilité de la dérivation d'une formulation instationnaire pour un modèle algébrique.

Cette équation, en l'absence de termes sources, s'écrit :

$$\frac{\partial \rho Y_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \rho D \frac{\partial Y_k}{\partial y} \quad (10.1)$$

L'intégration entre la paroi ( $y = 0$ ) et un point à la distance  $y = y_e$  de celle-ci (telle que ce point se situe dans la zone d'équilibre de la couche limite) conduit à la relation suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{y_e} \rho Y_k dy}_{\mathbf{I}} - \frac{\mu_t}{Sc_t} \frac{\partial Y_k}{\partial y} = Cte = -\phi_w \quad (10.2)$$

où  $\phi_w$  est le flux de scalaire passif à la paroi et a pour définition :

$$\phi_w = \frac{\mu_w}{Sc} \frac{\partial Y_k}{\partial y} \Big|_w \quad (10.3)$$

Il semble donc possible d'intégrer l'équation (10.1). En effet, bien que le terme temporel inclus sous la notation **I** ne soit pas calculable analytiquement, plusieurs approximations peuvent en être faites. C'est l'objet de la section suivante.

## 10.1 Dérivation de modèles instationnaires

Classiquement, dans l'équation (10.2), le nombre de Schmidt turbulent  $Sc_t$  est pris constant et l'expression de  $\mu_t$  est celle basée sur l'hypothèse de longueur de mélange Eq. (3.25), que l'on substitue ici pour obtenir :

$$-1 = \frac{\mathbf{I}}{\phi_w} - \frac{(\kappa y^+)^2}{Sc_t} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \frac{\partial Y_k^+}{\partial y^+} \quad (10.4)$$

Dans la zone logarithmique de la couche limite, on a :

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{\kappa y^+} \quad (10.5)$$

On obtient ainsi :

$$\frac{\partial Y_k^+}{\partial y^+} = \frac{Sc_t \left(1 + \frac{\mathbf{I}}{\phi_w}\right)}{\kappa y^+} \quad (10.6)$$

En intégrant une nouvelle fois en fonction de  $y^+$ , on aboutit à une loi logarithmique pour le scalaire passif  $Y_k$  :

$$Y_k^+ = \frac{Sc_t}{\kappa} \left(1 + \frac{\mathbf{I}}{\phi_w}\right) \ln y^+ + C_k \quad (10.7)$$

où  $C_k$  est la constante d'intégration et où le terme temporel intervient sous la forme du terme  $\mathbf{I}$ , dérivée en temps de l'intégrale de  $\rho Y_k$  entre 0 et  $y_e$ . Notons que le résultat est cohérent avec les cas stationnaires (conditions aux limites stationnaires), où le terme  $\mathbf{I}$  vaut 0 et la relation (10.7) devient la loi standard pour le scalaire passif  $Y_k$ .

Toute la difficulté pour pouvoir utiliser cette relation en contexte instationnaire réside dans l'évaluation de  $\mathbf{I}$ , où plutôt dans l'évaluation de l'intégrale de  $\rho Y_k$ . La dérivée en temps pourra quant à elle être traitée par un simple schéma Euler explicite, pour le passage d'un pas de temps  $n$  du solveur Navier-Stokes, au pas suivant  $n + 1$ .

Plusieurs possibilités sont envisageables :

- La plus simple mais bien sûr la plus imprécise en théorie consiste à évaluer l'intégrale en fonction de la valeur moyenne entre 0 et  $y_e$  :

$$\int_0^{y_e} \rho Y_k dy = \frac{\rho_e Y_{k_e} + \rho_w Y_{k_w}}{2} y_e \quad (10.8)$$

- Une seconde façon consiste à imposer le même formalisme que pour la loi de Chieng et Launder (cf. Section 3.2), c'est-à-dire décomposer la valeur de  $\rho Y_k$  en deux zones de part et d'autre d'un point d'ordonnée  $y_v$  :

- pour  $0 < y < y_v$  :

$$\rho Y_k \approx \rho_w Y_{k_w} + \left. \frac{\partial \rho Y_k}{\partial y} \right|_w y \quad (10.9)$$

- pour  $y_v < y < y_e$  :

$$\rho Y_k \approx \rho_e Y_{k_e} \quad (10.10)$$

L'intégrale de  $\rho Y_k$  se reformule alors selon :

$$\int_0^{y_e} \rho Y_k dy = \rho_w Y_{k_w} y_v + \frac{Sc}{\mu_w} \phi_w \frac{y_v^2}{2} + \rho Y_{k_e} (y_e - y_v) \quad (10.11)$$

La valeur de  $y_v$  est généralement choisie autour de 11.5.

La présence du flux à la paroi  $\phi_w$  dans l'équation (10.7) ainsi que dans (10.11) implique sa réécriture en fonction de  $Y_{k_\tau}$  défini par Eq. (8.2), selon :

$$\phi_w = \rho_w U_\tau Y_{k_\tau} \quad (10.12)$$

De fait, la loi de paroi pour  $Y_k$  peut se résoudre directement quelque soit l'approximation pour  $\mathbf{I}$ , en utilisant la relation suivante :

$$\frac{Sc_t}{\kappa} \left( Y_{k_\tau} + \frac{\mathbf{I}}{\rho_w U_\tau} \right) \ln \left( \frac{y U_\tau}{\nu_w} \right) + C_k Y_{k_\tau} - Y_{k_e} = 0 \quad (10.13)$$

Dans ce qui suit, nous donnons pour chaque possible approximation de  $\mathbf{I}$  la formulation correspondante de la loi de paroi. On suppose que l'écoulement est incompressible.

### 10.1.1 Formulation 1

On pose :

$$a^{n+1} = \rho \frac{Y_{k_e}^{n+1} + Y_{k_w}^{n+1}}{2} \quad a^n = \rho \frac{Y_{k_e}^n + Y_{k_w}^n}{2}$$

Dans ce cas, une expression pour  $\mathbf{I}$  s'écrit :

$$\frac{\mathbf{I}}{\rho U_\tau} = \frac{a^{n+1} - a^n}{\Delta t U_\tau} \quad (10.14)$$

On obtient donc que :

$$Y_{k_\tau} = \frac{Y_{k_e} - \frac{Sc_t}{\kappa} \ln \left( \frac{y U_\tau^{n+1}}{\nu_w} \right) \frac{a^{n+1} - a^n}{\Delta t U_\tau^{n+1}}}{\frac{Sc_t}{\kappa} \ln \left( \frac{y U_\tau^{n+1}}{\nu_w} \right) + C_k} \quad (10.15)$$

### 10.1.2 Formulation 2

Ici, on pose :

$$b^{n+1} = Y_{k_w}^{n+1} y_v + Y_{k_e}^{n+1} (y_e - y_v) \quad b^n = Y_{k_w}^n y_v + Y_{k_e}^n (y_e - y_v)$$

On a la relation suivante pour  $\mathbf{I}$ , où apparaissent la vitesse de frottement ainsi que le flux pour le scalaire au temps précédent :

$$\frac{\mathbf{I}}{\rho U_\tau^{n+1}} = \frac{b^{n+1} - b^n}{\Delta t U_\tau^{n+1}} + \frac{Sc y_v^2}{2 \Delta t \mu U_\tau^{n+1}} (U_\tau^{n+1} Y_{k_\tau}^{n+1} - U_\tau^n Y_{k_\tau}^n) \quad (10.16)$$

On peut donc déterminer l'expression de  $Y_{k_\tau}$  à l'instant  $n + 1$  :

$$Y_{k_\tau}^{n+1} = \frac{Y_{k_e} - \frac{Sc_t}{\kappa \Delta t U_\tau^{n+1}} \ln \left( \frac{y U_\tau^{n+1}}{\nu_w} \right) \left( b^{n+1} - b^n - \frac{Sc y_v^2}{2\mu} U_\tau^n Y_{k_\tau}^n \right)}{\frac{Sc_t}{\kappa} \ln \left( \frac{y U_\tau^{n+1}}{\nu_w} \right) \left( 1 + \frac{Sc y_v^2}{2\Delta t \mu} \right) + C_k} \quad (10.17)$$

## 10.2 Test hors-code

Les deux formulations précédentes ont été soumises au même test que les modèles SWM et TBLE lors du Chapitre 9. Les résultats obtenus sont affichés sur les Figures 10.1 et 10.2 pour la configuration dont l'écoulement externe est pulsé temporellement et sur les Figures 10.3 et 10.4 pour la configuration dont la condition à la paroi est oscillante. Les constantes des deux modèles sont telles que :

$$C_k = 6.5025 = \beta(1) \quad , \quad \beta \text{ provenant de Kader, Eq. (3.19)}$$

$$y_v = 11.5$$

Les résultats pour la configuration d'écoulement externe oscillant (Figures 10.1 et 10.2) sont largement insatisfaisants, en comparaison avec le modèle standard. Dans cette configuration, les deux Relations (10.15) et (10.17) se comportent très mal sous l'influence du forçage exercé, en exhibant de fortes variations dans le calcul du flux à la paroi, et des valeurs moyennes largement différentes de celles des DNS. On constate également que les deux formulations donnent des résultats très proche de manière générale, quelle que soit la fréquence.

Concernant le cas où les oscillations proviennent de la paroi, le comportement des deux lois de paroi instationnaires ne semble guère prometteur. En effet, la Relation (10.15) donne des amplitudes de variations du flux à la paroi largement surestimées. Par ailleurs, la réponse temporelle de ce modèle n'est pas en phase avec le signal DNS. La seconde Formulation (10.17) semble capturer les amplitudes de variation du flux pariétal, mais présente aussi un large déphasage avec la DNS.

Même si ces deux formulations instationnaires ne constituent qu'un premier pas vers une loi de paroi algébrique instationnaire, il semble assez évident que ces résultats sont très largement insuffisants en l'état pour une utilisation de ces modèles dans un solveur CFD et nécessiteraient une plus longue attention. Néanmoins, ces deux expressions démontrent la faisabilité de dérivation de lois de paroi algébriques instationnaires.

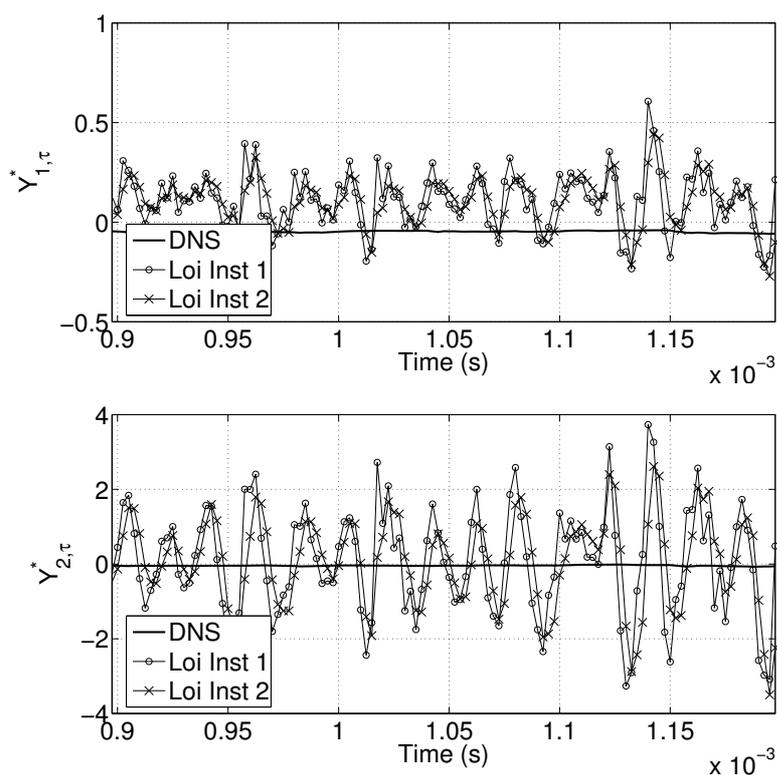


FIG. 10.1 –  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des Formulations (10.15) et (10.17),  $f = 50000H_z$

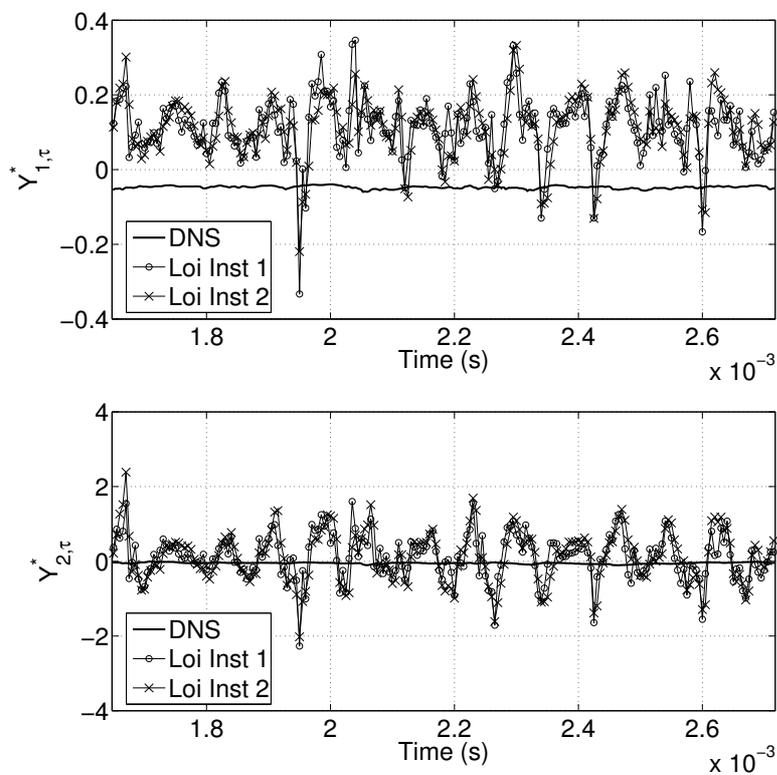


FIG. 10.2 –  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des Formulations (10.15) et (10.17),  $f = 12500H_z$

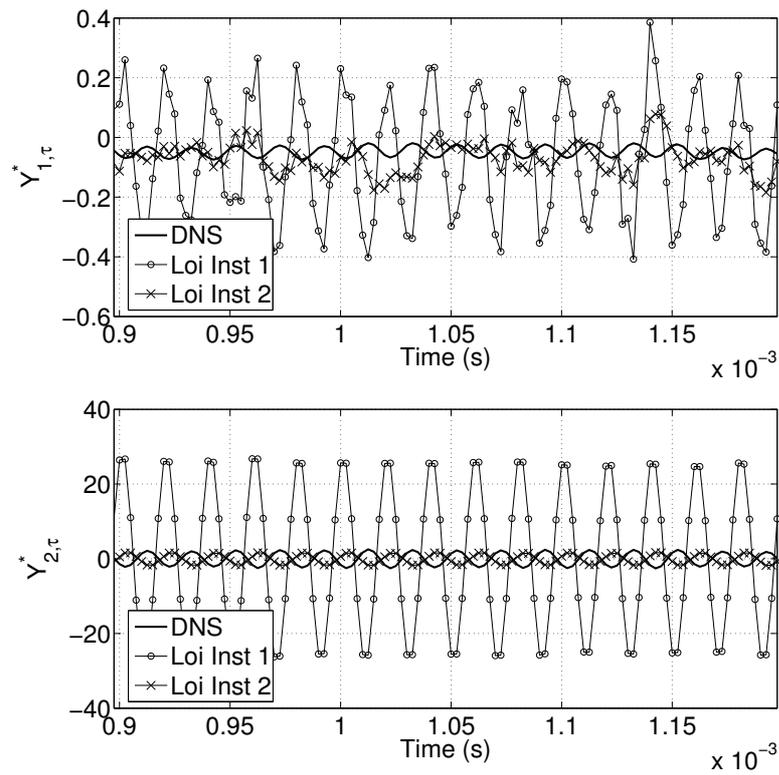


FIG. 10.3 –  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des Formulations (10.15) et (10.17),  $f = 50000H_z$

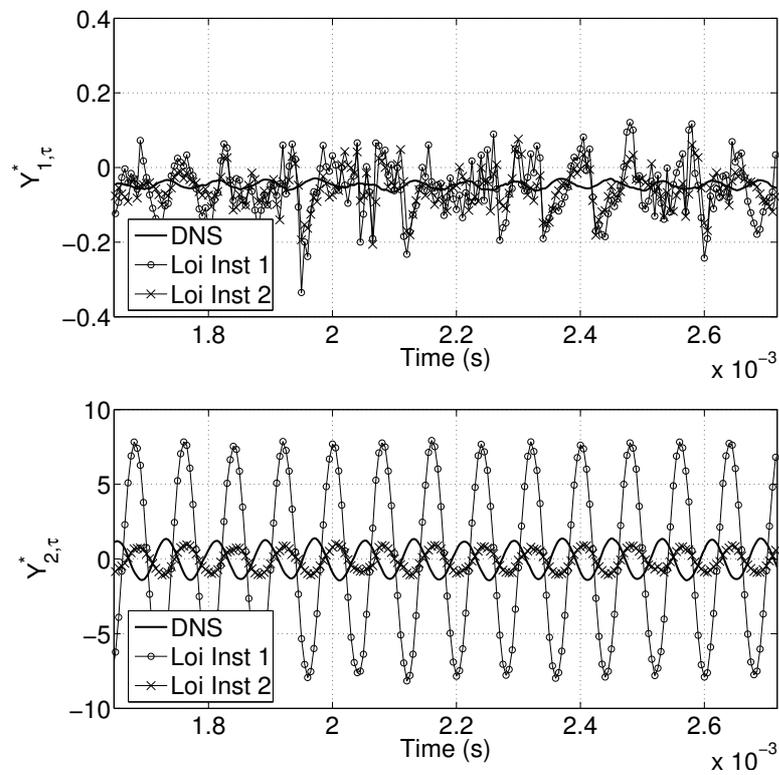


FIG. 10.4 –  $Y_{k,\tau}^*$  en sortie de la DNS et des Formulations (10.15) et (10.17),  $f = 12500H_z$

# Conclusions et perspectives

Le travail réalisé au cours de cette thèse et présenté dans ce manuscrit concerne la modélisation de l'interaction fluide/paroi dans des écoulements de l'industrie nucléaire. Cette interaction est généralement conditionnée tant par la dynamique de l'écoulement près de la paroi (écoulement de couche limite) que par la thermique (présence de fortes variations de température). C'est ainsi que deux problèmes majeurs peuvent se dégager de cette thématique, correspondant respectivement aux Parties II et III de ce mémoire :

- le traitement de sévères gradients de température
- la résolution adéquate des échelles temporelles entrant en jeu dans le phénomène d'échange thermique.

## Prise en compte des gradients de température dans la modélisation de paroi

La présence de forts gradients de température dans les écoulements d'intérêt ici rend invalides les hypothèses classiques de développement de loi de paroi (c'est-à-dire écoulement quasi-isotherme). Ainsi un modèle de paroi particulièrement écrit pour prendre en compte des écoulements de fluide aux propriétés variables en fonction de la température a été écrit : la loi de paroi couplée (CWM). Pour cela, les travaux initialement dus à Van Driest sont utilisés comme point de départ pour la dérivation d'une nouvelle loi de paroi, de type loi à l'équilibre. Ce modèle de paroi a été testé sur différents cas académiques (canal plan isotherme ou fortement non-isotherme) et industriel, afin de qualifier ses performances.

Il apparaît que CWM parvient à compenser les effets de densité dans la couche limite de façon particulièrement efficace, grâce à la prise en compte du rapport de masse volumique entre la paroi  $\rho_w$  et le point de calcul  $\rho_f$ . De plus, il est assez robuste et a un comportement intéressant en terme de distance du point de calcul (maillage plus ou moins grossier). En revanche, cette loi de paroi est particulièrement bien adaptée aux écoulements stationnaires en moyenne puisque dérivée sous cette hypothèse là. C'est pour cette raison que nous avons voulu adapter à ce contexte particulier, un modèle de paroi dédié à la simulation instationnaire : le TBLE.

Initialement dérivé pour la dynamique, et les écoulements incompressibles, le modèle TBLE a fait l'objet d'études récentes (au cours de la dernière décennie) montrant ses capacités à reproduire les bons comportements de la couche limite pariétale, qu'elle soit attachée ou détachée. Plus récemment, la dérivation de ce modèle pour la partie thermique a été effectuée. Dans ce document, la dynamique et la thermique représentées dans le modèle TBLE sont couplées et permettent de considérer des écoulements compressibles. Néanmoins, il a été prouvé que les résultats obtenus, dans un contexte de fluide à densité variable, n'étaient pas satisfaisants.

Pour y remédier, le travail effectué en premier lieu sur le modèle de paroi couplé a été réutilisé pour adapter le TBLE à des écoulements à densité variable. Les équations ont montré que le modèle de turbulence inclus au préalable dans TBLE (modèle de type longueur de mélange) peut être modifié de façon à ce que la transformation de Van Driest soit représentative de l'écoulement. L'introduction de cette modification au niveau du modèle de turbulence dans TBLE a abouti à la création d'un nouveau modèle de paroi dédié à la simulation instationnaire des écoulements de fluides dilatables, nommé : TBLE- $\rho$ . Les tests de TBLE- $\rho$  sur des cas simples où règnent des gradients de température plus ou moins intenses a montré une nette amélioration des résultats comparé à l'utilisation du modèle TBLE dans sa version standard. Par ailleurs, TBLE- $\rho$  conduit à des résultats semblables à CWM dans le cas d'écoulements à l'équilibre.

### Effets instationnaires dans la modélisation de paroi

L'autre enjeu dans la simulation numérique des écoulements de l'industrie nucléaire concerne l'instationnarité des phénomènes physiques, majoritairement thermiques, problème au cœur des préoccupations industrielles. En effet, les détériorations des matériaux pouvant causer des dommages colossaux dans une installation nucléaire sont souvent dus à des problèmes de fatigue thermique. Les cycles de hautes et basses température dans le phénomène d'interaction fluide/paroi mènent à la contraction/dilatation du matériau qui constitue cette même paroi. Il devient donc crucial de pouvoir représenter de façon fiable et précise ces cycles, dont les temps caractéristiques sont généralement plus grands que les échelles temporelles du mouvement moyen. Dans les cas où de basses fréquences sont en jeu, on peut penser que la loi CWM doit conduire à des résultats satisfaisants dans l'ensemble. En revanche, lorsque les fréquences en jeu sont plus élevées, comme par exemple dans le cas de tés de mélange ou de sillages derrière un obstacle, les effets instationnaires doivent avoir une importance majeure.

Afin de mieux appréhender ces effets instationnaires, deux cas ont été considérés comme représentatifs du phénomène d'interaction fluide/paroi :

- la température du fluide oscille au cours du temps
- des oscillations de température proviennent par la paroi de façon cyclique

Des simulations numériques directes (DNS) de ces deux configurations oscillantes ont alors été réalisées dans un contexte où la température est un scalaire passif. Ceci a eu principalement deux objectifs : un premier physique, afin de se concentrer uniquement sur les aspects temporels de la modélisation à la paroi et non sur les aspects « densité variable », un second numérique, car il a été ainsi possible de traiter au cours d'une même simulation les deux cas, puisque les scalaires passifs n'ont pas d'impact sur la dynamique de l'écoulement ou encore sur les autres scalaires passifs. Trois calculs ont été effectués afin d'imposer des oscillations à trois fréquences différentes, dans l'intervalle des fréquences d'intérêt. De même pour chaque configuration, deux amplitudes de variations (faible et forte) ont été envisagées.

Les DNS réalisées nous ont permis d'étudier notamment la distance de pénétration des oscillations dans chacun des deux cas en fonction de la fréquence. Lorsque les oscillations proviennent de la paroi il a été démontré qu'une analogie avec le second problème de Stokes peut être faite, permettant d'évaluer *a priori* une épaisseur de pénétration (épaisseur de Stokes). De plus, un critère de retournement du flux à la paroi a été défini pour les scalaires passifs, du même genre que le critère de retournement pour les écoulements pulsés dynamiquement, et a été mesuré avec un bon accord avec les simulations. La corrélation de Kader a été mise en défaut, par le fait que la valeur

de température de friction, qui oscille au cours du temps, n'est plus représentative de la situation ; c'est plutôt la température extérieure qui doit être utilisée pour trouver une forme universelle dans les profils de température. Dans la configuration d'oscillations provenant du fluide, la variation en fréquence a permis d'identifier que les oscillations pouvaient atteindre la paroi lorsque leur fréquence est suffisamment petite et leur intensité suffisamment grande. Dans cette configuration, nous avons pu voir que les lois standard restent néanmoins valides, tout au moins dans la sous-couche visqueuse et tampon, et en moyenne représentative de la distribution de température dans la couche limite.

Outre la quantité significative de données générées sur les écoulements pulsés en température, ces DNS fournissent des traces temporelles des quantités d'intérêt qui peuvent constituer les données d'entrée de modèles de paroi. Plusieurs modèles de paroi ont donc été testés de cette façon, et leur réponse dynamique a été étudiée.

La loi standard (SWM) fournit des résultats peu satisfaisants, liés au fait qu'il n'existe aucun lien entre les conditions de paroi et externe et donc pas d'amortissement des oscillations en fonction de la fréquence imposée. Les données de sortie du modèle présentent donc de fortes oscillations. Un autre problème soulevé est qu'il existe une sorte de déphasage en temps en ce qui concerne le flux calculé, en comparaison avec le flux issu des DNS. Ces deux points sont autant d'inconvénients majeurs pour l'évaluation instantanée des flux thermiques.

A l'opposé, il a été montré que le modèle TBLE offre une intéressante réponse dynamique lorsque celui-ci est soumis aux oscillations de température, qu'elles proviennent de la paroi ou du fluide, et permet une bonne estimation de la longueur de pénétration des oscillations et de l'amortissement entre les conditions aux limites du TBLE. Ceci est obtenu, d'une part, grâce à l'avancement en temps inclus dans les équations du modèle qui agit comme une dissipation supplémentaire au cours du temps, et d'autre part, grâce au raffinement du maillage TBLE qui permet de résoudre le profil entier de la couche limite, depuis la paroi jusqu'au point de calcul.

### **Perspectives pour la simulation d'écoulements instationnaires de fluides dilatables**

La convergence des deux axes de cette thèse apparaît comme un moyen prometteur de modéliser les phénomènes pariétaux dans les écoulements de l'industrie nucléaire. L'accomplissement de ce travail de thèse sera sujet au test du modèle TBLE- $\rho$  dans le contexte complexe d'écoulements fortement non-isothermes et présentant une instationnarité à grande échelle. Plus précisément, ce nouveau modèle de paroi sera utilisé dans la simulation numérique de problèmes couplés fluides / matériau où les échanges thermiques sont généralement cycliques, dus à l'alternance de poches de fluides froides ou chaudes balayant les parois. D'autre part, ce modèle pourra être mis à l'épreuve sur des configurations où un phénomène basse fréquence doit être représenté, comme des oscillations en température provenant du fluide ou de la paroi. Enfin, les autres avantages du modèle TBLE (traitement du gradient de pression favorable ou défavorable, vitesse d'injection, ...) pourront être étudiés et l'apport d'une approche zonale utilisée comme modèle de paroi (plutôt qu'un modèle de paroi à l'équilibre) pourra finalement être quantifié.



# Bibliographie

- [1] L. Artal. *Modélisation des flux de chaleurs stationnaires pour un mélange multi-espèce avec transfert de masse à la paroi*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 2006. Cité p. 96
- [2] E. Balaras, C. Benocci, and U. Piomelli. Two-layer approximate boundary conditions for Large-Eddy Simulations. *AIAA Journal*, 34(6) :1111–1119, 1996. Cité p. 38, 40, 91
- [3] Y. Benarafa. *Application du couplage RANS/LES aux écoulements turbulents à haut nombre de Reynolds de l'industrie nucléaire*. PhD thesis, Université Paris 6, 2005. Cité p. 40
- [4] Y. Benarafa, O. Cioni, F. Ducros, and P. Sagaut. Temperature wall modelling for Large Eddy Simulation in a heated turbulent plane channel flow. *Submitted to International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006. Cité p. 38
- [5] P. Bradshaw. Compressible turbulent shear layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9 :33–54, 1977. Cité p. 35, 53, 55, 60
- [6] W. Cabot. *Near-wall models in large-eddy simulations of flow behind a backward-facing step*. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 1996. Cité p. 38, 40
- [7] W. Cabot. *Wall models in Large Eddy Simulation of separated flow*. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 1997. Cité p. 38, 40
- [8] W. Cabot and P. Moin. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63 :269–291, 2000. Cité p. 38, 40
- [9] C. Calvin, O. Cueto, and P. Emonot. An object-oriented approach to the design of fluid mechanics software. *ESAIM : M2AN (Mathematical Modelling and Numerical Analysis)*, 36(5), 2002. Cité p. 76
- [10] D.R. Chapman. Computational aerodynamics, development and outlook. *AIAA Journal*, 17 :1293–1313, 1979. Cité p. 30
- [11] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès editions, 2000. Cité p. 8
- [12] A. Châtelain, F. Ducros, and O. Métais. LES of turbulent heat transfer : proper convection numerical schemes for temperature transport. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44 :1017–1044, 2004. Cité p. 78
- [13] C.C. Chieng and B.E. Launder. On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion. *Numerical Heat Transfer*, 3 :189–207, 1980. Cité p. 36
- [14] O. Colin and M. Rudgyard. Development of high-order Taylor-Galerkin schemes for LES. *Journal of Computational Physics*, 162(2) :338–371, 2000. Cité p. 96, 98
- [15] J. Cousteix. *Turbulence et couche limite*. Cépaduès editions, 1989. Cité p. 29, 33

- [16] T.J. Craft, A.V. Gerasimov, H. Iacovides, and B.E. Launder. Progress in the generalization of wall-function treatments. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 23 :148–160, 2002. Cité p. 37
- [17] F. Dabireau. *Etude des transferts de chaleur aux parois dans les moteur-fusées*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002. Cité p. 54
- [18] R.B. Dean. Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow. *Journal of Fluids Engineering*, 100 :215–223, 1978. Cité p. 32, 103
- [19] A. Devesa and F. Nicoud. On unsteady effects in wall modeling. In *Turbulence Heat and Mass Transfer Conference 5, Dubrovnik, Croatia*, pages 1–12, 2006. Cité p. 96
- [20] G.V. Diurno, E. Balaras, and U. Piomelli. *Wall-layer models for LES of separated flows*. In *Modern simulation strategies for turbulent flows*. Ed. B. Geurts, (Philadelphia, Edwards), 2001. Cité p. 38
- [21] E.R. Van Driest. On turbulent flow near a wall. *Journal of Aeronautical Sciences*, 23(11) :1007–1011,1036, 1956. Cité p. 27
- [22] G. Garnier and P. Quéméré. Simulations numériques trio\_u de canaux plans pulsés en maillages structurés. Technical report, CEA, 2004. Cité p. 91
- [23] M.Y. Gündoğdu and M.O. Carpinlioğlu. Present state of art on pulsatile flow theory (part 2 : Turbulent flow regime). *JSME International Journal series B*, 42(3), 1999. Cité p. 91, 92
- [24] J.O. Hinze. *Turbulence*. McGraw-Hill, New-York, 2<sup>nd</sup> edition, 1987. Cité p. 22
- [25] S. Hoyas and J. Jiménez. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2003$ . *Physics of Fluids*, 18, 2006. Cité p. 11
- [26] P.G. Huang and G.N. Coleman. Van Driest transformation and compressible wall-bounded flows. *AIAA Journal*, 32(10) :2110–2113, 2004. Cité p. 54
- [27] F.P. Incropera and D.P. DeWitt. *Fundamentals of heat and mass transfer*. Wiley, 2001. Cité p. 31, 32, 33, 79
- [28] A. Jameson and W. Schmidt. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *AIAA paper*, 81–1259, 1981. Cité p. 98
- [29] J. Jimenez and P. Moin. The minimal flow unit in near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 225 :213–240, 1991. Cité p. 104
- [30] W.P. Jones and B.E. Launder. The calculation of low-Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16 :1119–1130, 1973. Cité p. 17, 18
- [31] B.A. Kader. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24(9) :1541–1544, 1981. Cité p. 36
- [32] H. Kawamura, H. Abe, and K. Shingai. DNS of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions. *Turbulence, Heat and Mass Transfer 3, edited by Nagano Y., Hanjalic K. and Tsuji T.*, 2000. Cité p. 49, 72, 103
- [33] W.M. Kays and M.E. Crawford. *Convective heat and mass transfer*. McGraw-Hill, New-York, 3<sup>rd</sup> edition, 1994. Cité p. 31
- [34] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177 :133–166, 1987. Cité p. 11, 32, 103, 105

- 
- [35] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3 :269–289, 1974. Cité p. 36
- [36] M. Lesieur and O. Metais. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28 :45–82, 1996. Cité p. 21
- [37] S. Mendez, F. Nicoud, and T. Poinso. Large-Eddy Simulations of a turbulent flow around a multi-perforated plate. In *The Cyprus International Symposium on Complex Effects in Large Eddy Simulation*, 2005. Cité p. 96
- [38] F. Nicoud. *Prévision des transferts convectifs sur les protections thermiques d'un propulseur à propergol solide*. PhD thesis, INPT, 1993. Cité p. 37
- [39] F. Nicoud. Conservative high-order finite difference schemes for low-mach number flows. *Journal of Computational Physics*, 158 :71–97, 2000. Cité p. 49, 55, 72
- [40] F. Nicoud and P. Bradshaw. A velocity transformation for heat and mass transfer. *Physics of Fluids*, 12(1) :237–238, 2000. Cité p. 54
- [41] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62(3) :183–200, 1999. Cité p. 20
- [42] F. Nicoud and T. Poinso. DNS of a channel flow with variable properties. In *1<sup>st</sup> International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Santa Barbara, USA, 1999. Cité p. 49, 55, 72
- [43] D. Panara, M. Porta, and T. Schoenfeld. LES and URANS unsteady boundary layer strategies for pulsating and oscillating turbulent channel flow applications. In *ECCOMAS CFD*, 2006. Cité p. 96
- [44] S. Paolucci. On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations. *Sandia National Laboratories Rep.*, SAND82-8257, 1982. Cité p. 46
- [45] U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34 :349–374, 2002. Cité p. 30
- [46] U. Piomelli, J. Ferziger, P. Moin, and J. Kim. New approximate boundary conditions for large-eddy simulations of wall bounded flows. *Physics of Fluids A*, 1(6) :1061–1068, 1989. Cité p. 39
- [47] S.B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000. Cité p. 8, 9, 15, 32
- [48] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for incompressible flows : An introduction*. Springer-Verlag, 2001. Cité p. 19, 22
- [49] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary layer theory*. Springer-Verlag ; 8th revised edition, 1999. Cité p. 26, 35, 92, 93
- [50] P. Schmitt. *Simulation aux grandes échelles de la combustion étagée dans les turbines à gaz et son interaction stabilité - polluants - thermique*. PhD thesis, INPT, 2005. Cité p. 33
- [51] T. Schönfeld and M. Rudgyard. Steady and unsteady flows simulations using the hybrid flow solver AVBP. *AIAA Journal*, 37(11) :1378–1385, 1999. Cité p. 96
- [52] F. Schwertfirm and M. Manhart. DNS of passive scalar transport in turbulent channel flow at high schmidt numbers. In *Turbulence Heat and Mass Transfer Conference 5, Dubrovnik, Croatia*, pages 1–11, 2006. Cité p. 57
- [53] A. Scotti and U. Piomelli. Numerical simulation of pulsating turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 13(5) :1367–1384, 2001. Cité p. 91
- [54] T.H. Shih, L.A. Povinelli, and N.S. Liu. Application of generalized wall function for complex turbulent flows. *Journal of Turbulence*, 4(015) :1–15, 2003. Cité p. 37
-

- [55] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations : I. the basic equations. *Monthly Weather Review*, 91 :99–164, 1963. Cité p. 19
- [56] P.R. Spalart, W.H. Jou, M. Strelets, and S.R. Allmaras. Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach. In *Advances in DNS/LES, Greyden*, pages 137–148, 1997. Cité p. 38
- [57] S.F. Tardu, G. Binder, and R.F. Blackwelder. Turbulent channel flow with large-amplitude velocity oscillations. *Journal of Fluid Mechanics*, 267 :109–151, 1994. Cité p. 91, 92
- [58] H. Tennekes and J.L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge, MA, 1972. Cité p. 37
- [59] T. von Kármán. Turbulence and skin friction. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1(1), 1934. Cité p. 27, 28
- [60] A.W. Vreman, B.J. Geurts, J.G.M. Kuerten, and P.J. Zandbergen. A finite volume approach to les of compressible homogeneous isotropic decaying turbulence. *International Journal for Numerical methods in Fluids*, 15 :799–816, 1992. Cité p. 13
- [61] W. Wang and P. Moin. Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows. *Physics of Fluids*, 14(7) :2043–2051, 2002. Cité p. 38, 40
- [62] H. Werner and H. Wengle. Large Eddy Simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate channel. In *Proceedings of the Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, pages 155–168, 1991. Cité p. 37
- [63] D.C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, CA, 1993. Cité p. 16, 19

# **Annexes**



## Annexe A

# Article de conférence n<sup>o</sup> 1

Le travail commencé lors du stage de Master à l'I.M.F.T. (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse) a été poursuivi en parallèle de la première année de cette thèse. Ce stage avait pour but la simulation des grandes échelles de l'interaction entre un jet d'injection et une structure tourbillonnaire cohérente dans un contexte de moteur à piston. Il a conduit à deux publications, un article de conférence et un article de revue.

L'article suivant est la contribution à la conférence **SAE Spring Fuel Lubricants**, qui s'est tenue à Toulouse, France, du 8 au 10 Juin 2004.

---

A. Devesa, J. Moreau, J. Hélie, and T. Poinsot. *Large Eddy Simulations of a Jet / Tumble Interaction in a GDI Model Engine Flow*. In SAE Spring Fuels and Lubricants Meeting, Centre de congrès P. Baudis, Toulouse - France, 2004.

---



# Large Eddy Simulations of jet / tumble interaction in a GDI model engine flow

Antoine DEVESA, Julien MOREAU\*, Thierry POINSOT

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse,  
UMR CNRS/INPT-UPS 5502, Av. Camille Soula, 31400 Toulouse, France.

Jérôme HELIE

Siemens VDO Automotive, 1 Av. Paul Ourliac BP 1149, 31036 Toulouse, France.

Copyright © 2004 SAE International

## ABSTRACT

Fluid dynamics are essential mechanisms in the performance of internal combustion engines. This work proposes a study of the interaction between a direct injection jet and surrounding tumbling motion in a model Gasoline Direct Injection (GDI) engine chamber using single phase Large Eddy Simulation (LES). Simulations have been performed with the AVBP code which has a "cell-vertex" discretization associated with a Two-step Taylor Galerkin (TTGC) scheme and a Wall Adapting Local Eddy viscosity model. In order to explore the suitability of the 3D LES to simulate the internal flow, the calculation is performed for an idealistic tumbling flow at constant volume. An experimental set up has been designed and measurements are used to initiate and to validate calculations. A gaseous jet representative of the momentum of the real multiphase GDI engine is directly injected in a square chamber. Several initial conditions using Proper Orthogonal Decomposition (POD) analysis are used in order to estimate cycle to cycle variability and two injection strategies are discussed: firstly, a straight jet that competes with tumble; secondly, an inclined jet that adds momentum to the tumbling motion. Satisfactory evolution of the numerical results compared with experiments is found. 3D calculations show that the injection strongly modifies the initial rotating structure. The vorticity tube of this initial tumbling flow is deformed in the injection direction. LES results are compared to PIV measurements. This provides a deeper understanding of the 3D flow transition. Cycle-to-cycle variations are demonstrated to be of primary importance.

## INTRODUCTION

In gasoline direct injection (GDI) engines [1], there are two opposing mixing objectives: homogeneous or stratified. Dealing with stratification for partial load means to be able to ensure correct combustion for full load. The difficulty of optimizing these objectives has to

be overcome for the next generation of GDI engines. Three different injection strategies can be used: wall-guided [2], aerodynamical-guided [3] [4] or recently proposed spray guided [5]. The time period for possible ignition is limited due to turbulence level and pressure increase that influence mainly the flame propagation quality. In all these strategies, interaction between the spray and the transient flow resulting from intake and compression stroke has to be taken into account.

Previous studies on Direct Injection are numerous [1] [6] [7] [8] [9], reviews can be found for example in [10] [11]. Despite all these important works, a lack of understanding still remains because phenomena are complex and highly coupled, and technical parts change from a paper to another. Here, we focus on a more systematic, progressive investigation to bring basic understanding of the mixture formation involved in GDI engines. The present paper is then limited to the gaseous interaction between jet and the chamber large scale rotating motion, based on experimental [12] [13] [14] and new numerical tools.

Two large scales coherent rotating structures can take place in the cylinder [15]: a swirl with an axis that is parallel to the cylinder axis and a tumble with an axis perpendicular to the cylinder axis. The shape of the piston head or intake valve location can favor one of these two structures. Namely, the rotational motion is known to be efficient firstly to carry the fuel, secondly to store the kinetic energy of the intake flow and to restore it at the end of the compression. These characteristics are of significant interest for combustion and, in this paper, the effects of momentum brought by direct injection on the structure of the mean rotating flow, either by swirl or tumble (often referred to as "tumble" for brevity), is studied.

The interaction between an injection spray and a rotating coherent structure partially determines the mixing processes and the turbulence transition. It is necessary to study the rotating structure during and after

\* To whom correspondence should be addressed

injection. Unfortunately, studying mixing in an engine cylinder is difficult because of the limitations in optical access and geometry complexity. Relevant flows can be analyzed in simpler geometries in order to simplify the study. An experimental setup was designed at IMFT CNRS laboratory to study tumble behaviour and breakdown during compression: the square piston engine [12] [13]. This setup has been recently adapted to mimic the spray effect using a gaseous jet impacting onto the tumble [14].

Another recent study on this setup is presented in this paper where numerical simulations are used. Indeed, recent studies have shown the accuracy of LES for non-reacting as well as for reacting flows (see special issue of *Flow Turbulence and Combustion* (65, 2000) on LES of reacting flows or recent books on turbulent combustion [16] [17]). LES methods allow us to solve the large scales of the flow, while modeling the small ones by a subgrid scale (SGS) model, with a moderate cost of CPU time. Various studies have demonstrated the capacities of these methods in various configurations of simple combustors [18] [19] [20], swirled laboratory burners [21] [22] or complex geometry configurations [23] [24]. In piston engines, similar studies have been pursued [25]. So, LES have been performed for the square piston engine in order to predict 3D behaviour and obtain an insight into the internal flows mechanisms.

LES in piston engines raise specific problems, such as the choice of boundary or initial conditions, configuration complexity and CPU time cost. Various methodologies can be envisioned:

- MC (Multiple Cycle): the 'brute force' approach to compute a piston engine flow is to compute many cycles so that the conditions used for the first cycle no longer influence the calculation. Using state-of-the-art computation, this is still extremely difficult and is not really done even with RANS (Reynolds Averaged) conventional codes. One reason for this is that it requires computing everything accurately from the initial state. For example, the aerodynamics of intake cannot be studied unless combustion is correctly computed as well because it is necessary to go through a combustion phase at each cycle. This difficulty can be avoided by using motored engines in which no combustion takes place. Even in this case, the cost of a full LES over many cycles remains expensive [25].

- SC (Single Cycle): another strategy is to compute only a part of the cycle. For example, intake can be computed starting from top dead center. All these SC approaches are much easier to handle than MC and allow us to study the phenomena one at a time. The main problem, however, is the specification of the initial conditions.

A SC strategy has been chosen for this numerical study, and a particular type of initial condition based on experimental data has been constructed for the LES initial flow.

The first part of this paper describes the experimental configuration and measurements. The LES code and strategy are briefly presented in the second section. Numerical results are presented and compared to experimental data in the last part, with emphasis on the cycle-to-cycle variations influence for the numerical results.

## EXPERIMENTAL CONFIGURATION

This section describes the main features of the experimental setup, and the experimental diagnostics.

### EXPERIMENTAL SETUP

The IMFT experimental setup was designed to study the generation and breakdown of a tumbling coherent structure during one engine cycle [12].

It consists of a cubic compression chamber (figure 1). All faces are fixed except the piston which can move along the X-axis in a quasi-sinusoidal way. This alternating movement was parametered (velocity, period) to represent realistic IC engine movement: the tumble ratio  $R = \omega_t / 2\pi N = 5$ ,  $\omega_t$  is the tumble angular velocity, and  $N$  the engine frequency. The figure shows, opposite to the piston face, the admission channel. The lower face of the flat channel is the continuation of the chamber lower face. It is 100mm long in order to generate a quasi-bidimensional tumble during the backwards movement of the piston. The admission channel is only opened during admission and exhaust.

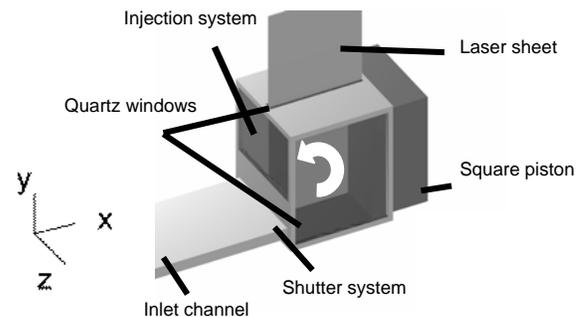


Figure 1 – Sketch of the experimental setup

An injection system placed in the same face as admission channel allows us to study the effects of injection on in-cylinder flow. Two configurations have been chosen for their interest of understanding the involved phenomena: in the first one, a straight air jet is injected that will compete with the tumble; the second one is a 30°-inclined jet that will add momentum to the tumbling motion. The two cases are displayed figure 2. The distance between bottom face and injector centerline  $y_{inj}$  is 62mm in the first and 50mm in the second. Injection velocity ( $U_0=30\text{m/s}$ ) and injector diameter ( $D_0=8\text{mm}$ ) have been determined by a non-dimensional analysis based on the angular momentum

brought by the injection, so that the square engine represents real IC engine conditions [14] [26].

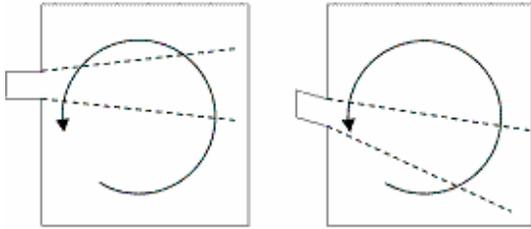


Figure 2 – Injection configurations: 1 (left) and 2 (right)

### TUMBLING FLOW FEATURES

The intake phase generates the tumbling flow at Bottom Dead Center (BDC), which is the initial flow condition for our simulations. This tumbling flow has particular features detailed in this section.

The tumbling motion has a core velocity of 0, and its radial velocity profile presents a maximum as shown in figures 3 and 4. The profiles coordinates correspond to the average tumble rotating center:  $X=36\text{mm}$  and  $Y=49\text{mm}$ .

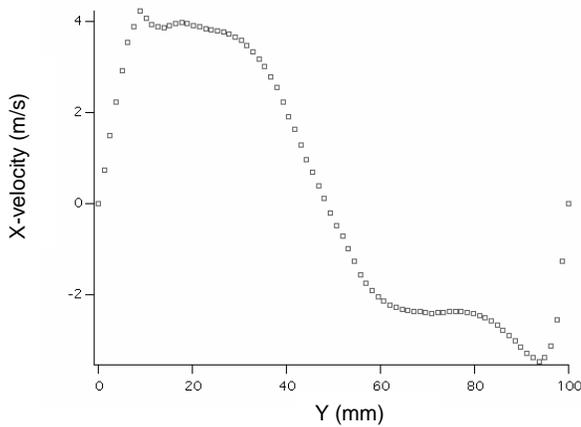


Figure 3 – Tumble X-velocity profile

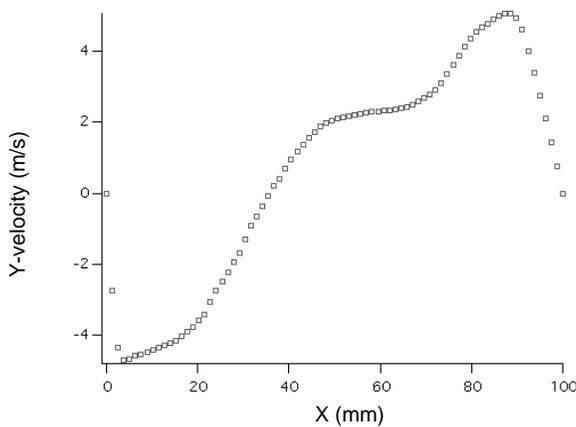


Figure 4 – Tumble Y-velocity profile

The tumble core is a high vorticity zone as shown on figure 5. Kinetic energy, figure 6, is naturally

contained in the maximum velocity zones. Since the tumble is a large coherent rotating eddy, this structure can be considered as a cylindrical rotating body in terms of vorticity.

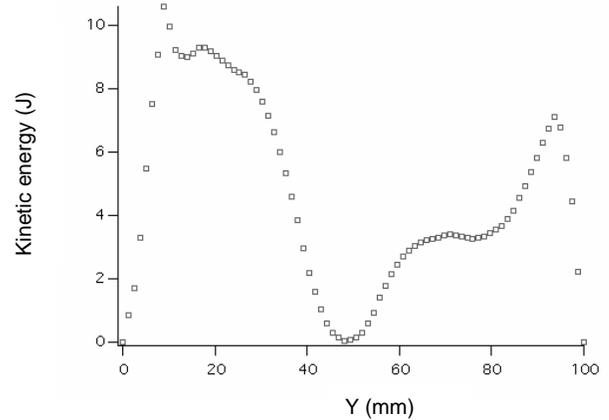


Figure 5 – Tumble kinetic energy profile

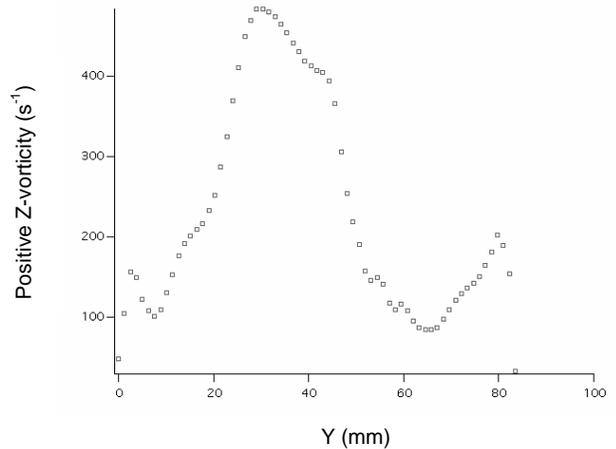


Figure 6 – Tumble positive vorticity profile

### EXPERIMENTAL RESULTS

From previous studies of this experimental setup [12] [13] [14], several Particle Image Velocimetry (PIV) measurements campaigns have been carried out. They consisted of measuring velocimetry of olive oil particles mixed with the in-cylinder air. The laser sheet was aligned in the symmetry plane as displayed on figure 1. Another measurements campaign was carried out by shifting the injection system  $2D_0=16\text{mm}$  from the symmetry plane.

Instantaneous experimental 2D-velocity fields are available, during intake, injection and compression strokes. These fields were phase-averaged in order to obtain mean velocity field and fluctuating velocities at each time frame. Figure 7 is an example of experimental field displaying phase-average velocity vectors in the symmetry plane, coloured by fluctuating energy.

A Proper Orthogonal Decomposition (POD) of the tumbling flow has also been undertaken previously

[13] to decompose an instantaneous tumble in a linear combination of its own proper modes. This method provides a base for a modal decomposition of a set of functions such as data obtained by PIV measurements by sorting solution of the following eigenfunctions problem:

$$\iint_D R_{ij}(x, x') \cdot \Phi_j^{(n)}(x') dx' = \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(x) \quad (1)$$

D represents the 2-dimensional domain of the velocity fields. Sirovich [27] proposed an equivalent approach:

$$R_{ij}(x, x') = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M U_i^{(n)}(x) \cdot U_j^{(n)}(x') \quad (2)$$

Then, the eigenfunctions  $\phi$  can be of the following form [14]:

$$\phi = \sum_{k=1}^M A_k U^{(k)} \quad (3)$$

Combining (1), (2) and (3) give the following system:  $C \cdot A = \lambda A$ .  $C$  is a M.M matrix defined as follow:

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^n U^{(i)}(x_m) \cdot U^{(j)}(x_m)$$

Where n is the number of vectors of the velocity field. The lth eigenfunction of this system represent the coefficient used in (3) to build the lth modal function of the flow.

The first and most energetic mode is the mean tumble. The two following modes are due to precession phenomenon [13]. Confined vortices are always submitted to precession due to the vortex-walls interaction and to fluctuations during the intake stroke. In both cases, the consequence of precession is a quasi-determinist movement of the tumble rotating center. This analysis will be helpful to study numerically the precession influence on the tumbling flow.

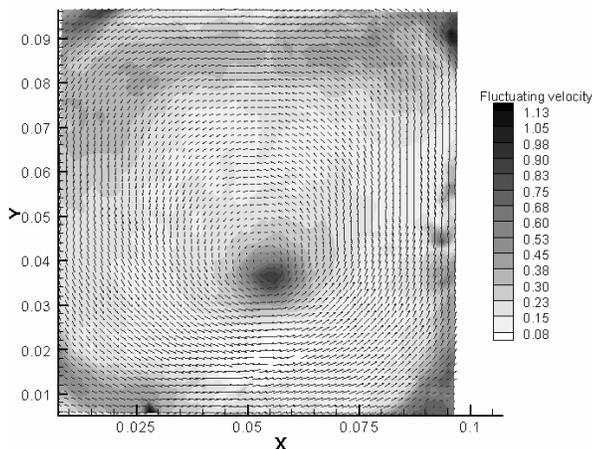


Figure 7 – Example of experimental average velocity vectors field, coloured by fluctuating energy

## SOLVER AND NUMERICAL STRATEGY

### LES SOLVER

For this work, the LES solver AVBP<sup>1</sup> which is developed at CERFACS was used. Dedicated to industrial and research applications, the code can solve the filtered Navier-Stokes equations in a wide range of flow conditions: reacting or non-reacting, laminar or turbulent, compressible or incompressible, stationary or transient. A 4-step Runge-Kutta method is employed for time integration. The numerical scheme is a 3rd-order spatial and temporal TTGC scheme (Two-step Taylor Galerkin Colin) that have been implemented in the solver and validated in many cases. Flow small scales were modeled by the WALE subgrid-scale (SGS) model: Wall Adapting Local Eddy viscosity model. This model was developed at CERFACS by F. Nicoud and F. Ducros [28]. The subgrid-scale viscosity expression is based on the square of the velocity gradient tensor. This SGS model, contrary to other models (Smagorinsky for example), predicts the behaviour of small structures near walls.

### SINGLE CYCLE STRATEGY

Experimental studies have been carried out from admission to compression. A delicate experimental point is the injection phase. The instabilities introduced by the jet in the compression chamber generate a complex flow. Injection takes place at BDC, between intake and compression, during which time the piston can be considered at rest.

All calculations are limited to this phase of the cycle and have been run on structured fixed meshes. This Single Cycle (SC) strategy was chosen to perform several simulations without a prohibitive cost.

Hence, calculations start at a half injection duration before the end of intake and piston is fixed at its BDC position. Injection duration is 23ms and we simulate an additional 5ms, so simulations represent 28ms of physical time. In the following,  $T_0$  represents the beginning of injection.

### GRIDS

Two meshes were generated in a structured way, according to the injector positions and angles in each configuration (see figure 2). The square chamber is refined in the near-injector region. The second configuration mesh needed to be finer than the first one near the bottom face because of the impaction of the jet on it. Thus, the first configuration mesh contains 210,000 nodes while the second contains 280,000 nodes.

All boundaries except the injector inlet patch were set to no slip walls, which is a significant

<sup>1</sup> <http://www.cerfacs.fr/cfd>

advantage. The inlet was studied to best mimic real injector behaviour (maximum velocity, relaxation times).

The computational time step was about  $10^{-7}$ s and the overall CPU cost for each calculation was approximately about 25-28 hours on 16 processors (about 430 hours CPU).

### INITIAL CONDITIONS

A major problem of SC simulations is the choice of initial conditions.

The experimental setup provides two-dimensional information in the symmetry plane and a parallel plane distant from the first one of  $2D_0$ . The main issue is, in our case, the construction of a three-dimensional initial velocity field for LES.

This is done by considering the tumble as an extrusion of a 2D-tumble velocity field obtained in the symmetry plane from PIV measurements. The 3D-field is generated by extrusion of the 2D-field along the Z-axis. Smoothing is used to bring all velocity components to 0 near the no-slip walls of the configuration.

Other initial conditions have been generated from experimental data, in order to study precession phenomenon [12] [13]. We used POD analysis results combining average tumble mode and precession modes to obtain two other 3D initial velocity fields. The tumble rotating center of the first (positive precession) field is shifted a few millimeters (about 5mm) from the average tumble rotating center, and the second (negative precession) is shifted the same distance in the opposite direction. A last initial field has been used in which the tumble rotating center is displaced from the average position of about 20mm (Distant tumble).

In the following section, results will be presented with the symbols of table 1.

## NUMERICAL RESULTS

### VALIDATION OF THE SIMULATIONS

A validation of the calculations has been performed by comparing numerical results with experimental data on two axes: the symmetry plane velocity fields and X-velocity profiles at several coordinates also in the symmetry plane are presented at several times during injection.

Figure 8 shows the symmetry plane velocity fields for the first injection configuration (figure 2), both from numerical and experimental data. All numerical fields show a good agreement with average experimental data.

The first vortex ring forms at the edges of the injector. Its properties seem to be close to experimental one.

	Initial condition	Symbol
Experiment	Average tumble	o o o o o o
LES 1	Average tumble	—
LES 2	Pos. precession	+ + + + +
LES 3	Neg. precession	- - - - -
LES 4	Distant tumble	.....

Table 1 – Initial conditions used in the simulations

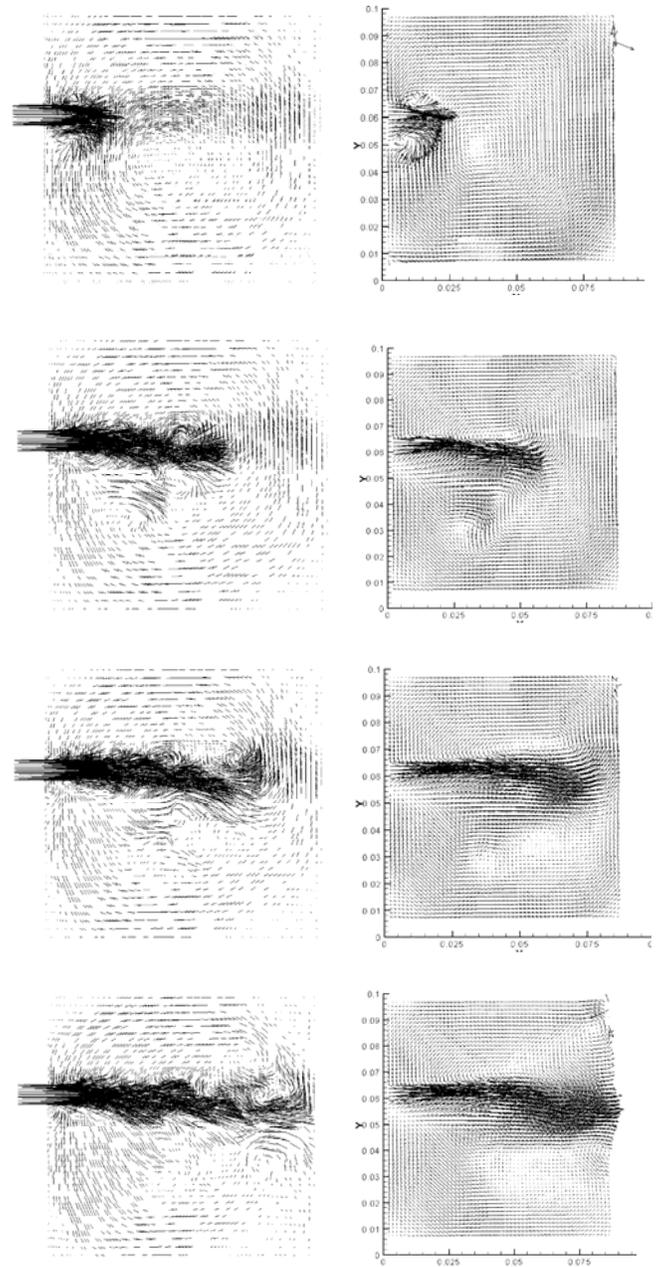


Figure 8 – Numerical and experimental 2D-velocity fields in the symmetry plane at  $T_0+2, 6, 10, 15$ ms (from top to bottom)

A detached structure that was observed experimentally, under the air jet, is also visible in numerical results, and confirms the influence of the tumbling flow on the transient jet structure. After that, when the jet is fully developed, the instabilities that raise at the jet boundary are accurately predicted in terms of size and quantity. No experimental information of the jet impact on piston face is available since PIV measurements cannot reach the walls because of optical reflexions.

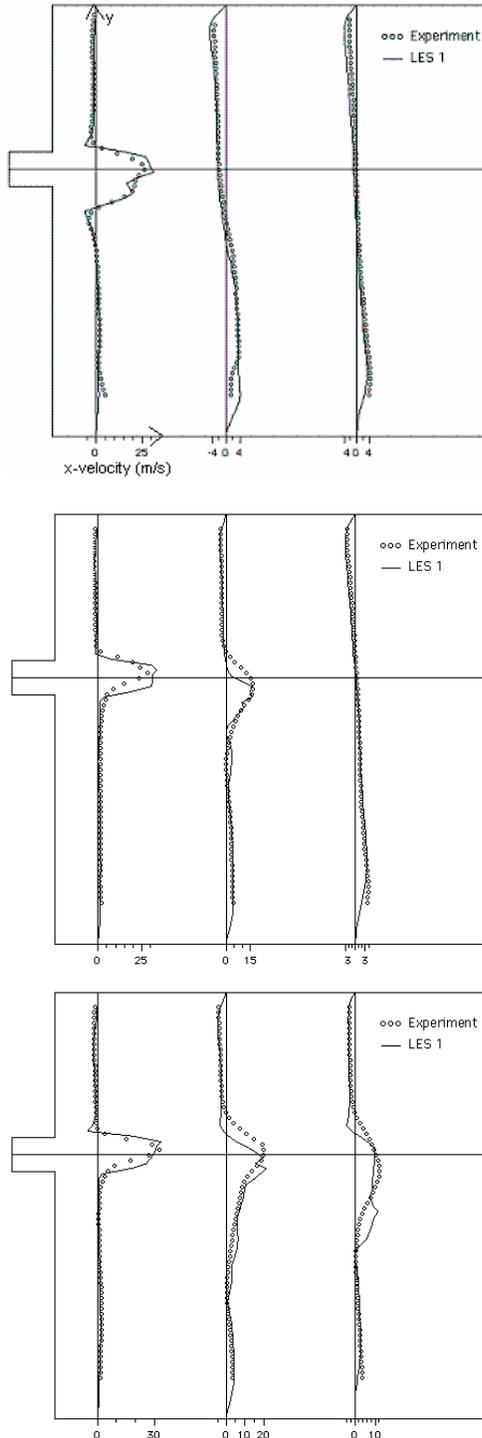


Figure 9 – X-velocity vertical profiles at  $T_0+2, 6, 10$ ms (from top to bottom); horizontal line is the injector centerline

The large structures development is now quantified by comparison of X-velocity profiles in the symmetry plane, along several vertical and horizontal lines (figures 9 and 10). In each graph, X-velocity profiles are extracted from vertical (resp. horizontal) lines corresponding to  $X=10, 40, 70$ mm coordinates on figure 9 (resp.  $Y=52, 62, 72$ mm on figure 10).

Figures 9 and 10 show LES instantaneous profiles compared to averaged experimental ones.

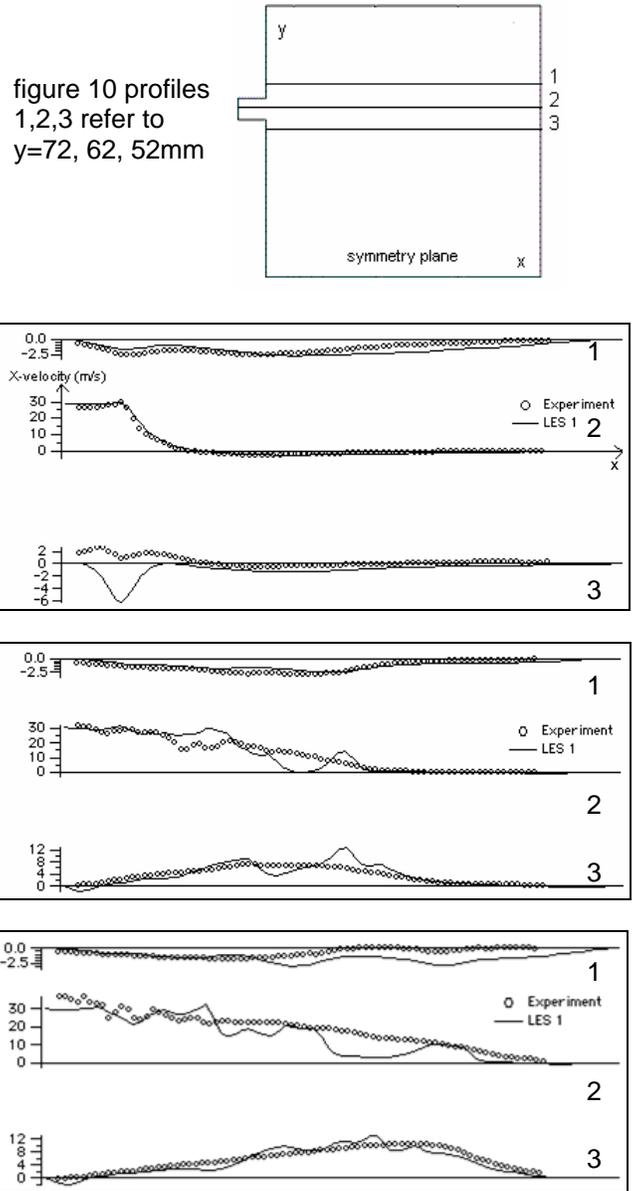


Figure 10 – X-velocity horizontal profiles at  $T_0+2, 6, 10$ ms (from top to bottom)

All LES X-velocity profiles show a satisfactory evolution compared to experiments during the whole injection period. Some differences between experimental and numerical velocity profiles are present. These differences may be due to temporal adjustment or to spatial errors. Indeed, numerical boundary conditions were set to give the best approximation of experimental

configuration and inlet chosen to mimic real injector behaviour.

The largest encountered discrepancies in velocity are about 15 m/s. This is significant compared with velocity flow-field. Experimentally, the X-velocity perturbations are higher than 10 m/s in the jet (figure 11), reaching 20m/s near the jet centerline. So, the experimental velocity fluctuations during the injection are of the same order as the velocity differences between instantaneous numerical and experimental average velocity profiles. This will be discussed later concerning precession and cycle-to-cycle variations.

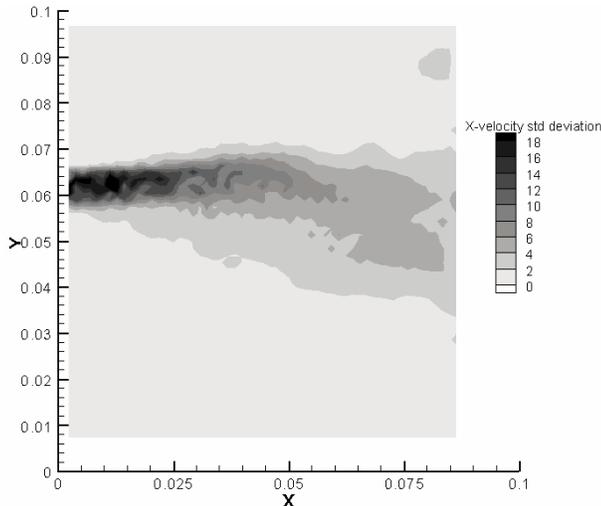


Figure 11 – Experimental instantaneous X-velocity fluctuations field at  $T_0+10\text{ms}$

### 3D BEHAVIOUR

The calculations give an insight of the highly three-dimensional behaviour of the jet/tumble interaction that cannot be easily measured by experimental setup.

A specific method to visualize rotating and turbulent structures has been employed as the principal post-processing tool. It is based on the Q-criterion determination first introduced by Jeong and Hussain [29] and widely used on Large Eddy Simulation results. This criterion is defined by:  $Q = (\Omega_{ij}^2 - S_{ij}^2) / 2$ ,  $\Omega_{ij}$  and  $S_{ij}$  are the antisymmetric and symmetric decomposition of the velocity gradient tensor. Its main advantage is to identify the rotating part of the velocity gradient tensor. In the presence of no-slip walls and at jet boundary, the Q-criterion will not take into account the high-level shear stresses, compared to rotational dynamics.

#### Results on the first configuration:

Figure 12 shows the temporal evolution of the interaction between air injection and tumble using the Q-criterion in the first injection configuration. The value of the iso-surfaces is set arbitrary to  $3e^{+4} \text{ s}^{-2}$  (Q maximum value is about  $3e^{+7} \text{ s}^{-2}$ ).

Early in the injection the first vortex ring is formed at the edge of the injector and is deflected by tumbling action towards the tumble core.

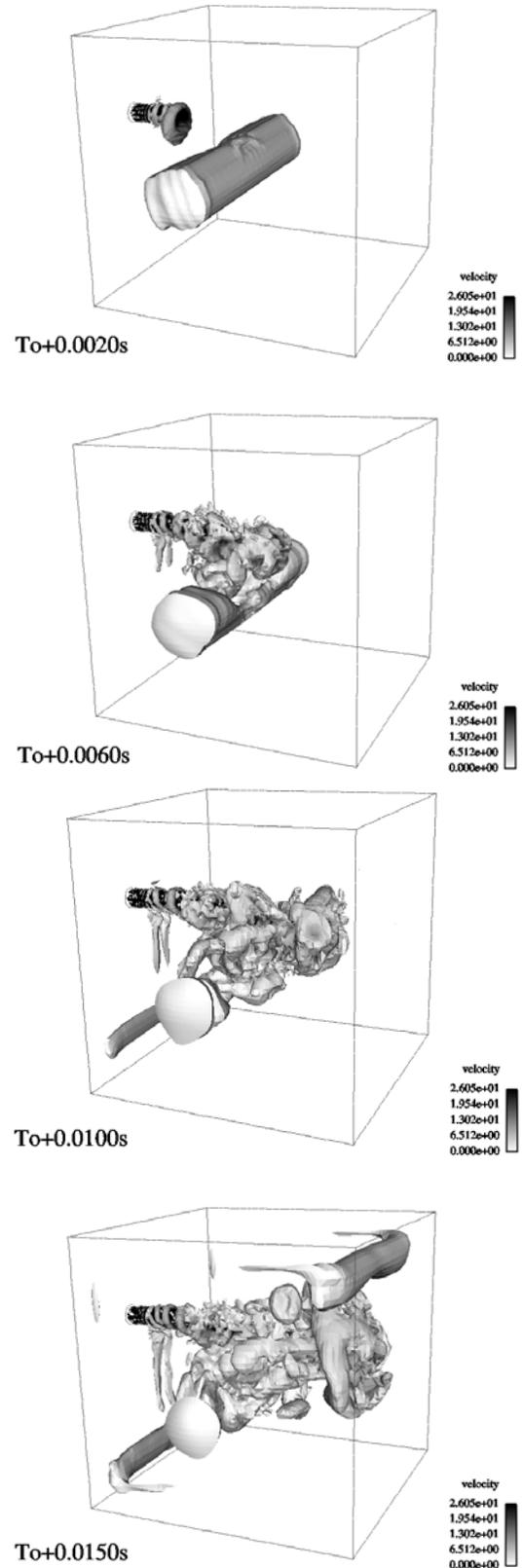


Figure 12 – First configuration visualization of coherent structures using Q-criterion iso-surfaces ( $Q=3e^{+4} \text{ s}^{-2}$ ) of LES 1 during the injection (at  $T_0+2, 6, 10, 15\text{ms}$ ). Iso-surfaces are coloured by velocity

Assuming that the configuration can be compared to a jet in cross flow, and given that injected fluid has the same density as cross flow, the jet to cross flow momentum ratio  $r$  [30] is:  $r = \sqrt{U_j^2 / U_{cf}^2}$ , where  $U_j$  and  $U_{cf}$  are respectively the mean jet flow and the maximum tumble velocity at the beginning of the injection. Here,  $r$  is equal to 6. In a uniform cross flow, a jet is found to be deflected from  $X/D_0=2$  i.e.  $X=16\text{mm}$  after the jet nozzle.

The cross flow is non-uniform and at this distance the momentum ratio is much higher. This shows that the tumble does not have a strong deflecting effect on the round jet when the jet is established.

Nevertheless, a deformation by the cross flow occurs with the apparition of a typical horseshoe vortex near the injector after  $T_0+6\text{ms}$  (figure 12), which is a particular vortex stretched in the cross flow direction. A counter rotating vortex pair CVP in transversal planes of the jet is also observed by visualizing X-vorticity contours (figure 13).

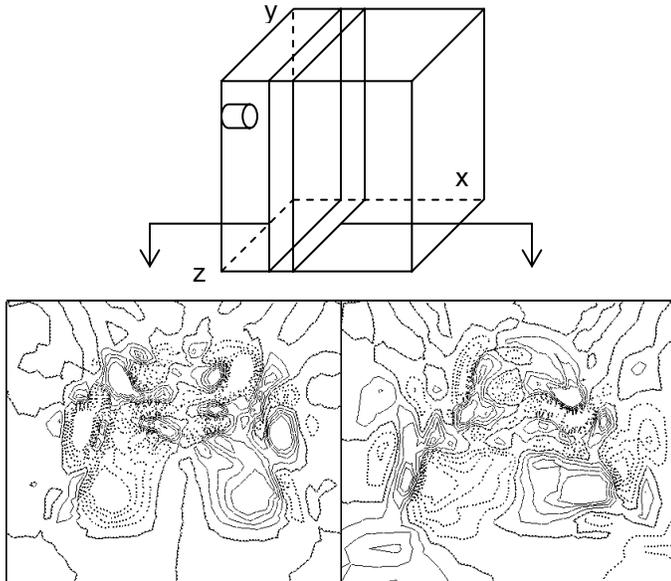


Figure 13 – X-vorticity iso-contours in jet transversal planes (left:  $X=20\text{mm}$  and right:  $X=30\text{mm}$ ),  $T_0+6\text{ms}$ .  
 - - - : positive vorticity, — : negative vorticity.

Another significant factor is the jet impact on the rotating structure. The Q-criterion iso-surfaces (figure 12) show that the initial quasi-cylindrical tumbling structure is progressively “dug” and then broken in its center. Hence, the tumble cannot be considered as a predominating eddy from  $T_0+10\text{ms}$ . Some corner recirculations appear, their rotational dynamics are more intense than the tumble or jet structures.

At the end of the simulation, after injection termination (25ms), flow complexity has increased and no tumble structure is visible except near lateral sides (far from the symmetry plane), where some disrupted tumbling motions are still present.

### Results on the second configuration:

The second configuration main particularity is that injection is made in tumble co-flow, whereas it was made in counter-flow for the first configuration.

In figure 14, the jet axis is located between the tumble core and the bottom wall of the compression chamber.

During the injection, the tumble deformation by the jet is not strong: the tumble core is preserved, even if in the symmetry plane it is significantly perturbed. In that zone, an advection of vorticity is visible from  $T_0+10\text{ms}$  (figure 15) and persists in the following times, by deforming the jet structures after impinging on the bottom wall.

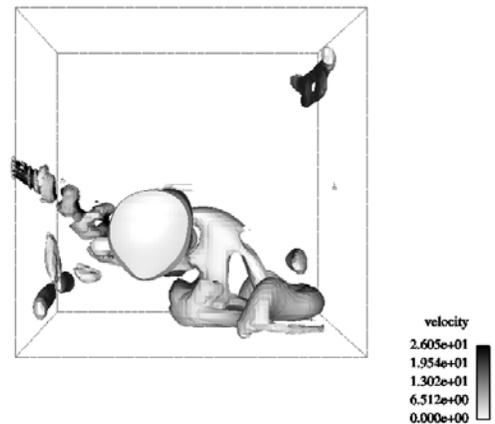


Figure 15 – Front view of coherent structures using Q-criterion iso-surfaces ( $Q=3e+4 \text{ s}^{-2}$ ) at  $T_0+10\text{ms}$ , for the second configuration.

As experimental data demonstrated for the symmetry plane, numerical results show a noticeable displacement of the rotating structure towards lower right corner direction during the whole injection phase.

### END OF INJECTION FLOW

Before injection, tumble streamlines are regular and quasi-circular (figure 16):

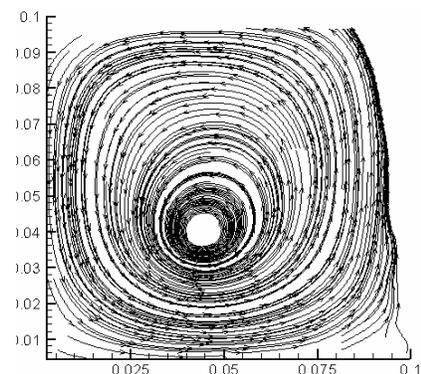


Figure 16 – Experimental initial tumble streamlines

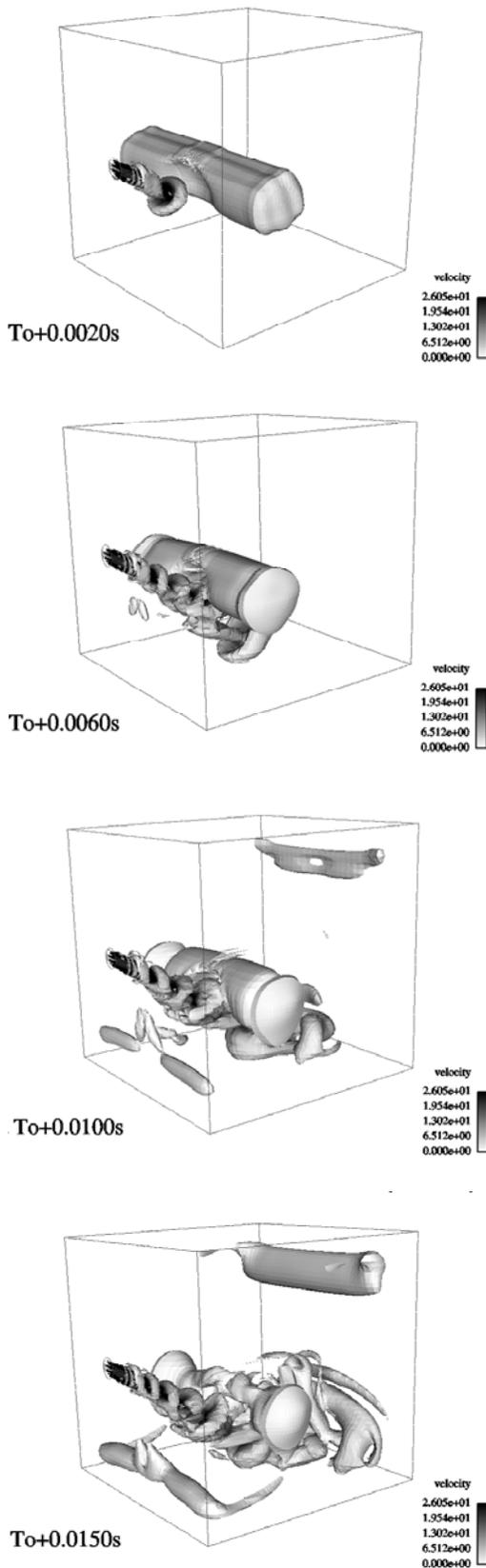


Figure 14 – Second configuration visualization of coherent structures using Q-criterion iso-surfaces ( $Q=3e^{+4} s^{-2}$ ) of LES 1 during the injection (at  $T_0+2, 6, 10, 15$ ms). Iso-surfaces are coloured by velocity

The dynamics of the two configurations are confirmed by the visualization of instantaneous streamlines (i.e. frozen streamlines) in the symmetry plane ( $Z=50$ mm) and a parallel plane ( $Z=36$ mm). On figure 17, for the first configuration, no predominating structure appears in the symmetry plane: initial circular streamlines are totally deformed at the end of injection. This numerical result agrees with experimental streamlines based on average velocity fields.

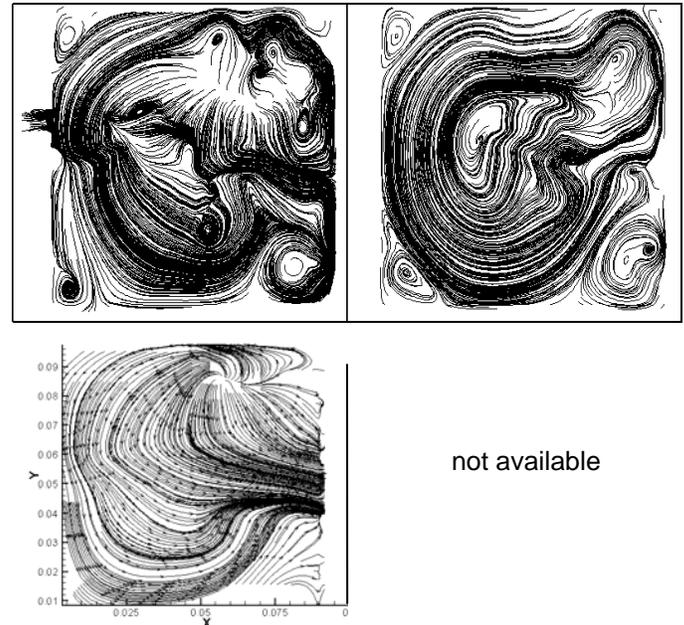


Figure 17 – Numerical (top) and phase-averaged experimental (bottom) frozen streamlines after first configuration injection. Symmetry plane (left) and parallel plane (right)

Concerning the second configuration (figure 18), streamlines are less perturbed and an ensemble movement can be identified, caused by the persisting behaviour of the tumble, even if the jet perturbation in the symmetry plane is non-negligible.

#### MIXING AND TRANSPORT OF INJECTED AIR

Dynamics of the interaction between air jet and surrounding air are significantly different in the two studied configurations. Consequences on mixing and injected fluid transportation are now presented.

In order to quantify the mixing of injected air and tumbling flow, a simplified mixing index  $I$ , is defined by:

$$I = \frac{Y(O_2)_{tumb} \times Y(O_2)_{inj}}{\max_{\forall t} (Y(O_2)_{tumb} \times Y(O_2)_{inj})}$$

where  $Y(O_2)_{tumb}$  and  $Y(O_2)_{inj}$  are respectively the mass fraction of initial tumble oxygen and the mass fraction of injected oxygen. When the two species are locally present (notably in mixing layer), the index value will be important indicating a high mixing. If only one species is present locally, the index will be 0 indicating low mixing.

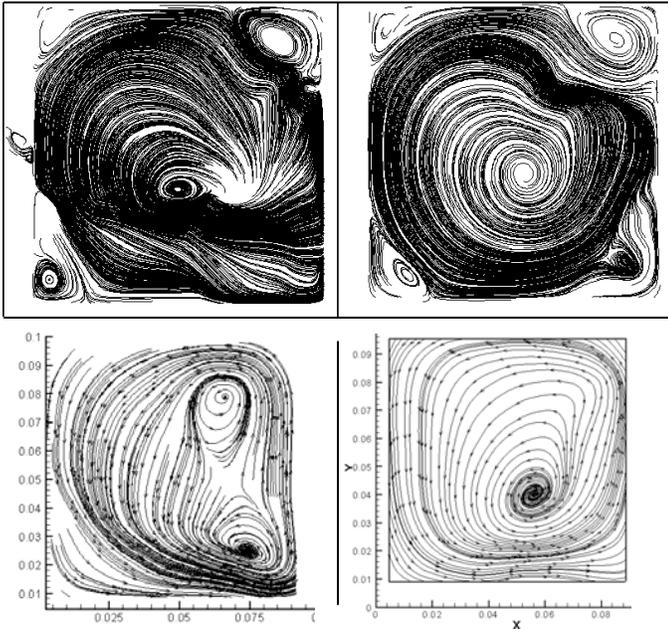


Figure 18 – Numerical (top) and phase-averaged experimental (bottom) frozen streamlines after second configuration injection. Symmetry plane (left) and parallel plane (right)

Fields of mixing index in the compression chamber at the end of the first injection configuration simulation (figure 19) show that the injected air is contained in a conical zone which apex is centered on the injector. The tumbling flow has not played a role on fluid advection: air jet dynamics is predominant in mixing processes. In the best mixing zone, we have  $I > 75\%$ .

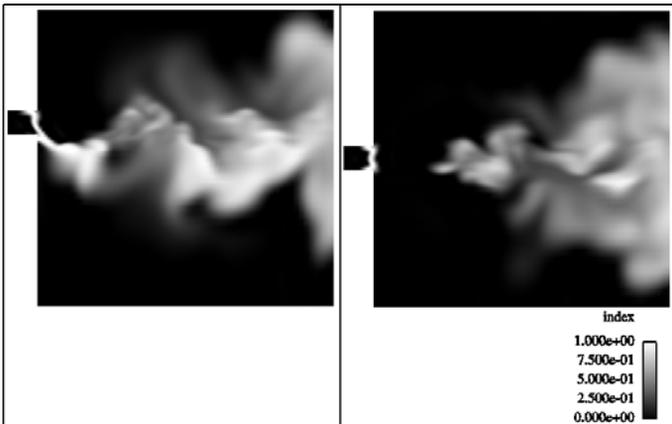


Figure 19 – Mixing index visualization at  $T_0+28ms$  for the first configuration. Symmetry plane (left) and horizontal plane (right)

In the other configuration (figure 20) good mixing is only noticeable in the near region of the lower right edge. In this mixing region,  $I$  minimum value is also about 70-75%. As in the first configuration, it seems that the mixing characteristics are only controlled by the air jet dynamic.

In both cases, mixing properties are only of interest in a defined zone, depending on jet direction,

where the mixing index is higher than 70%, and there are always other regions where mixing is not realized at all. According to the chosen mixing strategy (stratified or homogeneous), the choice of injection configuration is essential for the location of such regions within the compression chamber.

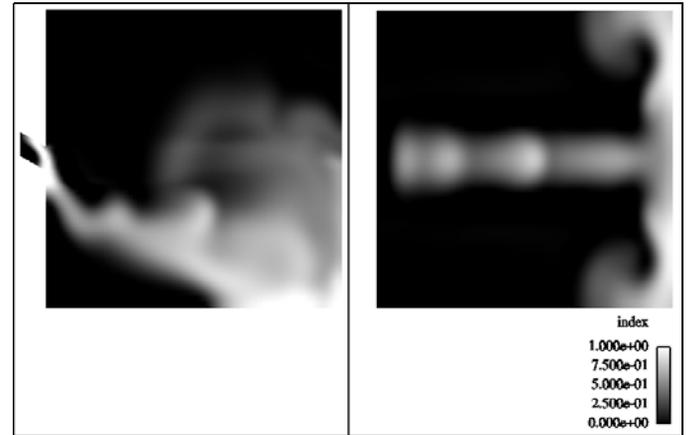


Figure 20 – Mixing index visualization at  $T_0+28ms$  for the second configuration. Symmetry plane (left) and horizontal plane (right)

## INFLUENCE OF THE TUMBLE ROTATING CENTER LOCATION

### Precession

Precession, which has been described in the “experimental configuration” part, is a major feature of the model piston engine flow: it has been proven and described by Marc [12] and Maurel [13]. The objective of this part is to characterize its influence on the jet/tumble interaction. This investigation is done using LES.

Additional simulations have been run with the initial conditions previously called positive and negative precession (see table 1), at a representative level of in-cylinder precession. LES 2 and 3 results still show a good agreement with experimental data in terms of velocity profiles as shown on figure 21. The effect of precession is not sensitive for early times in the injection, nor near the injector zone. But later during the injection and far from the injector, the gaps between precession and average results grow sensitively, and can reach discrepancies of 15m/s.

### Further displacement of the tumble rotating center

A last type of simulation has been performed with an initial tumble which rotating center is far from the average position, of about 20mm. The idea is to show the influence of higher cycle-to-cycle variations.

A representative sample of the velocity profiles obtained in these simulations is presented in figure 22. Velocity profiles confirm that the tumble rotating center position has an important impact on the results, and in consequence on the dynamics of the interaction

between the air jet and the tumble. Indeed, the velocity gaps found in the comparison between LES 1 and 4 are of the order of the velocity value at certain points. This displacement of the initial rotating center gives better agreement for the results compared to experimental data than the LES 1 results.

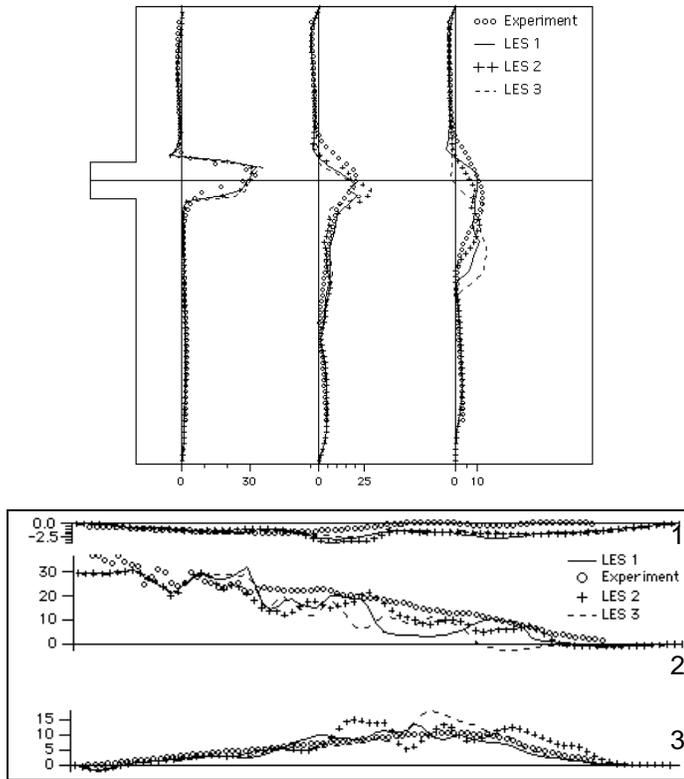


Figure 21 – X-velocity profiles sample from numerical results with precession, at  $T_0+10ms$

From these additional results, three conclusions can be drawn:

- 1- Results with cycle-to-cycle variations present sensitive differences compared to LES 1 (initial average tumble), that is to say precession influence on tumbling flow is absolutely not negligible.
- 2- Direct averaging of LES 2 and 3 profiles does not recover LES 1 profiles (corresponding to the initial average tumble) nor experimental data.
- 3- Individual results with precession seem in many cases to be closer to experimental data than LES 1 results (shown in the “validation” section).

#### CONSEQUENCE ON THE COMPRESSION STROKE

The analysis of the injection stroke at BDC shows that the mean topology of the flow after both injections differs significantly and that the vorticity tube is significantly distorted only in the vicinity of the injection plane. Strong transverse mean flows are detected in the simulations.

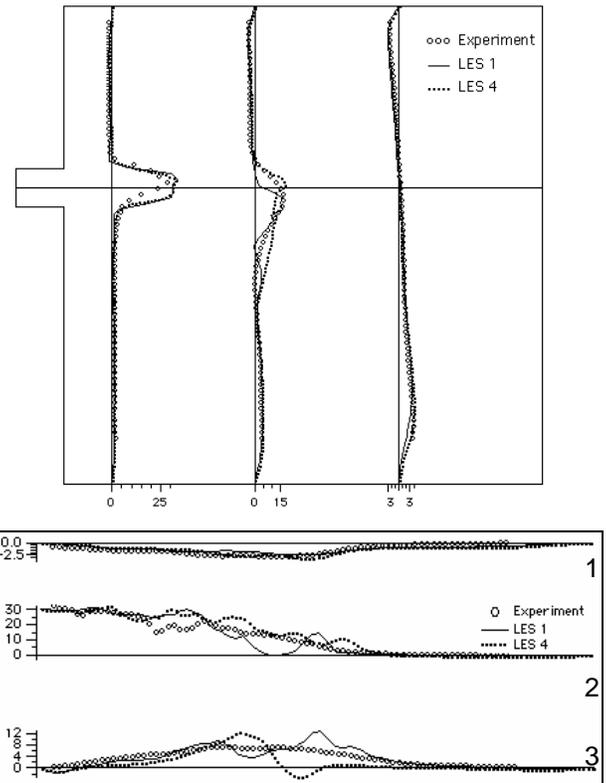


Figure 22 – X-velocity profiles sample from numerical results with distant tumble, at  $T_0+6ms$

Experimental measurements during the compression stroke for the same configuration show that the transport of the injected fluid by the tumbling motion strongly depends on the injection strategy [26].

A “free” tumbling motion is known to be an efficient way to store the kinetic energy of the valve jet and to restore it at the end of the compression phase. It has been shown that a direct injection jet can completely alter this property. A much lower level of turbulent kinetic energy in the in-cylinder flow at ignition would be a negative fact for the global performances of the engine.

#### CONCLUSION

This paper presents the main results of a LES numerical study of the interaction between an air jet and surrounding air in a model engine configuration, namely the experimental square piston engine of IMFT laboratory.

The two main objectives of this work have been reached: firstly LES has proved its ability to handle and solve complex flow, here a transitional jet impacting a rotational motion inside a closed vessel; secondly direct injection strategy has been explored by focusing on gaseous jet/tumble interaction and by using LES and experiment full capabilities.

A particular type of initial condition has been used, based on experimental results. Validation of the numerical results has been undertaken comparing with

experimental measurements, and a global good agreement is found. The cycle-to-cycle fluctuations influence has been explored numerically by using another type of initial condition taking into account displacement of the initial tumble center using POD analysis data. The results allow us to explain the discrepancies we first found in the comparison between experiment and average initial tumble simulations. Initialization with first modes of POD seems to lead to more representative results than using average RANS-like initial conditions.

A three-dimensional analysis of the involved mechanisms, based on numerical data, has been made, highlighting several points: rotating structures dynamics, mixing and air injected transportation, influence of the tumble rotating center position. A significant result is that the injection strategy is crucial in the load location, but no purely stratified or homogeneous load delivering can be easily and quickly reached, at least without two phases dynamic. Simulations show that the mean rotating flow is modified by the injection (even pure gaseous). A strong transverse flow is detected after injection in both cases, with wall interaction. Coherent tumble persistence seems to be ensured only in co-flow injection. Moreover, injection effect is also important in the energy transfer between mean and fluctuating flow.

To complete this investigation of injection on the transient in-cylinder, simulations of compression stroke with mesh deformation would be interesting to confirm the time evolution of the load and tumble before ignition. A natural extension of the present work will be to simulate liquid injection by using multifluid LES to distinguish multiphase dynamics and specificities.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank Prof. J. Borée for his contribution on the physical analysis of the experimental data. Thanks are also given to Dr. V. Favre for his help during numerical simulations set up.

## REFERENCES

1. F. Zhao, D.L. Harrington, M.-C. Lai. *Automotive Gasoline Direct-Injection engines*. SAE ed. (2002).
2. T. Kume, T. Iwamoto, K. Lida, M. Murakami, K. Akishino and H. Ando. *Combustion control technologies for direct injection SI engine*. SAE paper 96-0600 (1996).
3. T. Tomoda, S. Sasaki, D. Sawada, A. Saito and H. Sami, *Development of Direct Injection Gasoline engine - Study of stratified mixture formation*, SAE paper 97-0539 (1997).
4. H. Tatsuta, M. Matsumura, J. Yajima, and H. Nishide, *Mixture Formation and Combustion Performance in a New Direct-Injection SI V-6 Engine*, SAE paper 98-1435 (1998).
5. W. Hubner, A. Witt, B. Hoss, T. Albrecht, B. Durst, A. Abdelfattah. *Methodeninsatz bei der entwicklung eines weiterführenden DI-Brennverfahrens, Directeinspritzung im Ottomotor IV*, Ed. E. Steinmetz, ExpertVerlag, pp. 199-218 (2003).
6. J. Hélie, J.-M. Duclos, T Baritaud, T. Poinot and A. Trouvé. *Influence of mixture fluctuations on combustion in direct injection spark ignition engines simulations*. SAE paper 2000-01-1226 (2000).
7. R.W. Anderson, J. Yang, D.D. Brehob, J.K. Vallance and R.M. Whiteaker. *Understanding the thermodynamics of Direct-Injection Spark-Ignition (DISI) combustion systems: an analytical and experimental investigation*. SAE paper 97-0695 (1997).
8. T.H. Lake, S.M. Sapsford, J. Stokes and N.S. Jackson. *Simulation and development experience of a stratified gasoline direct-injection engine*. SAE paper 96-2014 (1996).
9. M. Castagne, E. Cheve, J-P Dumas and S. Henriot. *Advanced tools for analysis of gasoline direct-injection engines*. SAE paper 2000-01-1903 (2000)
10. Y. Tagaki, *A new era in spark ignition engines featuring high-pressure direct injection, 27<sup>th</sup> Symp. (Int.) on Combustion*, The combustion institute, pp2055-2068 (1998).
11. F. Zhao, M.C. Lai, D.L. Harrington. *A review of mixture preparation and combustion control strategies for spark-ignited direct-injection gasoline engines*. SAE paper 97-0627 (1997).
12. J. Borée, D. Marc, R. Bazile, B. Lecordier. *On the behaviour of a large scale tumbling vortex flow submitted to a compression*. European Series in Applied and Industrial Mathematics proceedings: [www.emath.fr/Maths/Proc](http://www.emath.fr/Maths/Proc) (1999).
13. J. Borée, S. Maurel, R. Bazile. *Disruption of a compressed vortex*. Physics of Fluids (2002)
14. J. Moreau, J. Borée, R. Bazile, G. Charnay. *Modification of an experimental model tumbling flow by direct injection*. SAE paper 2003-01-0064. (2003).
15. T. Urushiara, T. Murayama, Y. Tagaki and K. Lee, *Turbulence and cycle-by-cycle variation of mean velocity generated by swirl and tumble flows and their effects on combustion*, SAE paper 95-0813 (1995).
16. N. Peters. *Turbulent combustion*. Cambridge University Press (2000).
17. T. Poinot, D. Veynante. *Theoretical and numerical combustion*, Edwards (2001).
18. C. Angelberger, D. Veynante, F. Egolfopoulos. *Large Eddy Simulations of chemical and acoustic forcing of a premixed dump combustor*. Flow, Turbulence and Combustion, 65(2):205-222 (2000).
19. O. Colin, F. Ducros, D. Veynante, T. Poinot. *A thickened flame model for Large Eddy Simulations of turbulent premixed combustion*. Physics of Fluids, 12(7):1843-1863 (2000).
20. P.E. Desjardins, S.H. Frankel. *Two dimensional Large Eddy Simulation of soot formation in the near field of a strongly radiating nonpremixed acetylene-air jet flame*. Combustion and Flame, 119 (1999).

21. C. Pierce, P. Moin. *Large Eddy Simulation of a confined coaxial jet with swirl and heat release*. AIAA Paper 98-2892 (1998).
22. H. Pitsch, L. Duchamp de Lageneste. *Large eddy simulation of premixed turbulent combustion using a level-set approach*. Proc 29th Symposium on Combustion (2002).
23. D. Caraeni, C. Bergstrom, L. Fuchs. *Parallel NAS3D: an efficient algorithm for engineering spray simulations using LES*. Flow, Turbulence and Combustion, 65 223-244 (2000).
24. L. Selle, G. Lartigue, T. Poinsot, R. Koch, K.-U. Schildmacher, W. Krebs, P. Kaufmann, D. Veynante. *Compressible Large Eddy Simulation of turbulent combustion in complex geometry on unstructured meshes*. Combustion and Flame (2003).
25. D.C. Haworth, K. Jansen. *LES on unstructured deforming meshes: towards reciprocating IC engines*. Computers and Fluids 29 (2000).
26. J. Moreau. *Interaction entre un jet et un tourbillon compressé. Etude expérimentale de l'aérodynamique et du mélange*. PH-D Thesis, INPT, 2003.
27. L. Sirovich. *Method of snapshots*. Quarterly of applied mathematical, Vol. 45(3), 561-571, Brown University (1987).
28. F. Nicoud and F. Ducros. *Subgrid scale stress modeling based on the square of the velocity gradient tensor*. Flow, Turbulence and Combustion (1999).
29. J. Jeong and F. Hussain. *On the identification of a vortex*. Journal of Fluid Mechanics (1995).
30. S.H. Smith and M.G. Mungal. *Mixing, structure and scaling of the jet in cross flow*. Journal of Fluid Mechanics (1998).



## Annexe B

# Article accepté pour publication dans Computers and Fluids

La seconde publication concernant le stage de Master est un article à paraître dans Computers and Fluids (accepté le 27 Février 2006).

---

A. Devesa, J. Moreau, J. Hélie, V. Faivre and T. Poinsot. *Initial Conditions for Large Eddy Simulations of Piston Engine Flows*. To be published in Computers and Fluids, 2006.

---





## Initial conditions for Large Eddy Simulations of piston engine flows

A. Devesa<sup>a,b,\*</sup>, J. Moreau<sup>a</sup>, J. Hélie<sup>a,1</sup>, V. Faivre<sup>a</sup>, T. Poinso<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> *IMFT, Fluid Mechanics Institute of Toulouse, Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France*

<sup>b</sup> *CERFACS, European Center For Research and Formation in Advanced Computations, 42 Avenue Coriolis, 31057 Toulouse Cedex 01, France*

Received 1 March 2005; received in revised form 14 November 2005; accepted 27 February 2006

### Abstract

The exact knowledge of the flow in a piston engine chamber is of vital interest in engine design. These flows feature 3D highly unsteady turbulent phenomena combined with combustion processes. Large Eddy Simulations (LES) appear to be a promising way to simulate them. However, computing several engine cycles results in excessive computational costs. Therefore, a different approach, namely the single-cycle strategy (SC), is to perform several simulations just of those parts of one engine cycle that are of interest. In this study, non-reacting LES is undertaken with a SC strategy for the injection of gas into a tumbling motion. Measured data are used for both the initialization and the validation of the computations. In addition, the initial field is varied using a proper orthogonal decomposition analysis on the experimental data to mimic realistic cycle-to-cycle variations of the tumble before the injection. Satisfactory results are obtained by using a simple procedure for creating initial conditions based on experimental data. By changing the initial field, it is demonstrated that initial conditions have a very significant influence on the LES results. This influence may restrict the use of SC strategies in favour of multiple-cycle computations.

© 2006 Published by Elsevier Ltd.

### 1. Introduction

Large Eddy Simulations (LES) are applied in many fields of flow simulations. In gas turbines, recent studies have shown the ability of LES to accurately compute non-reacting as well as reacting flows (see special issue of *Flow Turbulence and Combustion* (65, 2000) on LES of reacting flows or recent books on turbulent combustion [1,2]). Multiple tests have demonstrated the capacities of these methods in various configurations from simple combustors [3–5], to swirled laboratory burners [6,7] or complex geometry configurations [8,9]. In piston engines, similar studies have been pursued [10,11], and even though

no LES has been reported for reacting cases in an engine yet, it is obviously going to be the case soon.

It is important to note that stationary combustion in gas turbines and in piston engines raises very different issues in terms of LES:

- In both cases, the injection of turbulence through the boundary [12–14] and the control of acoustic waves [2,15,16] play an important role. In this respect, gas turbine and piston applications are not significantly different.
- Initial conditions are a different issue: in stationary combustors, the initial conditions are not important as long as a steady turbulent regime can be obtained. In this regime, initial conditions are forgotten and the flow is controlled only by the boundary conditions. For piston engines, the issue is much more complex: cycle-to-cycle variations are well-known difficulties for such flows and initial conditions are a key factor in the result.

\* Corresponding author. Present address: CERFACS, European Center For Research and Formation in Advanced Computations, 42 Avenue Coriolis, 31057 Toulouse Cedex 01, France.

E-mail address: [devesa@cerfacs.fr](mailto:devesa@cerfacs.fr) (A. Devesa).

<sup>1</sup> Present address: Siemens VDO Automotive, 1 Avenue Paul Ourliac, BP 1149, 31036 Toulouse, France.

Therefore, the LES strategy for piston engine computations has been the subject of multiple discussions. Various methodologies can be imagined:

- *MC (multiple cycle)*: the ‘brute force’ approach to compute a piston engine flow is to compute many cycles so that the conditions used for the first cycle are forgotten. This is extremely difficult today and is not really done even with RANS (Reynolds averaged Navier–Stokes) simulations. One reason for this is that it requires to compute everything accurately right away. For example, the aerodynamics of intake cannot be studied unless combustion is correctly computed as well, because it is necessary to go through a combustion phase at each cycle. This difficulty can be circumvented by using motored engines in which no combustion takes place. Even in non-reacting flows, the costs of performing LES over many cycles remain very large [10,17].
- *SC (single cycle)*: here, the strategy is to compute only a part of the cycle. For example, combustion is computed by starting the simulation when the piston is at Bottom Dead Center (BDC). Or intake can be computed starting from Top Dead Center (TDC). All these SC approaches are much easier to handle than MC calculations and allow to study phenomena one by one. Their major problem, however, is the specification of proper initial conditions.

This paper focuses on SC strategies and on the specification of initial conditions for such flows. Consider for example the case of intake starting at TDC. At the initial moment ( $t = 0$ ) where the LES begins, the flow must be specified in the cylinder and in the intake pipe. There are several ways to do this:

- *Experimental data*: if velocity fields have been obtained experimentally, they can be imposed in the LES. However, these fields are never three-dimensional and will provide information on velocity only on a limited part of the flow. Additional information (typically, the velocity component in the third direction when PIV fields are constructed) must be reconstructed by some other technique involving other assumptions.
- *Synthetic fields*: in many cases, the initial flow field is viewed as not so important and a very simple flow field is used at  $t = 0$ . For intake for example, a zero velocity can be imposed everywhere in the flow. For combustion cases starting at BDC, a unique rotating movement is often imposed with prescribed turbulence level. All these synthetic fields are highly arbitrary and their influence on LES results is not clear.

To clarify these issues, LES is performed here for a simple configuration: the square piston engine of IMF Toulouse [18,19]. In this configuration, a jet (mimicking gas injection or intake jet) is injected into the cylinder flow (which is dominated by tumble) and the resulting flow is

characterized experimentally (using PIV) and numerically using LES and a SC strategy. The initial conditions used for the LES can be changed and their influence on the results are tested and analyzed. Section 2 describes the experimental configuration and measurements. The LES code is briefly presented in Section 3, while the various choices tested for initial conditions are discussed in Section 4. Results of the LES are compared to the experimental data in Section 5 and the influence of the initial conditions is finally presented in Section 6.

## 2. Experimental configuration: the tumbling square engine

In this section, the main features of the experimental setup and the available experimental results are presented.

### 2.1. Experimental setup

The experimental setup is designed to study the generation and breakdown of a tumbling coherent structure during one engine cycle [18]. It is a 10 cm cubic compression chamber presented in Fig. 1. All faces are fixed except the piston which can move along the  $X$ -axis in a quasi-sinusoidal way. This alternating movement was parameterized (in velocity and period) to represent realistic Internal Combustion (IC) engine movement. Indeed, the tumble ratio  $R = \omega_t/2\pi N = 5$ ,  $\omega_t$  being the tumble angular velocity and  $N$  the engine frequency, is of the same order as in real Gasoline Direct Injection (GDI) engines. Fig. 1 also shows the intake channel: it is a flat channel which lower face is the continuation of the chamber lower face. It is large enough to generate a quasi-two-dimensional tumble when the piston moves backwards. This intake channel is only opened during intake and exhaust.

An injection system placed in the same face as the intake channel allows one to study the influence of injection on in-cylinder flow. For this study, only one injection configuration has been explored: a straight air jet is injected and competes with the tumble. Injection velocity ( $U_0 = 30$  m/s) and injector diameter ( $D_0 = 8$  mm) have been determined by dimensional analysis so that the square engine

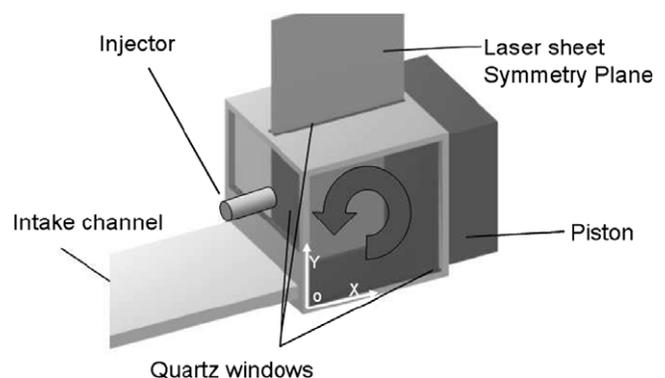


Fig. 1. Sketch of the compression chamber.

146 represents realistic IC engine conditions [19]. The injection  
147 Reynolds number is 13,400.

## 148 2.2. The tumbling coherent structure

149 The intake phase generates the tumbling flow at BDC  
150 which is the initial state for the simulations. The tumbling  
151 motion can be compared with an Oseen vortex. It has a  
152 zero velocity in the core, and with increasing radial coordi-  
153 nate  $r$ , it is composed of a region where the velocity is not  
154 rigorously proportional to  $r$ , and a zone of decreasing  
155 velocity (zero in the far field). Hence, the velocity has a  
156 maximum located at  $r = 40$  mm. These features are illus-  
157 trated by Fig. 2: the vertical and horizontal profiles coordi-  
158 nates correspond to the rotational center of the tumble:  
159  $X = 36$  mm and  $Y = 49$  mm.

160 The tumble core is a high vorticity zone as shown in  
161 Fig. 3. Kinetic energy is naturally contained in the maxi-  
162 mum velocity zones. Since the tumble is a quasi-2D coher-  
163 ent rotating eddy, this structure can be considered as a  
164 quasi-cylindrical one in terms of vorticity [20].

## 165 2.3. Experimental results

166 During previous studies on this experimental setup, sev-  
167 eral Particle Image Velocimetry (PIV) measurements were  
168 performed. They consisted in the characterization of the  
169 tumbling motion [18,21] and of the jet/tumble interaction

[19]. The laser sheet was aligned in the symmetry plane as  
170 displayed in Fig. 1.

171 Instantaneous experimental 2D-velocity fields are avail-  
172 able in the symmetry plane at several times during intake,  
173 injection and compression. These fields were phase-aver-  
174 aged in order to obtain mean velocity field at each time,  
175 and turbulent characteristics of the flow. Fig. 4 shows an  
176 example of PIV instantaneous field (left) and the phase-  
177 averaged tumbling flow coloured by the fluctuating veloci-  
178 ty. The tumbling center exhibits a high level of velocity  
179 fluctuations due to a precessing movement of the large  
180 structure, this will be further discussed in Section 4.  
181

## 182 3. Solver and numerical strategy

### 183 3.1. LES solver

184 For this work, the CFD code AVBP developed at  
185 CERFACS is used.

186 Temporal integration is based on a four-step Runge-  
187 Kutta method and a third-order spatial TTGC scheme  
188 (Two-steps Taylor Galerkin Colin) [22,23] is employed.

189 Subgrid-scale tensors are modelled by the WALE sub-  
190 grid-scale model: Wall Adapting Local Eddy-viscosity  
191 model [24]. The subgrid-scale viscosity expression is

$$192 \nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2}}{(\overline{S_{ij} S_{ij}})^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (1)$$

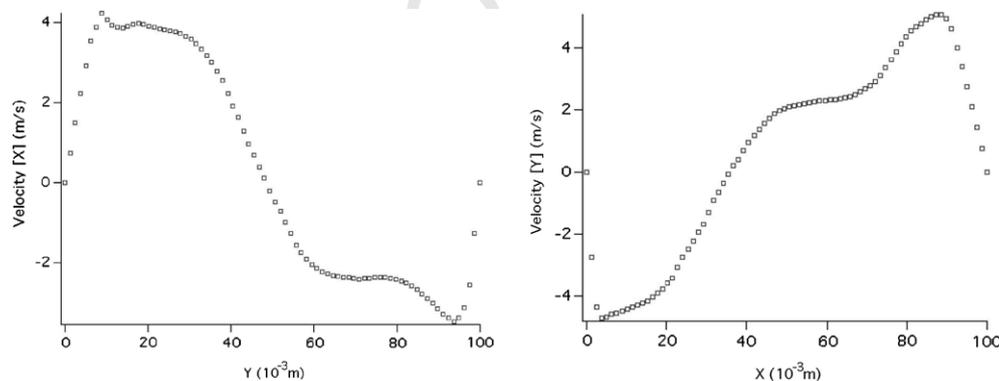


Fig. 2. Velocity profiles of the tumbling flow at BDC: X-velocity profile vs Y at  $X = 36$  mm, and Y-velocity profile vs X at  $Y = 49$  mm. Mean PIV results.

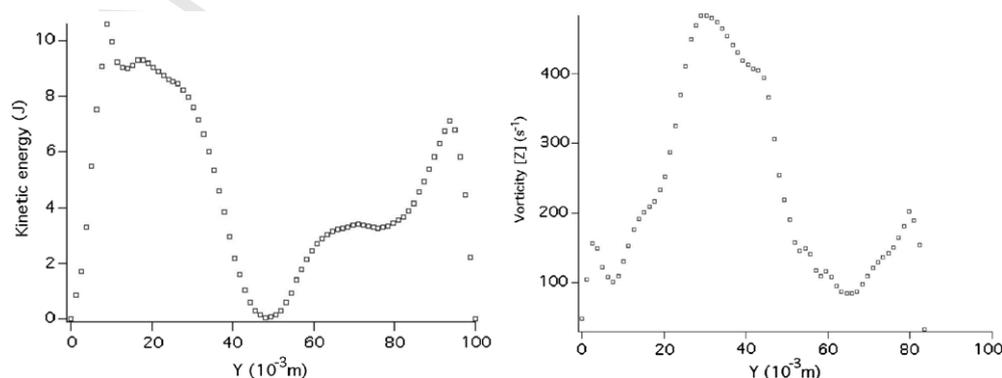


Fig. 3. Kinetic energy and positive vorticity profiles vs Y, at  $X = 36$  mm. Mean PIV results.

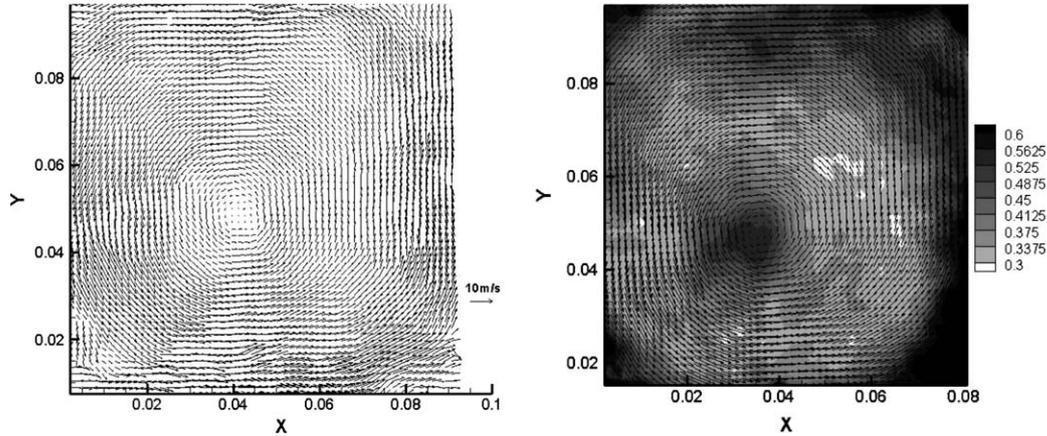


Fig. 4. Examples of experimental velocity vectors fields (left: PIV instantaneous field, right: phase-averaged coloured by velocity fluctuations).

194 where  $\Delta$  is the LES filter size,  $C_w$  the model constant and  $s_{ij}^d$   
 195 an expression based on the square of the velocity gradient  
 196 tensor  $\widetilde{g}_{ij}$

$$198 \quad s_{ij}^d = \frac{1}{2} (\widetilde{g}_{ij}^2 + \widetilde{g}_{ji}^2) - \frac{1}{3} \widetilde{g}_{kk}^2 \delta_{ij}. \quad (2)$$

### 199 3.2. The single-cycle strategy

200 Experimental studies have been carried out from intake  
 201 to compression. Injection takes place at BDC (cf. Fig. 5),  
 202 during a time where the piston can be considered at rest:  
 203 the volume of the chamber is displayed in Fig. 5 and  
 204 changes by only 2.4% during the computation. Therefore,  
 205 the LES is performed assuming a constant volume domain.

206 All calculations are limited to this phase of the cycle and  
 207 are performed on structured fixed meshes. In order to keep  
 208 computational costs as low as possible, computations start  
 209 at the end of the intake and the piston is fixed at its BDC  
 210 position during the whole simulation. Injection duration is  
 211 23 ms and we simulate an additional 5 ms so that 28 ms of

physical time are represented. In the following,  $T_0$  repre- 212  
 sents the beginning of injection. 213

### 3.3. Mesh and boundary conditions 214

The experimental setup geometry was meshed using 215  
 structured hexahedra. The square chamber is refined in 216  
 the near-injector region and the mesh contains about 217  
 210,000 nodes (Fig. 6). 218

The computational time step was of the order of  $10^{-7}$  s 219  
 and the overall CPU cost for each calculation was approx- 220  
 imately about 25 h on 16 processors (on SGI Origin 3800 221  
 with 768 R14000 processors). 222

223 One major feature of the square piston engine is that the  
 224 flow is confined in a closed chamber. Therefore, for LES,  
 225 all boundaries except the injector inlet patch are set to  
 226 no-slip walls. The inlet condition is a laminar pipe flow  
 227 profile that is set as to reproduce the measured injection  
 228 flow in terms of maximum velocity and relaxation times.  
 229 The bottom part of Fig. 5 shows the numerical injection  
 230 pattern in the simulations. 230

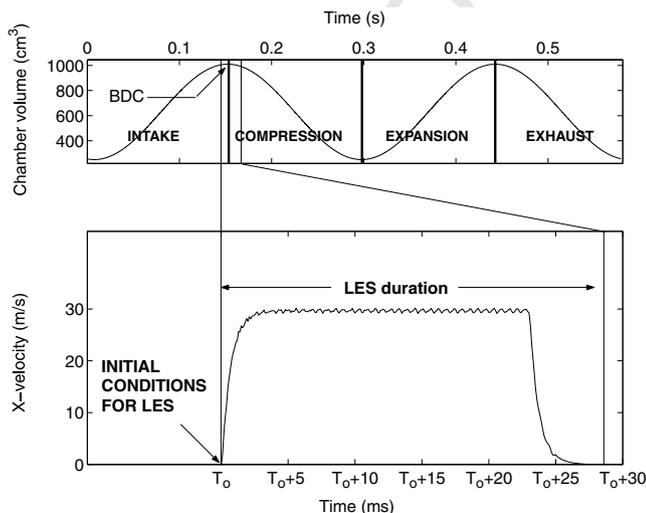


Fig. 5. Time evolution of the chamber volume (top) and of the  $X$ -velocity (bottom) at point A (Fig. 6).

## 4. Choice of initial conditions for LES 231

The SC strategy that we used is explained in Section 3. 232  
 As emphasized in the introduction, one major problem of 233  
 SC simulations is the choice of initial conditions. 234

### 4.1. Initial conditions based on experimental data 235

The experimental setup provides two-dimensional infor- 236  
 mation in the symmetry plane (cf. Section 2.1). The main 237  
 issue is, in our case, the construction of a three-dimensional 238  
 initial velocity field for LES, based on experimental data. 239

240 For that, the quasi-two-dimensionality of the tumble  
 241 along its rotation axis ( $Z$ ) can be used by considering the  
 242 tumble as an extrusion of a 2D tumble velocity field avail-  
 243 able, in the symmetry plane, from PIV measurements.  
 244 Practically, a 3D field is created by extrusion of the 2D field  
 245 along the  $Z$ -axis. Then, the 3D field was damped on two

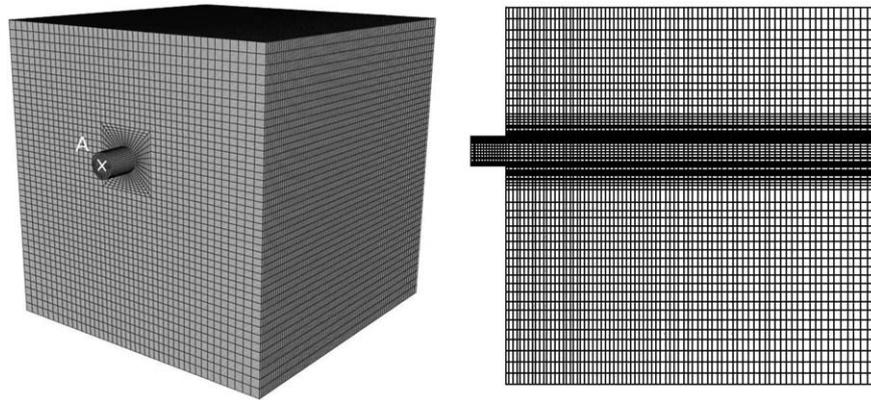


Fig. 6. The 3D mesh and its symmetry plane cut.

246 points in order to reach a zero velocity at the no-slip walls  
247 of the configuration.

248 The major drawbacks raised by this method are:

- 249 • The initial velocity field does not rigorously satisfy the
- 250 incompressible condition.
- 251 • In the experiments, measurements very close to the walls
- 252 could not be taken for practical reasons, introducing a
- 253 loss of accuracy for the LES initial conditions in these
- 254 zones.
- 255 • Moreover, this method cannot be used with instanta-
- 256 neous fields since small 3D turbulent structures present
- 257 in experimental 2D data would be extruded along the
- 258 Z-axis and would not represent real turbulent structures
- 259 of the flow.

260  
261 This last consideration leads us to use the 2D phase-  
262 averaged experimental tumble instead of a randomly  
263 chosen instantaneous field. Interpolated onto the LES  
264 mesh, this 2D field is the first type of initial conditions  
265 for our simulations. No turbulence was added to the initial  
266 LES field.

#### 267 4.2. Additional initial conditions using proper orthogonal 268 decomposition

269 A proper orthogonal decomposition (POD) of the tum-  
270 bling flow has also been performed previously [21,25] to  
271 decompose the instantaneous tumble into a linear combi-  
272 nation of proper modes. This method provides a base for  
273 a modal decomposition of a set of functions such as data  
274 obtained by PIV measurements by sorting solutions of  
275 the following eigenfunction problem:  
276

$$278 \int_D \int R_{ij}(x, x') \cdot \Phi_j^{(n)}(x') dx' = \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(x), \quad (3)$$

279  $D$  represents the 2D domain of the velocity field. Sirovich  
280 [26] proposed an equivalent approach. Let  $M$  be the num-  
281 ber of velocity fields used in the decomposition. Then  
282

$$R_{ij}(x, x') = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M U_i^{(n)}(x) \cdot U_j^{(n)}(x'). \quad (4) \quad 284$$

The eigenfunctions  $\Phi$  can be of the following form: 285  
286

$$\Phi = \sum_{k=1}^M A_k U^{(k)}. \quad (5) \quad 288$$

Combining Eqs. (3)–(5) gives the following system: 289

$C \cdot A = \lambda A$ , with  $C$  and  $M \cdot M$  matrix defined as follows: 290  
291

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^n U^{(i)}(x_m) U^{(j)}(x_m), \quad (6) \quad 293$$

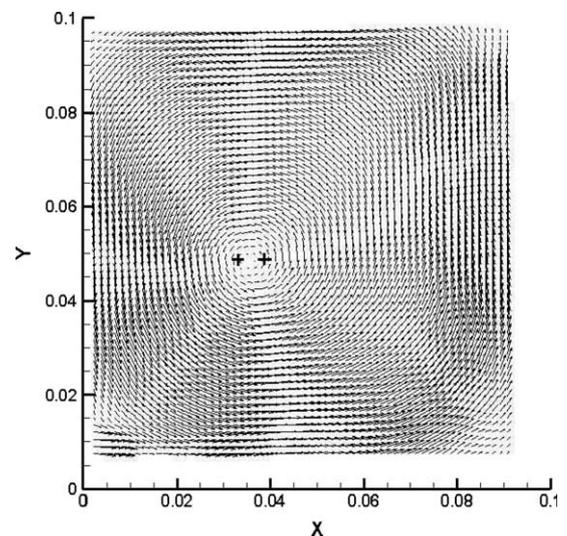


Fig. 7. Initial rotating center of the two initial fields generated by POD (positive and negative precession).

Table 1  
Symbols for velocity profile comparison

	Initial field	Symbol
Exp. phase-av. $X$ -velocity: $\bar{u}$		o
Exp. error margin: $(\bar{u} - u', \bar{u} + u')$		Error bars
LES 1	Phase-averaged tumble	—
LES 2	Positive precession	+++
LES 3	Negative precession	---

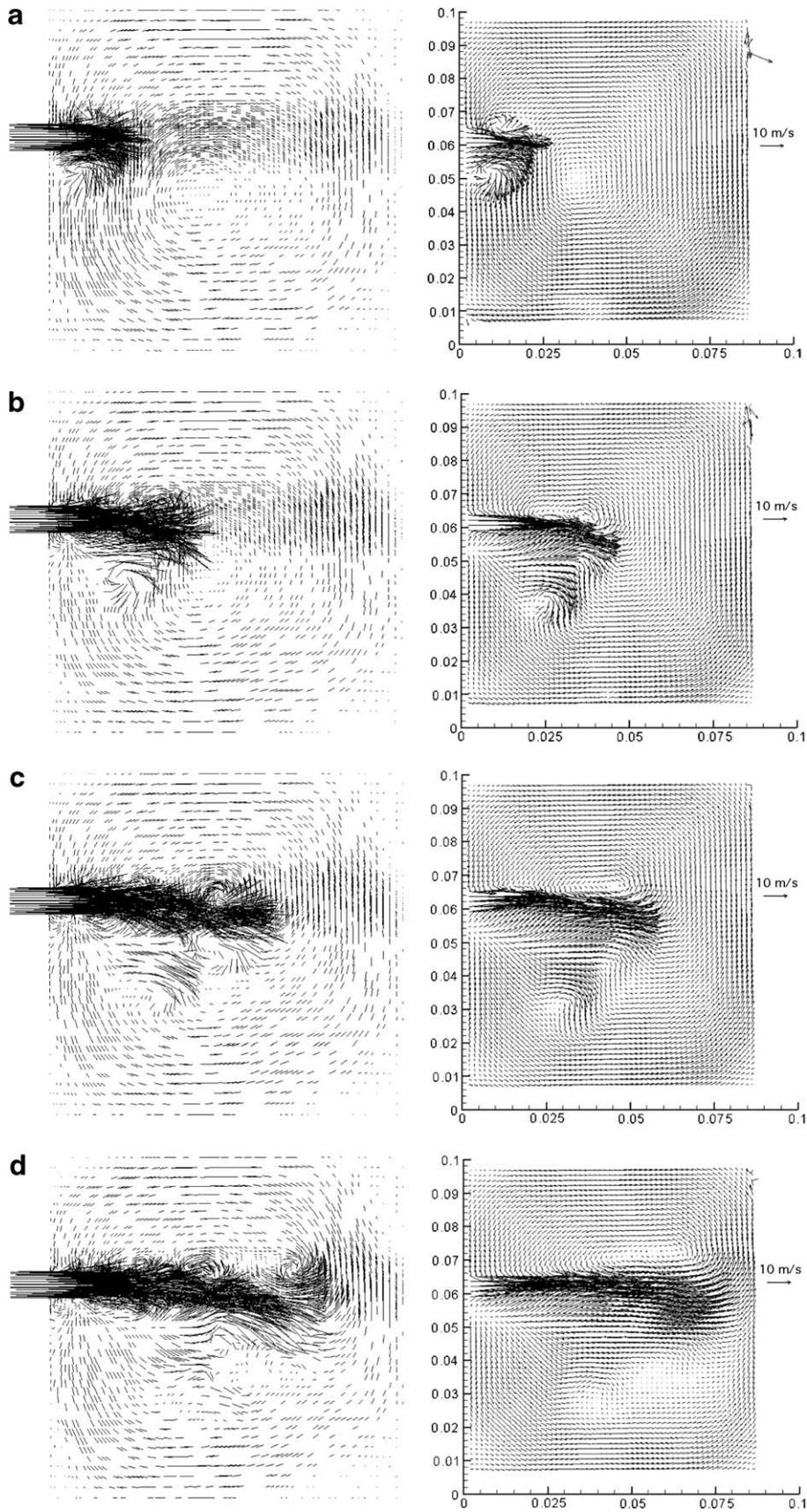


Fig. 8. 2D velocity fields in the symmetry plane; left: instantaneous LES, right: phase-averaged experimental data (following) (a)  $T_0 + 2$  ms, (b)  $T_0 + 4$  ms, (c)  $T_0 + 6$  ms and (d)  $T_0 + 10$  ms.

294 where  $n$  is the number of vectors in each velocity field. The  
 295  $i$ th eigenfunction of the system in Eq. (6) represents the  
 296 coefficients used in Eq. (5) to build the  $i$ th modal function  
 297 of the flow.

298 The first and most energetic mode represents the average  
 299 tumbling motion. The two next modes correspond to  
 300 precession [21]: confined vortices are always subject to a  
 301 precession phenomenon due to vortex-wall interaction  
 302 and fluctuations during the intake stroke [25]. The conse-  
 303 quence of the precession is a quasi-determinist movement  
 304 of the tumble rotating center. This analysis will be helpful  
 305 to study numerically the influence of precession, and hence  
 306 of cycle-to-cycle variations, on the tumbling flow. Note  
 307 that the subsequent modes represent smaller scale fluctua-  
 308 tions and contain less energy than the first three modes  
 309 mentioned above. Therefore, they are not taken into  
 310 account.

311 POD analysis results can be used to combine the phase-  
 312 averaged tumble mode and the two next modes which are  
 313 precession modes. Thus, by extrusion, two different 3D  
 314 initial velocity fields have been obtained. The tumble rotat-  
 315 ing center of the first one presents a displacement of a few  
 316 millimeters (about 2.5 mm) from the average tumble rotat-  
 317 ing center (in the increasing  $X$ -direction), while the second  
 318 presents the same displacement, but in the opposite direc-  
 319 tion. These additional fields are respectively called positive  
 320 precession and negative precession in what follows, and  
 321 their respective rotating center are superimposed on the  
 322 phase-averaged velocity field of Fig. 7.

323 From now on, velocity profiles will be displayed with the  
 324 symbols shown in Table 1. Note that the error bars added  
 325 to the phase-averaged experimental data correspond to the  
 326 range  $[\bar{u} - u', \bar{u} + u']$ , covering statistically 68.3% of the  
 327 possible realizations (because the probability density func-  
 328 tion of the velocity can be considered here as a Gaussian  
 329 distribution).

## 5. Results obtained using the phase-averaged tumble as initial conditions (LES 1)

332 This section describes the main results of the simulation  
 333 LES 1. This computation was initialized using the phase-  
 334 averaged tumbling velocity field given by the experimental  
 335 data.

### 5.1. General features

#### 5.1.1. Flow field

337 A qualitative analysis of the velocity fields has been  
 338 undertaken, showing the jet/tumble interaction in terms  
 339 of flow dynamics. The tumble has been identified to act  
 340 as a cross flow on the jet, particularly on its first non-  
 341 stationary structures. Indeed, the first vortex rings are  
 342 deflected towards the bottom of the chamber, as shown  
 343 in Fig. 8(b).

344 Moreover, the numerical fields are compared to phase-  
 345 averaged experimental data (Fig. 8). Even though instanta-  
 346 neous numerical results are not expected to agree with  
 347

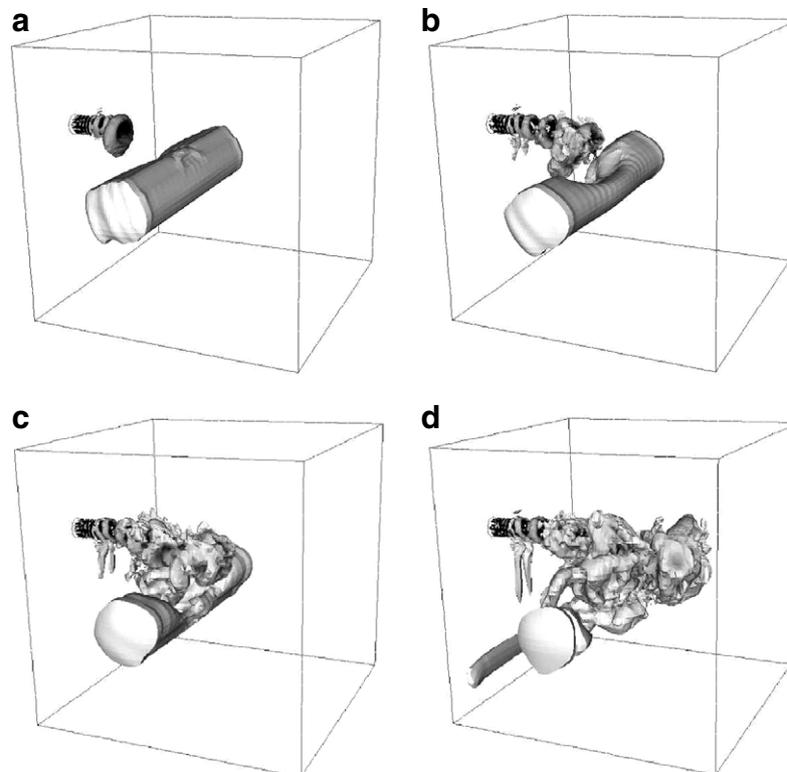


Fig. 9.  $Q$ -criterion isosurfaces ( $Q = 3 \times 10^4 \text{ s}^{-2}$ ) during the jet/tumble interaction. Animation available at: [http://www.cerfacs.fr/cfd/gallery\\_mov\\_AVBP.php#tumble](http://www.cerfacs.fr/cfd/gallery_mov_AVBP.php#tumble). (a)  $T_0 + 2$  ms, (b)  $T_0 + 4$  ms, (c)  $T_0 + 6$  ms and (d)  $T_0 + 10$  ms.

348 phase-averaged experimental data, here, both reveal similar  
 349 flow topologies and this observation holds during the  
 350 whole injection. Comparisons are displayed for times vary-  
 351 ing between  $T_0 + 2$  ms and  $T_0 + 10$  ms even though they  
 352 have been performed up to  $T_0 + 28$  ms (Fig. 5). After

$T_0 + 10$  ms, the flow exhibits a large tumbling motion 353  
 which is quite similar to the topology observed at 354  
 $T_0 + 10$  ms. Therefore, only the initial phase [ $T_0 + 2$  ms, 355  
 $T_0 + 10$  ms] is shown here. 356

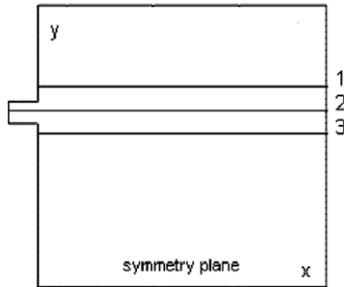


Fig. 10. Profiles location in the symmetry plane.

5.1.2. Rotational dynamics 357

A specific method to visualize rotating turbulent struc- 358  
 tures has been used: it is based on the  $Q$ -criterion deter- 359  
 mination, first introduced by Hunt et al. [27] and widely used 360  
 in the framework of Large Eddy Simulation (see for 361  
 instance [28–31]). This criterion is the second invariant of 362  
 the velocity gradient tensor and is defined by 363

$$Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}), \quad (7) \quad 365$$

where  $\Omega_{ij}$  and  $S_{ij}$  are, respectively, the antisymmetric and 366  
 symmetric components of the velocity gradient tensor. This 367

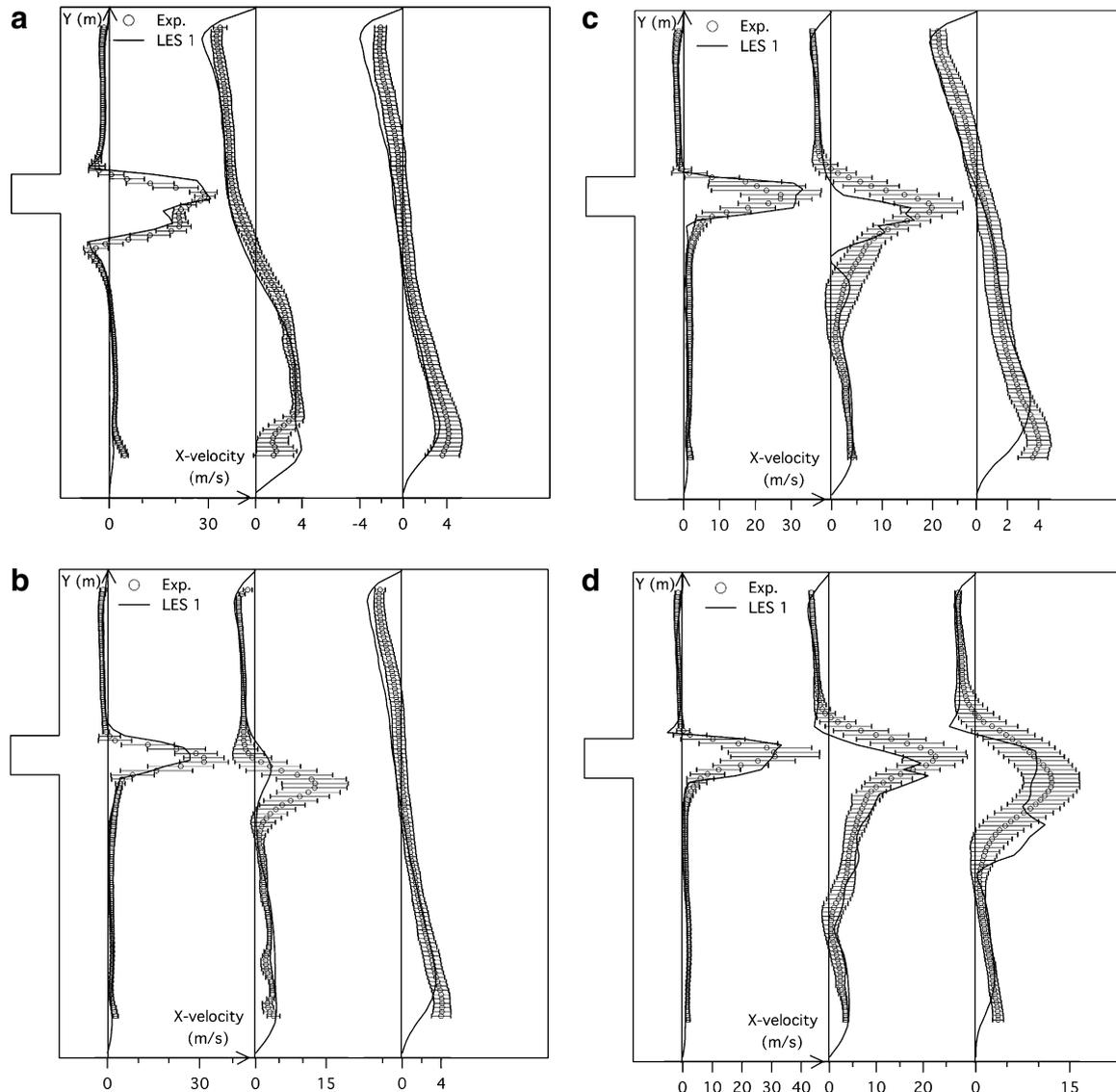


Fig. 11. Experimental and numerical  $X$ -velocity vertical profiles (following) (a)  $T_0 + 2$  ms, (b)  $T_0 + 4$  ms, (c)  $T_0 + 6$  ms and (d)  $T_0 + 10$  ms.

368 allows one to identify only the rotating part of this tensor,  
369 and it is therefore a useful way to isolate vortices.

370 Fig. 9 shows the temporal evolution of the interaction  
371 between air injection and tumble using the  $Q$ -criterion.  
372 Isosurface value of  $Q$  is arbitrarily set to  $3 \times 10^4 \text{ s}^{-2}$   
373 (the maximum value of  $Q$  on the whole domain is  
374  $3 \times 10^7 \text{ s}^{-2}$ ).

375 The  $Q$ -criterion shows the 3D phenomenology of the  
376 interaction between the jet and the tumble, by the visuali-  
377 zation of the tumble vorticity core (which is initially  
378 quasi-cylindrical) and the rotating eddies in the jet. At early  
379 times, Fig. 9(a), the injected flow forms rotating structures.  
380 After  $T_0 + 4 \text{ ms}$ , these vortices begin to mutually interact  
381 with the tumble (Fig. 9(b) and (c)): the rotating structures  
382 of the jet are deflected by the cross flow effect of the tumble.  
383 In return, the tumble is partially disrupted by the injection.  
384 The disruption develops with increasing time (Fig. 9(d)),  
385 even though this phenomenon seems to be more significant  
386 in the symmetry plane.

## 5.2. Analysis of the velocity profiles in the symmetry plane 387

388 The development of the large structures is now quanti-  
389 fied by comparison of  $X$ -velocity profiles in the symmetry  
390 plane, along several vertical and horizontal lines (Figs. 11  
391 and 12) during the injection. In each graph,  $X$ -velocity pro-  
392 files are extracted from vertical (respectively horizontal)  
393 lines corresponding to  $X = 10, 40, 70 \text{ mm}$  coordinates in  
394 Fig. 11 (respectively  $Y = 52, 62, 72 \text{ mm}$  in Fig. 12).  
395 Fig. 10 gives a schematic representation of the location of  
396 the horizontal profiles. Figs. 11 and 12 show LES instanta-  
397 neous profiles compared to phase-averaged experimental  
398 ones. The error bars represent the experimental  $X$ -velocity  
399 fluctuations calculated from the PIV measurements.

400 All LES  $X$ -velocity profiles show a satisfactory evolu-  
401 tion compared to experiment during the whole injection  
402 period. Note that phase-averaged experimental and instanta-  
403 neous LES results are not expected to match exactly, but  
404 only to reveal similar trends.

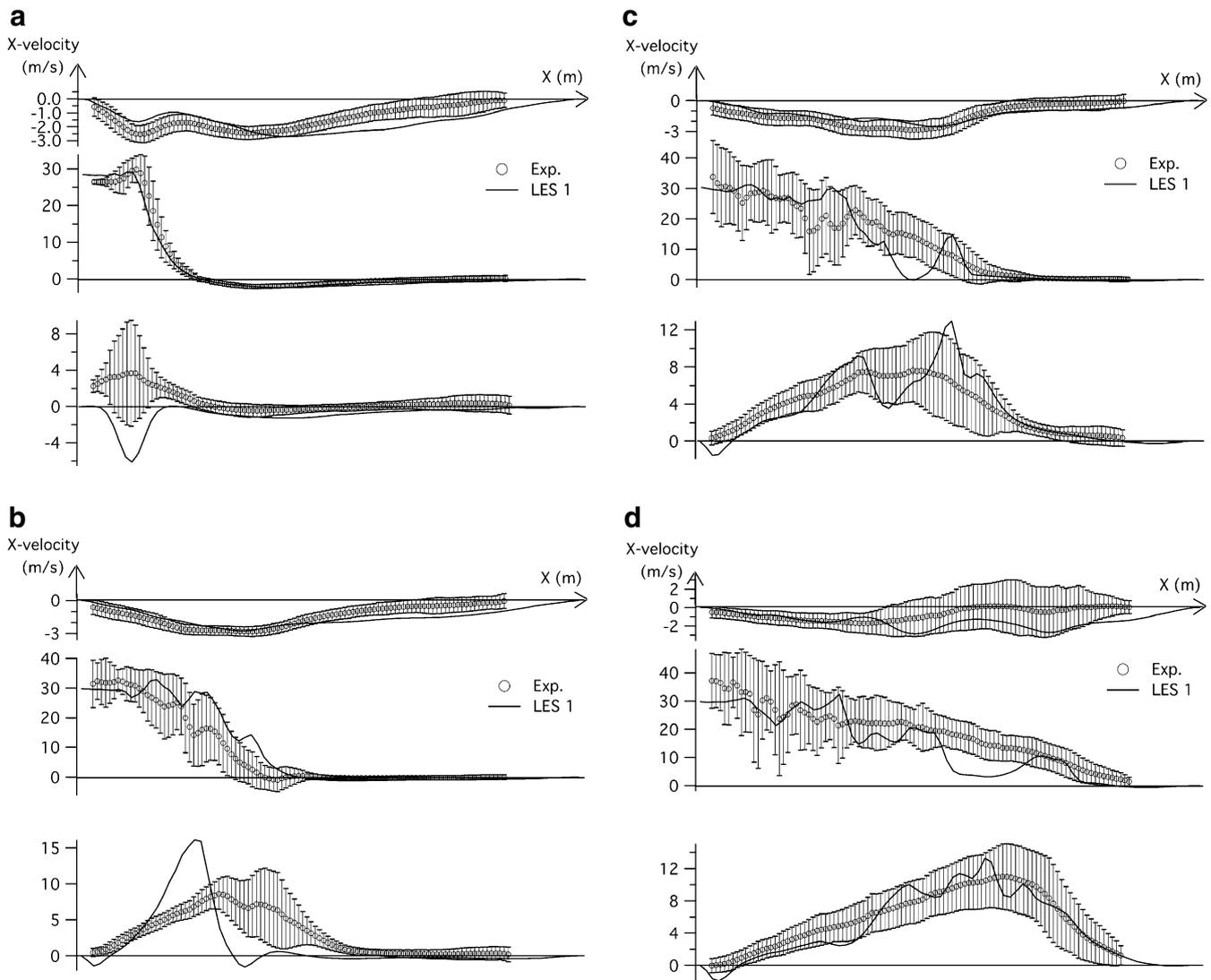


Fig. 12. Experimental and numerical  $X$ -velocity horizontal profiles (following) (a)  $T_0 + 2 \text{ ms}$ , (b)  $T_0 + 4 \text{ ms}$ , (c)  $T_0 + 6 \text{ ms}$  and (d)  $T_0 + 10 \text{ ms}$ .

405 The differences between experimental and numerical  
 406 velocity profiles mostly remain within the velocity fluctua-  
 407 tions. Note, however, that the  $X$ -velocity LES profile on  
 408 axis 3 (Fig. 12(a)) exhibits a larger error at  $T_0 + 2$  ms and  
 409 falls outside the PIV range: later in the cycle (Fig. 12(c)  
 410 and (d)), the agreement is much better. This discrepancy  
 411 is probably due to the small and intense first vortex created  
 412 after the beginning of the injection (see Fig. 9(a)): a small  
 413 location difference for the  $X$ -axis between LES and experi-  
 414 ment can lead to a large velocity difference.

415 On the one hand, the maximum differences are about  
 416 15 m/s which is a significant value compared to the absolute  
 417 velocity (about 35 m/s). But on the other hand, the experi-

418 mental  $X$ -velocity perturbations are higher than 10 m/s  
 419 in the jet, reaching 20 m/s near the jet centerline, even if the  
 420 actual values can be lower (indeed, seeding issues make  
 421 the PIV measurements in the jet core difficult and the statis-  
 422 tics may be less reliable). Hence, the experimental velocity  
 423 fluctuations during the injection are of the same order than  
 424 the differences between instantaneous numerical and experi-  
 425 mental phase-averaged velocity profiles.

426 The first type of simulation (LES 1), based on the exper-  
 427 imental phase-averaged velocity field as initial condition,  
 428 gives realistic results. In Section 6, numerical results from  
 429 LES 2 and LES 3, obtained by using different initial condi-  
 430 tions based on POD data, are discussed.

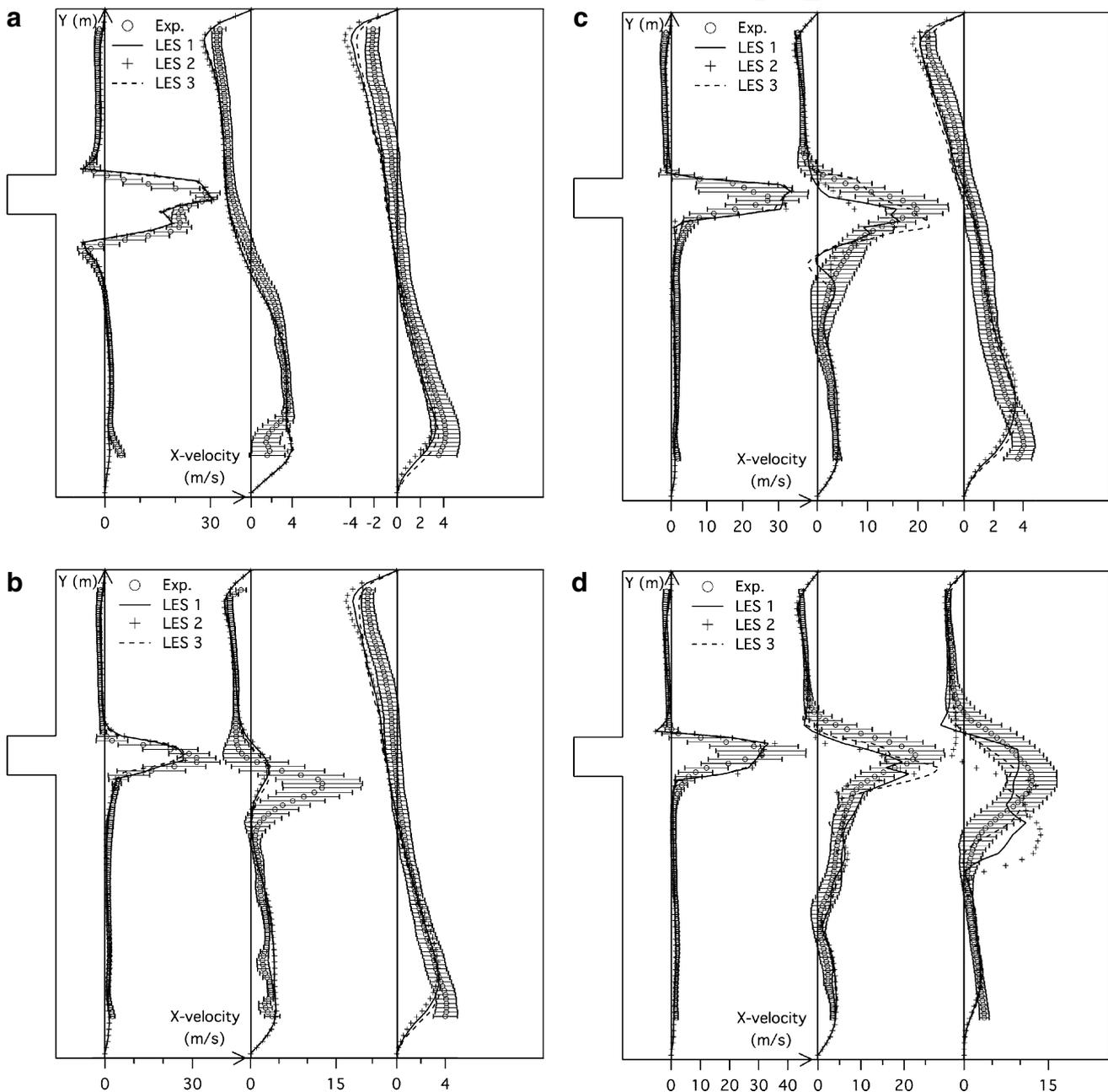


Fig. 13. Experimental and numerical  $X$ -velocity vertical profiles, showing precession influence (following) (a)  $T_0 + 2$  ms, (b)  $T_0 + 4$  ms, (c)  $T_0 + 6$  ms and (d)  $T_0 + 10$  ms.

## 6. Influence of the initial position of the tumble (LES 2 and LES 3)

Precession of the tumbling flow is a key feature of the piston engine flow [18,21] and therefore an essential problem when choosing an initial solution for LES: when the jet/tumble interaction begins, the center of the tumbling vortex can be located anywhere along the precession trajectory. The objective of this section is to investigate how sensitive the LES results are to a change of vortex center position at the initial computation time. For this, two initial conditions called positive and negative precession (see Table 1) are used to initialize respectively the simulations LES 2 and LES 3.

Figs. 13 and 14 show  $X$ -velocity profiles of experimental and numerical results, based on the same representation as Figs. 11 and 12. LES 2 and LES 3 results still show a good agreement with experimental data in terms of velocity profiles.

The flow field seems to be insensitive to the initial condition for early times in the injection (before 4 ms). This can be explained by the fact that the interaction between the jet and the tumble is not significant enough until 4 ms.

But, for  $t > T_0 + 4$  ms, during the injection and far from the injector, the differences between LES 2 or LES 3 and LES 1 results grow rapidly and can reach differences of 15 m/s (Figs. 13(c), (d) and 14(c), (d)). Thus, the change of initial conditions has a significant impact on the flow field after  $T_0 + 4$  ms. This different behaviour of the various numerical results can be caused by the jet/tumble interaction that becomes stronger during the injection. The influence of the initial conditions can be quantified by the temporal evolution of a quantity  $Err$  defined by

$$Err_i = \frac{1}{S} \int_S |U_{LES 1} - U_{LES i}| dS \quad \text{with } i = 2 \text{ or } 3. \quad (8)$$

$Err$  is measured in the symmetry plane  $S$  (Fig. 1) of the configuration.

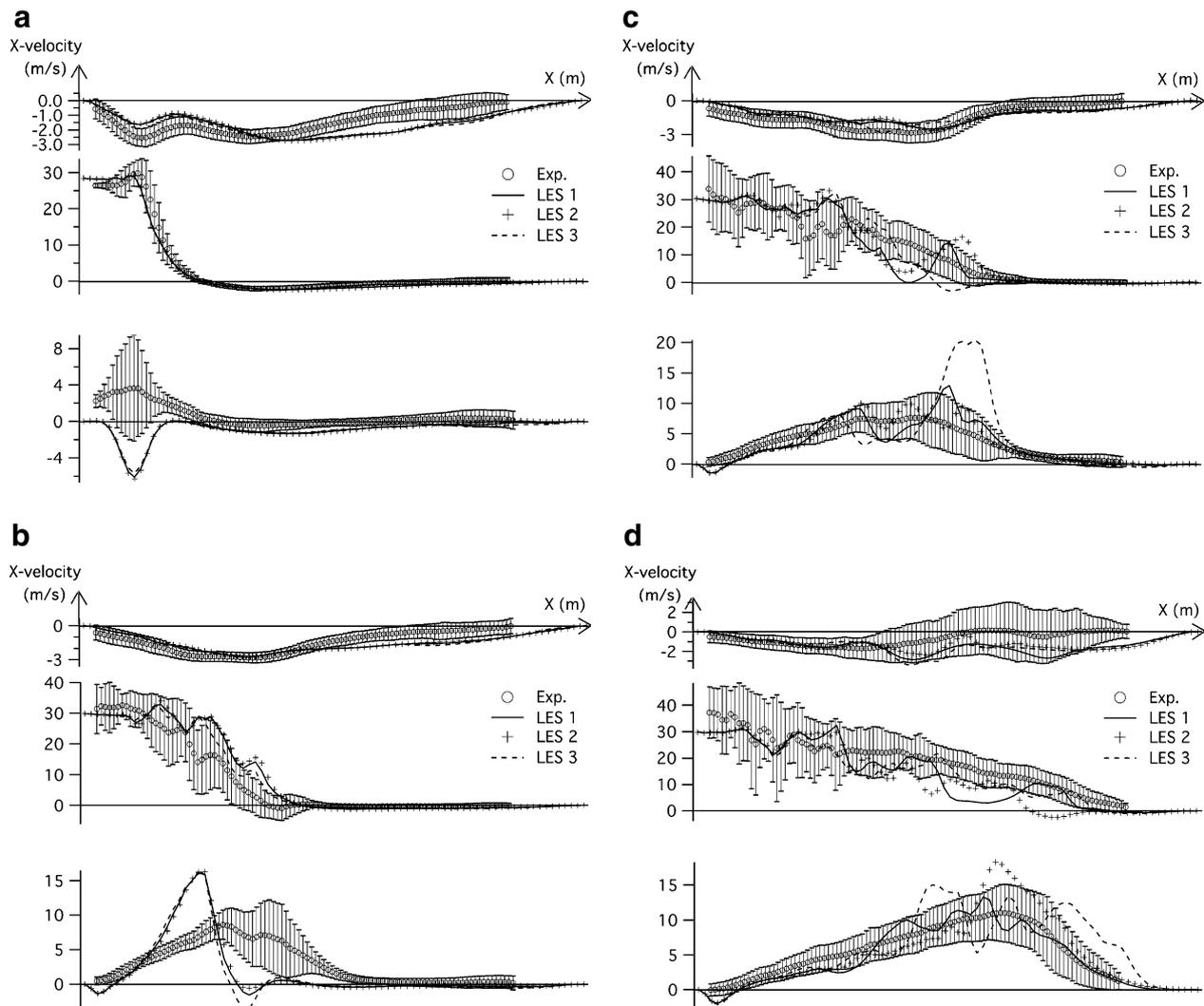


Fig. 14. Experimental and numerical  $X$ -velocity horizontal profiles, showing precession influence (following) (a)  $T_0 + 2$  ms, (b)  $T_0 + 4$  ms, (c)  $T_0 + 6$  ms and (d)  $T_0 + 10$  ms.

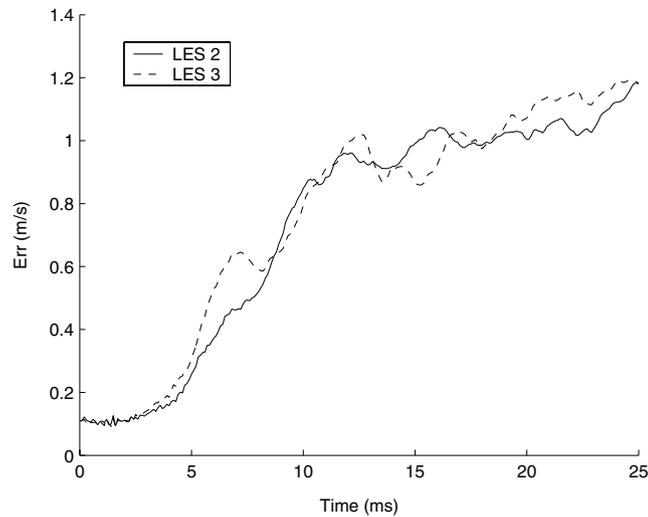


Fig. 15. Temporal evolution of the norm-like quantity  $Err$  for LES 2 (solid line) and LES 3 (dashed line).

467 Fig. 15 shows how  $Err_2$  and  $Err_3$  change with time. A  
 468 first phase (before 4 ms) illustrates the previous conclusions  
 469 as  $Err_i$  remains stable: the difference between LES 1, LES 2  
 470 and LES 3 remain small as shown by Fig. 15. After  
 471  $T_0 + 4$  ms,  $Err_i$  increases rapidly: this confirms that the cal-  
 472 culations LES 2 and LES 3 differ more and more from LES  
 473 1; thus, the influence of the initial conditions on the results  
 474 becomes stronger as time advances. At  $T_0 + 10$  ms  
 475 (Fig. 14(d)), the differences between the three calculations  
 476 LES 1, LES 2 and LES 3 are significant. Strong excursions  
 477 can be observed: for example at  $T_0 + 6$  ms (Fig. 14(c)), LES  
 478 3 exhibits a maximum  $X$ -velocity on axis 3 which exceeds  
 479 results of LES 1 and LES 2 by more than 100%: simply  
 480 shifting the initial tumble center by a few millimeters (about  
 481 2.5 mm from LES 1 to LES 2 and from LES 1 to LES 3) can  
 482 obviously lead to very large effects at later times.

## 483 7. Conclusions

484 This paper presents an experimental and numerical  
 485 study of the interaction between an air jet and a tumbling  
 486 flow in a model engine configuration, namely the experi-  
 487 mental square piston engine of IMFT laboratory [19].  
 488 LES is performed using a single-cycle (SC) strategy where  
 489 the initial conditions at BDC are obtained from PIV  
 490 measurements.

491 It is shown that LES recovers most of the mechanisms  
 492 controlling the jet/tumble interaction. LES results are com-  
 493 pared to PIV data at different instants of the injection  
 494 sequence. The influence of initial conditions is investigated  
 495 by using three different initial conditions:

- 496 • In LES 1, the initial velocity field is the phase-averaged  
 497 field measured by PIV.
- 498 • In LES 2 and LES 3, POD is used to construct flow  
 499 fields where the tumble center is located at two opposite  
 500 positions along the possible precession trajectory.

Results show a significant influence of the initial condi-  
 tions on LES results. A norm of the velocity field in the  
 symmetry plane of the configuration shows that the veloc-  
 ity fields obtained by the simulations 2 and 3 remain close  
 to LES 1 only at early times (less than 4 ms). After  
 $T_0 + 4$  ms, results from LES 2 and LES 3 diverge rapidly  
 from the LES 1 results.

These findings confirm that SC strategies will probably  
 be of limited use for piston engine simulations using  
 LES: since results depend strongly on the initial conditions,  
 even when these conditions correspond to “reasonable”  
 choices (mean flow for LES 1, POD reconstruction for  
 LES 2 and LES 3), reliable LES will have to be based on  
 multiple-cycle computations.

## References

- [1] Peters N. Turbulent combustion. Cambridge University Press; 2000.
- [2] Poinot T, Veynante D. Theoretical and numerical combustion. R.T. Edwards; 2001.
- [3] Angelberger C, Veynante D, Egolfopoulos F. Large eddy simulations of chemical and acoustic forcing of a premixed dump combustor. Flow Turbulence Combust 2000;65(2):205–22.
- [4] Colin O, Ducros F, Veynante D, Poinot T. A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion. Phys Fluids 2000;12(7):1843–63.
- [5] Desjardins PE, Frankel SH. Two dimensional large eddy simulation of soot formation in the near field of a strongly radiating nonpremixed acetylene–air jet flame. Combust Flame 1999;119:121–32.
- [6] Pierce CD, Moin P. Large eddy simulation of a confined coaxial jet with swirl and heat release. In: 29th Fluid dynamics conference, Albuquerque, 1998.
- [7] Pitsch H, Duchamp de la Geneste L. Large eddy simulation of premixed turbulent combustion using a level-set approach. In: Proceedings of the combustion institute, 29, 2002.
- [8] Caraeni D, Bergstorm C, Fuchs L. Parallel NAS3D: an efficient algorithm for engineering spray simulations using LES. In: Proceedings of ParCFD’99, Williamsburg, Elsevier; 2000. p. 155–64.
- [9] Selle L, Lartigue G, Poinot T, Koch R, Schildmacher KU, Krebs W, et al. Compressible large eddy simulation of turbulent combustion in complex geometry on unstructured meshes. Combust Flame 2004;137(4):489–505.
- [10] Haworth DC, Jansen K. LES on unstructured deforming meshes: towards reciprocating IC engines. Comput Fluids 2000;29(5):493–524.
- [11] Celik I, Yavuz I, Smirnov A. Large eddy simulations of in-cylinder turbulence for internal combustion engines: a review. Int J Eng Res 2001;2(2):119–48.
- [12] Xu S, Pino Martín M. Assessment of inflow boundary conditions for compressible turbulent boundary layers. Phys Fluids 2004;16(7):2623–39.
- [13] Lund TS, Wu X, Squires KD. Generation of turbulent inflow data for spatially developing boundary layer simulations. J Comput Phys 1998;140(2):233–58.
- [14] Li N, Balaras E, Piomelli U. Inflow conditions for large-eddy simulations of mixing layers. Phys Fluids 2000;12(4):935–8.
- [15] Giles MB. Non-reflecting boundary conditions for Euler equation calculations. AIAA J. 1990;28(12):2050–8.
- [16] Selle L, Nicoud F, Poinot T. Actual impedance of nonreflecting boundary conditions: implications for computation of resonators. AIAA J. 2004;42(5):958–64.
- [17] Moureau VR, Vasilyev OV, Angelberger C, Poinot TJ. Commutation errors in large eddy simulations on moving grids: application to piston engines flows. In: CTR Summer program, 2004, p. 157–68.

- 564 [18] Borée J, Marc D, Bazile R, Lecordier B. On the behaviour of a large  
565 scale tumbling vortex flow submitted to a compression. In: European  
566 series in applied and industrial mathematics, vol. 7, 1999.
- 567 [19] Moreau J, Borée J, Bazile R, Charnay G. Destabilisation of a  
568 compressed vortex by a round jet. *Exp Fluids* 2004;37(6):856–71.
- 569 [20] Marc D. Etude expérimentale de la compression d'un écoulement de  
570 rouleau – situation modèle de l'aérodynamique interne des moteurs à  
571 pistons. PhD thesis, INPT, 1998.
- 572 [21] Borée J, Maurel S, Bazile R. Disruption of a compressed vortex. *Phys*  
573 *Fluids* 2002;14(7):2543–56.
- 574 [22] Colin O, Rudgyard M. Development of high-order Taylor–Galerkin  
575 schemes for LES. *J Comput Phys* 2000;162(2):338–71.
- 576 [23] Moureau V, Lartigue G, Sommerer Y, Angelberger C, Colin O,  
577 Poinsot T. Numerical methods for unsteady compressible multi-  
578 component reacting flows on fixed and moving grids. *J Comput Phys*  
579 2005;202(2):710–36.
- 580 [24] Nicoud F, Ducros F. Subgrid-scale stress modelling based on the  
581 square of the velocity gradient tensor. *Flow Turbulence Combust*  
582 1999;62(3):183–200.
- [25] Maurel S, Borée J, Lumley JL. Extended proper orthogonal  
583 decomposition: application to jet/vortex interaction. *Flow Turbu-*  
584 *lence Combust* 2001;67(2):125–36.
- [26] Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part  
585 I: Coherent structures. *Quart Appl Math* 1987;45(3):561–71. 587
- [27] Hunt JCR, Wray AA, Moin P. Eddies, stream and convergence zones  
588 in turbulent flows. In: CTR Summer program, 1988, p. 193–208. 589
- [28] Jeong J, Hussain F. On the identification of a vortex. *J Fluid Mech*  
590 1995;285:69–94. 591
- [29] Lesieur M, Begou P, Briand E, Danet A, Delcayre F, Aider JL.  
592 Coherent-vortex dynamics in large-eddy simulations of turbulence. *J.*  
593 *Turbulence* 2003;4(016):1–24. 594
- [30] Faivre V, Poinsot T. Experimental and numerical investigations of jet  
595 active control for combustion applications. *J. Turbulence*  
596 2004;5(025):1–16. 597
- [31] Lardeau S, Lamballais E, Bonnet JP. Direct numerical simulation of  
598 a jet controlled by fluid injection. *J. Turbulence* 2002;3(002):1–25. 599  
600



## Annexe C

# Article de conférence n<sup>o</sup> 2

Cet article est la contribution écrite pour la conférence internationale avec comité de lecture **Direct and Large-Eddy Simulation-6**, ERCOFTAC Workshop qui s'est tenu à Poitiers, France, du 12 au 14 Septembre 2005<sup>1</sup>. Cette publication a pour co-auteur F. Nicoud.

---

A. Devesa and F. Nicoud. *Anisothermal Wall Functions for RANS and LES of Turbulent Flows With Strong Heat Transfer*. In ERCOFTAC Workshop DLES-6, Poitiers, France, 2005.

---

---

<sup>1</sup><http://www.dles6.ceat.univ-poitiers.fr/>



---

# Anisothermal Wall Functions for RANS and LES of Turbulent Flows With Strong Heat Transfer

Antoine Devesa<sup>1</sup> and Franck Nicoud<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CERFACS, 42 Avenue Coriolis, 31057 Toulouse cedex 1, France  
devesa@cerfacs.fr

<sup>2</sup> Université Montpellier II, CNRS UMR 5149, I3M – CC 51, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France  
nicoud@math.univ-montp2.fr

## 1 Introduction

Various types of flows (e.g. in aeroengines, nuclear reactors) present very large temperature differences, implying density variations. In those flows, the correct prediction of thermal fluxes at the walls is a crucial problem, because materials can be submitted to contraction and dilatation phenomena that can damage them. As it is well known in the field of LES and DNS, the computational cost of wall bounded flows strongly depends on the modeling used for the walls, thus on the mesh refinement in the near wall regions. Consequently, DNS or wall-resolved LES can only be used for moderate friction Reynolds numbers, while using low order wall-modeling allows to resolve high Reynolds number flows with a reasonable cost.

Reliable wall-modeling in highly anisothermal configurations at low Mach numbers (i.e. under low compressible fluid approximation) has not been reached yet, the main reason being that the wall fluxes depend on all the details of the turbulent flow in the vicinity of the solid boundaries and that measuring such details for high temperature flows is very challenging from an experimental point of view. Still, relevant reference data are required to support / test the physical assumptions made during the development of new wall functions. In this context, DNS appears as a good candidate to generate such data.

DNS results from Nicoud [1, 2] in combination with the use of the Van Driest transformation [3, 4] are used in Section 2 to derive an anisothermal wall function for RANS. Section 3 describes how the anisothermal properties of this wall function can be integrated in a more complex wall model, namely the TBLE model [5], in the framework of LES. Both models have been imple-

mented in Trio\_U CEA (French Nuclear Energy Agency) code and first results have been produced.

## 2 Derivation of an anisothermal wall function for RANS simulations

### 2.1 About the Van Driest transformation

The Van Driest transformation [3] is based on the calculation of a modified dimensionless wall coordinate  $U_{VD}^+$  by:

$$U_{VD}^+ = \int_0^{U^+} \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \right)^{1/2} dU^+ \quad (1)$$

Note that the mass-weighted quantities are considered here, based on the Favre decomposition [6]. The dimensionless wall coordinate  $U^+$  stands for  $\tilde{U}/U_\tau$ , where  $U_\tau$  is the friction velocity.

This transformation has been verified in various turbulent channel flow, particularly in the DNS's results of Nicoud [1, 2], even in the case of very high temperature gradients, to match the standard logarithmic law [7], so that one can admit that:

$$U_{VD}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad \text{with: } y^+ = yU_\tau/\nu_w \quad (2)$$

The DNS's results of a periodic turbulent channel flow with variable density, at a friction Reynolds number  $Re_\tau = 180$ , from Nicoud [1, 2] show that the ratio between the local temperature  $\tilde{T}$  and the wall temperature  $T_w$  is a simple linear function of the product  $Pr_t B_q U^+$ .  $Pr_t$  denotes the turbulent Prandtl number, and  $B_q = T_\tau/T_w$  ( $T_\tau$  is friction temperature):

$$\frac{T_w}{\tilde{T}} = \frac{1}{C_1 - Pr_t B_q U^+} \quad (3)$$

where  $C_1$  is a constant. Even if  $C_1 = 1$  has been proven to be a reasonable choice [8], this constant will be expressed by identification later on in this section. At this point, for algebraic reasons, we choose  $C_1$  as ( $K$  being a constant):

$$C_1 = 1 - Pr_t B_q \times K \quad (4)$$

Injecting Eq. (3) in the Van Driest transformation, and using the notation  $\Delta T = (\tilde{T} - T_w)/T_w$ , we can integrate Eq. (1):

$$U_{VD}^+ = \frac{2(U^+ + K)}{\Delta T} \left[ \sqrt{1 + \Delta T} - \sqrt{1 + \frac{K \Delta T}{U^+ + K}} \right] = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (5)$$

## 2.2 Determination of the constant $K$

When  $\Delta T \rightarrow 0$ , it is trivial to demonstrate that the anisothermal wall function recovers the standard law for the velocity, for all values of  $K$ . In terms of temperature, the standard law valid for the quasi-isothermal cases is the Kader's law [9] (obtained from a flat plate configuration). In the logarithmic layer, the Kader's formula leads to:

$$T^+ = 2.12 \ln y^+ + \beta(\text{Pr}) \quad (6)$$

with:  $\beta(\text{Pr}) = \left(3.85\text{Pr}^{1/3} - 1.3\right)^2 + 2.12 \ln(\text{Pr})$

The identification of the two functions given by the relation  $T^+ = \text{Pr}_t(U^+ + K)$  from Eq. (3) and Eq. (6) has been made at  $y^+ = 100$ , in an arbitrary way. We find:

$$K = K(\text{Pr}) = -C_{u,vd} + \frac{\beta(\text{Pr})}{\text{Pr}_t} + \left(\frac{2.12}{\text{Pr}_t} - \frac{1}{\kappa}\right) \ln(100) \quad (7)$$

The constant  $K$  has then be expressed, and the anisothermal wall function that has been derived here can be described in its final form by the set of three equations: Eqs. (3)–(5)–(7).

## 2.3 Expression of the turbulent kinetic energy $k$ and dissipation $\epsilon$

In a RANS simulation, using the  $k-\epsilon$  model, the use of a wall function implies that the values of  $\tilde{k}$  and  $\tilde{\epsilon}$  are adapted from the wall characteristics, namely  $U_\tau$  and the wall-normal velocity gradient.

In anisothermal regime, the expression of the turbulent kinetic energy is:

$$\tilde{k} = \frac{\rho_w}{\bar{\rho}} \frac{U_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (8)$$

This expression of  $\tilde{k}$  is the standard expression of the turbulent kinetic energy in the first off-wall point, multiplied by the density ratio, which is simply  $1 + \Delta T$ . Consequently, in quasi-isothermal flows, the density ratio tending to the unit, the expression of  $\tilde{k}$  recovers the standard one.

As the logarithmic law is not valid in anisothermal flows, this velocity gradient is recalculated from Eq. (5). Noting  $B = 1 + (K(\text{Pr})U_\tau\Delta T)/(\tilde{U} + K(\text{Pr})U_\tau)$ , the dissipation can be expressed as:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\rho_w}{\bar{\rho}} U_\tau^2 \left[ \kappa y \left( \frac{2\sqrt{1 + \Delta T}}{\Delta T U_\tau} - \frac{2B^{1/2}}{\Delta T U_\tau} + \frac{K(\text{Pr})B^{-1/2}}{\tilde{U} + K(\text{Pr})U_\tau} \right) \right]^{-1} \quad (9)$$

In the vicinity of  $\Delta T \rightarrow 0$ , the density ratio has yet been identified to tend to the unit. The parenthesis term of Eq. (9) in a quasi-isothermal regime becomes  $U_\tau^{-1}$ . It is consequently found that the dissipation recovers the standard expression.

## 2.4 Academic test case and results

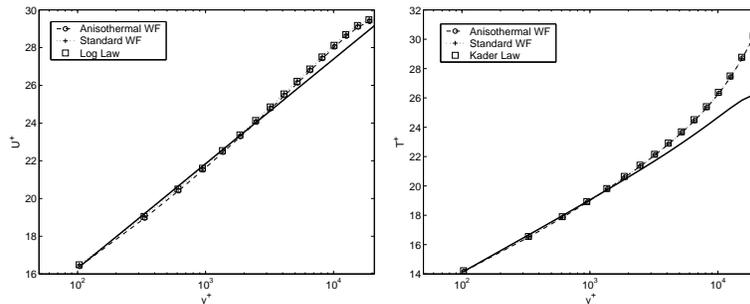
The main academic test case investigated to validate the anisothermal wall function is a turbulent bi-periodic channel flow. Firstly, the considered flow is quasi-isothermal, i.e. submitted to a small temperature gradient near the wall. Then, three anisothermal cases, with increasing temperature gradients, are presented. The change of the temperature gradient is obtained by changing the wall temperatures ratio  $T_2/T_1$ ,  $T_1$  being the bottom wall temperature (cold) and  $T_2$  the top wall temperature (hot).

The friction Reynolds number  $Re_\tau = yU_\tau/\nu_w$  is equal to 20,000, which is a high enough value to generate a turbulent flow representative of engineering applications. Unfortunately, few reliable experimental or numerical results are available for such value. The first off-wall point, where the wall function applies, is located around  $y^+ = 100$ . A total of 33 nodes composes the wall normal refinement.

The simulations were performed with the CEA homemade CFD Trio\_U code [10], validated elsewhere, following a Low Mach number method, that is in a Quasi-Compressible approach (QC), that accounts for dilatable fluids without solving the acoustics.

- **Quasi-isothermal case:**

Here, we verify that the anisothermal really recovers a standard behaviour. The temperature ratio is close to 1 ( $T_2/T_1 = 1.01$ ). The dimensionless  $U^+$  and  $T^+$  profiles across the channel flow are displayed in the Fig. 1. No difference between the different calculations is detected. Moreover, the velocity profiles fit well the standard logarithmic law. The same result is obtained for the temperature, comparing the results to the Kader's law.



**Fig. 1.** Dimensionless velocity and temperature profiles in the quasi-isothermal case

- **Anisothermal cases:**

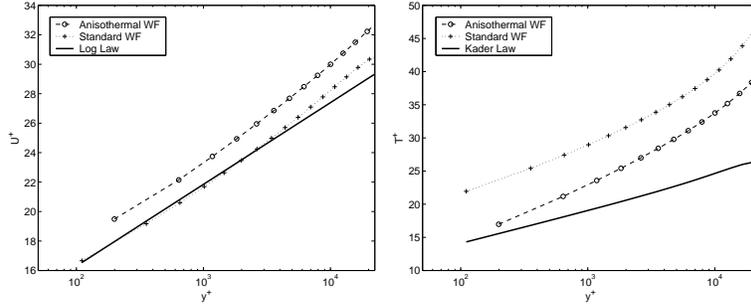
Three anisothermal flows were investigated, with  $T_2/T_1 = 1.33$ , 1.66 and 4. The values of the friction velocity and friction temperature are listed in the Table 1. The standard wall function over-estimates the wall heat flux, which is an established fact. The coupling between the dynamics and thermal

properties is observed by the significant changes of  $U_\tau$  in the different cases. Fig. 2 show the dimensionless velocity and temperature profiles for the case  $T_2/T_1 = 4$ . Note that the logarithmic and Kader’s laws are not valid in this case, but are shown as a reference.

For large temperature gradients, the change of wall-modeling leads to significant differences in the  $T^+$  profiles, thus in the assessment of  $q_w$ .

		Anisothermal WF	Standard WF	Relative error (%)
$T_2/T_1 = 1.01$	$U_\tau$	0.4039	0.4024	0.40
	$T_\tau$	-0.0483719	-0.0484043	0.07
$T_2/T_1 = 1.33$	$U_\tau$	0.3925	0.3982	1.46
	$T_\tau$	-1.40449	-1.43095	1.88
$T_2/T_1 = 1.66$	$U_\tau$	0.3807	0.3934	3.34
	$T_\tau$	-2.50365	-2.58128	3.10
$T_2/T_1 = 4$	$U_\tau$	0.3105	0.3657	17.8
	$T_\tau$	-6.94711	-7.29286	4.98

**Table 1.**  $U_\tau$  and  $T_\tau$  for the four different temperature ratio  $T_2/T_1$



**Fig. 2.** Dimensionless velocity and temperature profiles, case  $T_2/T_1 = 4$

### 3 Adaptation of the TBLE model to anisothermal flows

#### 3.1 The TBLE model and its anisothermal version

The TBLE consists in embedding a one-dimensional fine grid between the wall and the first off-wall coarse mesh point. It was introduced in 1996 by Balaras [5] and has been increasingly investigated by other researchers [11, 12, 13]. Thanks to the 1-D mesh refinement, the wall shear stress is evaluated directly by the velocity gradient at the wall, after reaching the converged solution of the boundary layer equations in the fine mesh.

The TBLE method is based on the resolution of four equations: two for the streamwise and spanwise momentum components, one for the temperature and the state equation. If  $y$  is the wall-normal direction, the set of equations reads:

$$P_0 = \rho RT \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho U_k}{\partial t} = F_k + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial U_k}{\partial y} \right] \quad (11)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = F_{th} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (12)$$

$P_0$  is the thermodynamic pressure of the Low Mach approach, which is constant over the whole domain and appears in the state equation (10). The subscript  $k$  denotes the velocity component ( $k = 1$  or  $3$ ).  $F_k$  and  $F_{th}$  denote the source terms for the momentum and the temperature.

In order to adapt the TBLE model to high temperature gradient configuration, the mixing length turbulence model basically used [5] needs to be adjusted so that the momentum equation recovers the Van Driest transformation. Without temporal and source terms, Eq. (11) reads (in the logarithmic region, where  $\mu \ll \mu_t$ ):

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_t \frac{dU}{dy} \right) = 0 \quad (13)$$

Eq. (13) is known to correspond to the logarithmic law. As this standard law is not valid in anisothermal regime, we need to use an adapted turbulence model (noted  $\mu_{t_a}$ ), so that Eq. (2) is true, that is equivalent to:

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_{t_a} \frac{dU_{VD}}{dy} \right) = 0 \quad (14)$$

The direct differentiation of Eq. (1) gives a simple relation between  $U$  and  $U_{VD}$  and, hence, Eq. (14) can be rewritten as:

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_t \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta T}} \frac{dU}{dy} \right) = 0 \quad (15)$$

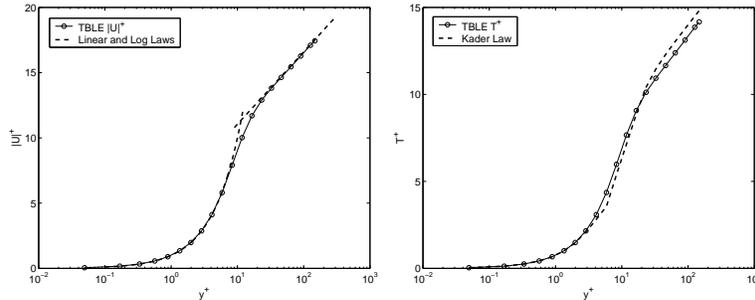
Eq. (15) finally shows that a suitable expression for  $\mu_{t_a}$  is a mixing length model formulation, multiplied by an anisothermal factor, function of the temperature difference between the local TBLE mesh point considered and the wall.

### 3.2 Preliminary results and expectations

A first step in the use of this dilatable version of the TBLE model has been to test it off-code. Note that its implementation in the Trio\_U code has been done, even if no results can be discussed at the moment.

From a linear profile that is imposed between the first off-wall LES point and the wall onto the fine mesh, the TBLE model converges towards a turbulent profile as given by the solution of the simplified Navier-Stokes and energy equations.

In a quasi-isothermal regime, the dimensionless velocity and temperature profiles were analysed to check the ability to recover respectively the standard logarithmic law [7] and the Kader's formula [9]. Fig. 3 shows that the TBLE model fits very well these two reference laws.



**Fig. 3.** Dimensionless velocity (left) and temperature (right) profiles given by the TBLE model after convergence

Our expectations concerning the dilatable version of the TBLE model is that it gives at least the same results as the anisothermal wall function in high temperature gradient cases. Also, we expect that the additional cost will remain low.

## 4 Conclusions and future work

In this paper, we present an original method for the derivation of anisothermal wall models. A first one dedicated to RANS simulations is an anisothermal wall function in the classical law-of-the wall concept, while the second is a zonal approach particularly suited for LES. As the Van Driest transformation has been proven to be valid even in very high temperature gradient cases, particularly by the use of DNS's results, we expect that these two anisothermal models will give valuable results in strong heat transfer configurations, compared to the classical wall models.

The TBLE approach, in the framework of LES, is meant to provide unstationary information of the near-wall behaviour of the velocity and temperature fields. But obviously, the unstationarity that can be captured by the wall function is limited to a certain frequency that is unknown for the moment. We propose to investigate in a further work this unstationary limitation, by way of a direct simulation of a channel flow, by scanning a range of frequencies of

passive scalar temporal variations and analyzing the impact on the near-wall behaviour. Such a work is under progress and hopefully, preliminary results will be discussed in the oral presentation.

## 5 Acknowledgements

The authors want to acknowledge the financial support and scientific expertise from CEA (French Nuclear Energy Agency), by funding first author's ongoing PhD thesis and in the use of the CEA homemade CFD Trio\_U code. The authors are also grateful to CINES for the access to computing resources.

## References

1. Nicoud F. and Poinso T. DNS of a channel flow with variable properties. In Banerjee S. and Eaton J., editors, *1st International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Santa Barbara, USA, 1999.
2. Nicoud F. Conservative high-order finite difference schemes for low-mach number flows. *Journal of Computational Physics*, 158, 2000.
3. Van Driest E.R. Turbulent boundary layers in compressible fluids. *Journal of Aeronautical Sciences*, 18(3), 1951.
4. Huang P.G. and Coleman G.N. Van Driest transformation and compressible wall-bounded flows. *AIAA Journal*, 32(10), 2004.
5. Balaras E., Benocci C., and Piomelli U. Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations. *AIAA Journal*, 34(6), 1996.
6. Favre A. Statistical equations of turbulent gases. *Problems of hydrodynamics and continuum mechanics*, 1969.
7. Von Kármán T. Turbulence and skin friction. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1, 1934.
8. Bradshaw P. Compressible turbulent shear layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9, 1977.
9. Kader B.A. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24(9), 1981.
10. Calvin C., Cueto O., and Emonot P. An object-oriented approach to the design of fluid mechanics software. *ESAIM: M2AN (Mathematical Modelling and Numerical Analysis)*, 36(5), 2002.
11. Cabot W. and Moin P. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63, 2000.
12. Diurno G.V., Balaras E., and Piomelli U. *Wall-layer models for LES of separated flows*. In Modern simulation strategies for turbulent flows. Ed. B. Geurts, (Philadelphia, Edwards), 2001.
13. Wang W. and Moin P. Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows. *Physics of Fluids*, 14(7), 2002.

## Annexe D

# Article de conférence n<sup>o</sup> 3

Cet article est la contribution écrite pour la conférence internationale avec comité de lecture **5<sup>th</sup> International Conference on Turbulence Heat and Mass Transfer**, qui a eu lieu à Dubrovnik, Croatie, du 25 au 29 Septembre 2006.<sup>1</sup> Il a été co-écrit avec F. Nicoud.

---

A. Devesa and F. Nicoud. *On Unsteady effects in wall modeling*. In 5th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Dubrovnik, Croatia, 2006.

---

---

<sup>1</sup><http://130.83.243.201/thmt-06/announce.html>



# On Unsteady Effects in Wall Modeling

A. Devesa<sup>1</sup> and F. Nicoud<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*CERFACS, 42 avenue Coriolis, 31057 TOULOUSE cedex 01, France, [devesa@cerfacs.fr](mailto:devesa@cerfacs.fr)*

<sup>2</sup>*Université Montpellier II, CNRS UMR 5149, I3M – CC 51, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, [nicoud@math.univ-montp2.fr](mailto:nicoud@math.univ-montp2.fr)*

**Abstract** — Direct numerical simulations of the transport of pulsatile passive scalars in a turbulent channel flow have been performed. Two configurations have been explored: on one hand, conditions far from the wall are pulsed, on the other hand wall conditions are pulsed. A significant amount of data concerning the penetration of the oscillations and their impact on the boundary layer behaviour were obtained. Results were used as input conditions to two wall models, namely the standard wall model (SWM) and the Thin Boundary Layer Equation (TBLE) model. Off-code testing of these two wall models show that TBLE is much more efficient when oscillations come from the walls, whatever the imposed frequency. TBLE is also working better when the outer flow is submitted to temporal variations, even if high frequency phenomena are more difficult to handle for both wall models.

## 1. Introduction

Some industrial flows of interest (e.g. nuclear reactors, nozzles) are most of the time characterized by their turbulent nature, a high Reynolds number, and the presence of solid walls. In the nuclear industry, a particular attention must be paid on the following features that are crucial in the dynamic and thermal processes:

- variable density effects, when the fluid is submitted to significant temperature gradients
- unsteadiness induced by turbulence or specific geometries

These two aspects are even more determinant in the near-wall region, **1-** because the interaction between a fluid and a wall at two different temperatures induces severe gradients in the boundary layer, **2-** because the temporal scales of both the wall and fluid temperature fluctuations must be resolved to better capture the thermal fatigue phenomena in the material (succession of dilatation and contraction phases).

The presence of walls in the computational domain of a simulation induces adherence of fluid particles, generating a no-slip condition. Then, the flow pattern and the nature of turbulence deeply change in a near-wall region, where viscous diffusion is predominant. The fine resolution of this near-wall region implies that all the details of the flow field are simulated, ie. the mesh refinement near the wall must be sufficient to capture these molecular scale phenomena. Several studies show that the mesh points of a well resolved direct simulation must be of the order of  $Re^{1.8}$  in the viscous near-wall region [1, 2], where  $Re$  is a typical Reynolds number of the flow. Consequently, the computational cost of a wall-bounded configuration at high or even moderate Reynolds number using DNS becomes prohibitive. In order to reduce the cost of a simulation, either Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) or Large Eddy simulations (LES) can be performed.

The former approach simply resolves the averaged Navier Stokes equations, the turbulence closure generally given by a two-equation model ( $k - \epsilon$ ). Using RANS, stationary high Reynolds number wall-bounded flow simulations are tractable, ensuring reliable results with a low computational effort. Nevertheless, this method is reserved to steady flows which is a quite limiting

constraint in terms of industrial applications. Moreover, the turbulence models are calibrated empirically, for a given configuration.

The present study is concerned with the latter approach which consists in solving only the large scales of the flow (while modeling the smaller ones). This approach assumes the universality of the small scales of the turbulence which behaviour is represented by a subgrid scale model. The resolved equations are the filtered Navier Stokes equations, where the filter size is often given by the local size of the computational cell.

One major drawback of LES of wall-bounded flows is that meshing requirements to precisely resolve the boundary layer are still proportional to the Reynolds number. Hence, LES in industrial configurations can not handle high Reynolds number flows at a reasonable computational cost. Several methods to overcome this limitation can be considered:

- Using numerical techniques to refine the mesh, in order to gain accuracy in the simulation of the near-wall region, while keeping the total number of nodes to a reasonably small value,
- Modeling the physical properties of the boundary layer so that the problem becomes simpler, and smaller scales are not resolved.

This latter approach is the basic principle of wall modeling. Algebraic models (e.g. the standard wall model [3, 4]) or more recently zonal approach models (e.g. the TBLE model [5]) can be used to coarsen the RANS or LES grid, while providing wall friction and heat fluxes accurately. Most of these models were initially derived for statistically steady incompressible flow. Several previous studies concerning variable density effects in wall modeling can be found in the literature [6, 7]. The authors proposed [8] a coupled (velocity-temperature) wall model and assessed it in academic non-isothermal cases.

Nevertheless, unsteady effects in wall modeling are not well known at present and there is no existing study where the TBLE model is tested in unsteady cases to the authors knowledge. This paper is an attempt to characterize temporal features of two wall models in a pulsatile configuration. A numerical experiment on the behaviour of passive scalars submitted to pulsatile boundary conditions is described in Section 2, while results are presented in Section 3 and used to investigate the dynamic response of wall models in Section 4.

## 2. Numerical experiment on pulsed passive scalars in a turbulent channel flow

### 2.1. Preliminary remarks on the use of passive scalars

Using passive scalars (also denoted by fictive species afterwards) that do not affect the flow field and are just transported in the computational domain allow not only to decouple the temperature field from dynamics, but also to pilot their concentration by the boundary condition or source terms.

The transport equation for the mass fraction  $Y_k$  of the fictive species  $k$  reads:

$$\frac{\partial(\rho Y_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho Y_k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \right) \quad (1)$$

where  $D_k$  is the passive scalar diffusivity, which can be rewritten with the Schmidt number:  $\rho D_k = \mu / Sc_k$ . For simplicity reason, the Schmidt number of all scalars is chosen to be 1, so that the scalar diffusivity is equal to molecular viscosity. By analogy with what is done with

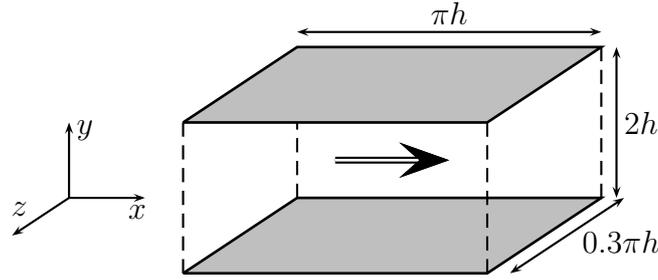


Figure 1: Turbulent channel flow configuration

temperature, the mass fraction profiles can be scaled either by the outer mass fraction  $Y_{k,ext}$  or by the friction mass fraction  $Y_{k,\tau}$ :

$$Y_{k,\tau} = -\frac{\mu_w}{U_\tau} \frac{\partial Y_k}{\partial y} \Big|_w \quad (2)$$

where  $y$  is the wall-normal direction and  $U_\tau$  the friction velocity. The mass fraction in wall unit is then defined by  $Y_k^+ = Y_k/Y_{k,\tau}$ , consistently with temperature in wall units.

## 2.2. Numerical configuration

DNS offers the possibility to obtain reliable data concerning the wall behaviour of passive scalars. In order to limit computational costs, a plane channel configuration (depicted on Figure 1) is considered at a friction Reynolds number  $Re_\tau = U_\tau h/\nu_w = 180$ , high enough to have a turbulent flow, but as low as possible to limit the computing resources required.

## 2.3. Forcing the unsteady behaviour of fictive species

In practical applications, both wall and outer fluid temperature may oscillate over time. This study is an attempt to mimic both situations with passive scalars: on one hand, the external flow is submitted to cyclic variations ; on the other hand, wall conditions (i.e. wall mass fractions) are pulsed.

### 2.3.1. Imposing an oscillating external condition

A source term on the mass fraction of a scalar is a possibility to pilot its raise or loss. However, the equation that is then solved is no longer Eq. (1). In compliance with the wish to keep this convection-diffusion equation as it is, we need to impose a source term only in a part of the channel that is far from the investigated zone. In the present case, only the upper half of the channel is pulsed (cf. Fig. 2 left), with a source term defined by:

$$\begin{cases} S_k(t) = 2\rho(y - y_c) \frac{Y_{k,ref} - \langle Y_k \rangle}{\tau_k} & y > y_c \\ S_k(t) = 0 & y < y_c \end{cases} \quad (3)$$

where  $\langle Y_k \rangle$  is a volumic average of  $Y_k$  over the domain, while  $Y_{k,ref}$  is a target value chosen to be a sine function over time and  $\tau_k$  a relaxation time. The source term vanishes at the center of the channel ( $y = y_c$ ), thanks to the term  $(y - y_c)$  of Eq. (3). Consequently, in the lower part of the channel on which we will focus, Eq. (1) is strictly resolved.

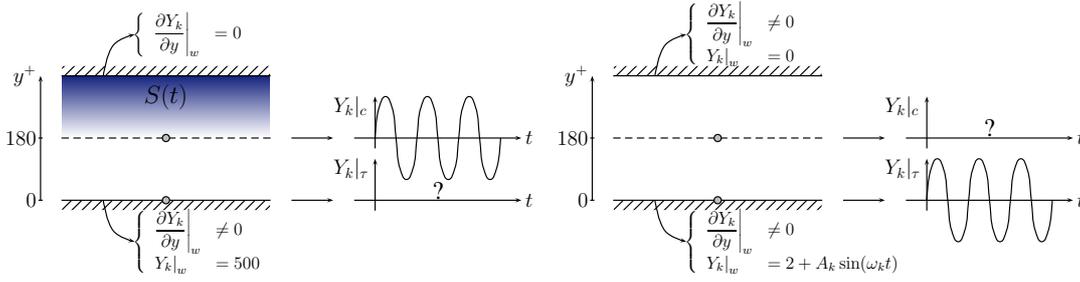


Figure 2: Imposing an oscillating external condition (left) and wall condition (right)

$Y_{k_{ref}}$  is set in order to induce a temporal mean value of 1000 at the center of the channel, with a variation amplitude of roughly 500. The center of the channel is located at  $y^+ = 180$ , which is of the same order as the height of a first cell of a coarse LES mesh. Then, the direct simulation is representative of the behaviour of a wall cell, which is not resolved while using a wall model.

### 2.3.2. Imposing an oscillating wall condition

In this reciprocal situation, we impose a temporally varying boundary condition, of the form of a sine function with a mean value  $Y_{kw} = 2$ . The temporal mean value of the mass fraction at the center of the channel remains nearly constant and equal to unity. Opposite wall mass fraction is set to 0, so that a mean gradient is imposed over the channel height (see Fig. 2 right).

## 2.4. Frequency range

The frequency range to be investigated was determined by bibliographic review on critical pulsations in oscillating flows [9]. Three frequencies were chosen to best represent unsteady flow phenomena in temperature varying environment:  $f = 50000H_z$ ,  $25000H_z$  and  $12500H_z$ , corresponding to Strouhal numbers from 0.1 to 0.4 (low frequency phenomena). This yields to a range of reduced pulsations from  $\omega^+ = 0.01$  to 0.05 (shown to be of critical interest [9]).

## 3. Numerical results

DNS were performed with the AVBP code<sup>1</sup> which has already been validated for LES/DNS of academic or industrial configurations with or without combustion. Each frequency is investigated in a direct simulation, where five fictive species are transported and pulsed whether by the external flow or the wall boundary conditions. For each case, two forcing amplitudes are investigated, but only high amplitude forcing will be presented in this paper.

Here, only averages over homogeneity planes will be shown, as well as phase-lock averages for 8 phases by cycle. A quick overview of the results is given in this section, for the cases  $f = 50000H_z$  and  $f = 12500H_z$ .

### 3.1. External condition forcing

The high variations obtained at the center of the channel (cf. Fig. 3 and 4) implies that the Kader's correlation [4] is no longer valid in a part of the logarithmic law (approximately from  $y^+ = 50$  to 180). Nevertheless, the unsteady behaviour seems to be damped below  $y^+ = 50$ , and mass fraction profiles are in good agreement with Kader's formula in viscous and buffer layers. This is due to the thin penetration layer of the oscillations in the outer flow. Results show that this penetration thickness increases with lower frequency (Fig. 4), that is, for a given frequency,

<sup>1</sup>[http://www.cerfacs.fr/cfd/avbp\\_code.php](http://www.cerfacs.fr/cfd/avbp_code.php)

oscillations at the center of the channel can play a role up to the wall, and consequently, on the  $Y_{k,\tau}$  value (wall mass flux).

Damping along the boundary layer can be highlighted by analysing the Fourier transforms at different heights:  $y^+ = 50, 100$  and  $150$  (Fig. 5 left). In the case of a forcing at  $f = 50000H_z$ , a strong influence is seen at  $y^+ = 150$ , but decreases rapidly. Consequently, the Fourier transform of the wall mass flux (Fig. 6 left) signal do not exhibit a peak at the forcing frequency.

At the opposite, in the case  $f = 12500H_z$ , the influence of the external forcing is seen up to  $y^+ = 50$  (see Fig. 5 right). However, the wall mass flux (Fig. 6 right) remains quite insensitive to the external oscillations, and the Kader's law is still valid at least in the viscous layer.

The main consequence is that wall scaling is still representative of the passive scalar behaviour in external forcing case.

### 3.2. Wall condition forcing

Figures 7 and 8 show that the influence of the wall oscillating condition can be seen in a limited zone near the wall, by analogy with the second Stokes' problem. Its thickness can be quantified so that unsteady effects are shown to be confined in a well-known region. Moreover, dimensionless profiles allow to demonstrate that the Kader's law can no longer be a reference correlation. The scattering of the phaselock averages is due to high variations on the wall mass flux ( $Y_{k,\tau}$ ).

Note that results with a lower amplitude (that are not presented here) show that there is a strong scattering of the  $Y_k^+$  profiles around the Kader's correlation. Hence, unsteady phenomena strongly affect the validity of the Kader's law because of small variations of the wall flux.

Fourier transforms (Fig. 9) at  $y^+ = 50, 100$  and  $150$  show that wall oscillations generate a peak at  $y^+ = 50$ , that is beyond the viscous and buffer layers, and can play a major role in the whole boundary layer.

Therefore, inner scaling is not supported anymore, whereas external value that does not vary too much, seems to be more appropriate to deal with this wall-oscillating configuration.

## 4. Dynamic behaviour of wall models in unsteady context

### 4.1. Testing two wall models

The temporal response of two wall models submitted to oscillations are investigated in this section. These wall models are an equilibrium law model, namely the Standard Wall Model (SWM), and a zonal approach: the Thin Boundary Layer Equation model (TBLE). A brief description of each model is given hereafter.

#### 4.1.1. The Standard Wall Model : SWM

The structure of the boundary layer, composed of a viscous, a logarithmic and a buffer layer, have been the subject of numerous studies, and an interesting result is that there is no influence between the viscous and the logarithmic region in terms of turbulent coherent structures [10]. Hence, skin friction and wall heat flux can be determined only from velocity and temperature profiles in the logarithmic layer.

Von Kármán [3] first found experimentally a friction law for a steady-state fully developed turbulent boundary layer that reads:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C_{add} \quad (4)$$

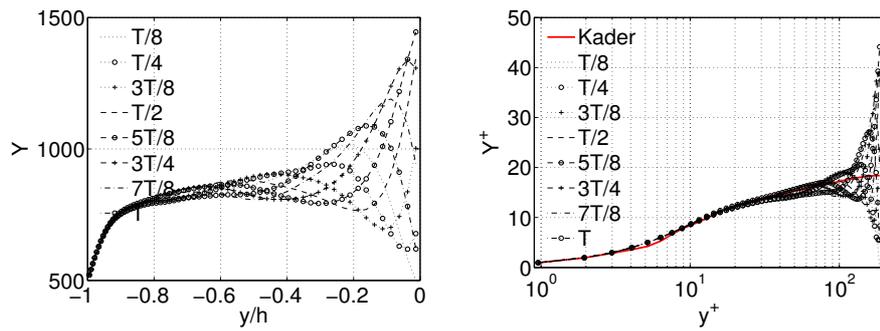


Figure 3:  $Y_k$  (left) and  $Y_k^+$  (right) profiles, external forcing at  $f = 50000H_z$

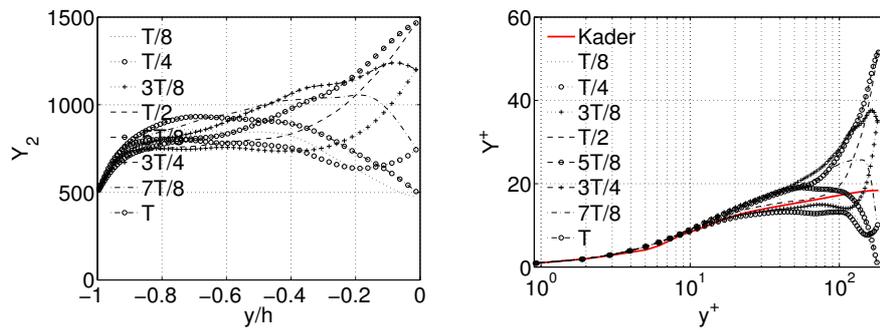


Figure 4:  $Y_k$  (left) and  $Y_k^+$  (right) profiles, external forcing at  $f = 12500H_z$

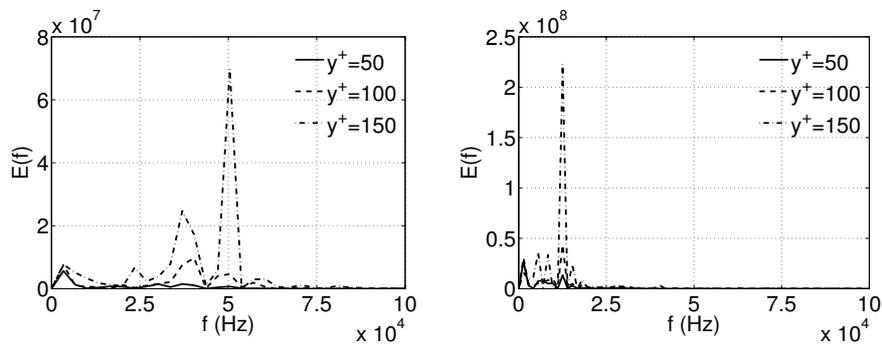


Figure 5: Fourier transforms of temporal signal  $y^+ = 50, 100$  and  $150$ , external forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

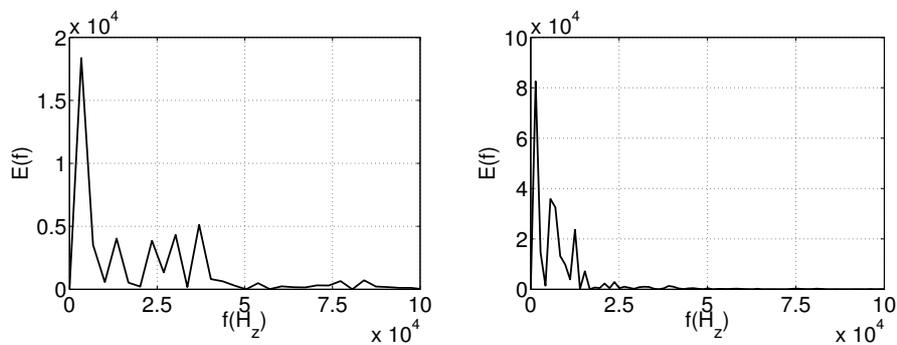


Figure 6: Fourier transforms of temporal signal  $Y_{k,\tau}$ , external forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

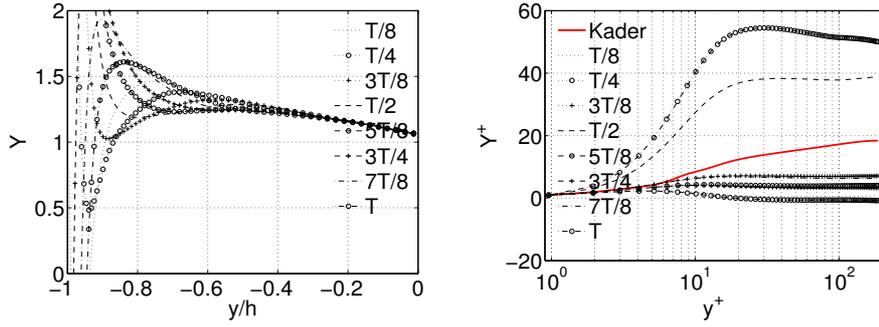


Figure 7:  $Y_k$  (left) and  $Y_k^+$  (right) profiles, wall forcing at  $f = 50000H_z$

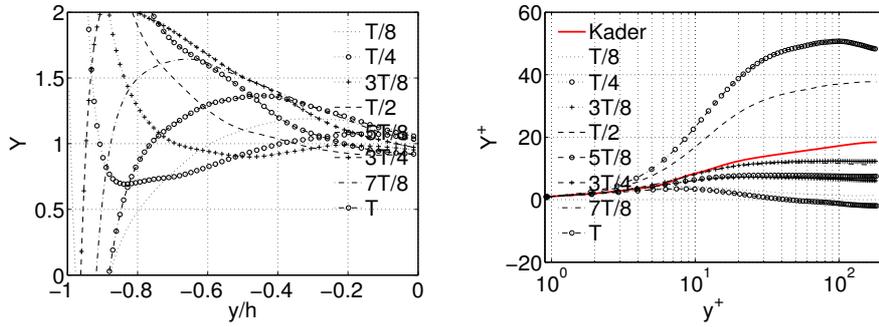


Figure 8:  $Y_k$  (left) and  $Y_k^+$  (right) profiles, wall forcing at  $f = 12500H_z$

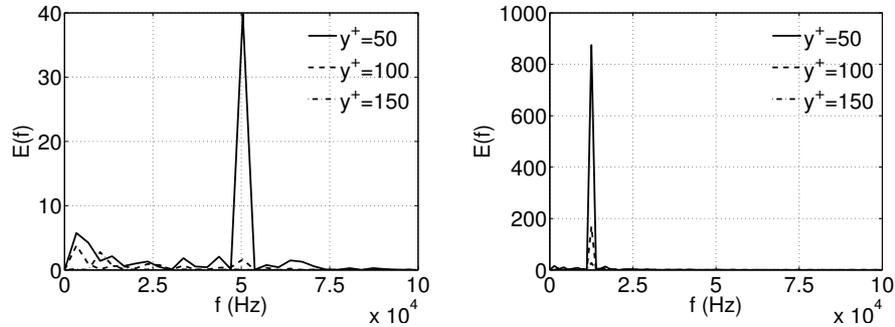


Figure 9: Fourier transforms of temporal signal  $y^+ = 50, 100$  and  $150$ , wall forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

where the superscript  $+$  denotes dimensionless quantities, dimensioned by the friction velocity  $U_\tau$  and a characteristic length  $\nu_w/U_\tau$ ,  $\kappa = 0.415$  is the Von Kármán constant and  $C_{add} = 5.32$  an integration constant. These two constants are in fact not universal, and slightly vary at least in low to moderate Reynolds number regime.

Concerning the temperature, a similar logarithmic equation can be derived from the equations, but the Kader's correlation [4] is often preferred because it represents the whole temperature profile including viscous and buffer sub-layers:

$$T^+ = \text{Pr}y^+e^{-\Gamma} + \left[ 2.12 \ln \left( (1 + y^+) \frac{2.5(2 - y/\delta)}{1 + 4(1 - y/\delta)^2} \right) + \beta(\text{Pr}) \right] e^{-1/\Gamma} \quad (5)$$

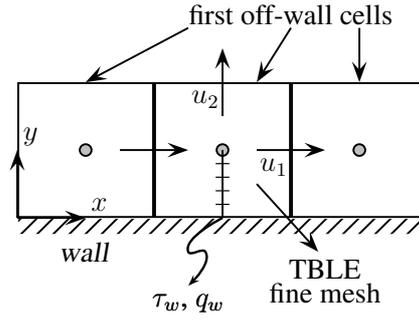


Figure 10: Embedded TBLE fine mesh embedded in the LES coarse mesh

where  $\delta$  is the channel half-width or the pipe radius,  $\Gamma$  and  $\beta(\text{Pr})$ :

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{10^{-2} (\text{Pr}y^+)^4}{1 + 5\text{Pr}^3y^+} \\ \beta(\text{Pr}) = (3.85\text{Pr}^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln \text{Pr} \end{cases} \quad (6)$$

Equations (4) and (5) form the standard wall model, noted SWM afterwards.

#### 4.1.2. The Thin Boundary Layer Equation model : TBLE

The TBLE model was first introduced in 1996 by Balaras [5] and has been increasingly investigated by other researchers [11, 12, 13]. In this model, a zonal approach is used: the filtered Navier-Stokes equations are solved up to the first off-wall point ; then, from this first grid point to the wall, a one-dimensional refined mesh is embedded into the LES grid, as depicted on Fig. 10, where a simplified set of equations is solved for the tangential velocity components  $u_i$  (for  $i = 1$  and 3). The wall-normal direction is  $y$ . This set of equations is obtained from the two-dimensional boundary-layer equations and reads as:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (u_i v) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial y} \right] \quad (7)$$

The wall-normal velocity component is then obtained by applying mass conservation:

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dy' \quad (8)$$

Generally, the simple mixing-length is used for the expression of  $\nu_t$ :

$$\nu_t = (\kappa y)^2 |S| D(y) \quad (9)$$

where  $\kappa$  is the von Kármán constant,  $y$  the distance from the wall,  $|S|$  the magnitude of the total strain rate, and  $D$  the damping function to get the correct behaviour of  $\nu_t$  at the wall, which expression is taken [14] as:

$$D(y) = 1 - \exp \left[ - \left( y^+ / 25 \right)^3 \right] \quad (10)$$

Thanks to the 1-D mesh refinement at the boundary, the wall shear stress  $\tau_w$  is directly evaluated by the velocity gradient at the wall, that is required to solve the filtered Navier-Stokes and

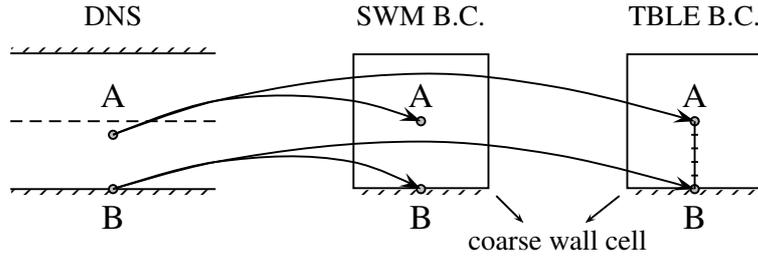


Figure 11: Sketch of the off-code testing

continuity equations at the first LES cell. The only link between the actual LES and the TBLE problem is given by the velocity and pressure unknowns at the first LES grid point, which can be considered as upper TBLE boundary conditions. At the wall, i.e. the lower boundary condition for TBLE, no-slip wall condition is applied.

Equation 7 is discretized using a second-order finite differences scheme for the diffusive term. In this study, the convective term is not taken into account, so that Eq. 7 becomes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial y} \right] \quad (11)$$

With this approximation, the problem becomes only one-dimensional in the wall-normal direction, as the pressure gradient is considered as a source term for the TBLE model. This TBLE version without convective terms has also been tested in attached and separated flows [15, 16]. The consideration of a temporal term in the Equations (7) and (11) of this wall model is not usual and no clear conclusions can be formulated *a priori* about this point.

## 4.2. Off-code testing

### 4.2.1. Description

The two wall models, SWM and TBLE, have been implemented in the mathematical software Matlab. This approach can be considered as an off-code testing since the models are used independently of a Navier-Stokes solver (i.e. LES solver).

Temporal traces of mass fractions computed by DNS (cf. Section 2) are used as boundary conditions for the wall models, as depicted in the Figure 11. Point A of the DNS configuration corresponds to  $y^+ = 150$  and provides the external boundary condition for the two models. Indeed,  $y^+ = 150$  is a distance from the wall located in a logarithmic layer, and is a typical value for a first off-wall point in a coarse LES computation. Point B is located at the wall and provides wall condition. Results obtained by the two wall models will be compared to DNS.

### 4.2.2. Results

The following results correspond to both cases of temporal forcing in the DNS, that is imposing oscillations in the outer region or at the wall. In the following,  $Y_{k,\tau}^*$  is the instantaneous non-dimensional friction mass fraction  $Y_{k,\tau}$  divided by  $(Y_{k,w} - Y_{k,ext})$ .

#### External oscillations

Figure 12 represent temporal traces of the non-dimensioned wall mass flux obtained from DNS, and from the two wall models SWM and TBLE for two forcing frequencies ( $f = 50000H_z$  and  $f = 12500H_z$ ).

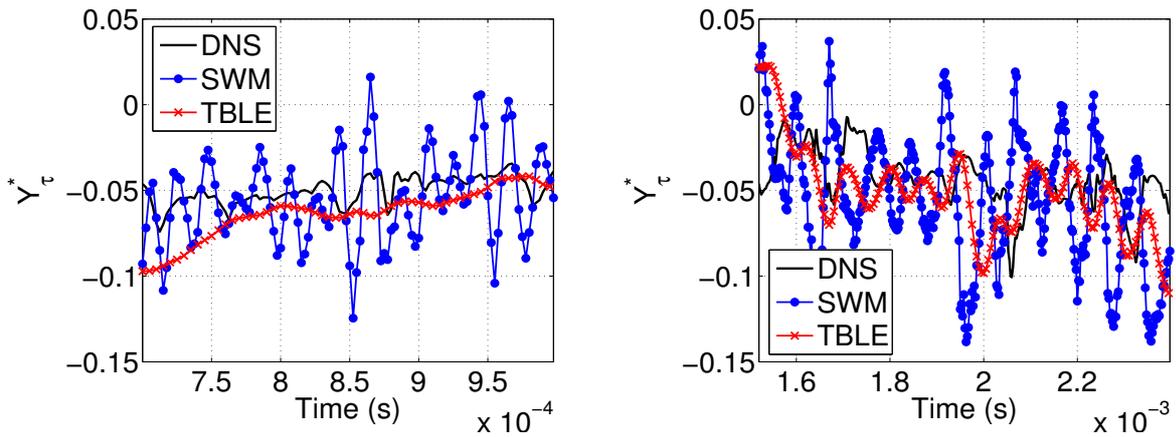


Figure 12: Temporal signal of  $Y_{k,\tau}^*$  from DNS, SWM and TBLE, external forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

In the high frequency case, DNS shows that external variations have been damped in the logarithmic layer, hence there is no trace of the external forcing in the temporal signal of the wall mass flux. This has been previously shown by analyzing the Fourier transform of this signal (cf. Fig. 5).

The standard wall model (SWM) behaves in another way: external information is directly related to the wall flux so that no damping effect due to the high frequency forcing is observed. Consequently,  $Y_{k,\tau}$  has a strong oscillating dynamic, which is not representative of the DNS.

At the opposite, the wall flux obtained by the TBLE model seems to be smoothed, as in the DNS. There is a significant and realistic damping effect, such as the signal of the wall flux is mostly dominated by low frequency phenomena.

A decrease of the forcing frequency does not change the two wall models behaviour: TBLE curves show the same trends as DNS while SWM gives high amplitude changes in the wall mass flux across the time.

#### Wall oscillations

In the configuration of wall forcing, each wall model behaves again rather differently.

Figure 13 shows that SWM and TBLE reproduce oscillations of  $Y_{k,\tau}$ , as observed in the DNS. Nevertheless, there is a significant phase shift between SWM and DNS signals, that exists whatever the forcing frequency. However, one can envisage that this time lag will vanish as the frequency decreases significantly (i.e. the flow tends to a steady state and the wall model is then valid). Moreover, the amplitude of the oscillations of the wall mass flux is not accurately reproduced by SWM.

This is not the case for the TBLE results that are exactly in phase with DNS data. Wall mass flux amplitude is precisely captured as well.

Other results, that are not shown here for concision, show that, for lower amplitude forcing, results are roughly the same, that is SWM and TBLE models behave the same way whatever the frequency and amplitude of temporal variations in wall forcing cases.

#### 4.2.3. Discussion

Concerning SWM, investigated cases are obviously far from its validity domain. By consequence, in external forcing case, damping effect can not be taken into account, while in wall

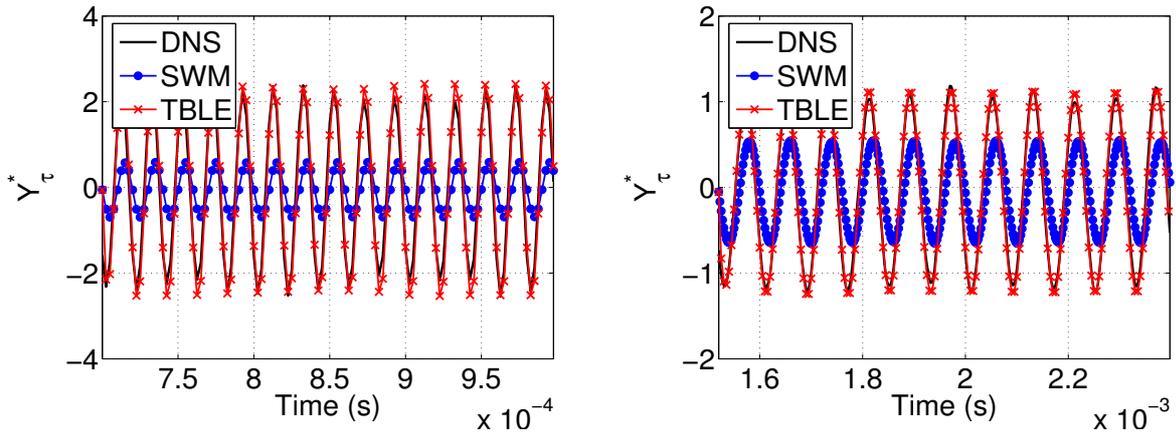


Figure 13: Temporal signal of  $Y_{k,\tau}^*$  from DNS, SWM and TBLE, wall forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

forcing, a phase shift is observed compared to DNS. Even if results are better (in amplitude and phase shift) when decreasing the frequency, in both cases the wall mass flux is estimated quite inaccurately.

As far as TBLE is concerned, even if results are not always close to DNS, same trends are shown in both cases, whatever the forcing frequency. The excellent behaviour in wall variations case can be explained by the fact that the zone of influence of the wall oscillations is restricted to a near-wall region where the turbulent activity is small compared to diffusion and Eq. (9) is a good approximation of the flow physics.

The conclusion of this off-code testing is that TBLE gives more accurate results in terms of wall fluxes, in both cases, and provides good approximation in the wall region for representative unsteady situations, compared to SWM.

## 5. Conclusion

A large amount of data has been obtained thanks to the Direct Numerical Simulation of pulsatile passive scalars in a turbulent channel flow. Numerical results deal with two configurations. On one hand, temporal variation of mass fraction is brought by the external flow. On the other hand, flow is submitted to wall variations. The study has been undertaken for both cases, at three forcing frequencies:  $f = 50000H_z$ ,  $25000H_z$  and  $12500H_z$  and two amplitudes.

DNS results are used as boundary conditions for two wall models (the standard wall model SWM and the TBLE model) to analyze the dynamic behaviour of wall models when applied in oscillating environment. Indeed, since the channel center is located around  $y^+ = 180$ , the lower part of the simulated channel roughly corresponds to a typical first off-wall cell of a coarse computational LES grid.

Off-code testing of the two wall models yields to the conclusion that a zonal approach (TBLE) gives a better agreement with DNS data, compared to a classical (equilibrium-law based) model (SWM), in terms of instantaneous wall mass flux of passive scalars. This is a consequence of the good accuracy of TBLE in the viscous layer where diffusion processes are dominant. The TBLE model also gives a representation of the damping in the logarithmic and buffer layers, when excitation comes from the outer flow.

## Acknowledgments

The authors acknowledge the financial support and scientific expertise from CEA (French Nuclear Energy Agency), by funding the first author's ongoing PhD thesis. The authors are also grateful to CINES for the access to computing resources.

## References

1. U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34:349–374, 2002.
2. D.R. Chapman. Computational aerodynamics, development and outlook. *AIAA Journal*, 17:1293–1313, 1979.
3. T. von Kármán. Turbulence and skin friction. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1(1), 1934.
4. B.A. Kader. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24(9):1541–1544, 1981.
5. E. Balaras, C. Benocci, and U. Piomelli. Two-layer approximate boundary conditions for Large-Eddy Simulations. *AIAA Journal*, 34(6):1111–1119, 1996.
6. P. Bradshaw. Compressible turbulent shear layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9:33–54, 1977.
7. F. Nicoud. Conservative high-order finite difference schemes for low-mach number flows. *Journal of Computational Physics*, 158:71–97, 2000.
8. A. Devesa and F. Nicoud. Anisothermal wall functions for RANS and LES of turbulent flows with strong heat transfer. In *ERCOFTAC Workshop, Direct and Large-Eddy Simulation 6, Poitiers, France*, pages 1–8, 2005.
9. S.F. Tardu, G. Binder, and R.F. Blackwelder. Turbulent channel flow with large-amplitude velocity oscillations. *Journal of Fluid Mechanics*, 267:109–151, 1994.
10. J.W. Brooke and T.J. Hanratty. Origin of turbulence-producing eddies in a channel flow. *Physics of Fluids A*, 5(4):1011–1022, 1993.
11. W. Cabot and P. Moin. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63:269–291, 2000.
12. G.V. Diurno, E. Balaras, and U. Piomelli. *Wall-layer models for LES of separated flows*. In *Modern simulation strategies for turbulent flows*. Ed. B. Geurts, (Philadelphia, Edwards), 2001.
13. W. Wang and P. Moin. Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows. *Physics of Fluids*, 14(7):2043–2051, 2002.
14. U. Piomelli, J. Ferziger, P. Moin, and J. Kim. New approximate boundary conditions for large-eddy simulations of wall bounded flows. *Physics of Fluids A*, 1(6):1061–1068, 1989.
15. W. Cabot. *Near-wall models in large-eddy simulations of flow behind a backward-facing step*. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 1996.
16. W. Cabot. *Wall models in Large Eddy Simulation of separated flow*. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 1997.

## Annexe E

# Article soumis à International Journal of Heat and Mass Transfer

L'article qui suit a été co-écrit avec F. Nicoud et soumis au mois d'Août 2006. Il rapporte les derniers résultats de thèse dans une étude générale sur l'utilisation d'un modèle de paroi à approche zonale dans le cadre de simulations des grandes échelles d'écoulements fortement non-isothermes.

---

A. Devesa and F. Nicoud. *Assessment of a Two-Layer Wall Model for Large Eddy Simulations of Highly Non-isothermal Turbulent Flows*. Submitted to International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006.

---



# Assessment of a Two-Layer Wall Model for Large Eddy Simulations of Highly Non-isothermal Turbulent Flows

A. Devesa <sup>a,b,\*</sup> F. Nicoud <sup>b</sup>

<sup>a</sup>*CERFACS, European Center For Research and Formation in Advanced  
Computations, 42 Avenue Coriolis, 31057 Toulouse Cedex 01, France*

<sup>b</sup>*Université Montpellier II, CNRS UMR 5149, I3M – CC 51, Place Eugène  
Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France*

---

## Abstract

Two-Layer Models have been identified as a promising wall model strategy for Large Eddy Simulations (LES) in the past ten years. Right across between equilibrium wall functions and Averaged Navier-Stokes Simulations (RANS) / LES coupling, this approach presents interesting advantages, particularly for the simulation of complex flows (e.g. with recirculations). This paper provides an assessment of such a model, namely the TBLE (Thin Boundary Layer Equation) model, for the simulations of non-isothermal unsteady turbulent wall-bounded flows, by introducing a variable density version of TBLE (TBLE- $\rho$ ) and enlightening the temporal features of this wall model.

---

---

\* Corresponding author

*Email address:* `devesa@cerfacs.fr` ( A. Devesa ).

## 1 Introduction

Industrial flows that are of interest in this study (e.g. nuclear reactors, nozzles) are most of the time characterized by their turbulent nature, a high Reynolds number, and the presence of solid walls. In the nuclear industry, a particular attention must be paid on the following features that are crucial in the dynamic and thermal processes:

- the variable density effects, when the fluid is submitted to significant temperature gradients
- the unsteadiness induced by the turbulence or a specific geometry

These two aspects are even more determinant in the near-wall region, 1- because the interaction between a fluid and a wall at two different temperatures induces severe gradients in the boundary layer, 2- because the temporal scales of the temperature fluctuations in the wall, and in the fluid as well, must be resolved to better capture thermal fatigue phenomena in the material (succession of dilatation and contraction phases).

### *1.1 Simulating wall-bounded flows*

The presence of walls in the computational domain of a simulation induces adherence of fluid particles, generating a no-slip condition. Then, the flow pattern and the nature of the turbulence deeply change in a near-wall region, where viscous diffusion is predominant. The fine resolution of this near-wall region implies that all the details of the flow field are simulated, i.e. the mesh refinement near the wall must be sufficient to capture these molecular

scale phenomena. Hence, mesh requirements are a function of the Reynolds number  $Re$  and several studies show that the mesh points of a well resolved direct simulation must be of the order of  $Re^{1.8}$  in the viscous near-wall region [1,2].

Consequently, the computational cost of a wall-bounded configuration at high or even moderate Reynolds number using DNS becomes prohibitive. In order to reduce the cost of a simulation in a general way, both Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS) and Large Eddy simulations (LES) can be performed.

The former approach simply resolves the averaged Navier Stokes equations, the turbulence closure generally given by a two-equation model ( $k - \epsilon$ ). Using RANS, stationary high Reynolds number wall-bounded flow simulations are reachable, ensuring reliable results with a low computational effort. Nevertheless, this method is reserved to steady flows which is a quite limiting constraint in terms of industrial applications. Moreover, the turbulence models are calibrated empirically, for a given configuration.

The present study is concerned with the latter approach that consists in solving only the large scales of the flow (while modeling the smaller ones). This approach is based on the universality of the small scales of the turbulence which behaviour is represented by a subgrid scale model (SGS). The resolved equations are the filtered Navier Stokes equations, where the filter size is often given by the local size of the computational cell.

One major drawback of LES of wall-bounded flows is that meshing requirements to precisely resolve the boundary layer are still proportional to the Reynolds number. Hence, LES in industrial configurations can not

handle high Reynolds number flows at a reasonable computational cost.

Several ideas to overcome this limitation can be imagined, based on:

- Numerical techniques to refine the mesh in order to gain precision in the simulation of the near-wall region,
- In the opposite way, physical properties of the boundary layer are exploited so that the problem becomes simpler.

The simplest way to gain mesh points is to use multi-block mesh, changing the refinement from one block to another. Multigrid method can also reduce the computational cost by solving the Navier Stokes equations on a coarse grid, injecting the solution in a finer mesh, etc, but this is only valid for steady state or low frequency unsteady configurations. Other refinement techniques like Adaptive Mesh Refinement (AMR) or zonal embedded grids [3] are interesting alternatives even though their implementation is not trivial and computational savings are limited.

The opposite trend lays on reducing the cell number of a simulation in the near-wall region, by simplifying the Navier Stokes problem in the boundary layer so that the results remain reliable. This is the approach of wall modeling which this article deals with.

### *1.2 The standard wall model: SWM*

The structure of the boundary layer, composed of a viscous, a logarithmic and a buffer layer, have been the subject of numerous studies, and an interesting result is that there is no influence between the viscous and the logarithmic region in terms of turbulent coherent structures [4]. Hence, skin

friction and wall heat flux can be determined only from velocity and temperature profiles in the logarithmic layer.

Von Kármán [5] first found experimentally a friction law for a steady-state fully developed turbulent boundary layer that reads:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C_{add} \quad (1)$$

where the superscript  $+$  denotes dimensionless quantities, dimensioned by the friction velocity  $U_\tau$  and a characteristic length  $\nu_w/U_\tau$ ,  $\kappa$  is the Von Kármán constant ( $\kappa = 0.415$ ) and  $C_{add}$  an additional constant ( $C_{add} = 5.32$ ). These two constants are in fact not universal, and can vary significantly with respect to the Reynolds number. Concerning the temperature, a similar logarithmic equation can be derived from the equations, but the Kader's correlation [6] is often preferred because it represents the whole temperature profile including viscous and buffer sublayers:

$$T^+ = \text{Pr}y^+e^{-\Gamma} + \left[ 2.12 \ln \left( (1 + y^+) \frac{2.5(2 - y/\delta)}{1 + 4(1 - y/\delta)^2} \right) + \beta(\text{Pr}) \right] e^{-1/\Gamma} \quad (2)$$

where  $\delta$  is the channel half-width or the pipe radius,  $\Gamma$  and  $\beta(\text{Pr})$ :

$$\Gamma = \frac{10^{-2} (\text{Pr}y^+)^4}{1 + 5\text{Pr}^3y^+}$$

$$\beta(\text{Pr}) = \left( 3.85\text{Pr}^{1/3} - 1.3 \right)^2 + 2.12 \ln \text{Pr}$$

Eqs. (1) and (2) form the standard wall model, noted SWM afterwards.

### 1.3 Wall models in a variable density context

Even if very few literature can be found concerning variable density fluids at low Mach numbers, some studies [7–9] show that the SWM is not valid anymore, in presence of strong density gradients, i.e. strong temperature gradients. The use of the Van Driest transformation Eq. (3) appears to be appropriate in such context. Indeed, several studies [7,8,10] show that the transformed wall coordinate  $U_{VD}^+$  defined by:

$$U_{VD}^+ = \int_0^{U^+} \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \right)^{1/2} dU^+ \quad (3)$$

obeys to the simple logarithmic Eq. (1).

The integration of such a simple relation is possible analytically, so that a coupled wall model can be derived (more details can be found in [9]), that reads:

$$\frac{2}{\Delta T} (U^+ + A) \left[ \sqrt{1 + \Delta T} - \sqrt{1 + \frac{A\Delta T}{U^+ + A}} \right] = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_{add} \quad (4)$$

$$T^+ = \text{Pr}_t (U^+ + A) \quad (5)$$

where  $\Delta T = (T - T_w)/T_w$ ,  $\text{Pr}_t$  is the turbulent Prandtl number and  $A$  is a constant independent of  $y^+$ , that is calibrated to recover the Kader's correlation in quasi-isothermal regime, at  $y^+ = 100$ . The expression for  $A$  is hence:

$$A = -C_{add} + \frac{\beta(\text{Pr})}{\text{Pr}_t} + \left( \frac{2.12}{\text{Pr}_t} - \frac{1}{\kappa} \right) \ln(100) \quad (6)$$

The dimensionless quantity  $B_q = T_\tau/T_w$  can be used instead of  $\Delta T$  by the following relation:

$$\Delta T = -\text{Pr}_t B_q (U^+ + A) \quad (7)$$

This coupled wall model denoted as CWM in the following, was tested successfully in variable density academic cases [9].

#### *1.4 Unsteady effects in wall modeling*

A major limitation for the unsteady simulations of industrial interest is that equilibrium laws, such as SWM and CWM, were derived under the assumption that the boundary layer is attached, fully turbulent and a statistically steady state. Even though using such laws-of-the-wall is possible in LES, one cannot ensure the reliability of the results when dealing with high or moderate frequency phenomena. For this reason, more accurate methods, based on zonal approaches were developed and tested with various success (for a review, see [1]) that do not lie on this assumption. On one hand, several RANS / LES coupling methods, including the Detached Eddy Simulations (DES), constitute a recent type of wall-bounded flow computations where the objective is to solve the outer flow and attached boundary layer regions with a RANS method while solving only the time-dependent large scales in separation zones by LES. On the other hand, Two-Layer models propose to solve a simplified set of equations in the near-wall region. At the opposite of the DES approach, two different grids are required: a local fine grid to represent the near-wall region and the coarser LES mesh.

Nevertheless, zonal approaches are still based on RANS modeling, hence basics assumptions are still underlying locally and turbulence modeling stays the same as in steady approaches. To the author's knowledge, no study

dealing with the dynamic behaviour of such Two-Layer models has been reported in the literature.

In this study, a Two-Layer model, namely the TBLE model, first described in Section 2, is tested in representative situations of industrial flows of interest. Particularly, the capability of this model to handle variable density flows is assessed in Section 3, while an investigation on its dynamic response to an unsteady excitation is addressed in Section 4.

## 2 A zonal approach for LES: the TBLE model

The TBLE (standing for Thin Boundary Layer Equation) model was first introduced in 1996 by Balaras et al. [11] and has been increasingly investigated by other researchers [12–17]. In this model, a zonal approach, which was described in the Introduction, is used.

The filtered Navier-Stokes equations are solved up to the first-off wall point. Then, from this first grid point to the wall, a one-dimensional refined mesh is embedded into the LES grid, as depicted on Fig. 1, where a simplified set of equations (8) is solved for the tangential velocity components  $u_i$  (for  $i = 1, 3$ ),  $u_2$  being the wall-normal velocity component. This set of equations is obtained from the two-dimensional boundary-layer equations and reads as:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (u_i u_2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial y} \right] \quad (8)$$

The wall-normal velocity component is then obtained by applying mass conservation:

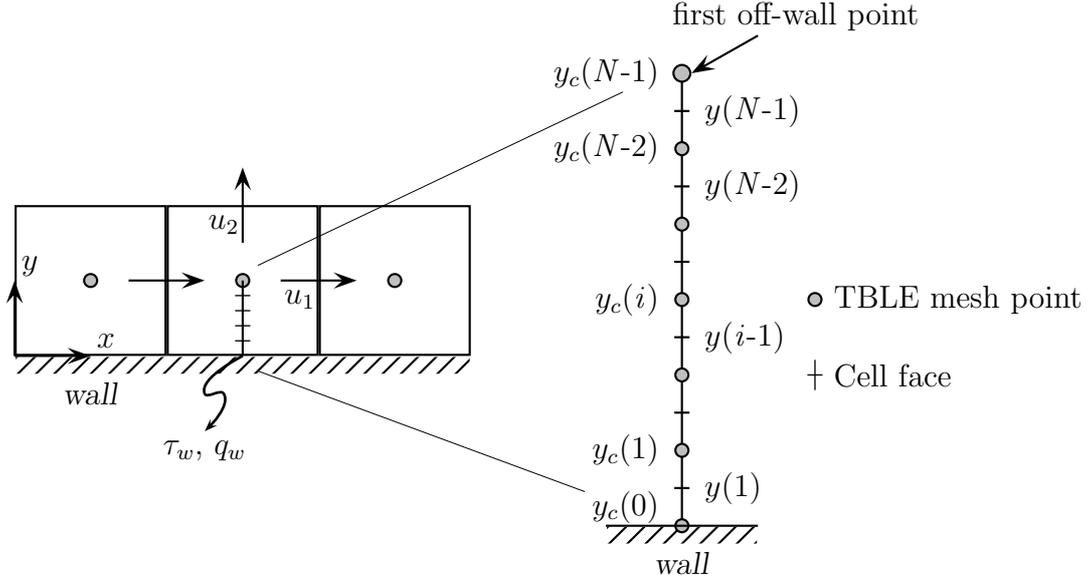


Fig. 1. TBLE fine mesh embedded between the wall and the first coarse mesh point

$$u_2 = - \int_0^y \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dy' \quad (9)$$

Since on the embedded TBLE grid, all the scales are modeled, the turbulence model must play a significant role. Nevertheless, simple models have been adopted from now on, and in this study, a simple mixing-length is used for the expression of  $\nu_t$ .

$$\nu_t = (\kappa y)^2 |S| D(y) \quad (10)$$

where  $\kappa$  is the von Kármán constant,  $y$  the distance from the wall,  $|S|$  the magnitude of the total strain rate, and  $D$  the damping function to get the correct behaviour of  $\nu_t$  at the wall, which expression is taken [18] as:

$$D(y) = 1 - \exp \left[ - \left( y^+ / 25 \right)^3 \right] \quad (11)$$

Thanks to the 1-D mesh refinement at the boundary, the wall shear stress  $\tau_w$  is directly evaluated by the velocity gradient at the wall, that is required to solve the filtered Navier-Stokes and continuity equations at the first LES

cell. The only link between the actual LES and the TBLE problem is given by the velocity and pressure unknowns at the first LES grid point, which can be considered as upper TBLE boundary conditions. At the wall, that is the lower boundary conditions for TBLE, no-slip wall condition is applied. The computation of  $\tau_w$  is hence decoupled from the flow resolution by LES, as it the case in the use of classical laws-of-the-wall (like the Standard wall model or the shifted model).

Eq. (8) is discretized using a second-order finite differences scheme for the diffusive term. The numerical method for the resolution of the TBLE model is not shown here for clarity reasons, but it simply consists in the inversion of a tri-diagonal matrix iteratively for each velocity components. Unknowns are calculated at the mesh points  $y_c(i)$ , while fluxes are computed at the interfaces  $y(i)$  (Fig. 1).

The TBLE model has been successfully tested in this incompressible form in several cases, in attached and separated flows [11,14], in the trailing edge of an airfoil [16] and in square ducts [11].

A significant simplification of the TBLE model can be brought by neglecting the convective terms. Indeed, considering the near-wall region, one can make the assumption that the wall-normal velocity is negligible compared to the tangential components. Hence, Eq. (8) becomes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial y} \right] \quad (12)$$

With this approximation, the problem becomes only one-dimensional in the wall-normal direction, as the pressure gradient is considered as a source term for the TBLE model. This TBLE version without convective terms has also

been tested in attached and separated flows [12,13].

Recent work from Benarafa et al. [17] shows the ability of the TBLE model (with its temperature counter-part) to handle turbulent plane channel flows with successful results for mean and fluctuating quantities within the fine mesh in steady state cases. However, to the authors knowledge, there is no existing study where the TBLE model is tested in unsteady cases. But, the consideration of a temporal term in the equations (8) and (12) of this wall model is not so usual and no clear conclusions can be formulated *a priori* on this point. This brings to the investigation presented in Section 4.

Before dealing with these temporal considerations, another investigation of interest is the ability of the TBLE model to deal with dilatable fluid. Indeed, in flows with strong heat transfer, high density or temperature gradients take place in the near wall region. In the following section, application of the TBLE model to dilatable flows is addressed.

### **3 Application to variable density flows**

In this section, the effect of variable density in wall-bounded flows is investigated. Turbulent forced convection with strong heat transfer arises in a wide range of industrial applications, from nuclear reactors to propulsion systems. In those applications, where fluid properties vary significantly, the difficulty of performing reliable measurements yields to a lack of accurate data. Nevertheless, the standard wall model based on the logarithmic law was proven to be inadequate, that is:

$$U^+ = \frac{U}{U_\tau} \neq \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (13)$$

Nevertheless, Van Driest [7] suggested the use of a modified velocity  $U_{VD}^+$ , taking into account the density difference between local point and the wall.

This is the so-called Van Driest transformation:

$$U_{VD}^+ = \int_0^{U^+} \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \right)^{1/2} dU^+ \quad (14)$$

Several studies [19,20] showed that this modified velocity recovers the logarithmic law, even in highly non-isothermal cases.

### 3.1 Turbulent channel flow with variable properties

Direct Numerical Simulations (DNS) of periodic turbulent channel flow with variable density were undertaken by Nicoud [19,8] in different quasi-isothermal and anisothermal cases, at a friction Reynolds number  $Re_\tau = 180$ . The domain, Fig. 2, is bounded by a cold lower wall (at temperature  $T_1$ ) and a hot upper wall (at temperature  $T_2 = 1.01T_1, 2T_1$  or  $4T_1$ ). Viscosity is defined by a power law, so that  $\mu \propto 1/\sqrt{T}$ . The Mach number of the simulated flows was kept low so that only the variable density effects were observed. Due to the  $T_1/T_2$  thermal boundary conditions, the temperature profiles present an inflection point. Hence a comparison with the standard wall model (namely Kader's formula for the temperature) may not be so relevant in a quasi-isothermal case. For this reason, as a reference quasi-isothermal case, the DNS database from Tokyo Science University team [21] was used, which simulations were performed at constant wall temperature ( $T_1 = T_2$ ), with a constant heating source.

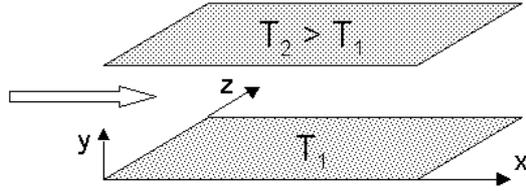


Fig. 2. Computational domain of the DNS [8]

Case	Configuration	$Re_\tau = \frac{U_\tau h}{\nu_w}$	Reference data
1	$T_c = 1.005 T_1$	180	Kawamura <i>et al.</i> [21]
2	$T_2 = 2 T_1$	195	Nicoud <i>et al.</i> [19,8]
3	$T_2 = 4 T_1$	212	Nicoud <i>et al.</i> [19,8]

Table 1

Compilation of the three DNS cases

Figs. 3, 4 and 5 depict values of  $U_\tau$  and  $T_\tau$  for the three simulated cases (Table 1) that are obtained by applying three different thermal wall models to the DNS data across the boundary layer. The three wall models are:

- The standard wall model (SWM) (see paragraph 1.2) composed of the two equations (1) and (2), in which the constants  $\kappa$  and  $C_{add}$  have been adapted to low Reynolds number values ( $\kappa = 0.4$ ,  $C_{add} = 5.5$ ) [21,22].
- A coupled wall model (CWM) briefly described in Section 1.3 (more details in [9]), with a slight change concerning the constant calibration.

Indeed, in the present study, low Reynolds number effects exists, and Kader's formula can not be simplified to  $T^+ = 2.12 \ln(y^+) + \beta(Pr)$ .

Consequently, the constant was adapted to low Reynolds number flows and a new formulation was found:

$$A = \beta(Pr)/Pr_t - C_{add} + (2.12/Pr_t + 1/\kappa) \ln(400/e).$$

- The TBLE model described in Section 2

Concerning the first case (Fig. 3), a slight gap between the TBLE and the two other models is denoted. The consequence of the low Reynolds number of the flow is that the converged solution of the TBLE tends to a logarithmic law in which the constants are not the same as in the SWM for the velocity, and even worse for the temperature. In isothermal high Reynolds number cases, the TBLE will recover the SWM. Nevertheless, results remain close to DNS values of  $U_\tau$  and  $T_\tau$  (maximum error is around 5% for  $U_\tau$  and 10% for  $T_\tau$ ). The robustness of TBLE with respect to the distance to the wall is found to be satisfactory: the ratio between model and DNS values is stable over a wide range of  $y^+$ . Fig. 3 also reveals that the laminar layer is well solved by the TBLE: the error between the model and reference data remains insignificant up to  $y^+ = 5 - 10$ . It is obviously not the case, for the SWM and CWM, as they are both based on logarithmic layer assumptions.

The analysis of cases 2 and 3 (Figs. 4 and 5) show that variable density effects impact significantly the TBLE results. An increase of the error compared to DNS values in non-isothermal cases is observed, reaching 20% around  $y^+ = 100$  for the temperature. Note that the temperature profiles in case 2 and 3 exhibit an inflection point, explaining that the curves do not present a plateau, as for the velocity. Nevertheless, the qualitative trend is clearly that the gap between TBLE and DNS increases as the density gradient in the boundary layer increases (same global behaviour as the SWM). At the opposite, the CWM results are still satisfactory, either for the velocity and the temperature.

These results induce that a significant improvement can be reached by adapting the existing TBLE model to a variable fluid properties context, by applying the same derivation for the CWM, but in the TBLE context. Such

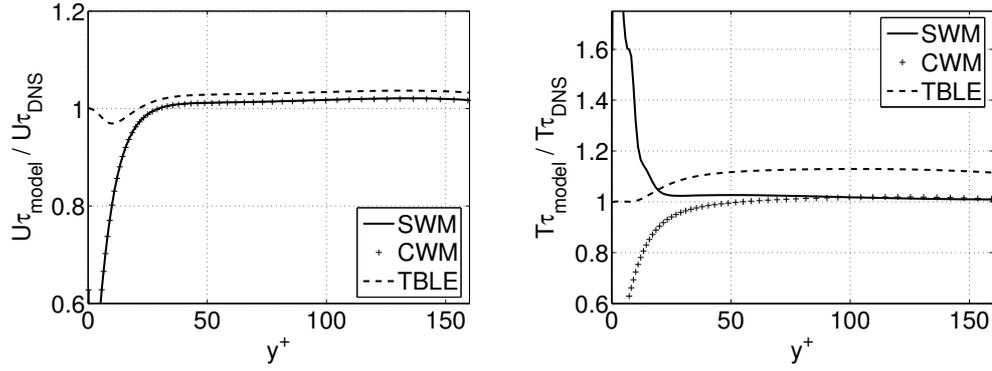


Fig. 3. Friction velocity  $U_{\tau}$  (left) and temperature  $T_{\tau}$  (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 1

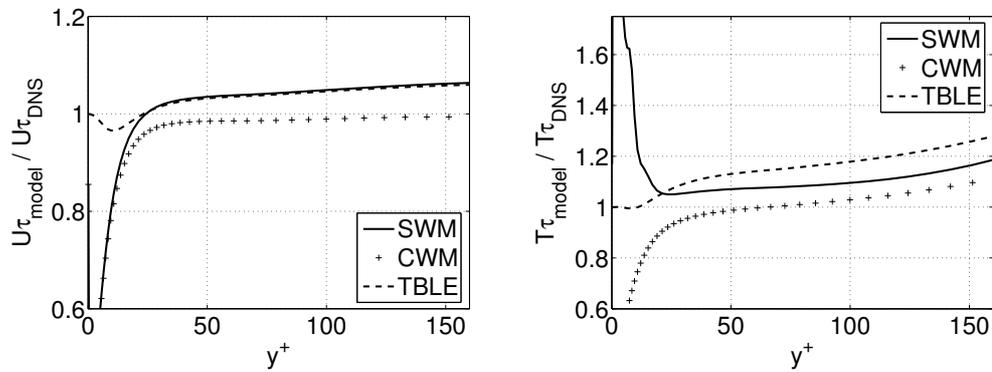


Fig. 4. Friction velocity  $U_{\tau}$  (left) and temperature  $T_{\tau}$  (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 2

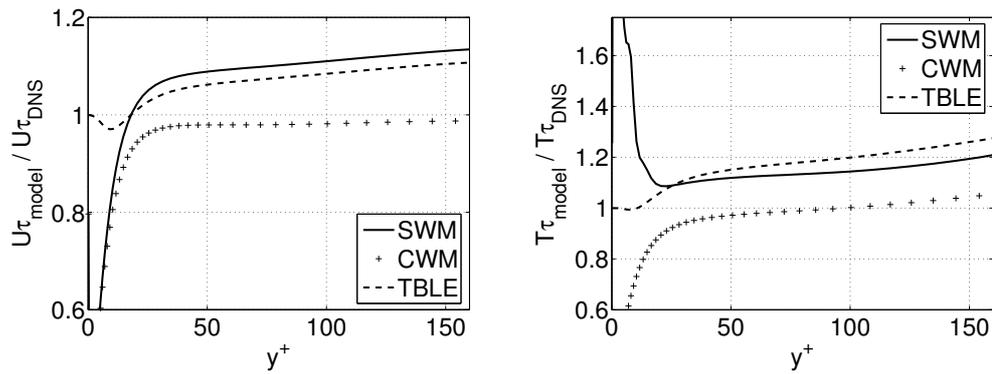


Fig. 5. Friction velocity  $U_{\tau}$  (left) and temperature  $T_{\tau}$  (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 3

an adaptation is described in paragraph 3.2.

### 3.2 Adaptation to variable density flows

In a compressible context, the TBLE method is based on the resolution of four equations: two for the streamwise and spanwise momentum components, one for the temperature and a last one for the state equation. If  $y$  denotes the wall-normal direction, the set of equations reads:

$$P_0 = \rho RT \tag{15}$$

$$\frac{\partial \rho U_k}{\partial t} = F_k + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial U_k}{\partial y} \right] \tag{16}$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = F_{th} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \tag{17}$$

$P_0$  is the thermodynamic pressure of the Low Mach approach, which is constant over the whole domain and appears in the state equation (15). The subscript  $k$  denotes the velocity component ( $k = 1$  or  $3$ ). The sources terms are grouped under the notation  $F_k$  for the momentum and  $F_{th}$  for the temperature. The first one can contain the pressure gradient and mass conservation forcing for periodic calculations, while the second can contain the temporal derivative of the temperature and other volumic sources. The density is directly obtained via the state law.

The turbulent viscosity model is a simple mixing length model [11]. In order to adapt the TBLE model to high temperature gradient configuration, this turbulence model needs to be adjusted so that the momentum equation recovers the Van Driest transformation (14). Without temporal and source terms, as it is a case for the derivation of the standard logarithmic law, Eq. (16) reads (in the logarithmic region, where  $\mu \ll \mu_t$ ):

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_t \frac{dU}{dy} \right) = 0 \quad (18)$$

Here, we need Eq. (18) to be true for the Van Driest wall coordinate, so that it fulfills the standard logarithmic law as in Eq. (19):

$$U_{VD}^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (19)$$

That is equivalent to:

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_t \frac{dU_{VD}}{dy} \right) = 0 \quad (20)$$

The direct differentiation of Eq. (14) gives:

$$dU_{VD}^+ = \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_w} \right)^{1/2} dU^+ \quad (21)$$

In terms of dimensionned wall coordinates:

$$\frac{dU_{VD}}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta T}} \frac{dU}{dy} \quad (22)$$

Hence, Eq. (20) can be rewritten as:

$$\frac{d}{dy} \left( \mu_t \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta T}} \frac{dU}{dy} \right) = 0 \quad (23)$$

Eq. (23) finally shows that an adapted turbulence model for variable density flows is the classical mixing length model, multiplied by an anisothermal factor, function of the temperature difference between the local TBLE mesh point considered and the wall.

$$\mu_{ta} = \left( \frac{T_w}{\tilde{T}} \right)^{1/2} \mu_t \quad (24)$$

### 3.3 Assessment of the TBLE- $\rho$ model

The modified version of the TBLE model, taking into account variable density and denoted by TBLE- $\rho$  hereafter, was tested on the same three cases as paragraph 3.1 (cf. Table 1). Figs. 6, 7 and 8 depict the results in terms of  $U_\tau$  and  $T_\tau$  given by this modified model, compared with the incompressible version of TBLE.

The first case results prove that TBLE- $\rho$  recovers the TBLE model in quasi-isothermal flows.

Concerning the two highly non-isothermal cases, TBLE- $\rho$  shows an improvement in the velocity and temperature results compared to TBLE. Indeed, TBLE- $\rho$  seems to inhibit the variable density effects, by way of the modification of the turbulence model Eq. (24). The error on skin friction and wall heat flux was kept below 5%, that is quite satisfactory for a thermal wall model. Moreover, TBLE- $\rho$  seems to be in close agreement with CWM, when the density gradient is increasing. Another interesting point is that the robustness of TBLE- $\rho$  seems to be better than TBLE, despite the inflection point in the temperature profile.

These results show the capabilities of TBLE- $\rho$  in variable density regime, compared to SWM and TBLE. In the following part, the dynamic behaviour of TBLE is investigated.

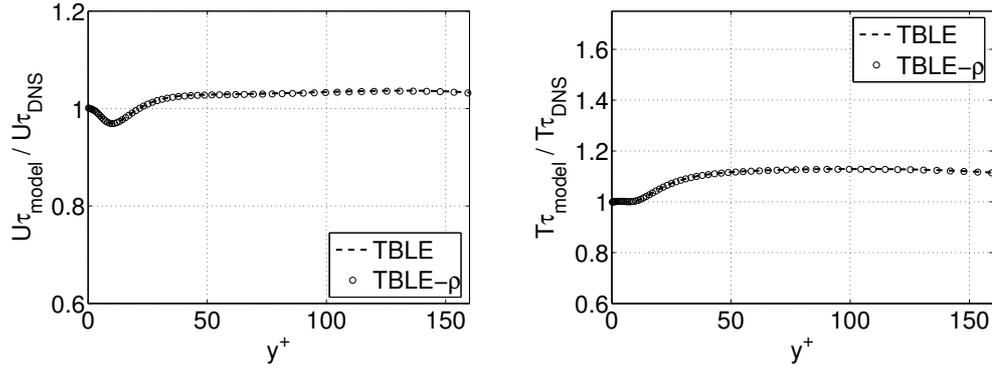


Fig. 6. Friction velocity  $U_{\tau}$  (left) and temperature  $T_{\tau}$  (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 1

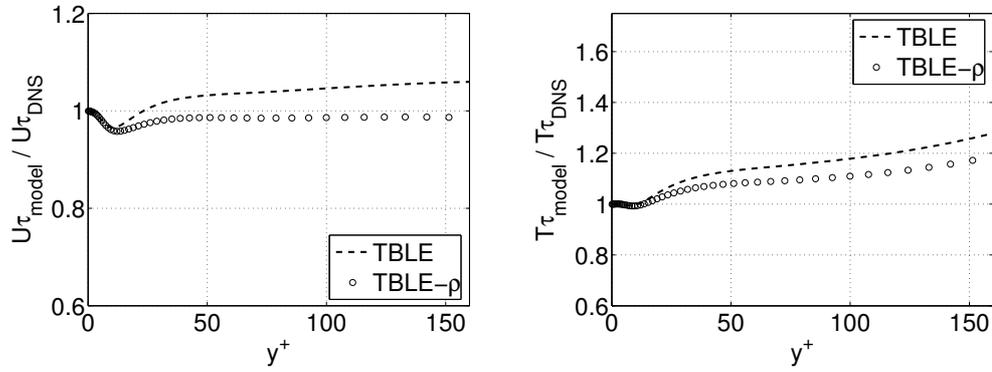


Fig. 7. Friction velocity  $U_{\tau}$  (left) and temperature  $T_{\tau}$  (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 2

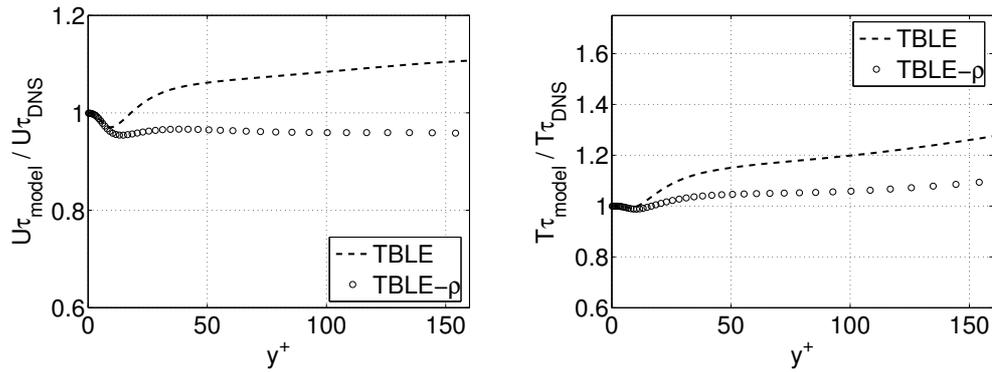


Fig. 8. Friction velocity  $U_{\tau}$  (left) and temperature  $T_{\tau}$  (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 3

## 4 Assessment of the dynamic behaviour of the TBLE model submitted to temporal variations

### 4.1 Numerical experiment on pulsed passive scalars in a turbulent channel flow

#### 4.1.1 Preliminary remarks on the use of passive scalars

Using passive scalars (also denoted by fictive species afterwards) that do not affect the flow field and are just transported in the computational domain allow not only to decouple the temperature field from dynamics, but also to pilot their concentration by the boundary condition or source terms.

The transport equation for the mass fraction  $Y_k$  of the fictive species  $k$  reads:

$$\frac{\partial(\rho Y_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho Y_k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \right) \quad (25)$$

where  $D_k$  is the passive scalar diffusivity, which can be rewritten with the Schmidt number:  $\rho D_k = \mu / Sc_k$ . For simplicity reason, the Schmidt number of all scalars is chosen to be 1, so that the scalar diffusivity is equal to molecular viscosity. By analogy with what is done with temperature, the mass fraction profiles can be scaled either by the outer mass fraction  $Y_{k,ext}$  or by the friction mass fraction  $Y_{k,\tau}$ :

$$Y_{k,\tau} = -\frac{\nu_w}{U_\tau} \frac{\partial Y_k}{\partial y} \Big|_w \quad (26)$$

where  $y$  is the wall-normal direction and  $U_\tau$  the friction velocity. The mass fraction in wall unit is then defined by  $Y_k^+ = Y_k / Y_{k,\tau}$ , consistently with temperature in wall units.

#### 4.1.2 Numerical configuration

DNS offers the possibility to obtain reliable data concerning the wall behaviour of passive scalars. In order to limit computational costs, a plane channel configuration (depicted on Fig. 9) is considered at a friction Reynolds number  $Re_\tau = U_\tau h / \nu_w = 180$ , high enough to have a turbulent flow, but as low as possible to limit the computing resources required.

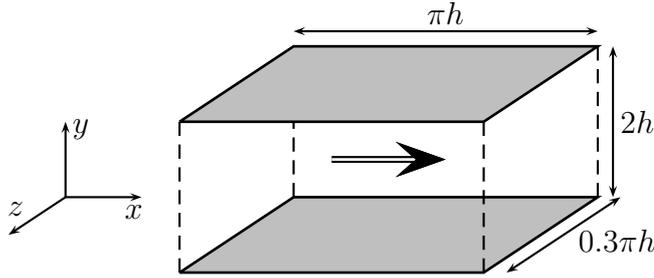


Fig. 9. Turbulent channel flow configuration

#### 4.1.3 Forcing the unsteady behaviour of fictive species

In practical applications, both wall and outer fluid temperature may oscillate over time. This study is an attempt to mimic both situations with passive scalars: on one hand, the external flow is submitted to cyclic variations ; on the other hand, wall conditions (i.e. wall mass fractions) are pulsed.

**4.1.3.1 Imposing an oscillating external condition** A source term on the mass fraction of a scalar is a possibility to pilot its raise or loss.

However, the equation that is then solved is no longer Eq. (25). In compliance with the wish to keep this convection-diffusion equation as it is, we need to impose a source term only in a part of the channel that is far from the investigated zone. In the present case, only the upper half of the

channel is pulsed (cf. Fig. 10), with a source term defined by:

$$\begin{cases} S_k(t) = 2\rho(y - y_c) \frac{Y_{k_{ref}} - \langle Y_k \rangle}{\tau_k} & y > y_c \\ S_k(t) = 0 & y < y_c \end{cases} \quad (27)$$

where  $\langle Y_k \rangle$  is a volumic average of  $Y_k$  over the domain, while  $Y_{k_{ref}}$  is a target value chosen to be a sine function over time and  $\tau_k$  a relaxation time. The source term vanishes at the center of the channel ( $y = y_c$ ), thanks to the term  $(y - y_c)$  of Eq. (27). Consequently, in the lower part of the channel on which we will focus, Eq. (25) is strictly resolved.

$Y_{k_{ref}}$  is set in order to induce a temporal mean value of 1000 at the center of the channel, with a variation amplitude of roughly 500. The center of the channel is located at  $y^+ = 180$ , which is of the same order as the height of a first cell of a coarse LES mesh. Then, the direct simulation is representative of the behaviour of a wall cell, which is not resolved while using a wall model.

**4.1.3.2 Imposing an oscillating wall condition** In this reciprocal situation, we impose a temporally varying boundary condition, of the form of a sine function with a mean value  $Y_{k_w} = 2$ . The temporal mean value of the mass fraction at the center of the channel remains nearly constant and equal to unity. Opposite wall mass fraction is set to 0, so that a mean gradient is imposed over the channel height (see Fig. 11).

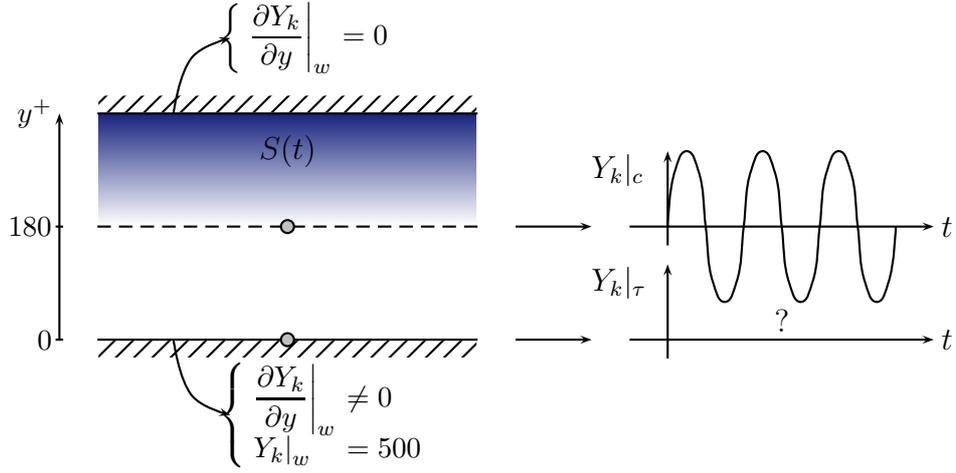


Fig. 10. Imposing an oscillating external condition

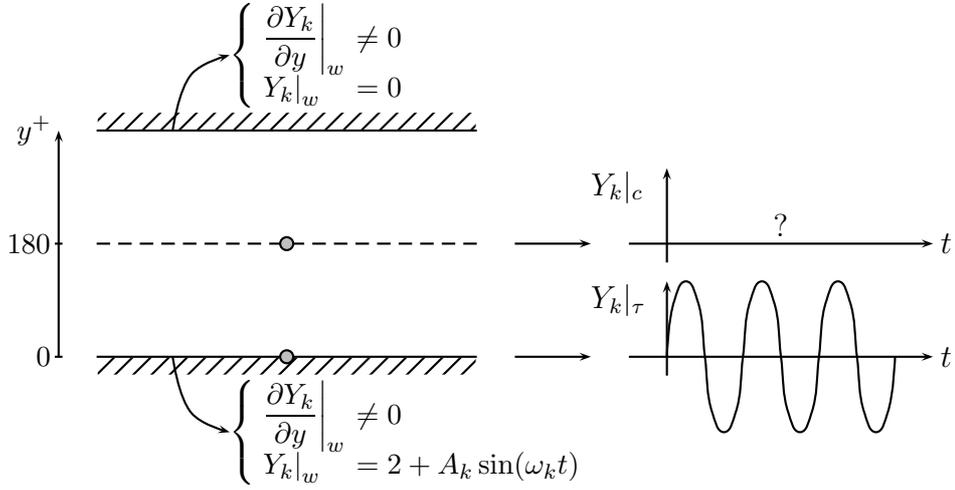


Fig. 11. Imposing an oscillating wall condition

#### 4.1.4 Frequency range

The frequency range to be investigated was determined by bibliographic review on critical pulsations in oscillating flows [23]. Three frequencies were chosen to best represent unsteady flow phenomena in temperature varying environment:  $f = 50000H_z$ ,  $25000H_z$  and  $12500H_z$ , corresponding to Strouhal numbers  $St = fD/U$  from 0.1 to 0.4 (low frequency phenomena). This yields to a range of reduced pulsations  $\omega^+ = \omega\nu/U_\tau^2$  from 0.01 to 0.05 (shown to be of critical interest [23]).

## 4.2 Numerical results

DNS were performed with the AVBP code<sup>1</sup> which has already been validated for LES/DNS of academic or industrial configurations with or without combustion [24]. Each frequency is investigated in a direct simulation, where five fictive species are transported and pulsed whether by the external flow or the wall boundary conditions. For each case, two forcing amplitudes are investigated, but only high amplitude forcing will be presented in this paper.

Here, only averages over homogeneity planes will be shown, as well as phase-lock averages for 8 phases by cycle. A quick overview of the results is given in this section, for the cases  $f = 50000H_z$  and  $f = 12500H_z$ .

### 4.2.1 External condition forcing

The high variations obtained at the center of the channel (cf. Fig. 12 and 13) implies that the Kader's correlation [6] is no longer valid in a part of the logarithmic law (approximately from  $y^+ = 50$  to 180). Nevertheless, the unsteady behaviour seems to be damped below  $y^+ = 50$ , and mass fraction profiles are in good agreement with Kader's formula in viscous and buffer layers. This is due to the thin penetration layer of the oscillations in the outer flow. Results show that this penetration thickness increases with lower frequency (Fig. 13), that is, for a given frequency, oscillations at the center of the channel can play a role up to the wall, and consequently, on the  $Y_\tau$  value (wall mass flux).

---

<sup>1</sup> [http://www.cerfacs.fr/cfd/avbp\\_code.php](http://www.cerfacs.fr/cfd/avbp_code.php)

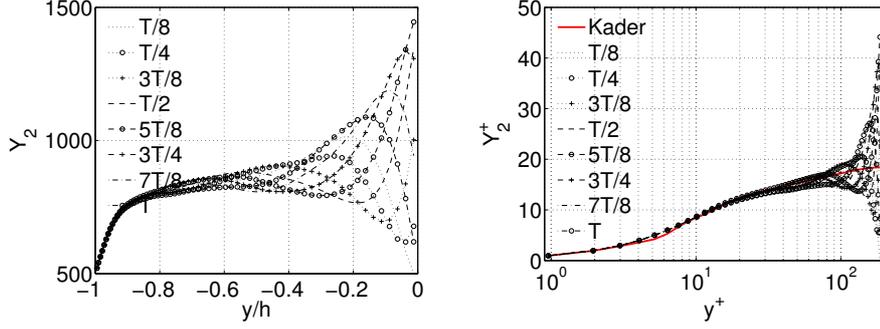


Fig. 12.  $Y_k$  (left) and  $Y_k^+$  (right) profiles, external forcing at  $f = 50000H_z$

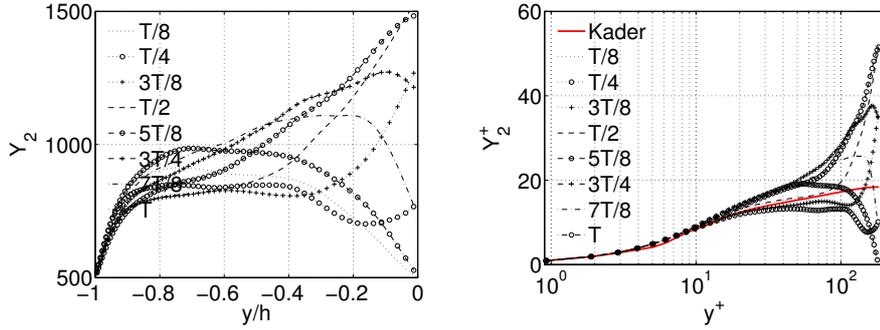


Fig. 13.  $Y_k$  (left) and  $Y_k^+$  (right) profiles, external forcing at  $f = 12500H_z$

Damping along the boundary layer can be highlighted by analysing the Fourier transforms at different heights:  $y^+ = 50, 100$  and  $150$  (Fig. 14 left). In the case of a forcing at  $f = 50000H_z$ , a strong influence is seen at  $y^+ = 150$ , but decreases rapidly. Consequently, the Fourier transform of the wall mass flux (Fig. 15 left) signal do not exhibit a peak at the forcing frequency.

At the opposite, in the case  $f = 12500H_z$ , the influence of the external forcing is seen up to  $y^+ = 50$  (see Fig. 14 right). However, the wall mass flux (Fig. 15 right) remains quite insensitive to the external oscillations, and the Kader's law is still valid at least in the viscous layer.

These results suggest that wall scaling is still representative of the passive scalar behaviour in external forcing case.

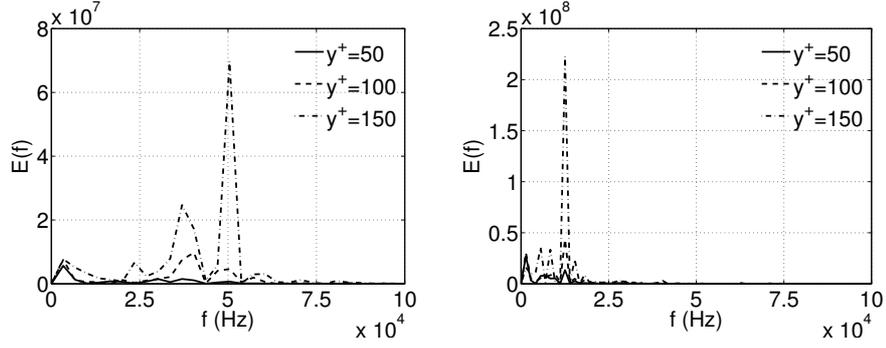


Fig. 14. Fourier transforms of temporal signal  $y^+ = 50, 100$  and  $150$ , external forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

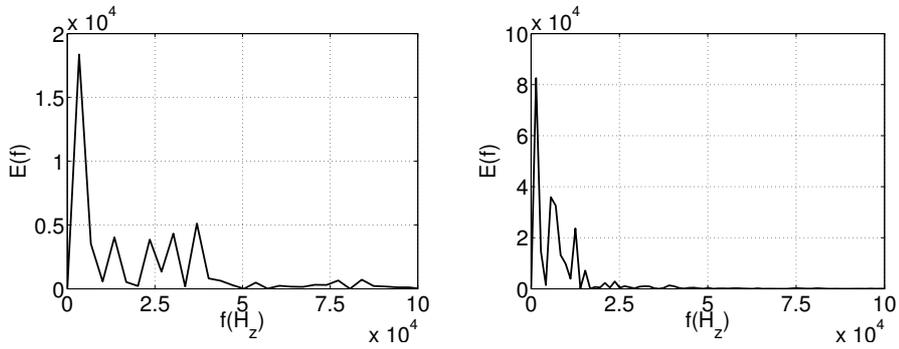


Fig. 15. Fourier transforms of temporal signal  $Y_\tau$ , external forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

#### 4.2.2 Wall condition forcing

Figs. 16 and 17 show that the influence of the wall oscillating condition can be seen in a limited zone near the wall, by analogy with the second Stokes' problem. Its thickness can be quantified so that unsteady effects are shown to be confined in a well-known region. Moreover, dimensionless profiles allow to demonstrate that the Kader's law can no longer be a reference correlation. The scattering of the phaselock averages is due to high variations on the wall mass flux ( $Y_\tau$ ).

Note that results with a lower amplitude (that are not presented here) show that there is a strong scattering of the  $Y_k^+$  profiles around the Kader's

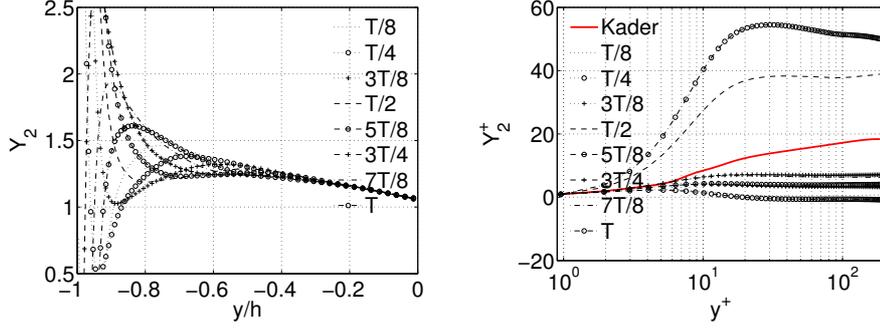


Fig. 16.  $Y_k$  (left) and  $Y_k^+$  (right) profiles, wall forcing at  $f = 50000H_z$

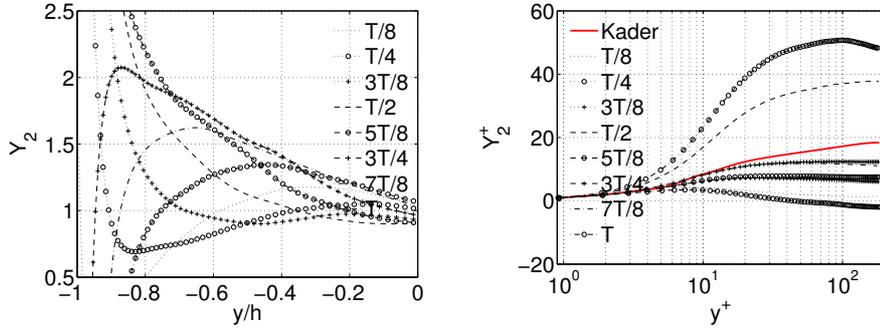


Fig. 17.  $Y_k$  (left) and  $Y_k^+$  (right) profiles, wall forcing at  $f = 12500H_z$

correlation. Hence, unsteady phenomena strongly affect the validity of the Kader's law because of small variations of the wall flux.

Fourier transforms (Fig. 18) at  $y^+ = 50, 100$  and  $150$  show that wall oscillations generate a peak at  $y^+ = 50$ , that is beyond the viscous and buffer layers, and can play a major role in the whole boundary layer.

Therefore, inner scaling is not supported anymore, whereas external value that does not vary too much, seems to be more appropriate to deal with this wall-oscillating configuration.

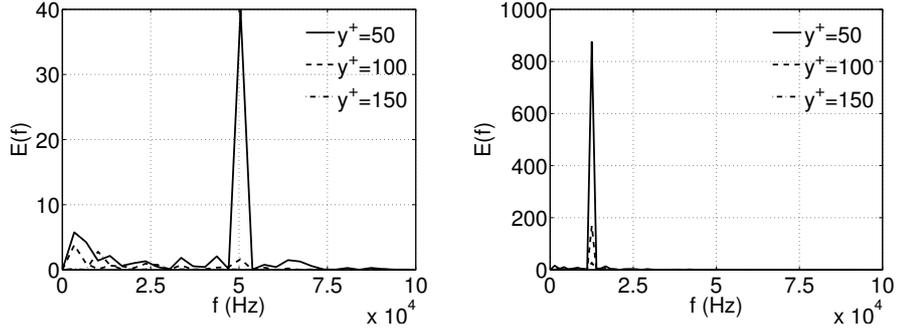


Fig. 18. Fourier transforms of temporal signal  $y^+ = 50, 100$  and  $150$ , wall forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

### 4.3 Dynamic behaviour of wall models in unsteady context

#### 4.3.1 Testing two wall models

The temporal response of the Standard Wall Model (SWM) and the TBLE model submitted to oscillations are investigated in this section.

#### 4.3.2 Off-code testing

**4.3.2.1 Description** The two wall models, SWM and TBLE, have been implemented in the mathematical software Matlab. This approach can be considered as an off-code testing since the models are used independently of a Navier-Stokes solver (i.e. LES solver).

Temporal traces of mass fractions computed by DNS (cf. Section 4.2) are used as boundary conditions for the wall models, as depicted in the Fig. 19. Point A of the DNS configuration corresponds to  $y^+ = 150$  and provides the external boundary condition for the two models. Indeed,  $y^+ = 150$  is a distance from the wall located in a logarithmic layer, and is a typical value for a first off-wall point in a coarse LES computation. Point B is located at

the wall and provides wall condition. Results obtained by the two wall models will be compared to DNS.

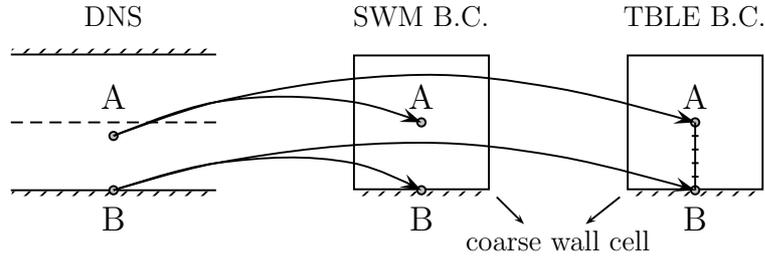


Fig. 19. Sketch of the off-code testing

**4.3.2.2 Results** The following results correspond to both cases of temporal forcing in the DNS, that is imposing oscillations in the outer region or at the wall. In the following,  $Y_\tau^*$  is the instantaneous non-dimensional friction mass fraction  $Y_\tau$  divided by  $(Y_w - Y_{ext})$ .

#### External oscillations

Fig. 20 represents temporal traces of the non-dimensioned wall mass flux obtained from DNS, and from the two wall models SWM and TBLE for two forcing frequencies ( $f = 50000H_z$  and  $f = 12500H_z$ ).

In the high frequency case, DNS shows that external variations have been damped in the logarithmic layer, hence there is no trace of the external forcing in the temporal signal of the wall mass flux. This has been previously shown by analyzing the Fourier transform of this signal (cf. Fig. 14).

The standard wall model (SWM) behaves in another way: external information is directly related to the wall flux so that no damping effect due to the high frequency forcing is observed. Consequently,  $Y_\tau$  has a strong oscillating dynamic, which is not representative of the DNS.

At the opposite, the wall flux obtained by the TBLE model seems to be smoothed, as in the DNS. There is a significant and realistic damping effect, such as the signal of the wall flux is mostly dominated by low frequency phenomena.

A decrease of the forcing frequency does not change the two wall models behaviour: TBLE curves show the same trends as DNS while SWM gives high amplitude changes in the wall mass flux across the time.

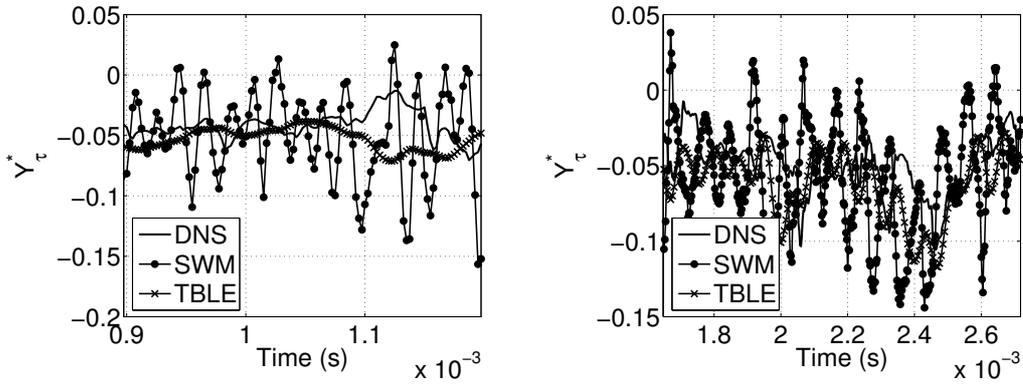


Fig. 20. Temporal signal of  $Y_\tau^*$  from DNS, SWM and TBLE, external forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

### Wall oscillations

In the configuration of wall forcing, each wall model behaves again rather differently.

Fig. 21 shows that SWM and TBLE reproduce oscillations of  $Y_\tau$ , as observed in the DNS.

Nevertheless, there is a significant phase shift between SWM and DNS signals, that exists whatever the forcing frequency. However, one can envisage that this time lag will vanish as the frequency decreases significantly (i.e. the flow tends to a steady state and the wall model is then

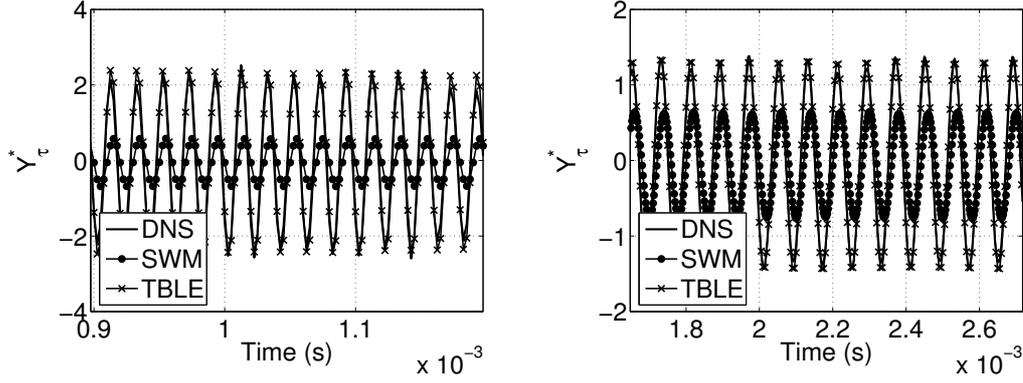


Fig. 21. Temporal signal of  $Y_\tau^*$  from DNS, SWM and TBLE, wall forcing at  $f = 50000H_z$  (left) and  $f = 12500H_z$  (right)

valid). Moreover, the amplitude of the oscillations of the wall mass flux is not accurately reproduced by SWM.

This is not the case for the TBLE results that are exactly in phase with DNS data. Wall mass flux amplitude is precisely captured as well.

Other results, that are not shown here for concision, show that, for lower amplitude forcing, results are roughly the same, that is SWM and TBLE models behave the same way whatever the frequency and amplitude of temporal variations in wall forcing cases.

**4.3.2.3 Discussion** Concerning SWM, investigated cases are obviously far from its validity domain. By consequence, in external forcing case, damping effect can not be taken into account, while in wall forcing, a phase shift is observed compared to DNS. Even if results are better (in amplitude and phase shift) when decreasing the frequency, in both cases the wall mass flux is estimated quite inaccurately.

As far as TBLE is concerned, even if results are not always close to DNS,

same trends are shown in both cases, whatever the forcing frequency. The excellent behaviour in wall variations case can be explained by the fact that the zone of influence of the wall oscillations is restricted to a near-wall region where the turbulent activity is small compared to diffusion and Eq. (24) is a good approximation of the flow physics.

The conclusion of this off-code testing is that TBLE gives more accurate results in terms of wall fluxes, in both cases, and provides good approximation in the wall region for representative unsteady situations, compared to SWM.

## 5 Summary

The TBLE (Thin Boundary Layer Equation) model is assessed for the Large Eddy Simulations of nuclear industry flows. Two main features are tested showing that a Two Layer model, like TBLE, is appropriate to handle such configurations.

Indeed, an adaptation of the TBLE model to variable density flows is proposed and tested successfully, in non-isothermal low Mach number cases. Validation is obtained by recovering the initial TBLE version in quasi-isothermal configuration.

Moreover, a large amount of data has been obtained thanks to the Direct Numerical Simulation of pulsatile passive scalars in a turbulent channel flow and DNS results are used as boundary conditions for two wall models (the standard wall model SWM and the TBLE model) to analyze the dynamic behaviour of wall models when applied in oscillating environment. Off-code

testing of the two wall models yields to the conclusion that a zonal approach (TBLE) gives a better agreement with DNS data, compared to a classical (equilibrium-law based) model (SWM), in terms of instantaneous wall mass flux of passive scalars. This is a consequence of the good accuracy of TBLE in the viscous layer where diffusion processes are dominant. The TBLE model also gives a representation of the damping in the logarithmic and buffer layers, when excitation comes from the outer flow.

### **Acknowledgments**

The authors acknowledge the financial support and scientific expertise from CEA (French Nuclear Energy Agency), by funding the first author's ongoing PhD thesis. The authors are also grateful to CINES for the access to computing resources.

## References

- [1] U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34:349–374, 2002.
- [2] D.R. Chapman. Computational aerodynamics, development and outlook. *AIAA Journal*, 17:1293–1313, 1979.
- [3] A.G. Kravchenko, P. Moin, and R. Moser. Zonal embedded grids for numerical simulations of wall-bounded turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 127:412–423, 1996.
- [4] J.W. Brooke and T.J. Hanratty. Origin of turbulence-producing eddies in a channel flow. *Physics of Fluids A*, 5(4):1011–1022, 1993.
- [5] T. von Kármán. Turbulence and skin friction. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1(1), 1934.
- [6] B.A. Kader. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24(9):1541–1544, 1981.
- [7] E.R. Van Driest. Turbulent boundary layers in compressible fluids. *Journal of Aeronautical Sciences*, 18(3), 1951.
- [8] F. Nicoud and T. Poinsot. DNS of a channel flow with variable properties. In *1<sup>st</sup> International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Santa Barbara, USA, 1999.
- [9] A. Devesa and F. Nicoud. Anisothermal wall functions for RANS and LES of turbulent flows with strong heat transfer. In *ERCOTAC Workshop, Direct and Large-Eddy Simulation 6, Poitiers, France*, pages 1–8, 2005.
- [10] P.G. Huang and G.N. Coleman. Van Driest transformation and compressible wall-bounded flows. *AIAA Journal*, 32(10):2110–2113, 2004.

- [11] E. Balaras, C. Benocci, and U. Piomelli. Two-layer approximate boundary conditions for Large-Eddy Simulations. *AIAA Journal*, 34(6):1111–1119, 1996.
- [12] W. Cabot. *Near-wall models in large-eddy simulations of flow behind a backward-facing step*. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 1996.
- [13] W. Cabot. *Wall models in Large Eddy Simulation of separated flow*. Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 1997.
- [14] W. Cabot and P. Moin. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63:269–291, 2000.
- [15] G.V. Diurno, E. Balaras, and U. Piomelli. *Wall-layer models for LES of separated flows*. In Modern simulation strategies for turbulent flows. Ed. B. Geurts, (Philadelphia, Edwards), 2001.
- [16] W. Wang and P. Moin. Dynamic wall modeling for large-eddy simulation of complex turbulent flows. *Physics of Fluids*, 14(7):2043–2051, 2002.
- [17] Y. Benarafa, O. Cioni, F. Ducros, and P. Sagaut. Temperature wall modelling for Large Eddy Simulation in a heated turbulent plane channel flow. *Submitted to International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006.
- [18] U. Piomelli, J. Ferziger, P. Moin, and J. Kim. New approximate boundary conditions for large-eddy simulations of wall bounded flows. *Physics of Fluids A*, 1(6):1061–1068, 1989.
- [19] F. Nicoud. Conservative high-order finite difference schemes for low-mach number flows. *Journal of Computational Physics*, 158:71–97, 2000.
- [20] W. Wang and R.H. Pletcher. On the large eddy simulation of a turbulent channel flow with significant heat transfer. *Physics of Fluids*, 8(12):3354–3366, 1996.

- [21] H. Kawamura, H. Abe, and K. Shingai. DNS of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions. *Turbulence, Heat and Mass Transfer 3*, edited by Nagano Y., Hanjalic K. and Tsuji T., 2000.
- [22] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177:133–166, 1987.
- [23] S.F. Tardu, G. Binder, and R.F. Blackwelder. Turbulent channel flow with large-amplitude velocity oscillations. *Journal of Fluid Mechanics*, 267:109–151, 1994.
- [24] O. Colin and M. Rudgyard. Development of high-order Taylor-Galerkin schemes for LES. *Journal of Computational Physics*, 162(2):338–371, 2000.

## List of Figures

1	TBLE fine mesh embedded between the wall and the first coarse mesh point	9
2	Computational domain of the DNS [8]	13
3	Friction velocity $U_\tau$ (left) and temperature $T_\tau$ (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 1	15
4	Friction velocity $U_\tau$ (left) and temperature $T_\tau$ (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 2	15
5	Friction velocity $U_\tau$ (left) and temperature $T_\tau$ (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 3	15
6	Friction velocity $U_\tau$ (left) and temperature $T_\tau$ (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 1	19
7	Friction velocity $U_\tau$ (left) and temperature $T_\tau$ (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 2	19
8	Friction velocity $U_\tau$ (left) and temperature $T_\tau$ (right) from 3 wall models dimensionned by DNS values. Case 3	19
9	Turbulent channel flow configuration	21
10	Imposing an oscillating external condition	23
11	Imposing an oscillating wall condition	23

12	$Y_k$ (left) and $Y_k^+$ (right) profiles, external forcing at $f = 50000H_z$	25
13	$Y_k$ (left) and $Y_k^+$ (right) profiles, external forcing at $f = 12500H_z$	25
14	Fourier transforms of temporal signal $y^+ = 50, 100$ and $150$ , external forcing at $f = 50000H_z$ (left) and $f = 12500H_z$ (right)	26
15	Fourier transforms of temporal signal $Y_\tau$ , external forcing at $f = 50000H_z$ (left) and $f = 12500H_z$ (right)	26
16	$Y_k$ (left) and $Y_k^+$ (right) profiles, wall forcing at $f = 50000H_z$	27
17	$Y_k$ (left) and $Y_k^+$ (right) profiles, wall forcing at $f = 12500H_z$	27
18	Fourier transforms of temporal signal $y^+ = 50, 100$ and $150$ , wall forcing at $f = 50000H_z$ (left) and $f = 12500H_z$ (right)	28
19	Sketch of the off-code testing	29
20	Temporal signal of $Y_\tau^*$ from DNS, SWM and TBLE, external forcing at $f = 50000H_z$ (left) and $f = 12500H_z$ (right)	30
21	Temporal signal of $Y_\tau^*$ from DNS, SWM and TBLE, wall forcing at $f = 50000H_z$ (left) and $f = 12500H_z$ (right)	31

## List of Tables

1	Compilation of the three DNS cases	13
---	------------------------------------	----



---

**Résumé en français**

Les écoulements de l'industrie nucléaire sont généralement caractérisés par des nombre de Reynolds élevés, la présence de fortes différences de température, à faibles nombre de Mach ainsi que des phénomènes instationnaires à des fréquences faibles à modérées. Les nombres de Reynolds rendent prohibitifs leur simulation directe (DNS). Deux approches sont donc privilégiées : les simulations moyennées (RANS) et aux grandes échelles (LES), avec l'aide d'un modèle de paroi. Cette thèse présente d'abord la dérivation d'une loi de paroi algébrique prenant en compte les effets de densité variable (CWM), ainsi que l'adaptation d'un modèle à approche zonale pour les écoulements non-isothermes (TBLE- $\rho$ ). Ces modèles, dédiés respectivement aux simulations RANS et à la LES, ont été validés pour les écoulements quasi-isothermes, puis testés sur des configurations académiques et industrielles avec succès. Ensuite, une investigation sur les effets instationnaires dans la modélisation de paroi a été réalisée par DNS d'écoulements de scalaires passifs pulsés temporellement. Deux types de forçage ont été envisagés : par l'écoulement externe ; par la paroi. Plusieurs fréquences et amplitudes ont été explorées, permettant de capturer les effets instationnaires dans la couche limite, et de générer une base de données pour la validation de modèles de paroi dans ce contexte. La réponse dynamique de deux modèles de paroi (algébrique et approche zonale) ont été calculées et montrent qu'un modèle de type approche zonale produit de meilleurs résultats pour la simulation d'écoulements instationnaires.

---

**Titre en anglais**

Wall modeling for the simulation of highly non-isothermal unsteady flows.

---

**Résumé en anglais**

Nuclear industry flows are most of the time characterized by their high Reynolds number, density variations (at low Mach numbers) and a highly unsteady behaviour (low to moderate frequencies). High Reynolds numbers are unaffordable by direct simulation (DNS), and simulations must either be performed by solving averaged equations (RANS), or by solving only the large eddies (LES), both using a wall model. A first investigation of this thesis dealt with the derivation and test of two variable density wall models : an algebraic law (CWM) and a zonal approach dedicated to LES (TBLE- $\rho$ ). These models were validated in quasi-isothermal cases, before being used in academic and industrial non-isothermal flows with satisfactory results. Then, a numerical experiment of pulsed passive scalars was performed by DNS, were two forcing conditions were considered : oscillations are imposed in the outer flow ; oscillations come from the wall. Several frequencies and amplitudes of oscillations were taken into account in order to gain insights in unsteady effects in the boundary layer, and to create a database for validating wall models in such context. The temporal behaviour of two wall models (algebraic and zonal wall models) were studied and showed that a zonal model produced better results when used in the simulation of unsteady flows.

---

**Discipline :** Mathématiques.

---

**Mots clefs :** Modèle de paroi, approche zonale, loi à l'équilibre, écoulement non-isotherme, effets instationnaires, DNS, RANS, LES.

C.E.R.F.A.C.S.

Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique  
42, Avenue G. Coriolis, 31057 TOULOUSE cedex 01