



UNIVERSITE MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THESE de DOCTORAT

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline : Mathématiques et modélisation

Ecole doctorale : I2S (Information, Structures, Systèmes)

Laboratoire d'accueil : CERFACS

Directeur de thèse : Franck Nicoud

présentée et soutenue publiquement

par

Mlle **Elsa GULLAUD**

le 1er décembre 2010

IMPACT DES PLAQUES MULTIPERFOREES SUR L'ACOUSTIQUE DES CHAMBRES DE COMBUSTION AERONAUTIQUES

composition du JURY

S. Ducruix	Professeur Ecole Centrale Paris	Rapporteur
C. Schram	Professeur Von Karman Institute for Fluid Dynamics	Rapporteur
Y. Gervais	Professeur Université de Poitiers	Examineur
S. Roux	Ingénieur à Snecma Villaroche	Examineur
B. Mohammadi	Professeur à l'Université Montpellier II	Examineur
S. Moreau	Professeur à l'Université de Sherbrooke	Examineur
F. Nicoud	Professeur à l'université de Montpellier II	Directeur de Thèse

Résumé : Devant la nécessité de diminuer les émissions polluantes du secteur du transport, les constructeurs de moteurs d'avion se sont tournés vers l'utilisation de régimes pauvres prémélangés. Ces régimes ont pour avantage de diminuer la production de NOx mais l'inconvénient de favoriser les instabilités de combustion dans les moteurs. La simulation numérique (LES¹ et solveurs de Helmholtz par exemple) a fait ses preuves en matière de prédiction des instabilités au stade de la conception des moteurs. Pour aller vers plus de précision, il est nécessaire de prendre en compte les détails géométriques des chambres. Les chambres de combustion sont équipées de plaques multiperforées dans le but d'assurer leur refroidissement. Ces plaques sont constituées d'orifices de diamètre inférieur au millimètre, il est donc impossible de les mailler. L'objectif de cette thèse est d'être capable de prendre en compte les plaques multiperforées dans le calcul des modes acoustiques d'une chambre de combustion. Les plaques sont donc modélisées par un modèle homogène développé par Howe en 1979. Ce modèle simule le comportement d'une plaque multiperforée soumise à une excitation acoustique sous certaines hypothèses. Ce modèle se présente sous la forme d'une impédance acoustique. Il est bien adapté pour être codé dans un solveur de Helmholtz. Le modèle de Howe a été développé dans le cas où les plaques multiperforées sont à l'interface entre deux fluides froids. Le modèle est adapté pour prendre en compte le saut de température entre le contournement et la chambre de combustion. Le codage est ensuite validé en comparant les résultats numériques obtenus avec une résolution analytique sur des configurations simples. Ces premiers résultats sur des cas simples permettent de mettre en évidence le comportement acoustique des plaques multiperforées. Elles ont pour effet d'amortir les modes acoustiques mais l'amortissement dépend des paramètres géométriques des plaques et de la vitesse de l'écoulement traversant les orifices. L'étude des instabilités est ensuite appréhendée par une approche de bilans énergétiques. Les chambres industrielles étant équipées de plusieurs paires de plaques multiperforées, il est intéressant de déterminer quelles plaques sont les plus efficaces. Un bilan d'énergie acoustique permet de calculer le pourcentage effectif d'amortissement auquel contribue chaque plaque. En présence d'une flamme, l'approche par bilans permet d'évaluer la contribution des plaques et de la flamme à l'amortissement ou l'amplification d'une instabilité. Une chambre industrielle équipant un hélicoptère de la société Turbomeca est calculée en utilisant les outils développés dans la thèse. Le calcul du bilan d'énergie en présence d'une flamme et des plaques multiperforées permet de déterminer la stabilité des modes de cette chambre et les éléments responsables de l'évolution de l'instabilité. L'ensemble de ces travaux a été financé par la SNECMA et le modèle pour les plaques multiperforées a été implémenté dans le solveur de Helmholtz AVSP, propriété CERFACS-SNECMA.

Mots clés : Acoustique, Plaques multiperforées, instabilités de combustion.

¹Large Eddy Simulation.

Impact of multiperforated plates on the acoustics of acoustic combustion chambers

Abstract : Aeronautical engine constructors are using lean premixed regimes to deal with the necessity to cut down pollutant emissions. These regimes indeed help to prevent the emission of NO_x but trigger on the other hand combustion instabilities. Numerical simulation (which can consist of LES or Helmholtz solvers for example) has proven to be a usefull tool to predict these instabilities at the design stage. Acoustic modes can be well predicted only if geometrical details are taken into account. Multiperforated plates which equip combustion chambers with the purpose of cooling the inner walls must for instance be taken into account in a numerical calculation. These plates consist of several apertures with a diameter smaller than 1 millimeter, which makes their meshing impossible. The objective of this thesis is to take into account perforated plates in the numerical simulation of the acoustics of combustion chambers. The homogeneous model for the acoustic behaviour of a perforated plate derived by Howe in 1979 is used. Provided some hypotheses, this model can predict the acoustic behaviour of a plate under an acoustic excitation. Howe's model, derived in an incompressible flow, is here adapted to be used in the case where the perforated plate is located between the casing (cold air) of a combustion chamber and the inner chamber (filled with a hot mixture). The model is well suited to be implemented in an existing 3D Helmholtz solver, because it appears under the form of an impedance. The coding is validated by comparing numerical results to analytical results on simple geometries. First results allow to show the damping behaviour of perforated plates and its dependance to geometric parameters or the speed of the incoming flow through the apertures. Acoustic instabilities can also be apprehended with an acoustic energy approach. Since industrial chambers are equipped with several pairs of multiperforated plates, it is interesting to show which of them are the most efficient at damping purposes. An acoustic energy budget allows to predict the percentage of the total damping a particular plate is responsible for. In the presence of a flame, the acoustic energy budget can also give information on the contribution of the flame on the triggering or damping of the instability. An industrial chamber designed by Turbomeca for a helicopter is computed. The acoustic energy budget on a computation taking into account the active flame and the multiperforated plates allows to predict the stability of the modes of the chamber. The elements responsible for the behaviour of the instability can be identified. This work has been funded by SNECMA and the code used to implement the model is AVSP, it co-belongs to CERFACS and SNECMA.

Keywords : Acoustics, Perforated plates, combustion instabilities.

Nomenclature

Grandeurs géométriques

N	=	Nombre de noeuds d'un maillage
\mathbf{n}	=	Vecteur normal unitaire
Ω	=	Domaine de calcul
$\delta\Omega$	=	Bord du domaine de calcul Ω
$\delta\Omega_Z$	=	Bord sur lequel une condition d'impédance est appliquée
$\delta\Omega_W$	=	Bord sur lequel une condition de mur est appliquée
$\delta\Omega_P$	=	Bord sur lequel une condition de pression nulle est appliquée
$\delta\Omega_{MP}$	=	Bord constitué d'une plaque multiperforée
L_c	=	Taille caractéristique du maillage, m
V_{\min}	=	Volume minimal des noeuds d'un maillage, m^3
V_{\max}	=	Volume maximal des noeuds d'un maillage, m^3
He	=	Nombre de Helmholtz $\frac{L_c f}{c_0}$
(r, θ, z)	=	Coordonnées polaires
Ω_{Nj}	=	Volume de la cellule duale autour du noeud j
S_{Nj}	=	Surface de la cellule duale autour du noeud j

Grandeurs thermodynamiques

C_P	=	capacité calorifique à pression constante $J.K^{-1}$
C_V	=	capacité calorifique à volume constant $J.K^{-1}$
γ	=	Coefficient polytropique = $\frac{C_P}{C_V}$
ρ_0	=	Densité, $kg.m^{-3}$
p_0	=	Pression moyenne, Pa
p	=	Pression, Pa
T	=	Température, K
s	=	Entropie
h	=	Enthalpie
e	=	Energie
c_0	=	Vitesse du son, $m.s^{-1}$
ν	=	Viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
μ	=	Viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
Φ	=	Richesse
S_t	=	Nombre de Strouhal $\frac{\omega_r a}{U}$
Re	=	Nombre de Reynolds
t	=	Temps

Grandeurs acoustiques

A,B,C,DO	=	Matrices de taille NxN
P	=	Vecteur de taille N, mode propre de pression
\hat{p}	=	Fluctuation de pression acoustique harmonique
f	=	Fréquence du mode, Hz
$1/f$	=	Période du mode, s
$\hat{\mathbf{u}}$	=	Fluctuation de vitesse acoustique harmonique
p_1	=	Fluctuation de pression acoustique
u_1	=	Fluctuation de vitesse acoustique
e_1	=	Energie acoustique fluctuante
\mathbf{f}_1	=	Flux acoustique
s_1	=	Terme source fluctuant
\bar{E}_1	=	Energie acoustique fluctuante intégrée sur Ω et sur une période T
q_1	=	Fluctuation du taux de dégagement de chaleur
λ	=	Longueur d'onde, m
ω	=	Fréquence angulaire, $rad.s^{-1}$, $= 2\pi f$
$k = \frac{\omega}{c_0}$	=	Nombre d'onde, $rad.m^{-1}$
ω_r	=	Partie réelle de ω , $rad.s^{-1}$
ω_i	=	Partie imaginaire de ω , $rad.s^{-1}$
Z	=	Impédance complexe, $N.s.m^{-3}$
Z_0	=	Impédance complexe réduite $\frac{Z}{\rho_0 c_0}$
Y	=	Admittance complexe $\frac{1}{Z}$
R	=	Résistance $Re(Z)$
X	=	Réactance $Im(Z)$

Plaques multiperforées

a	=	Rayon des perforations, m
d	=	Distance inter-orifice, m
h	=	Epaisseur de la plaque, m
N_t	=	Nombre d'orifices
\hat{p}^-	=	Fluctuation de pression acoustique amont
\hat{p}^+	=	Fluctuation de pression acoustique aval
ρ^-	=	Masse volumique du fluide amont (froid), $kg.m^{-3}$
ρ^+	=	Masse volumique du fluide aval (chaud), $kg.m^{-3}$

σ	=	Porosité
σ_j	=	Facteur de contraction du jet (<i>vena contracta</i>)
U	=	Vitesse de l'écoulement incident, $m.s^{-1}$
U_g	=	Vitesse de l'écoulement tangentiel $m.s^{-1}$
U_{md}	=	Vitesse d'absorption maximale, $m.s^{-1}$
G	=	Débit de l'écoulement à travers une plaque perforée, $kg.m^{-3}$
\hat{G}	=	Débit fluctuant à travers une plaque perforée, $kg.m^{-3}$
S_b	=	Surface brute d'une plaque perforée, m^2
S_{tot}	=	Surface totale d'une plaque perforée, m^2
S_{perf}	=	Surface perforée d'une plaque perforée, m^2
K_a	=	Conductivité de Rayleigh, m^{-1}
K_0	=	Conductivité de Rayleigh à haute vitesse = $2a$, m^{-1}
Γ_a	=	$Re(K_a/2a)$
Δ_a	=	$-Im(K_a/2a)$
N_{MP}	=	Nombre de noeuds sur une plaque perforée
z_{MP}	=	Impédance d'une plaque perforée
R_{MP}	=	Résistance d'une plaque perforée
X_{MP}	=	Réactance d'une plaque perforée
h_{moy}	=	Valeur moyenne de la taille de maille $\sqrt{\frac{S_{tot}}{N_{MP}}}$ m

Flamme

$\mathcal{F}(\omega)$	=	Fonction de transfert de flamme
$\mathcal{A}(\omega)$	=	Gain
Φ	=	Phase
\hat{Q}	=	Taux de dégagement de chaleur global
\hat{q}	=	Taux de dégagement de chaleur local
U_b	=	Vitesse moyenne de l'écoulement $m.s^{-1}$
S_{ref}	=	Surface de référence dans l'injecteur m^2
n_u	=	Coefficient d'amplification relatif à la vitesse
τ_u	=	Temps de retard s
\mathbf{n}_{ref}	=	Vecteur normal unitaire à la surface de référence
\mathbf{x}_{ref}	=	Coordonnées du point de référence
V_{flamme}	=	Volume de la flamme
l_{flamme}	=	Longueur de la flamme
S_w	=	Nombre de Swirl

Conventions

∇z	=	Gradient spatial de z
$\nabla \cdot z$	=	Divergence de z
i	=	Nombre complexe imaginaire (0, 1)
$Im()$	=	Partie imaginaire
$Re()$	=	Partie réelle
$()^*$	=	Complexe conjugué
$()'$	=	Dérivée
$()^t$	=	Transposée
δ_{ij}	=	Symbolde de Kroenecker, 1 si $i = j$ 0 sinon
$\frac{D}{Dt}$	=	Dérivée particulaire = $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \cdot$

Indices

0	=	indice indiquant une quantité moyenne
1	=	Quantité fluctuante

Exposants

$+$	=	Valeur d'une quantité avale
$-$	=	Valeur d'une quantité amont

Notations

$1L$	=	Premier mode longitudinal
$2L$	=	Deuxième mode longitudinal
$1A$	=	Premier mode azimuthal
$2A$	=	Second mode azimuthal
LP	=	Lean Premixed
MP	=	Plaques multiperforées
FR	=	Films de refroidissement
TP	=	Trous Primaires
FTF	=	Fonction de Transfert de Flamme
FDF	=	<i>Flame Describing Function</i>
MHM	=	<i>Modèle de Howe modifié</i>

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Contexte environnemental et industriel	1
1.2	Les turboréacteurs	2
1.2.1	Fonctionnement global	2
1.2.2	Techniques de refroidissement dans les configurations industrielles	4
1.3	Les instabilités de combustion	9
1.4	Les techniques de contrôle	12
1.4.1	Le contrôle actif	12
1.4.2	Le contrôle passif	12
1.5	Les méthodes numériques d'étude des instabilités thermoacoustiques	13
1.6	Objectif de la thèse et plan du mémoire	15
2	Des équations de l'acoustique au solveur de Helmholtz AVSP	19
2.1	L'approximation linéaire en acoustique	19
2.2	Les équations de l'acoustique : de Navier-Stokes à l'équation d'onde	20
2.3	Le solveur de Helmholtz AVSP	23
2.4	Les conditions limites acoustiques existantes dans AVSP	24
2.5	De l'équation de Helmholtz à un problème aux valeurs propres	25
2.5.1	Calcul de l'opérateur $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p} _j$ pour un noeud j à l'intérieur du domaine	25
2.5.2	Calcul de l'opérateur $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p} _j$ pour un noeud j sur le bord du domaine	26
2.5.3	Resolution du problème aux valeurs propres par la méthode itérative d'Arnoldi	30
2.6	Modélisation du terme source dans le solveur de Helmholtz et validation expérimentale	31
2.6.1	Modélisation du terme source par le modèle $n - \tau$	31
2.6.2	Mesure expérimentale d'une fonction de transfert de flamme	32
3	Prise en compte des plaques multiperforées dans un solveur de Helmholtz	41
3.1	Modèles acoustiques	42
3.2	Implémentation du modèle pour les plaques perforées dans un solveur de Helmholtz	54
3.2.1	Implémentation du modèle de Howe pour le cas isotherme	54
3.2.2	Implémentation du modèle de Howe pour le cas anisotherme	57
3.2.3	Modification des sources du code	58
3.3	Discrétisation de l'équation de Helmholtz dans le cas d'une MP.	59
3.4	Validation du codage dans le cas d'un champ moyen uniforme	60
3.4.1	Présentation du cas	60

3.4.2	Résultats et comparaison avec AVSP	62
3.5	Validation du codage avec un champ avec un saut de température	65
3.6	Influence de la vitesse du <i>bias flow</i>	68
3.7	Comportements limites	72
3.8	Épaisseur de plaque	73
3.9	Conclusion	74
4	Etude des modes thermoacoustiques par une approche de bilans énergétiques	75
4.1	Equation de bilan d'énergie acoustique	75
4.1.1	Equation de bilan	75
4.1.2	Expression du flux en fonction des conditions limites	77
4.2	Intégration des termes de flux acoustique dans AVSP	78
4.2.1	Relation entre flux acoustique et admittance	78
4.2.2	Relation entre flux acoustique et saut de pression à travers une paroi multiperforée	80
4.2.3	Bilan d'énergie acoustique avec terme source	83
4.3	Résultats et validations sur des cas simples	83
4.3.1	Condition limite d'impédance	83
4.3.2	Cas 3D parallélépipédique avec condition de plaque perforée	86
4.3.3	Cas 3D cylindrique avec condition de plaque perforée	90
5	Etude thermoacoustique d'une chambre industrielle d'hélicoptère	91
5.1	Description de la chambre	91
5.2	Méthodologie d'un calcul sur chambre de combustion industrielle	93
5.2.1	Champ moyen et conditions limites	93
5.2.2	Paramètres géométriques et hydrodynamiques des plaques perforées	94
5.2.3	Choix du maillage	95
5.3	Calcul des modes longitudinaux sur un secteur	102
5.3.1	Répartition de la fluctuation de pression	102
5.3.2	Etude sur la vitesse du <i>bias flow</i>	102
5.4	Bilans acoustiques	105
5.4.1	Mode 1L	105
5.4.2	Bilan acoustique sur le mode 2L	107
5.5	Calculs sur la chambre complète : modes azimutaux	109
5.6	Impact de l'épaisseur de la plaque	112
5.7	Impact des films de refroidissement	114
5.7.1	Bilans acoustiques sur la chambre avec films de refroidissement (FR) et plaques multiperforées et (MP)	115
5.8	Calcul avec fonction de transfert de flamme	118
5.8.1	Calcul de la fonction de transfert de flamme avec AVBP	118
5.8.2	Calculs avec bilans acoustiques	119
	Conclusion générale	123

Bibliographie	125
Annexe A : Détails sur l'implémentation du modèle de Howe dans AVSP	133
Annexe B : Publications	137

Introduction générale

Sommaire

1.1	Contexte environnemental et industriel	1
1.2	Les turboréacteurs	2
1.2.1	Fonctionnement global	2
1.2.2	Techniques de refroidissement dans les configurations industrielles	4
1.3	Les instabilités de combustion	9
1.4	Les techniques de contrôle	12
1.4.1	Le contrôle actif	12
1.4.2	Le contrôle passif	12
1.5	Les méthodes numériques d'étude des instabilités thermoacoustiques	13
1.6	Objectif de la thèse et plan du mémoire	15

Ce chapitre d'introduction vise à présenter la problématique générale associée à cette thèse. La section 1.1 commence par une discussion générale sur la naissance du problème des instabilités de combustion. Elles sont en quelque sorte un dommage collatéral de la volonté de réduire les émissions polluantes. Cette thèse s'intéressant plus particulièrement à l'étude des instabilités thermoacoustiques dans les chambres de combustion aéronautiques, le principe de fonctionnement d'un turboréacteur est décrit dans la section 1.2. Les techniques de refroidissement utilisées dans ce type de chambre sont aussi présentées et le concept de plaques multiperforées est introduit. La section 1.3 explique ensuite le développement des instabilités dans les moteurs et les moyens actuels pour tenter de les contrôler : le contrôle actif puis le contrôle passif. Une des techniques de contrôle passif consiste en l'utilisation de plaques multiperforées. Le rôle de la simulation numérique dans l'appréhension du problème des instabilités thermoacoustiques fait l'objet de la section 1.5.

1.1 Contexte environnemental et industriel

L'urgente nécessité de réduire les émissions polluantes générées par l'activité humaine est devenue une préoccupation internationale [85]. Le secteur aéronautique est directement concerné par ce problème. La combustion, qui est le mécanisme à la base du fonctionnement des turbines à gaz, produit de nombreux polluants. Elle contribue à augmenter le CO_2 (gaz à effet de serre) mais aussi d'autres gaz nocifs pour l'environnement tels que les monoxydes

de carbone (CO), les oxydes d'azote (NOx) et les hydrocarbures imbrûlés (UHC). Les constructeurs cherchent à réduire en priorité le NOx dont le taux de production est fonction de la température et du temps de résidence dans la chambre [50]. Sa production est liée à la température de la zone primaire. La croissance des émissions y est exponentielle au-delà de 1850K, car des températures élevées favorisent l'oxydation du di-azote dans l'air. Il est alors la source majeure du NOx produit. L'objectif fixé par l'ACARE¹ prévoit de réduire de 50% les émissions de CO₂ et de 80% les NOx à l'horizon 2020.

De nombreux projets voient le jour chez les industriels pour aider à la réalisation de ces objectifs. Du côté de SAFRAN, on peut citer les projets CLEAN SKY, VITAL, INCA² ou QUIET³. Les constructeurs de turbines à gaz réagissent en effet en tentant d'élaborer des technologies novatrices, efficaces en terme de réduction de polluants, mais qui rendent les moteurs plus vulnérables aux instabilités thermoacoustiques. Les constructeurs se tournent vers un régime de fonctionnement à basse température et faible richesse qu'on appelle le régime pauvre prémélangé (Lean Premixed Prevaporized -LPP- pour les carburants liquides) ou LP (Lean Premixed pour les carburants gazeux).

1.2 Les turboréacteurs

1.2.1 Fonctionnement global

On s'intéresse ici au principe de fonctionnement des turboréacteurs. Un turboréacteur se divise en plusieurs parties. L'entrée d'air (ou soufflante) admet l'air ambiant dans le moteur. Cet air est ensuite comprimé (parfois en plusieurs étages) par un compresseur axial ou centrifuge. L'air arrive dans la chambre de combustion par le diffuseur. La chambre de combustion représentée sur la figure 1.1 est annulaire. Ce type de chambre de combustion est constitué d'un foyer (ou tube à flamme) en forme de tore. Le tube à flamme est entouré par un carter également de forme torique.

La figure 1.2 montre la représentation schématique d'un secteur de chambre annulaire. La chambre de combustion est destinée à chauffer l'air qui sort du dernier étage de compresseur haute pression afin de lui apporter l'énergie nécessaire à entraîner les turbines. Cet apport de chaleur se fait par combustion de l'oxygène de l'air avec un carburant. Une partie de l'air amené par le diffuseur en sortie des compresseurs débouche dans les vrilles de l'injecteur qui est chargé de mettre l'écoulement d'air en rotation. L'injecteur est constitué d'un tourbillonneur dont les vrilles vont créer un tourbillon permettant d'assurer un mélange optimal air/carburant. Une zone de recirculation en sortie d'injecteur créée par effet centrifuge permet de stabiliser la flamme. En parallèle de ce premier circuit d'air, un second alimente l'extérieur du foyer dans le contournement (Fig. 1.2). Cet air va pénétrer dans la chambre par différents orifices que sont les trous primaires, les trous de dilution et les parois multiperforées.

¹Conseil consultatif pour la recherche aéronautique en Europe.

²INitiative en Combustion Avancée.

³Quantification of Instability and noise in Turbines.

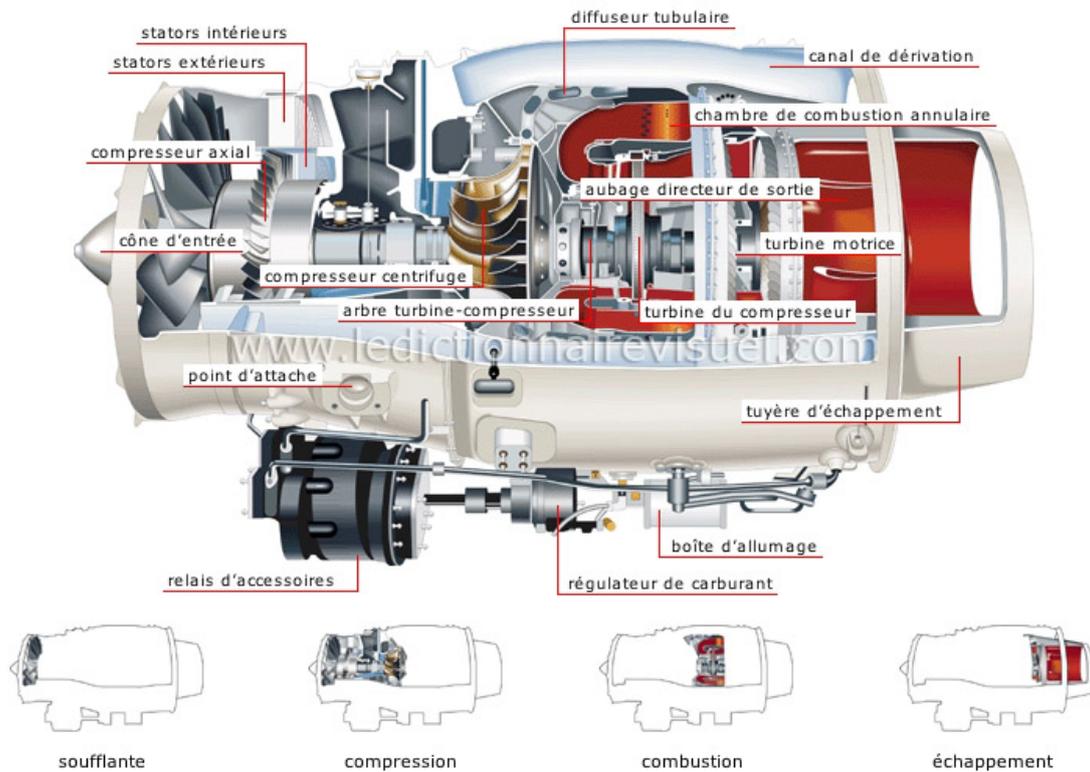


FIG. 1.1 – Moteur typique d’avion avec chambre de combustion annulaire.

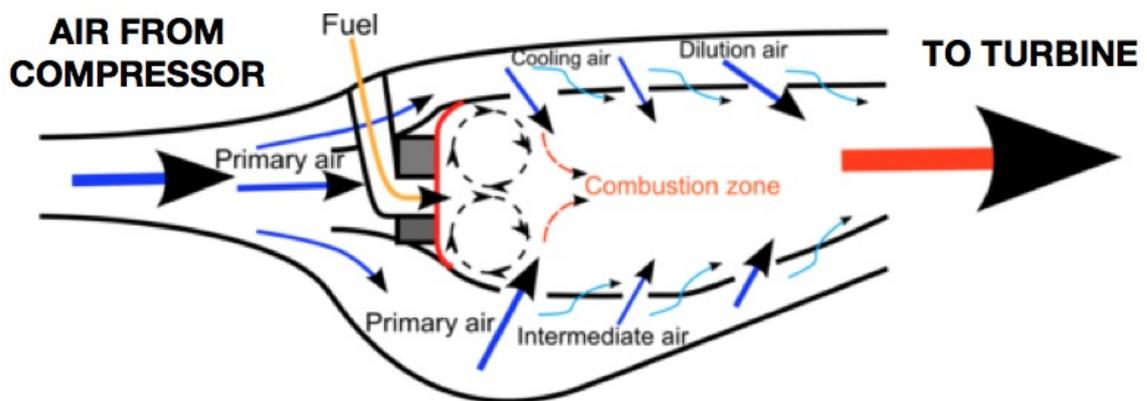


FIG. 1.2 – Représentation schématique de la coupe d’une chambre de combustion annulaire.

Le tube à flamme est divisé en plusieurs zones :

- la *zone primaire* est délimitée dans la direction longitudinale par les trous primaires. Son rôle est d'assurer la stabilisation de la flamme et le mélange. L'air amené par les trous primaires aide au mélange air/carburant.
- la *zone secondaire* a pour rôle d'assurer que le maximum de carburant soit brûlé.
- la température des gaz issus de la combustion est extrêmement élevée et inacceptable pour la bonne tenue des matériaux des parois de la chambre et de la turbine. Le rôle de la *zone de dilution* est d'homogénéiser la carte de température en sortie de la chambre et de refroidir l'écoulement en utilisant l'air froid amené par les trous de dilution.

1.2.2 Techniques de refroidissement dans les configurations industrielles

Au cours des cinquante dernières années, par souci d'augmentation du rendement des chambres, la pression des régimes de fonctionnement a beaucoup augmenté. La température de sortie de l'air a donc elle aussi augmenté. La température d'entrée de l'air des chambres s'élève aujourd'hui à plus de 1800 K contre 1100 K il y a une cinquantaine d'années. Augmenter ainsi la température d'entrée des gaz dans les chambres a eu plusieurs conséquences.

- La température de la flamme a augmenté : les parois du tube à flamme où se passe la réaction de combustion doivent donc être capables de supporter non seulement une différence de pression importante mais aussi de très hautes températures.
- La température de l'air ayant augmenté, il est moins efficace en matière de refroidissement. Il est impossible technologiquement de continuer à augmenter la quantité d'air qui sert à assurer le refroidissement car il n'y aurait plus assez d'air pour assurer la réaction de combustion ainsi que l'alimentation de la zone de dilution.
- Opérer en régime LP nécessite d'alimenter plus d'air dans le processus de combustion pour que celle-ci soit pauvre. Une quantité moins importante d'air est donc disponible pour le refroidissement, ce qui implique d'améliorer les techniques.

Pourtant, la durée de vie des moteurs a elle aussi augmenté en passant de plusieurs centaines d'heures à quelques milliers d'heures. Pour rendre les chambres plus résistantes à des températures de fonctionnement de plus en plus élevées tout en augmentant leur durée de vie, il a fallu relever quelques défis technologiques. Des efforts ont été faits quant à l'amélioration des techniques de refroidissement décrites ci-après.

Plusieurs techniques de refroidissement existent [50] :

- Le refroidissement par *transpiration* :

Dans cette technique qui serait la solution idéale en matière de refroidissement, la plaque refroidissante est constituée d'un matériau poreux (Fig. 1.3). Les pores sont disposés de manière uniforme sur la surface de la paroi, ce qui favorise la coalescence des jets émergents pour constituer un film protecteur. Les matériaux poreux se sont

cependant révélés pas suffisamment résistants à l'oxydation qui conduit au blocage des orifices.

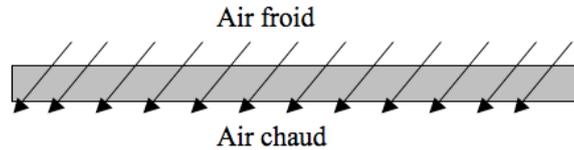


FIG. 1.3 – Refroidissement par transpiration au travers d'un matériau poreux.

- Le refroidissement par *effusion* ou FCFC (Full Coverage Film Cooling) :

Une bonne alternative au refroidissement par transpiration est le refroidissement par effusion. Pour se rapprocher le plus possible d'un matériau poreux, le principe est de percer un agencement régulier de perforations de diamètre inférieur au millimètre à travers lesquelles un saut de pression force le passage de l'écoulement froid du contournement vers la chambre. Les plaques ainsi obtenues sont appelées plaques multiperforées (MP). Les MP doivent résister à de hautes températures, à la corrosion et à l'oxydation, et dans le cas des systèmes embarqués, respecter un faible poids. Ce critère de poids ne s'applique pas dans le cas des fours industriels par exemple.

Paramètres caractéristiques d'une plaque multiperforée

Une plaque multiperforée est caractérisée par plusieurs paramètres géométriques, mais aussi hydrodynamiques :

- le rayon des perforations, noté a
- la distance inter-orifice, notée d
- la vitesse de l'écoulement dans la direction de la perforation, notée U
- La forme des trous

En général les perforations d'une plaque perforée sont cylindriques. Dans un contexte industriel, les trous ne sont pas exactement cylindriques à cause du manque de précision des techniques de perçage qui s'effectue le plus souvent par laser.
- La taille des trous

La taille des trous doit être la plus petite possible pour limiter la pénétration des jets dans l'écoulement principal, mais cependant le diamètre doit être suffisant pour éviter tout problème d'obstruction des orifices par des gouttelettes de carburant [50].
- L'arrangement des trous

Deux types d'arrangement sont utilisés, en ligne ou en quinconce. Dans ce dernier cas les perforations d'une rangée n sont placées à mi distance transverse par rapport aux rangées $n - 1$ et $n + 1$ (Fig. 1.4). Dans le cas d'un

arrangement en ligne, la distance inter-orifice d se définit facilement. Dans le cas d'un arrangement en quinconce, deux distances inter-orifices peuvent être définies (d_1 et d_2 sur Fig. 1.4).

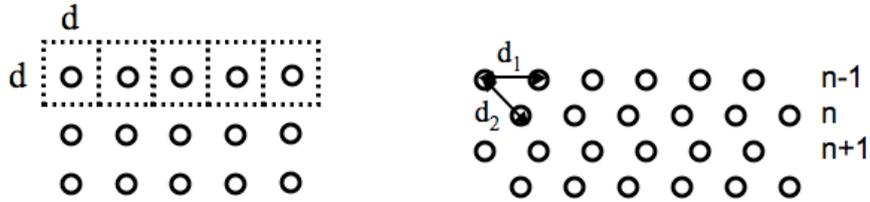


FIG. 1.4 – Arrangement en ligne (à gauche) et arrangement en quinconce (à droite).

- L'angle de perçage

Les trous peuvent être percés normalement à la paroi, mais le plus souvent ils sont inclinés. La technique de refroidissement lorsque les trous sont percés avec un angle prend le nom de *Angled Effusion Cooling*. Lorsque les trous sont percés perpendiculairement, les jets issus des perforations pénètrent fortement dans l'écoulement principal et se mélangent aux gaz brûlés mais ne participent pas à la formation du film protecteur [50]. L'inclinaison permet de limiter cet effet de pénétration (Fig. 1.5).

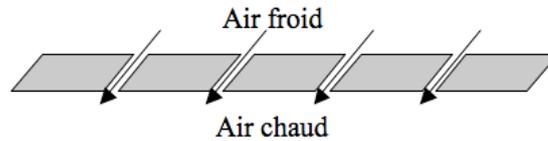


FIG. 1.5 – *Effusion inclinée.*

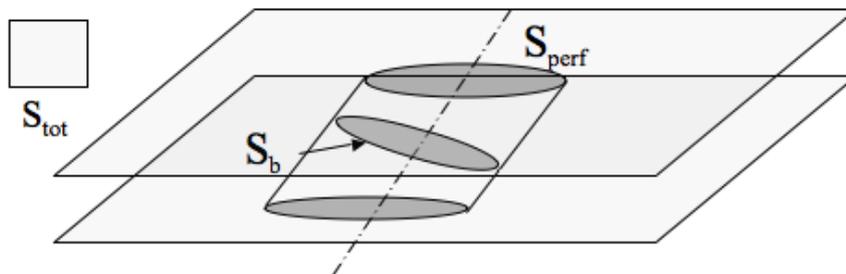


FIG. 1.6 – Définition de la surface brute et de la surface perforée.

La figure 1.6 montre la distinction à faire entre la surface perforée S_{perf} qui correspond à la surface percée sur la plaque et la surface brute S_b qui est la

surface du cylindre dans l'axe de la perforation. Ces deux quantités deviennent identiques dans le cas d'une perforation normale à la MP.

- La porosité

Pour un nombre N_t de trous sur une plaque, la porosité σ est définie comme le rapport de la surface percée et de la surface totale de la plaque :

$$\sigma = \frac{S_{\text{perf}}}{S_{\text{tot}}} \quad (1.1)$$

La figure 1.4 montre que la surface totale S_{tot} de la plaque perforée peut s'exprimer comme $N_t d^2$. On peut alors définir la porosité par rapport à la normale aux perforations σ_b comme

$$\sigma_b = \frac{N_t \pi a^2}{N_t d^2} = \frac{S_b}{S_{\text{tot}}}. \quad (1.2)$$

On en déduit donc une formule pour la distance inter-orifices.

$$d = \sqrt{\frac{S_{\text{tot}} \pi a^2}{S_b}}. \quad (1.3)$$

- L'écoulement

Les plaques perforées peuvent être soumises à l'un ou l'autre de deux écoulements, ou bien les deux : l'écoulement à travers les trous (*bias flow*) et l'écoulement transverse à la direction des perforations (*grazing flow*). La figure 1.7 montre les deux types d'écoulement existants autour d'une plaque perforée : l'écoulement dans la direction de la perforation a une vitesse U , et l'écoulement tangent à la paroi une vitesse U_g .

La configuration qui se rapproche le plus de la situation réelle est celle d'une perforation soumise aux deux types d'écoulement. Dans ce cas, le *grazing flow* correspond à l'écoulement du contournement et le *bias flow* l'écoulement qui pénètre les trous dans l'axe de la perforation.

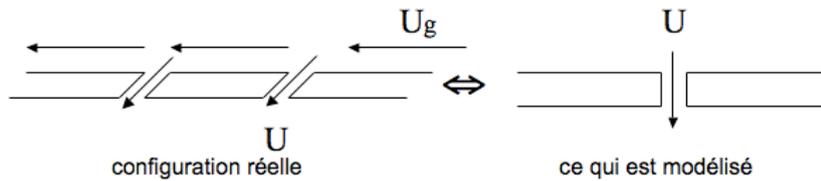


FIG. 1.7 – Définition de l'écoulement normal et l'écoulement rasant.

L'ensemble des micro-jets traversant ces orifices va alors former un film protecteur pour abaisser la température des murs de la chambre. Chaque plaque perforée est constituée d'environ une dizaine de rangées. Le film protecteur qui se développe le

long d'une plaque multiperforée peut être divisé en plusieurs parties. Les premières rangées correspondent à une zone dite d'attaque, et la structure du film s'établit au bout de 5 ou 6 rangées. Le film persiste ensuite au-delà de la zone multiperforée, dans la zone dite de recouvrement comme montré sur la figure 1.8.

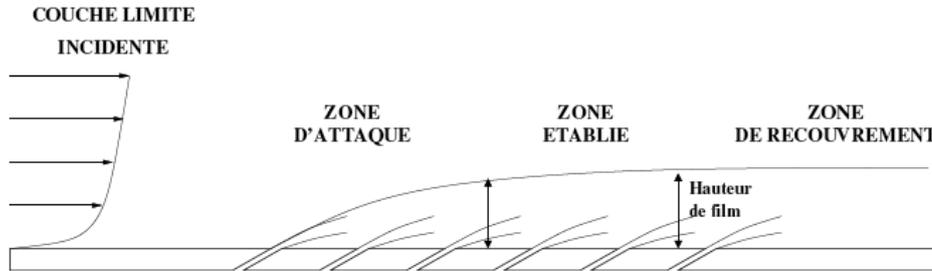


FIG. 1.8 – Etablissement d'un film protecteur sur plaque perforée, d'après Mendez [59].

– Les films de refroidissement

En plus du refroidissement par plaques perforées, le refroidissement par films est également utilisé dans les zones les plus exposées ou en amont des zones multiperforées, le maximum du refroidissement pour la multiperforation seule n'étant atteinte qu'au bout de plusieurs rangées. Le concept de film de refroidissement se rapproche de celui d'une plaque multiperforée. Un film est constitué d'un nombre moins important de rangées que les MP. Les diamètres des perforations sont plus élevés. Les jets sont introduits axialement et non inclinés comme pour les MP. La figure 1.9 montre la paroi extérieure d'une chambre de combustion d'hélicoptère de Turbomeca. Les plaques perforées (MP), les trous primaires (TP) et les films de refroidissement (FR) y sont visibles.

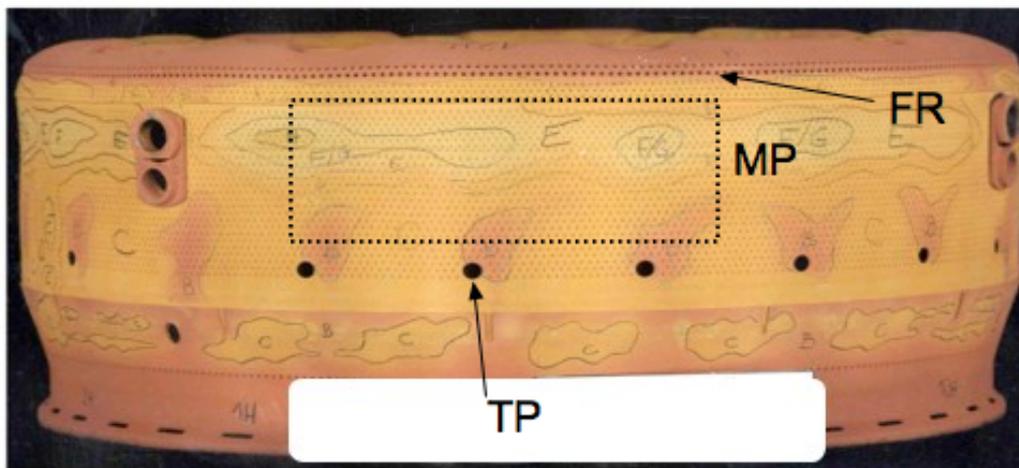


FIG. 1.9 – Vue extérieure d'une chambre de combustion annulaire de Turbomeca. FR : films de refroidissement, MP : plaques multiperforées, TP : trous primaires.

Un procédé particulier qui nous intéresse car il est utilisé dans la chambre industrielle cible calculée dans cette thèse, est le refroidissement par jet impactant représenté sur la figure 1.10. L'air froid amené par les perforations impacte sur une paroi appelée déflecteur attachée à la paroi par soudure ou rivets. Son rôle est de guider l'écoulement froid et de fournir un espace où les différents jets issus des perforations peuvent coalescer pour former une couche homogène protectrice.

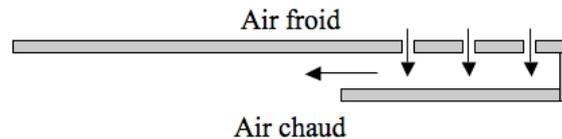


FIG. 1.10 – Refroidissement par jet impactant.

1.3 Les instabilités de combustion

Toute chambre de combustion a des modes propres acoustiques qui peuvent être excités par la combustion et les chambres de combustion des moteurs d'avions et d'hélicoptères ne sont pas une exception à ce phénomène [75]. Il concerne aussi les moteurs fusées [12, 10] ou les fours industriels [78]. Dans une chambre de combustion industrielle, l'écoulement généralement turbulent induit une fluctuation du taux de dégagement de chaleur, qui, couplée aux ondes acoustiques se propageant dans la chambre, peut entraîner des effets dévastateurs.

Le régime de fonctionnement des chambres évoqué dans la Section 1.1 consiste à injecter dans la zone de combustion un mélange totalement homogène de carburant et d'air de manière à pouvoir opérer près de la limite d'extinction pauvre de la flamme, température où la production de NOx est minimale. L'inconvénient majeur de ce régime de fonctionnement est qu'il présente un risque accru de générer des instabilités thermoacoustiques. En effet une température de flamme plus basse induit une interaction plus forte avec les parois et peut poser des problèmes d'accrochage de la flamme. Les flammes très pauvres sont souvent proches de l'extinction (ou limite de flammabilité). La vitesse de flamme étant très réduite à faible richesse, la marge de stabilité est diminuée et la dynamique de la flamme est très instationnaire.

Les instabilités de combustion naissent d'un couplage entre les fluctuations de pression et les fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Les phénomènes identifiés aujourd'hui à l'origine des instabilités thermoacoustiques sont listés ci-dessous [33, 20].

- Les oscillations de pression dans la chambre remontent dans les lignes d'injection de carburant, ce qui entraîne une fluctuation dans l'injection de carburant, donc une fluctuation du taux de dégagement de chaleur. Lamraoui et al ont proposé de prendre en compte ce phénomène par des impédances adaptées [45].

- Le front de flamme répond aux fluctuations de vitesse : avec un délai temporel, la surface, la position et la forme de la flamme varient, en réponse à une fluctuation de vitesse dans l'injecteur.
- Les fluctuations de richesse : elles peuvent être générées par des fluctuations du débit d'air dans l'injecteur. Ces inhomogénéités sont convectées vers la flamme et peuvent ainsi modifier les ondes entropiques (la position des poches de gaz brûlés), la vitesse de la flamme ou sa position.
- Les structures turbulentes : des structures tourbillonnaires de grande échelle peuvent naître dans les zones de grand changement de section. Ces structures vont entraîner des zones de gaz chauds, qui vont alors modifier le dégagement de chaleur. Les structures tourbillonnaires peuvent aussi impacter sur la structure du front de flamme.
- L'interaction de la flamme avec les parois avoisinantes [20] peut aussi s'avérer suffisante pour générer des fluctuations du taux de dégagement de chaleur.

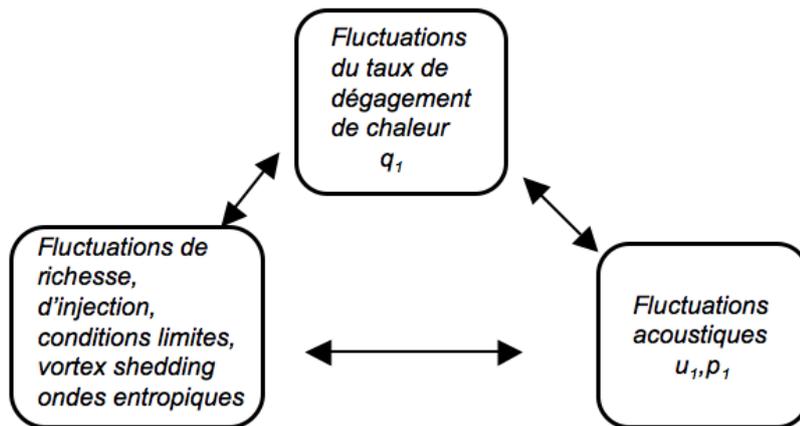


FIG. 1.11 – Boucle auto-entretenue à l'origine du déclenchement des instabilités thermoacoustiques.

En impactant sur la structure de la flamme, ces phénomènes conduisent à une fluctuation du taux de dégagement de chaleur. La flamme se comporte donc comme une source volumique qui génère des fluctuations acoustiques de pression et de vitesse. Ces ondes fluctuantes de pression et de vitesse vont se propager dans la chambre, et se réfléchir sur les parois. L'amplitude et le déphasage éventuel des ondes réfléchies sont déterminés par les conditions limites acoustiques. Ces ondes vont donc générer de nouvelles fluctuations qui vont ensuite impacter à nouveau sur la flamme. C'est alors que ce phénomène devient une boucle auto-entretenue (Fig. 1.11). Le mouvement de la flamme peut aller jusqu'au retour de flamme (*flashback*) dans le système d'injection ou induire une extinction. Les vibrations engendrées peuvent endommager le système directement, ou bien entraîner une

fatigue des matériaux qui sera un préjudice à la longévité du système. La figure 1.12 montre un injecteur de fusée détérioré par une remontée de flamme.



FIG. 1.12 – Injecteur de fusée, Nasa (1957).

Le phénomène des instabilités de combustion a été découvert par Higgins en 1777 et était alors connu sous le nom de "flamme chantante". Rayleigh [79] a énoncé pour la première fois en 1878 un principe sur le déclenchement des instabilités : si les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et les fluctuations de pression (i.e. l'acoustique) sont en phase, la boucle représentée sur la figure 1.11 devient auto-entretenu. Ce critère s'exprime mathématiquement sous la forme suivante, si on considère un système de volume Ω soumis à une excitation acoustique de période T :

$$\frac{1}{T} \int_{\Omega} p_1 \dot{q}_1 d\Omega dt > 0. \quad (1.4)$$

p_1 est la fluctuation de la pression acoustique et \dot{q}_1 la fluctuation du taux de dégagement de chaleur. Ce critère est une condition nécessaire mais non suffisante au déclenchement des instabilités. En effet ce terme doit excéder les flux acoustiques pour qu'une instabilité s'installe. Il est donc nécessaire d'effectuer un bilan complet d'énergie acoustique sur le domaine, ce qui sera expliqué au chapitre 4). Cette approche par bilans acoustiques est de plus en plus utilisée pour l'étude des instabilités de combustion [21, 25, 36, 37, 67, 97].

En général, les instabilités thermoacoustiques vont exciter les modes propres de la chambre. Les oscillations peuvent être de nature diverse : longitudinales (dans la longueur de la chambre), radiales (dans la direction transverse à l'écoulement). Certains modes dits couplés se développent dans les deux directions.

Pour déterminer si une instabilité est auto-entretenu, il faut prendre en compte aussi les phénomènes dissipatifs présents dans les chambres, à savoir :

- par transfert de chaleur ou par frottement visqueux [88] : on distingue l'amortissement dans les couches limites et l'amortissement dû au *vortex shedding*, ce qui sera

étudié plus en détail dans le chapitre 3.

- par convection ou radiation : les conditions limites peuvent générer des fuites acoustiques, c'est-à-dire une perte d'énergie acoustique. Ce comportement est modélisé par un coefficient de réflexion de module inférieur à 1 : l'onde est réfléchie en partie.

Les instabilités thermoacoustiques sont difficiles à prévoir car elles naissent souvent uniquement pendant les phases de test à échelle 1 incluant la chambre de combustion et son environnement (compresseur, turbine, ligne de fuel). C'est pourquoi on cherche à agir sur les instabilités thermoacoustiques alors que la construction du moteur est déjà arrivée à un stade avancé, ce qui nécessite de trouver des solutions qui demandent peu de changements sur la géométrie de la chambre.

1.4 Les techniques de contrôle

De nombreuses tentatives ont été proposées pour contrôler ces instabilités thermoacoustiques depuis les années 1940. Il existe le contrôle passif et le contrôle actif [33, 50].

Le déclenchement d'une instabilité étant dû à la boucle interne vue plus haut (Fig. 1.11), il est nécessaire pour contrôler une instabilité d'agir sur le couplage entre la fluctuation du taux de dégagement de chaleur et les ondes acoustiques. Au regard des phénomènes à l'origine des instabilités thermoacoustiques décrits dans la section 1.3 les moyens évidents qui s'imposent pour essayer de contrôler ce phénomène sont d'agir en modifiant [34] :

- le déphasage entre pression et fluctuation du taux de dégagement de chaleur,
- les fluctuations de la richesse,
- la géométrie.

1.4.1 Le contrôle actif

Une revue très détaillée des méthodes de contrôle actif est donnée par Huang et Yang [33]. Le principe du contrôle actif est l'usage de procédures dynamiques, fonction de l'état du système [47, 48, 64]. Le concept a été introduit dans les années 50 par Tsien pour les études des instabilités des moteurs fusée [101]. Les systèmes de contrôle actif injectent dans les brûleurs des perturbations pour contrôler les oscillations : Poinot [76] a réussi à diminuer l'amplitude des oscillations de pression en plaçant des haut-parleurs dans les injections de fuel. Tran [99] et Zhao [108] ont développé des systèmes qui modifient l'impédance des plaques multiperforées en agissant sur la profondeur de la cavité en arrière de celle-ci. Les systèmes de contrôle actif peuvent néanmoins être assez chers à mettre au point.

1.4.2 Le contrôle passif

Le contrôle passif consiste à modifier la géométrie de la chambre ou la composition du mélange : par exemple en changeant la géométrie de l'injecteur ou le type de réactifs.

Les modifications de la géométrie de la chambre consistent aussi en l'ajout d'absorbeurs acoustiques. Les moyens existants comprennent les *résonateurs quart d'onde*, les *plaques perforées*, les *cavités* ou les *baffles*.

Les *baffles* sont en général des plaques planes, ajoutées près de l'injecteur des chambres, qui vont agir sur les modes acoustiques en ayant pour effet de rendre longitudinales les fluctuations de pression, au départ transverses, et d'agir aussi sur la distribution de vitesse acoustique [102]. Dans le cas où les modes étaient générés par des distributions de pression transverse ou de vitesse, les baffles auront un effet amortissant. La dissipation peut aussi être induite par un lâcher tourbillonnaire [95] et la dissipation par frottement sur les baffles. Les *résonateurs de Helmholtz* sont aussi utilisés. Un résonateur de Helmholtz est constitué d'une grande cavité reliée à col plus petit, donc l'extrémité est ouverte. Un résonateur de Helmholtz est placé près de la chambre tel qu'il sera excité à la fréquence qu'on souhaite atténuer (chapitre 5 de [53], [107]). A cette fréquence, de grandes oscillations de pression sont déclenchées à l'entrée du résonateur, ce qui va dissiper de l'énergie des oscillations de la chambre. Mais les résonateurs de Helmholtz sont alors limités dans une petite bande de fréquences.

Les *résonateurs quart-d'onde* fonctionnent d'une manière semblable : il s'agit d'un tube ouvert à son extrémité, la présence d'un mode quart d'onde dans le tube va imposer une fluctuation de pression nulle à l'entrée et ainsi contrer l'onde dans la chambre [71].

Les *plaques perforées* sont efficaces sur une plus large bande de fréquence. Comme montré sur la figure 1.13, les nacelles des avions sont équipées de plaques perforées constituées de deux plaques fines perforées séparées par une ou deux couches de structures en forme de nids d'abeilles, c'est-à-dire de structures en tubes hexagonaux, dessinés pour servir de résonateurs 1/4-d'onde [52, 23] (Fig. 1.14). Même si elles sont d'abord utilisées pour refroidir les parois des chambres, il a été montré qu'elles peuvent aussi avoir un effet d'amortissement. L'écoulement à travers les orifices va entraîner de la dissipation par un phénomène de lâcher tourbillonnaire (*vortex-shedding*). Ce phénomène sera plus étudié dans le chapitre 3.

D'autres tentatives consistent en la modification de la géométrie de sortie de l'injecteur pour impacter sur la réponse de la flamme : des chevrons sont ajoutés pour casser les structures tourbillonnaires [86]. Des sorties asymétriques peuvent aussi être utilisées [6].

1.5 Les méthodes numériques d'étude des instabilités thermoacoustiques

La nécessité de prédire ces instabilités thermoacoustiques au stade de la conception des chambres de combustion est donc vite devenue incontournable, et pour ce faire la simulation numérique est très utile. La SGE⁴ en résolvant complètement les équations de Navier-Stokes permet de prédire les instabilités, mais un solveur de Helmholtz peut s'avérer plus rapide et moins coûteux en temps de calcul CPU que la LES, les maillages pouvant se permettre d'être plus légers.

⁴Simulation aux Grandes Echelles, LES en anglais pour Large Eddy Simulation.

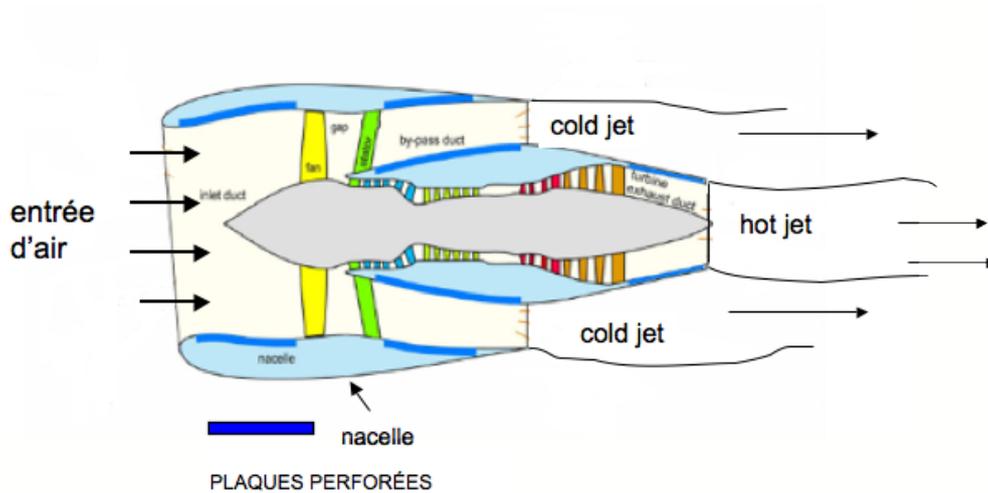


FIG. 1.13 – Localisation des plaques perforées dans un moteur d'avion [23].

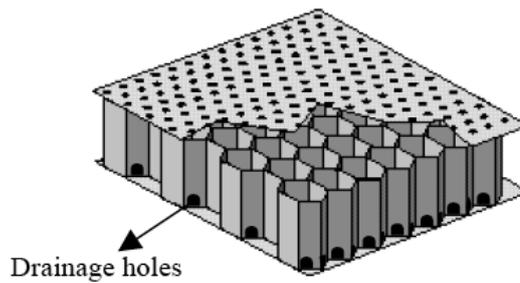


FIG. 1.14 – Plaques perforées des nacelles d'avions, constituées de deux plaques multiperforées séparées par une structure en nid d'abeille. [52]

Les études menées en thermoacoustique ont pour objectif :

- de déterminer les fréquences propres et la structure des modes associés à ces fréquences, c'est-à-dire la répartition de la fluctuation de pression dans les chambres. Les modes acoustiques sont en général excités par des fluctuations de basse amplitude, on peut donc dans le domaine linéaire résoudre les équations de l'acoustique et dériver les modes propres excités (Chapitre 2). La fréquence des modes excités et la forme des modes peut alors être obtenue.
- de déterminer si les oscillations sont amorties ou amplifiées,
- d'évaluer l'impact d'un changement de géométrie sur les instabilités,
- de développer des moyens de contrôle actif ou passif. En effet, connaître la position des noeuds/ventres de pression est primordial pour positionner judicieusement certains dispositifs de contrôle passif comme des résonateurs de Helmholtz par exemple

(voir Section 1.4.2).

Parmi les différents moyens numériques à disposition, on distingue :

- Les méthodes de bas ordre : Elles utilisent une modélisation complète pour chaque élément d'un système de combustion. Par exemple, les codes réseau ([5],[57]) modélisent un système comme une suite d'éléments acoustiques 1D, d'impédance connues, et reliés entre eux. Des relations de saut au niveau des flammes sont utilisées.
- Les codes acoustiques : les équations de Navier-Stokes écrites pour des fluides réactifs sont linéarisées de manière à obtenir une équation d'onde inhomogène pour les perturbations acoustiques de pression. Les modes résonants d'une géométrie tridimensionnelle peuvent alors être calculés par une approche fréquentielle.
- La LES : Elle a fait ses preuves dans la simulation des instabilités thermoacoustiques ([56],[83],[89]). Cependant cette méthode demeure très coûteuse en temps CPU.

1.6 Objectif de la thèse et plan du mémoire

Dans cette thèse on cherche à prédire les instabilités thermoacoustiques d'une chambre en prenant en compte les détails géométriques tels que les plaques multiperforées, puis d'étudier ces instabilités par une approche de bilans d'énergie. Un des objectifs est donc de trouver le modèle le plus adapté pour les plaques perforées à être implémenté dans un solveur de Helmholtz existant. Une fois codé et validé, il sera possible grâce à ce modèle de quantifier l'impact des plaques multiperforées sur l'acoustique des chambres de combustion. Le solveur de Helmholtz existant étant un code sans écoulement, le modèle devra simuler la présence d'un écoulement pour l'amortissement. L'intégration de la prise en compte d'un écoulement moyen de nombre de Mach non négligeable a été étudiée par Wieczorek [68, 103, 104] mais n'est pas présente dans le solveur de Helmholtz considéré ici. En plus de prédire l'amortissement ou l'amplification des modes (une fois pris en compte l'impact de la flamme), on montrera que l'outil ainsi développé peut être utilisé pour optimiser l'amortissement des chambres.

Cette thèse est à application directement industrielle : les calculs finaux sont effectués sur une chambre de combustion d'hélicoptère de TURBOMECA (groupe SAFRAN). Cette chambre est également calculée par la LES au sein du CERFACS. La chambre de combustion est décrite dans le chapitre 5.

Le document est structuré de la façon suivante (Fig. 1.15) :

- Le chapitre 2 rappelle le cheminement des équations de Navier-Stokes vers l'équation d'onde en acoustique, puis le passage en harmonique pour obtenir l'équation de Helmholtz. La résolution de cette équation par un solveur acoustique de Helmholtz (AVSP [66]) est expliquée. Les schémas numériques utilisés et les conditions limites acoustiques prises en compte sont décrites. Dans le développement et l'entretien d'une instabilité, la flamme agit comme un terme source. La section 2.6 précise la prise en compte du terme source comme flamme active dans le solveur de Helmholtz

par le modèle $n - \tau$ développé par Crocco [13]. La carte de stabilité d'un banc expérimental étudié à l' Ecole Centrale Paris est calculée.

- Le chapitre 3 décrit les plaques multiperforées. Des résultats LES antérieurs à cette thèse sont utilisés pour expliquer les phénomènes rencontrés lors de l'interaction onde acoustique/ plaque multiperforée. Les modèles acoustiques existants sont passés en revue. Le codage du modèle choisi (modèle de Howe) pour l'implémentation dans le solveur de Helmholtz est expliqué. Des configurations géométriques simples sur lesquelles il est possible de résoudre analytiquement l'équation de Helmholtz sont résolues : tout d'abord un cylindre avec une plaque perforée cylindrique intérieure, puis un parallépipède où le champ moyen présente un saut de température.
- L'objectif du chapitre 4 est l'étude des instabilités de combustion par une approche énergétique. Un calcul de bilan d'énergie acoustique est effectué à l'aide du solveur de Helmholtz. Cette approche permet d'identifier les éléments du système responsables de l'amortissement ou de l'amplification d'une instabilité. Dans le cas des plaques multiperforées, le résultat du bilan permet d'évaluer la contribution de chaque plaque au flux dissipatif.
- Enfin le chapitre 5 présente la chambre industrielle étudiée pour Turbomeca. Il s'agit d'une chambre annulaire de 15 secteurs. Cette chambre est équipée de plaques multiperforées ayant des caractéristiques géométriques différentes. Des calculs se limitant à un secteur de la chambre sont effectués, ce qui permet de capturer les modes longitudinaux de la chambre. Le domaine de calcul comprend la chambre, le tourbillonneur et le contournement. Un bilan acoustique est alors effectué ; il met en évidence la contribution de la flamme comme terme source et des plaques comme terme dissipatif contribuant à l'amortissement ou bien l'amplification des modes. La totalité de la chambre est ensuite considérée pour étudier les modes azimutaux en dupliquant 14 fois le maillage effectué pour un secteur.

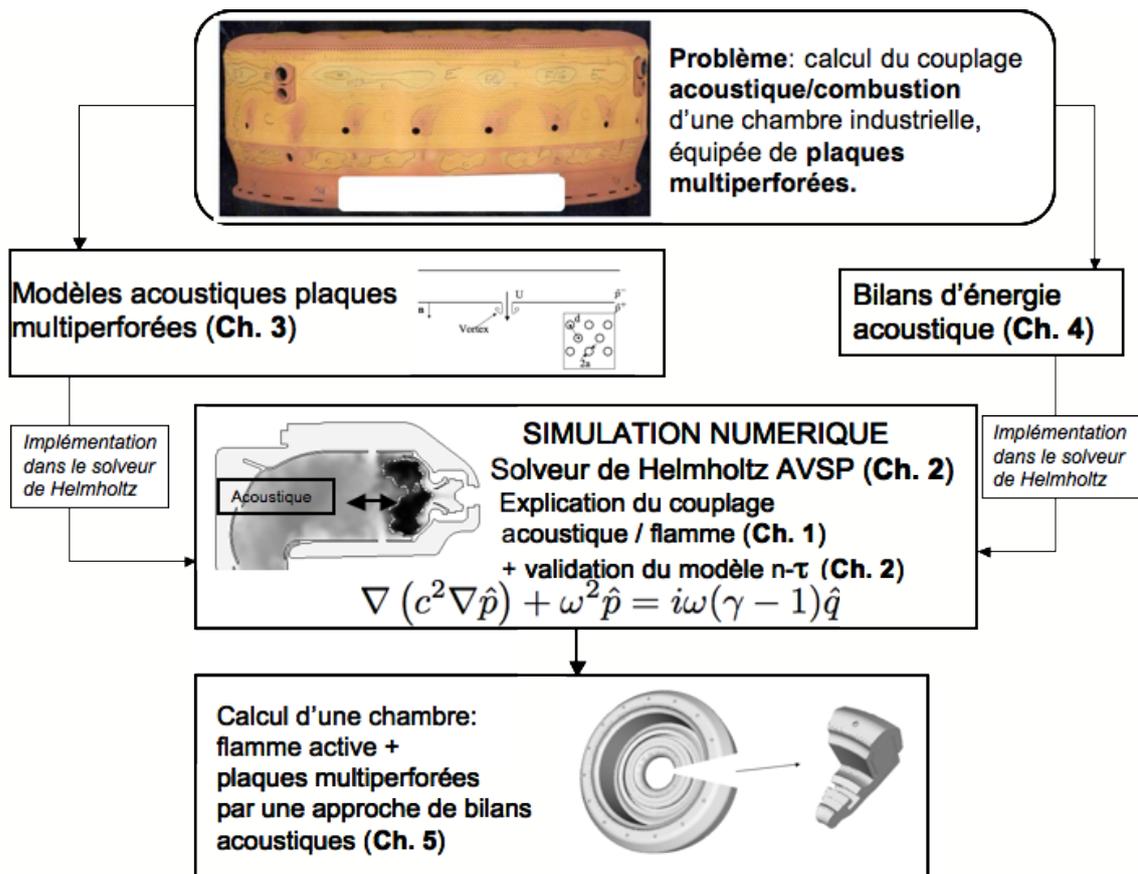


FIG. 1.15 – Représentation schématique du contenu du manuscrit.

Des équations de l'acoustique au solveur de Helmholtz AVSP

Sommaire

2.1	L'approximation linéaire en acoustique	19
2.2	Les équations de l'acoustique : de Navier-Stokes à l'équation d'onde	20
2.3	Le solveur de Helmholtz AVSP	23
2.4	Les conditions limites acoustiques existantes dans AVSP	24
2.5	De l'équation de Helmholtz à un problème aux valeurs propres	25
2.5.1	Calcul de l'opérateur $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p} _j$ pour un noeud j à l'intérieur du domaine	25
2.5.2	Calcul de l'opérateur $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p} _j$ pour un noeud j sur le bord du domaine	26
2.5.3	Resolution du problème aux valeurs propres par la méthode itérative d'Arnoldi	30
2.6	Modélisation du terme source dans le solveur de Helmholtz et validation expérimentale	31
2.6.1	Modélisation du terme source par le modèle $n - \tau$	31
2.6.2	Mesure expérimentale d'une fonction de transfert de flamme	32

Ce chapitre rappelle la démarche d'obtention des équations de l'acoustique à partir des équations de Navier-Stokes. Le principe de la linéarisation est rappelé en introduisant la mesure de niveau de puissance d'une intensité acoustique (le déciBel), puis les différentes hypothèses retenues pour la simplification nécessaire à l'obtention des équations de l'acoustique. On introduit ensuite le concept d'ondes harmoniques pour dériver l'équation de Helmholtz, équation que résout le solveur AVSP dans lequel sont implémentés les développements réalisés pendant cette thèse. Les méthodes numériques utilisées pour résoudre l'équation de Helmholtz sont ensuite présentées. Le chapitre se termine par la reproduction de la carte de stabilité d'une expérience de laboratoire étudiée à EM2C.

2.1 L'approximation linéaire en acoustique

Soit $p_{\text{ref}} = 20 \mu\text{Pa}$ le niveau seuil à partir duquel l'oreille humaine commence à percevoir un son, l'intensité d'une fluctuation de pression p_1 dans l'air est quantifiée en déciBels

(dB), définis par l'équation suivante :

$$1 \text{ dB} = 20 \log \left(\frac{p_1}{p_{\text{ref}}} \right). \quad (2.1)$$

L'échelle des niveaux de bruit est donnée sur la figure 2.1.

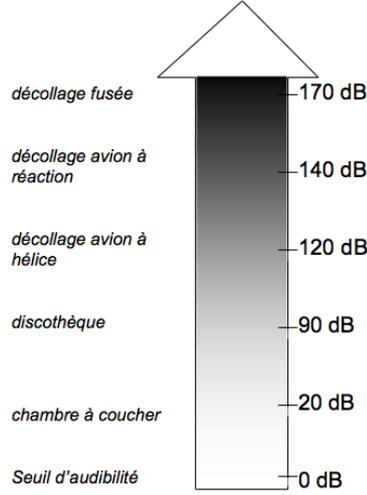


FIG. 2.1 – Echelle des décibels.

Un son atteignant 140 dB (décollage d'un avion à réaction) correspond donc à une amplitude de pression de 200 Pa. Avec $p_0 = 10^5$ Pa, le rapport de la fluctuation de pression acoustique et de la pression atmosphérique est :

$$\frac{p_1}{p_0} = 2 \cdot 10^{-3} \ll 1. \quad (2.2)$$

Au dessus de la limite $\frac{p_1}{p_0} = 0.1$ des effets non linéaires apparaissent [105]. Mais dans la plupart des applications, le rapport $\frac{p_1}{p_0}$ est très faible devant l'unité. Dans ce dernier cas, les équations de Navier-Stokes sont linéarisées pour étudier la propagation d'ondes acoustiques dans les chambres. Cela consiste à décomposer l'écoulement en une partie stationnaire, indexée par 0 et des petites perturbations indexées par 1.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(\mathbf{x}) + \rho_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t), \\ p(\mathbf{x}, t) &= p_0(\mathbf{x}) + p_1(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2 Les équations de l'acoustique : de Navier-Stokes à l'équation d'onde

Dans les équations suivantes, la notation $\frac{D}{Dt}$ correspond à la dérivée particulaire

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla.$$

Les grandeurs thermodynamiques telles que la température T , la pression p , l'entropie s , l'énergie interne e et la masse volumique ρ sont considérées. C_p et C_v sont les capacités calorifiques des espèces respectivement à pression constante et à volume constant reliées par les équations

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma \text{ et } C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}.$$

Les équations utilisées pour décrire le champ acoustique sont déduites de l'équation de conservation de la masse (Eq. (2.4)), de la quantité de mouvement (Eq. (2.7)), et de l'énergie (Eq. (2.12)).

– Equation de conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

– Equation de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement pour un fluide visqueux est donnée par :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}, \quad (2.5)$$

où \mathbf{f} est la résultante des forces massiques s'exerçant sur le système. $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes visqueuses défini dans le cadre d'un écoulement de Stokes par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu ((\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^t) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

où \mathbf{I} est la matrice identité, μ la viscosité dynamique.

– Equation de l'entropie

La variation de l'entropie s d'une particule est due à la quantité de chaleur q issue de la réaction de combustion, aux transferts de chaleur décrits par le terme

$\nabla \cdot (\lambda_T \nabla T)$ et aux effets visqueux représentés par le terme $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}$:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = q + \nabla \cdot (\lambda_T \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}, \quad (2.6)$$

où λ_T est la diffusivité thermique.

Quand les effets de la viscosité et des forces volumiques sont négligés, l'Eq. (2.5) se simplifie en :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p. \quad (2.7)$$

De même en négligeant les effets de la viscosité et la diffusion de chaleur, l'équation de l'entropie se réduit à :

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = q. \quad (2.8)$$

Les équations de Navier-Stokes ainsi simplifiées constituent les équations d'Euler. L'enthalpie h est définie à partir de l'énergie interne :

$$h = e + \frac{p}{\rho}. \quad (2.9)$$

Lorsque l'on applique une source de chaleur dQ à un système le volume de la masse augmente de $d(\frac{1}{\rho})$, et si on considère que l'on a équilibre thermodynamique, on a $dQ = Tds$. La variation de l'énergie interne est alors :

$$de = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = C_v dT \quad (2.10)$$

ce qui donne en terme d'enthalpie :

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho}. \quad (2.11)$$

En combinant les équations (2.10) et (2.11), on obtient la relation suivante :

$$ds = \frac{C_v}{p} dp - \frac{C_p}{\rho} d\rho. \quad (2.12)$$

L'équation 2.8 s'écrit en utilisant la relation des gaz parfaits $p = \rho r T$:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{r}{p} q. \quad (2.13)$$

Dans le cadre de l'acoustique linéaire, les équations (2.4) et (2.7) sont linéarisées. Le nombre de Mach de l'écoulement est supposé très faible : $\mathbf{u}_0 = 0$.

L'Eq. (2.4) devient alors :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_1 + \rho_1 \nabla \mathbf{u}_1 + \rho_0 \nabla \mathbf{u}_1 = 0. \quad (2.14)$$

$\rho_0 = \rho_0(x)$ donc $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ et les termes d'ordre 2 $\rho_1 \nabla \mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_1$ sont négligés, ce qui donne :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \mathbf{u}_1 = 0. \quad (2.15)$$

La linéarisation de l'Eq. (2.7) donne :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \rho_1 \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 = -\nabla p_0 - \nabla p_1. \quad (2.16)$$

Dans le cadre d'un écoulement isobare, $\nabla p_0 = 0$. Après avoir négligé les termes d'ordre 2, on obtient :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1. \quad (2.17)$$

Avec l'Eq. (2.12), on a

$$\frac{C_v}{p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{C_p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{r}{p} q. \quad (2.18)$$

En divisant par C_p , on obtient :

$$\frac{1}{\gamma p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\gamma - 1}{\gamma p} q. \quad (2.19)$$

Après linéarisation, on obtient :

$$\frac{1}{\gamma} \rho_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} - p_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - p_0 \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_0 q_1. \quad (2.20)$$

ρ est alors éliminé en utilisant l'Eq. (2.15) pour obtenir

$$\frac{1}{\gamma} \rho_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + p_0 \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_0 q_1. \quad (2.21)$$

En prenant $\frac{1}{p_0 \rho_0} \frac{\partial(2.21)}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (2.17)$, on obtient

$$\frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \frac{\partial q_1}{\partial t}. \quad (2.22)$$

En utilisant la relation isentropique $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$, et en multipliant l'Eq. (2.22) par γp_0 , l'équation des ondes est obtenue :

$$\nabla \cdot (c_0^2 \nabla p_1) - \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -(\gamma - 1) \frac{\partial q_1}{\partial t}. \quad (2.23)$$

2.3 Le solveur de Helmholtz AVSP

Le développement du code AVSP a été débuté au cours de la thèse de Benoit [5, 66]. Il résout dans le domaine fréquentiel l'Eq. (2.23). Le passage du domaine temporel vers le domaine fréquentiel est effectué en utilisant l'hypothèse d'ondes harmoniques, soit :

$$\begin{aligned} p_1(x, t) &= \text{Re}(\hat{p}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}) \\ \mathbf{u}_1(x, t) &= \text{Re}(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}) \\ q_1(x, t) &= \text{Re}(\hat{q}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

L'équation de Helmholtz est obtenue à partir de l'Eq. (2.23)

$$\nabla \cdot (c^2 \nabla \hat{p}(\mathbf{x})) + \omega^2 \hat{p}(\mathbf{x}) = i\omega(\gamma - 1) \hat{q}(\mathbf{x}). \quad (2.25)$$

Pour effectuer un calcul AVSP, il est nécessaire de disposer :

- d'un maillage sur la géométrie que l'on veut calculer,
- des champs de γ , $\rho_0(\mathbf{x})$, $c_0(\mathbf{x})$, et r .

Il y a deux manières de créer un champ initial, soit par interpolation d'une solution LES, soit en créant un champ constant à l'aide d'une routine propre à AVSP.

Dans le cas de l'interpolation d'un champ LES, les champs γ , $r(\mathbf{x})$ et $\rho(\mathbf{x})$ sont directement lus dans la solution LES, le champ de vitesse du son c_0 est calculé à partir de la température (Eq. (2.26)).

$$c_0 = \sqrt{\gamma r T} \quad (2.26)$$

Au coeur d'AVSP, la pression moyenne est alors déduite grâce à la relation

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}. \quad (2.27)$$

L'Eq. (2.25) est associée avec les différents types de conditions limites expliqués dans la section suivante.

2.4 Les conditions limites acoustiques existantes dans AVSP

- Condition ouverte à l'atmosphère (Dirichlet) :

La condition acoustique de Dirichlet consiste à imposer une pression acoustique nulle sur la condition limite pour une sortie dans l'atmosphère.

$$\hat{p} = 0 \text{ sur } \delta\Omega_P. \quad (2.28)$$

- Condition de mur solide (Neumann) :

La condition acoustique de Neumann consiste à imposer une vitesse acoustique nulle sur la condition limite, ce qui s'apparente à un mur imperméable. Avec l'équation de quantité de mouvement, cette condition revient à :

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega_W. \quad (2.29)$$

- Impédance acoustique :

L'impédance acoustique se définit comme le rapport entre la pression acoustique dans un domaine et la vitesse acoustique normale associée. Sa dimension est donnée en Nsm^{-3} .

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}} \text{ sur } \delta\Omega_Z. \quad (2.30)$$

L'impédance réduite est également définie. Elle est sans dimension car normalisée par l'impédance caractéristique du domaine, c'est-à-dire la densité du fluide ρ_0 , multipliée par la vitesse du son c_0 .

$$Z_0 = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0 \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}}. \quad (2.31)$$

L'impédance est un nombre complexe,

$$Z_0 = R + iX, \quad (2.32)$$

où $R = \text{Re}(Z)$ est la résistance, et $X = \text{Im}(Z)$ est la réactance.

En utilisant l'équation d'Euler la condition dite de Robin donne la relation entre le gradient de pression acoustique et la pression acoustique sur une condition limite :

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} - \frac{i\omega}{c_0 Z} \hat{p} = 0 \text{ sur } \delta\Omega_Z. \quad (2.33)$$

2.5 De l'équation de Helmholtz à un problème aux valeurs propres

2.5.1 Calcul de l'opérateur $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j$ pour un noeud j à l'intérieur du domaine

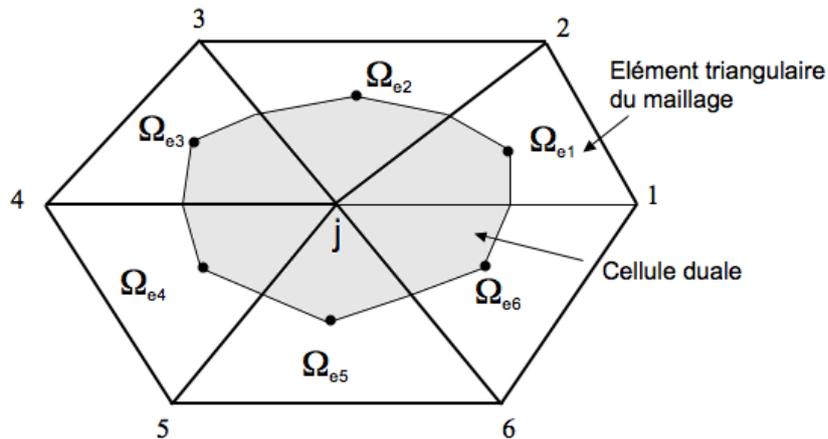


FIG. 2.2 – Définition de la cellule duale (grisée) autour du noeud j .

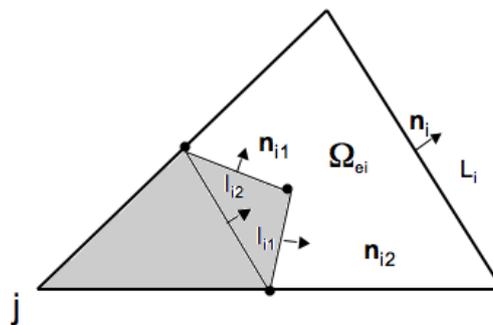


FIG. 2.3 – Zoom sur un élément triangulaire Ω_{ei} .

L'équation de Helmholtz (Eq. (2.25)) est discrétisée par une méthode des volumes finis. Soit un noeud j à l'intérieur du domaine. On considère un cas simplifié 2D où le noeud j est entouré de 6 éléments Ω_{ei} pour $i = 1, \dots, 6$ comme montré sur la figure 2.2. La cellule duale notée Ω_{Nj} de volume S_{Nj} est représentée grisée sur la figure 2.2. Elle est formée en reliant les centres des éléments triangulaires du maillage Ω_{ei} entourant le noeud j au milieu des arêtes de l'élément triangulaire comme montré sur la figure 2.2 [24]. Les normales \mathbf{n}_{i1} et \mathbf{n}_{i2} pointent vers l'extérieur de la cellule duale. l_{i1} et l_{i2} sont les longueurs des segments rejoignant le centre des éléments Ω_{ei} et leurs arêtes. La valeur de $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}$ se calcule en

faisant la moyenne sur la cellule duale :

$$\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j = \frac{1}{S_{Nj}} \iint_{\Omega_{Nj}} \nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p} dS \quad (2.34)$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient :

$$\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j = \frac{1}{S_{Nj}} \int_{\delta\Omega_{Nj}} c_0^2 \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} dL, \quad (2.35)$$

ce qui, avec les notations de la figure 2.3, se réduit à :

$$\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j = \frac{1}{S_{Nj}} \sum_{i=1}^6 c_0^2|_{\Omega_{ei}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{ei}} \cdot (l_{i1} \mathbf{n}_{i1} + l_{i2} \mathbf{n}_{i2}). \quad (2.36)$$

La relation suivante est valable pour tout i , à partir de la relation entre les normales dans un triangle et du théorème de Thalès appliqué dans chaque élément triangulaire :

$$l_{i1} \mathbf{n}_{i1} + l_{i2} \mathbf{n}_{i2} = \frac{L_i}{2} \mathbf{n}_i. \quad (2.37)$$

Alors l'Eq. (2.36) se simplifie en :

$$\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j = \frac{1}{S_{Nj}} \sum_{i=1}^6 c_0^2|_{\Omega_{ei}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{ei}} \cdot \frac{L_i}{2} \mathbf{n}_i. \quad (2.38)$$

Le gradient de pression $\nabla \hat{p}|_{\Omega_{ei}}$ est évalué par une moyenne sur chaque élément triangulaire Ω_{ei} . Les notations sont celles de la figure 2.4.

$$\nabla \hat{p}|_{\Omega_{ei}} = \frac{1}{S_{\Omega_{ei}}} \int_{\Omega_{ei}} p \mathbf{n} dL. \quad (2.39)$$

Les valeurs de la pression étant stockées aux noeuds de l'élément triangulaire,

$$\frac{1}{S_{\Omega_{ei}}} \int_{\Omega_{ei}} p \mathbf{n} dL = \frac{1}{S_{\Omega_{ei}}} \left[\frac{(p_j + p_{i+1})L_{ei2}}{2} \mathbf{n}_{ei2} + \frac{(p_j + p_i)L_{ei1}}{2} \mathbf{n}_{ei1} + \frac{(p_i + p_{i+1})L_i}{2} \mathbf{n}_i \right], \quad (2.40)$$

d'où

$$\nabla \hat{p}|_{\Omega_{ei}} = -\frac{1}{2S_{\Omega_{ei}}} [p_i L_{ei2} \mathbf{n}_{ei2} + p_j L_i \mathbf{n}_i + p_{i+1} L_{ei1} \mathbf{n}_{ei1}]. \quad (2.41)$$

2.5.2 Calcul de l'opérateur $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j$ pour un noeud j sur le bord du domaine

On considère maintenant un noeud j situé sur le bord du domaine. Dans le cas d'une cellule sur le bord, la cellule duale est tronquée. Pour simplifier le problème, on se place dans un cas 2D, où le noeud j est entouré de trois éléments. Le gradient de pression normal aux bords du domaine s'exprime avec la condition limite de Robin.

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = \frac{i\omega}{c_j Z_j} \hat{p}_j \quad (2.42)$$

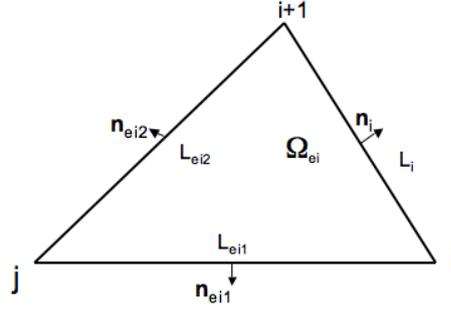


FIG. 2.4 – Calcul de $\nabla \hat{p}|_{\Omega_{ei}}$ sur l'élément Ω_{ei} .

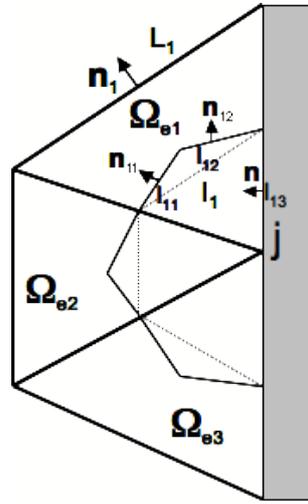


FIG. 2.5 – Définition de la cellule duale autour d'un noeud j .

$$\begin{aligned} \nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j &= \frac{1}{S_{Nj}} [c_0^2|_{\Omega_{e1}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e1}} \cdot (l_{11} \mathbf{n}_{11} + l_{12} \mathbf{n}_{12} - l_{13} \mathbf{n}) \\ &\quad + c_0^2|_{\Omega_{e2}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e2}} \cdot (l_{21} \mathbf{n}_{21} + l_{22} \mathbf{n}_{22}) \\ &\quad + c_0^2|_{\Omega_{e3}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e3}} \cdot (l_{31} \mathbf{n}_{31} + l_{32} \mathbf{n}_{32} - l_{33} \mathbf{n})], \end{aligned} \quad (2.43)$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j &= \frac{1}{S_{Nj}} [c_0^2|_{\Omega_{e1}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e1}} \cdot \frac{L_1}{2} \mathbf{n}_1 + c_0^2|_{\Omega_{e2}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e2}} \cdot \frac{L_2}{2} \mathbf{n}_2 \\ &\quad + c_0^2|_{\Omega_{e3}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e3}} \cdot \frac{L_3}{2} \mathbf{n}_3 - c_0^2|_{\Omega_{e1}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e1}} \cdot l_{13} \mathbf{n} \\ &\quad - c_0^2|_{\Omega_{e3}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e3}} \cdot l_{33} \mathbf{n}], \end{aligned} \quad (2.44)$$

avec

$$(c_0^2|_{\Omega_{e1}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e1}} \cdot l_{13} + c_0^2|_{\Omega_{e3}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e3}} \cdot l_{33}) \cdot \mathbf{n} = \frac{ic_j \omega}{Z_j} (l_{13} + l_{33}) p_j. \quad (2.45)$$

Le cas du noeud de bord diffère donc du cas du noeud à l'intérieur du domaine de calcul.

L'Eq. (2.25) peut être transformée en un problème aux valeurs propres de taille N , où N désigne le nombre de noeuds du maillage de la géométrie considérée.

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{M}^{-1} \omega \mathbf{B} \mathbf{P} + \omega^2 \mathbf{P} = \mathbf{D}(\omega) \mathbf{P} \quad (2.46)$$

La matrice \mathbf{M} , diagonale, contient l'inverse du volume des noeuds. Elle est définie ainsi :

$$M_{kj} = S_{Nj} \delta_{kj}. \quad (2.47)$$

Le terme

$$\frac{ic_j \omega}{Z_j} (l_{13} + l_{33}) \hat{p}_j \delta_{kj}$$

est stocké dans la matrice diagonale \mathbf{B} , telle que :

$$b_{kj} = \frac{ic_j}{Z_j} (l_{13} + l_{33}) \hat{p}_j.$$

Quant à l'opérateur $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j$, il est stocké dans la matrice \mathbf{A} .

L'objectif d'AVSP est de déterminer les éléments propres $(\omega, \hat{p}) \in \mathbb{C}^N$ solutions de l'Eq. (2.46). Le vecteur propre \hat{p} donne la répartition spatiale de la pression dans la chambre. Cette information permet de déterminer quelles zones d'une configuration sont soumises aux plus fortes contraintes acoustiques. La valeur propre $\omega = \omega_r + i\omega_i$ contient deux informations. La partie réelle ω_r correspond à la pulsation de l'instabilité, sa partie imaginaire ω_i renseigne sur le taux d'amplification du mode. Avec la convention adoptée Section 2.3, on a

$$p_1(x, t) = \text{Re}(\hat{p}(x) e^{-i\omega_r t}) e^{\omega_i t}. \quad (2.48)$$

Si ω_i est négative, le mode est stable. Si ω_i est positive le mode est instable. L'instabilité croît dans ce cas exponentiellement avec la partie imaginaire de ω . Une partie imaginaire nulle correspond à un mode marginalement stable. Dans le cas où les conditions limites se réduisent à des conditions de Neumann et de Dirichlet, et dans le cas d'une équation de Helmholtz homogène (sans terme source), le problème aux valeurs propres de l'Eq. (2.46) se réduit au problème matriciel linéaire suivant :

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} + \omega^2 \mathbf{P} = 0. \quad (2.49)$$

Mais dans le cas où des conditions limites d'impédance sont utilisées, ou dans le cas d'une équation de Helmholtz inhomogène, c'est-à-dire quand la matrice $\mathbf{D}(\omega)$ est non nulle,

le problème aux valeurs propres devient non linéaire. Dans ce cas le problème matriciel de l'Eq. (2.46) peut s'écrire :

$$[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{D}(\omega)]\mathbf{P} + \omega\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{P} = 0 \quad (2.50)$$

Cette équation est non linéaire à cause de la dépendance en ω de la matrice \mathbf{D} et de la présence du terme ω dû aux conditions limites d'impédance en facteur de la matrice \mathbf{B} . Le problème devient quadratique si une méthode de point fixe est utilisée pour la matrice \mathbf{D} . Le changement de variable expliqué dans la suite permet de transformer ce problème quadratique de taille N en un problème linéaire de taille $2N$ [66].

– Méthode de point fixe impliquant la résolution d'un problème linéaire

Pour résoudre le problème aux valeurs propres de l'Eq. (2.46), une solution consiste à transformer le problème quadratique obtenu à chaque itération en un problème linéaire [66]. Cette transformation s'effectue grâce au changement de variable suivant :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \omega\mathbf{P} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\mathbf{P} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \omega\mathbf{P} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

où

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{D}(\omega).$$

Ce problème linéaire est cependant de taille deux fois supérieure à la taille du problème initial. Ce problème peut être évité en utilisant une méthode de point fixe.

– Résolution d'un problème avec condition limite d'impédance par une méthode de point fixe

La modification du codage de l'impédance effectuée dans cette thèse consiste à utiliser la méthode du point fixe. ω est alors fixé dans le problème matriciel (Eq. (2.46)). Soit ω_k la fréquence du point fixe à une itération k . Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} peuvent alors s'additionner. Le problème matriciel devient alors :

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A} + \omega_k\mathbf{B})\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{P} = \mathbf{D}(\omega)\mathbf{P} \quad (2.52)$$

A chaque itération k du point fixe, on cherche ω_{k+1} , tel que

$$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A} + \omega_k\mathbf{B} - \mathbf{D}(\omega_k))\mathbf{P} + \omega_{k+1}^2\mathbf{P} = 0 \quad (2.53)$$

Pour l'itération suivante du point fixe, on pose alors :

$$\omega_k = \omega_{k+1} \quad (2.54)$$

Dans AVSP, cela consiste à coder un nouvel opérateur spécifique à l'impédance, et à l'ajouter à l'opérateur \mathbf{A} . Cette technique permet d'éviter de doubler la taille du domaine de calcul et permet de converger des calculs sur configuration industrielle avec impédance qui n'aboutissaient pas avec la méthode précédente.

2.5.3 Résolution du problème aux valeurs propres par la méthode itérative d'Arnoldi

Dans tous les cas de conditions limites, on se ramène à la résolution d'un problème linéaire du type

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{D}(\omega_k)\mathbf{P}) + \omega_{k+1}^2\mathbf{P} = 0, \quad (2.55)$$

où la valeur propre inconnue est ω_{k+1} et ω_k est la pulsation obtenue à l'itération précédente. Ce problème est résolu dans le solveur de Helmholtz à l'aide de la méthode itérative d'Arnoldi, intégrée dans la librairie ARPACK [51]. La méthode d'Arnoldi est une méthode de décomposition de la matrice \mathbf{O} en une matrice de Hessenberg. Soit une base orthonormée $V_k = v_1, \dots, v_k$ du sous-espace de Krylov

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{O}, v_1) = v_1, \mathbf{O}v_1, \dots, \mathbf{O}^{k-1}v_1, \quad (2.56)$$

où v_1 est un vecteur aléatoire choisi au début de la simulation.

On considère que le problème de l'équation (2.55) s'écrit

$$\mathbf{O}\mathbf{P} = \lambda\mathbf{P}, \quad (2.57)$$

avec

$$\mathbf{O} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{D}(\omega_k) \text{ et } \lambda = -\omega_{k+1}^2. \quad (2.58)$$

Le principe de la méthode d'Arnoldi est d'effectuer une projection orthogonale de la matrice \mathbf{O} sur le sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_k(\mathbf{O}, v_1)$. La base orthonormale $V_k = v_1, \dots, v_k$ peut être calculée par la méthode de Gram-Schmidt. Soit la matrice \bar{H}_k de taille $(k+1, k)$ qui a pour bloc principal une matrice de Hessenberg supérieure H_k augmentée d'une ligne supplémentaire donc le seul élément non nul est h_{k+1k} . La matrice \bar{H}_k a la forme suivante :

$$\bar{H}_k = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{1k} \\ h_{12} & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & h_{23} & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & h_{kk-1} & h_{kk} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{k+1k} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} & & & & \\ \cdots & & & & \\ & & H_k & & \\ & \cdots & & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & h_{k+1k} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

À l'itération k de l'algorithme d'Arnoldi, les matrices \mathbf{O} , V_k et H_k vérifient :

$$V_k^t \mathbf{O} V_k = H_k, \quad (2.59)$$

où H_k est la matrice quotient de Rayleigh de \mathbf{O} par \mathbf{V}_k . En d'autres termes, la matrice H_k est la matrice \mathbf{O} projetée orthogonalement sur \mathcal{K}_k dans la base V_k . Les valeurs propres de \mathbf{H} sont aussi valeurs propres de \mathbf{O} . Le problème de taille N a donc été réduit à un problème de taille k résolu par une méthode directe de type QR. Si k est trop grand, une méthode de *restart* [90] est utilisée.

2.6 Modélisation du terme source dans le solveur de Helmholtz et validation expérimentale

Cette section explique la prise en compte de la rétroaction de la flamme sur l'acoustique dans le solveur de Helmholtz par le modèle de Crocco. Le principe du modèle et son adaptation pour être intégré dans le solveur de Helmholtz sont expliqués. A partir d'un calcul LES et de données expérimentales, il est possible de prévoir le comportement des modes acoustiques. La carte de stabilité obtenue expérimentalement par le laboratoire EM2C sur une flamme confinée swirlée est reproduite [72, 73], ce qui valide l'emploi du modèle de Crocco dans le solveur de Helmholtz AVSP.

2.6.1 Modélisation du terme source par le modèle $n - \tau$

Le terme de droite de l'Eq. (2.25) est un terme source qui représente l'action de la flamme sur l'acoustique. Ce terme doit être modélisé. La plupart des modèles existants relie le taux de dégagement de chaleur à la fluctuation de vitesse située dans la zone des gaz frais en amont de la flamme. De nombreux mécanismes sont à l'origine des fluctuations du taux de dégagement de chaleur : par exemple les fluctuations de la richesse, les interactions entre la flamme et les parois et les instabilités des lignes d'injection de fuel [19, 20, 34, 87]. Les deux approches qui sont utilisées pour caractériser cette réponse sont les matrices de transfert ([77],[100]) et les fonctions de transfert de flamme (FTF) [12, 13, 100]. Les approches type FTF partent de l'hypothèse que les fluctuations du taux de dégagement de chaleur global sont seulement dues aux fluctuations de vitesse. Dans l'approche FTF, la flamme est considérée comme une interface entre deux éléments de la chambre de combustion : la zone des gaz frais et la zone des gaz brûlés. Elle est définie comme le rapport entre le taux de dégagement de chaleur global $\dot{Q}_1(\omega)$ et la fluctuation de vitesse $\mathbf{u}_1^{\text{ref}}$ d'un point de référence situé en amont de la flamme de coordonnées \mathbf{x}_{ref} . Ce point est situé dans les gaz frais, où la mesure est réalisable expérimentalement [100]. La fonction de transfert de flamme s'écrit alors comme une fonction de la fréquence ω :

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\dot{Q}_1(\omega)}{\mathbf{u}_1^{\text{ref}}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}}, \quad (2.60)$$

où \mathbf{n}_{ref} est la normale au point de référence dirigée vers la zone des gaz brûlés.

La fonction de transfert de flamme $\mathcal{F}(\omega)$ peut être décrite dans le domaine fréquentiel en fonction d'un gain $A(\omega)$ et d'une phase $\Phi(\omega)$.

$$\mathcal{F}(\omega) = A(\omega)e^{i\Phi(\omega)}. \quad (2.61)$$

Le modèle de FTF le plus simple et le plus largement utilisé est le modèle de Crocco [12]. Dans ce modèle, l'amplitude est remplacée par un index d'interaction n indépendant de la fréquence, et un temps de retard τ . Ainsi la fonction de transfert s'écrit :

$$\mathcal{F}(\omega) = ne^{i\omega\tau}. \quad (2.62)$$

Une représentation schématique du modèle $n - \tau$ est donnée sur la figure 2.6.

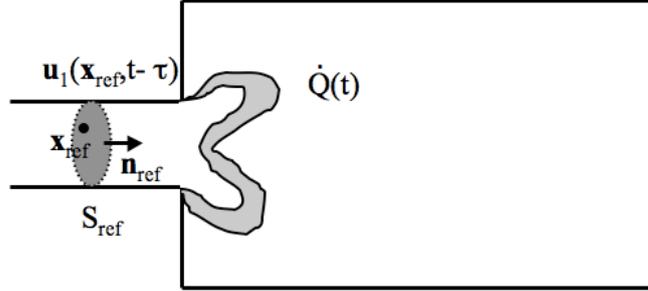


FIG. 2.6 – Représentation schématique du modèle de Crocco.

L'équation de quantité de mouvement permet d'exprimer la vitesse acoustique au point de référence en fonction du gradient de pression au point de référence :

$$\hat{\mathbf{u}}^{\text{ref}}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} = \frac{1}{\rho_0 i \omega} \nabla \hat{p}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}. \quad (2.63)$$

Dans un solveur de Helmholtz, les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et de la vitesse sont connues en chaque point. Le modèle global $n - \tau$ est donc adapté en un modèle local pour être implémenté dans AVSP [66] :

$$\frac{\hat{q}(\mathbf{x})}{q_{\text{av}}} = n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \frac{\hat{\mathbf{u}}^{\text{ref}}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}}{\bar{\mathbf{u}}}. \quad (2.64)$$

Les paramètres globaux n et τ sont maintenant des paramètres locaux dépendant des coordonnées \mathbf{x} . q_{av} est la fluctuation du taux de dégagement de chaleur moyenne exprimée en W/m^3 et \bar{u} la vitesse débitante dans l'injecteur.

Les équations (2.62) et (2.63) sont alors injectées dans l'Eq. (2.25) pour obtenir l'équation de Helmholtz inhomogène :

$$\nabla \cdot (c^2 \nabla \hat{p}) + \omega^2 \hat{p} = \frac{q_{\text{av}}}{\bar{u}} \frac{\gamma - 1}{\rho} n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau} \nabla \hat{p}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}. \quad (2.65)$$

2.6.2 Mesure expérimentale d'une fonction de transfert de flamme

Flammes confinées swirlées

L'injection swirlée est couramment utilisée dans les chambres de combustion comme technique de stabilisation de la flamme. Le swirl permet en effet de créer une zone de gaz

chauds qui accroche la flamme [75, 72]. Cette zone est appelée zone de recirculation interne. Une zone de recirculation extérieure est également présente. Elle est formée par la recirculation des gaz chauds entre les murs et la flamme. La force du swirl est quantifiée par le nombre de Swirl (S_w) défini comme le rapport entre la quantité de mouvement tangentielle et la quantité de mouvement axiale :

$$S_w = \frac{\int_0^R \rho u v 2\pi r^2 dr}{R \int_0^R \rho u^2 2\pi r dr}, \quad (2.66)$$

où u et v sont respectivement les composantes axiales et azimutales de la vitesse de l'écoulement, et R le rayon caractéristique de la configuration.

Dans l'optique de maîtriser les instabilités de combustion, il est intéressant de regarder la sensibilité des flammes swirlées à des perturbations de vitesse. L'objectif de la configuration expérimentale de Paliès [72] est d'étudier la sensibilité d'une flamme confinée swirlée aux effets de non linéarité : la réponse de la flamme à des amplitudes de perturbation de vitesse acoustique croissantes est mesurée.

Description de la configuration expérimentale

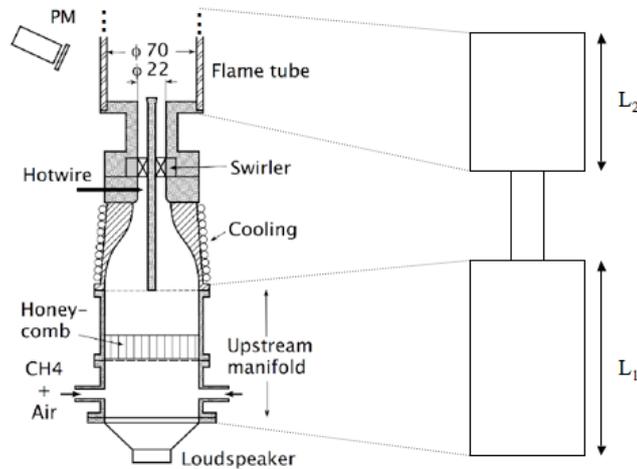


FIG. 2.7 – Configuration expérimentale (à gauche) et sa représentation schématique à droite, d'après Paliès et al. [73].

La configuration expérimentale [73] représentée sur la figure 2.7 est composée d'un premier corps d'admission, suivi d'un rétrécissement de section débouchant sur un conduit de diamètre constant dans lequel est installé un swirler, et enfin le tube à flamme de forme cylindrique.

Dans la chambre amont, l'écoulement traverse une structure en nid d'abeille qui casse les grandes structures turbulentes. L'écoulement est mis en rotation par un swirler composé de huit pales. Un mélange air/méthane est introduit par deux entrées diamétralement

opposées au niveau de la chambre d'admission. Le mélange est pauvre ; sa richesse est égale à 0.7. L'écoulement subit un rétrécissement de section de manière à réduire l'épaisseur de la couche limite, et d'avoir ainsi en entrée du swirler un champ de vitesse uniforme. Le diamètre extérieur de la chambre de combustion est $D = 70$ mm.

La vitesse axiale perturbante est mesurée grâce à une sonde à fil chaud. Ce point est repéré par la dénomination "Hot wire" sur la figure 2.7. Il est situé 2.9 mm à la sortie de l'injecteur et à un rayon de 8 mm. Il est ainsi situé dans une zone de gaz frais, rendant possibles les mesures expérimentales. Le point de référence pour le modèle de FTF pour le solveur de Helmholtz sera choisi également à cet endroit.

Deux régimes sont étudiés : la vitesse de l'écoulement U_b vaut $U_b = 2.67$ m.s⁻¹ pour le régime A et $U_b = 4.13$ m.s⁻¹ pour le régime B. Des profils LDV (Laser Doppler Velocimetry) de la vitesse axiale et azimutale permettent de calculer le nombre de Swirl du régime A et donnent 0.55. Vu qu'il ne dépend pas de la vitesse d'écoulement d'entrée, on suppose qu'il vaut aussi 0.55 pour le régime B. La fluctuation du taux de dégagement de chaleur est évaluée en mesurant l'émission des radicaux OH. Avec l'hypothèse que l'intensité lumineuse est proportionnelle au taux de dégagement de chaleur, on en déduit le taux de dégagement de chaleur.

Mesure expérimentale de la FTF

Les données expérimentales dont on dispose sont données sous forme de *flame describing function* (FDF) [69, 70] qui est une extension de la fonction de transfert de flamme classique. La FDF est utilisée pour reproduire certains comportements non linéaires de la combustion. Elle caractérise la réponse de la flamme en fonction de la fréquence et de l'amplitude des perturbations de vitesse $|u_1|$. Elle s'écrit alors sous la forme :

$$\mathcal{F}(\omega, |u_1|) = \frac{\dot{Q}_1/\bar{Q}}{u_1/U_b} = \frac{\hat{Q}/\bar{Q}}{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}/U_b}. \quad (2.67)$$

Le taux de fluctuation de dégagement de chaleur \dot{Q}_1 est calculé en mesurant les émissions des radicaux OH^* et la fluctuation de vitesse u_1 par LDV. Elle s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{F}(\omega_r, |\hat{u}|) = G(\omega_r, |\hat{u}|)e^{i\Phi(\omega_r, |\hat{u}|)}. \quad (2.68)$$

G correspond au gain et Φ correspond au délai de réponse entre les fluctuations de vitesse et le taux de dégagement de chaleur. Pour une amplitude de fluctuation de vitesse $|\hat{u}|$ fixée, on retrouve donc la définition de la fonction de transfert de flamme classique.

Le lien entre l'index d'interaction n du solveur de Helmholtz et le gain $G(\omega)$ expérimental est établi. On suppose l'index d'interaction d'AVSP nul en dehors de la flamme et égal à une valeur constante n_0 dans la flamme. De même, le temps de retard τ est supposé constant et égal à τ_0 dans la flamme de volume V_{flamme} .

Le taux de chaleur global \hat{Q} est obtenu en intégrant le taux de dégagement de chaleur local sur le volume Ω du domaine. L'Eq. (2.64) permet alors d'obtenir :

$$\hat{Q} = \int_{\Omega} \hat{q}(\mathbf{x}) dx = V_{\text{flamme}} \hat{q}(x) = q_{av} n_0 e^{i\omega\tau_0} \frac{\hat{\mathbf{u}}^{\text{ref}}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}}{\bar{\mathbf{u}}} V_{\text{flamme}},$$

d'où, en utilisant (2.68) :

$$q_{av} n_0 e^{i\omega\tau_0} \frac{\hat{\mathbf{u}}^{\text{ref}}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}}{\bar{\mathbf{u}}} V_{\text{flamme}} = \bar{Q} G(\omega_r, |\hat{u}|) e^{i\Phi(\omega_r, |\hat{u}|)} \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}}{U_b}. \quad (2.69)$$

La relation entre le facteur d'amplification d'AVSP et le facteur expérimental est donc (avec $\bar{u} = U_b$) :

$$n_0 = \frac{G(\omega_r, |\hat{u}|) e^{i\Phi(\omega_r, |\hat{u}|)} \bar{Q}}{q_{av} V_{\text{flamme}}}. \quad (2.70)$$

Par ailleurs le délai τ_0 est simplement donné par :

$$\tau_0 = \frac{\Phi(\omega_r, |\hat{u}|)}{\omega}. \quad (2.71)$$

Un calcul LES de la configuration expérimentale a été effectué par Paliès sur la géométrie avec le code AVBP du CERFACS [9]. La figure 2.8 montre le profil de vitesse du son obtenu. Dans la zone de gaz frais, la vitesse du son correspond à celle d'un mélange à température ambiante, à environ 350 m.s^{-1} et s'élève à 830 m.s^{-1} dans la zone de gaz chauds.

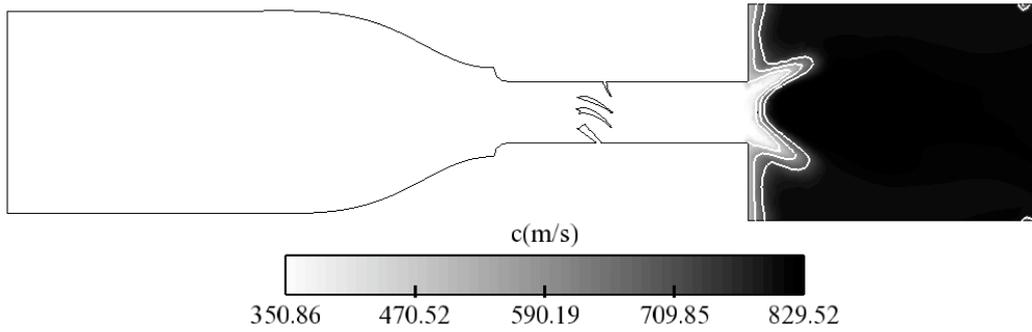


FIG. 2.8 – Profil de vitesse du son.

Pour effectuer le calcul AVSP, le champ initial de la LES et les données expérimentales sur $G(\omega_r, |\hat{u}|)$ et $\Phi(\omega_r, |\hat{u}|)$ sont utilisés. De manière à définir la zone de flamme, on mesure le taux de dégagement de chaleur en chaque point sur la solution AVBP. La zone réactive est alors définie comme l'ensemble des points \mathbf{x} pour lesquels le dégagement de chaleur moyen $q(\mathbf{x})$ est supérieur à une valeur seuil de 10^7 W/m^3 .

n_0 et τ_0 étant les valeurs déduites des données expérimentales à partir des équations (2.70) et (2.71), on impose

$$n_u(x) = n_0 \text{ et } \tau_u(x) = \tau_0 \text{ dans la zone de flamme}$$

$n_u(x)$ et $\tau_u(x) = 0$ partout ailleurs. Les figures 2.9 et 2.10 donnent les profils de n_u et τ en entrée d'AVSP. Le taux de chaleur volumique total est également calculé. Les valeurs expérimentales sont $\bar{Q}_A = 2.5 \text{ kW}$ et $\bar{Q}_B = 4 \text{ kW}$. Or l'intégration volumique du taux de dégagement de chaleur sur la solution AVBP donne $\bar{Q}_A = 1.7 \text{ kW}$. Le régime calculé dans le LES ne correspond pas aux valeurs expérimentales. La position de la flamme est

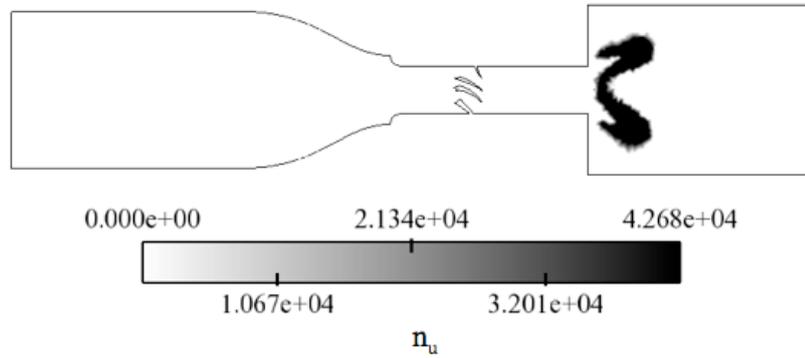


FIG. 2.9 – Profil de n_u

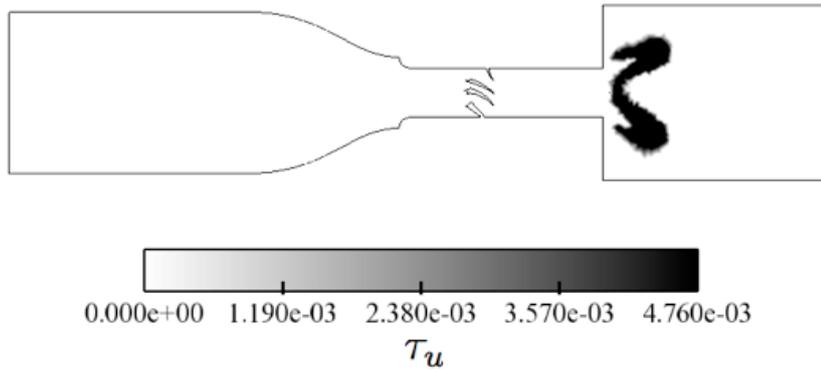


FIG. 2.10 – Profil de τ (s).

cependant supposée être la même. Le champ LES est utilisé pour donner le profil de n et τ à AVSP, mais en rectifiant la valeur du taux de dégagement de chaleur volumique.

Plusieurs longueurs ont été testées dans l'expérience pour l'admission et le tube à flamme. De manière à éviter d'avoir à modifier le maillage à chaque calcul, ces différentes longueurs sont prises en compte en imposant en entrée et en sortie une impédance qui simule la présence d'un tube de longueur L en amont ou en aval, comme représenté schématiquement sur la figure 2.11. L'addition d'une impédance induit un déphasage. Une impédance fictive purement imaginaire est imposée.

$$Z_e = \frac{R_e + 1}{R_e - 1} = \frac{e^{2ikL_e} + 1}{e^{2ikL_e} - 1} \quad (2.72)$$

où R_e dénote le coefficient de réflexion en entrée.

De même en sortie, on imposera

$$Z_s = \frac{R_s - 1}{R_s + 1} = \frac{e^{2ikL_s} - 1}{e^{2ikL_s} + 1} \quad (2.73)$$

où R_s dénote le coefficient de réflexion en sortie.

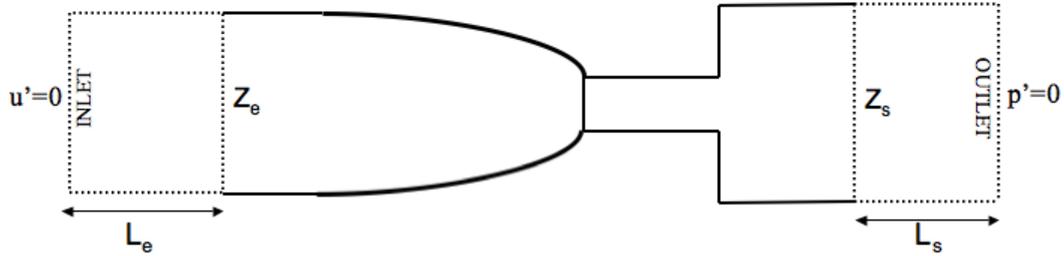


FIG. 2.11 – Représentation schématique de la configuration expérimentale. Les longueurs d'entrée L_e et L_s sont variables.

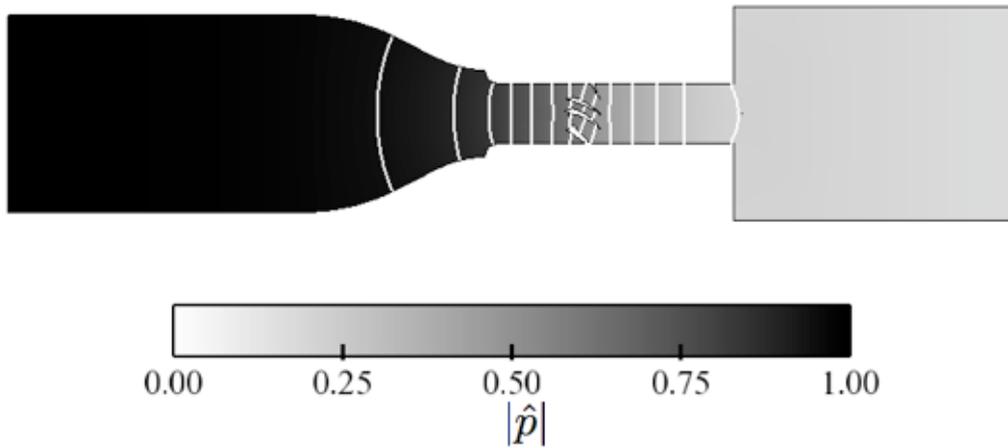


FIG. 2.12 – Champ du module du vecteur pression.

Le cycle limite peut être déterminé en cherchant l'amplitude à partir de laquelle l'instabilité cesse de croître. Cette étude a été faite par Kulkarni sur la configuration présentée ici [43]. Ici on cherche à prédire la phase de croissance linéaire de la stabilité, à faible perturbation d'amplitude de vitesse. Une étude d'instabilité avec ces FDF donne donc des fréquences et surtout des taux d'amplification qui dépendent de l'amplitude de la perturbation.

Pour le tube d'admission, trois longueurs sont possibles :

- configuration dite *courte* : $L_e = 117.3mm$
- configuration dite *moyenne* : $L_e = 181.3mm$
- configuration dite *longue* : $L_e = 245.3mm$

Pour le tube à flamme, quatre longueurs L_e sont utilisées : 100, 150, 200 et 400 mm. Pour chaque débit A et B , douze points de fonctionnement en fonction des différentes longueurs du tube d'admission et du tube à flamme sont donc définis.

Les figures 2.13 et 2.14 sont issues des données expérimentales fournies par Paliès : pour chacun des 24 points de fonctionnement, elles indiquent la stabilité du système. Pour les cas instables, la fréquence du cycle limite est également reportée.

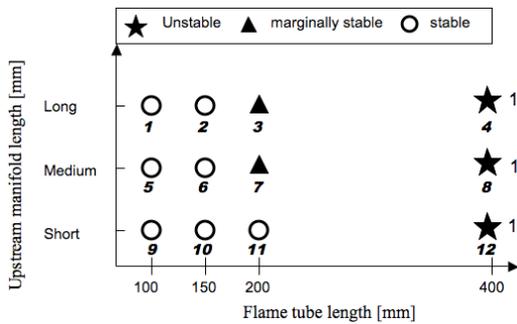


FIG. 2.13 – Carte de stabilité expérimentale pour la flamme A [73].

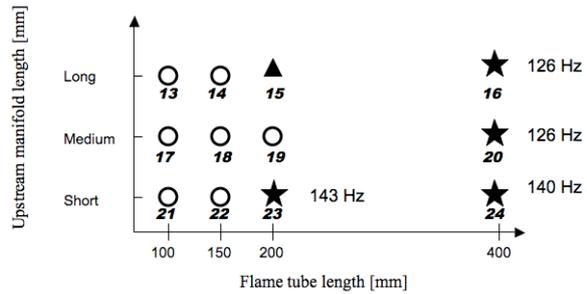


FIG. 2.14 – Carte de stabilité expérimentale pour la flamme B [73].

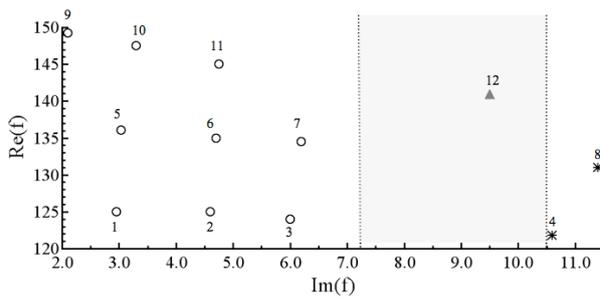


FIG. 2.15 – Carte de stabilité numérique pour la flamme A.

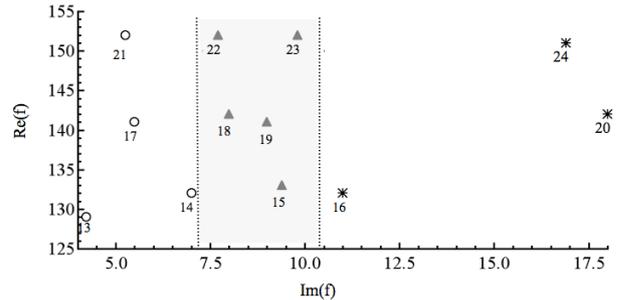


FIG. 2.16 – Carte de stabilité numérique pour la flamme B.

Les fréquences obtenues par AVSP sont montrées dans le plan complexe pour chaque sur les figures 2.15 et 2.16. Un mode est trouvé instable si la partie imaginaire de f est située à droite de la zone grisée qui représente l'incertitude sur les effets dissipatifs tels que mesurés expérimentalement. Expérimentalement, pour une longueur de tube à flamme de 400 mm, toutes les longueurs de l'admission conduisent à une instabilité auto-entretenu. Cependant, les résultats AVSP ne prévoient pas une instabilité majeure pour le point de fonctionnement $n^{\circ}12$. A la place il prédit un mode légèrement instable, vu l'incertitude sur l'amortissement mesuré expérimentalement. Pour la flamme B, la carte de stabilité est bien reproduite. Compte tenu de cette incertitude de 10 Hz sur la mesure expérimentale de l'expérience, on peut prendre comme sûrs uniquement les points qui sont suffisamment éloignés de la zone délimitée en gris sur les figures 2.15 et 2.16. Pour la flamme B, on peut donc prédire comme sévèrement instables les points 16, 20 et 24. Mais le point 23 est dans la zone de légère instabilité. Pour la flamme A, on ne trouve pas de point légèrement

instable. Tous les points légèrement instables dans l'expérience s'avèrent stables dans le code (point 3 et 7). Le point 12 est légèrement instable au lieu d'être franchement instable. Les incertitudes sur le taux d'amortissement sont telles que les résultats de AVSP sont en fait possiblement en accord avec les résultats expérimentaux.

Prise en compte des plaques multiperforées dans un solveur de Helmholtz

Sommaire

3.1	Modèles acoustiques	42
3.2	Implémentation du modèle pour les plaques perforées dans un solveur de Helmholtz	54
3.2.1	Implémentation du modèle de Howe pour le cas isotherme	54
3.2.2	Implémentation du modèle de Howe pour le cas anisotherme	57
3.2.3	Modification des sources du code	58
3.3	Discrétisation de l'équation de Helmholtz dans le cas d'une MP.	59
3.4	Validation du codage dans le cas d'un champ moyen uniforme .	60
3.4.1	Présentation du cas	60
3.4.2	Résultats et comparaison avec AVSP	62
3.5	Validation du codage avec un champ avec un saut de température	65
3.6	Influence de la vitesse du <i>bias flow</i>	68
3.7	Comportements limites	72
3.8	Epaisseur de plaque	73
3.9	Conclusion	74

Dans le chapitre 1, le rôle des plaques multiperforées dans le refroidissement des chambres de combustion a été abordé. Les plaques perforées sont aussi utilisées dans certains cas pour amortir le bruit (tuyaux d'échappement de voitures [27], nacelles d'avion [23, 52]). Si les plaques multiperforées présentes dans les chambres de combustion sont utilisées en premier lieu pour assurer le refroidissement, elles ont un impact sur l'acoustique. Leur impact sur l'acoustique des chambres rend donc nécessaire leur prise en compte pour la simulation numérique des chambres de combustion pour la prédiction des instabilités thermo-acoustiques. La dimension géométrique des perforations des plaques rend leur maillage impossible. C'est pourquoi la section 3.1 s'intéresse aux modèles développés pour simuler l'impact acoustique des plaques perforées. Une fois que le modèle le plus adapté a été choisi pour l'implémentation dans le solveur de Helmholtz, le codage est expliqué dans la section 3.2. Des cas analytiques sont testés pour valider l'implémentation.

Paramètres	Ecoulement		Domaine				Modèle		
	Bias flow	Grazing flow	Interaction	Epaisseur	Linéaire	Non linéaire	Expérimental	Numérique	Analytique
Howe [29]	X	-	-	-	X	-	-	-	X
Howe et al. [31]	-	X	-	-	X	-	-	X	X
Jing & Sun [41]	X	-	-	X	X	-	-	X	X
Luong [54]	X	-	-	X	X	-	X	-	-
Melling [58]	-	-	-	X	X	-	-	-	X

TAB. 3.1 – Récapitulation des modèles existants sur les MP abordés dans ce chapitre.

3.1 Modèles acoustiques

1. Interaction entre les ondes acoustiques et les structures solides

Pour comprendre le phénomène dissipatif qui caractérise les plaques multiperforées, on s'intéresse d'abord de façon générale à l'interaction entre un fluide en mouvement et une structure solide, dans le cadre d'une excitation acoustique [42]. L'écoulement d'un fluide à proximité d'une paroi rigide est contrôlé par les forces visqueuses qui modifient la vitesse pour que la condition de non glissement soit vérifiée, et par les gradients de température qui assurent la condition d'égalité entre la température du fluide et la température de la paroi. Dans le cadre d'un écoulement en proche paroi, l'importance des forces d'inertie par rapport à la viscosité est quantifiée par le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{ul}{\nu}, \quad (3.1)$$

où u et l sont respectivement la vitesse et la dimension caractéristique de l'écoulement et ν la viscosité cinématique.

Dans les régions où $Re \gg 1$, la viscosité joue un rôle mineur. Mais pour un écoulement turbulent en proche paroi, dans la couche limite visqueuse, u et l sont très petits et les effets visqueux dominent ($Re \rightarrow 0$). A haut nombre de Reynolds, ces phénomènes se passent dans la couche limite dont la taille caractéristique est très petite devant les autres dimensions qui caractérisent l'écoulement.

La viscosité domine donc aux bords de l'orifice, ce qui a pour conséquence d'imposer une structure de jet particulière montrée sur la figure 3.1. L'écoulement moyen de vitesse U se déplace du haut vers le bas, avec un nombre de Mach négligeable. Un phénomène de *vena contracta* se crée sur le bord de l'ouverture [28] : pour passer à travers l'orifice, le jet doit se courber dans la direction de l'axe principal de l'écoulement et sa section diminue comme montré sur la figure 3.1. La figure 3.2

montre la structure du jet en sortie d'orifice obtenue par un calcul LES réalisé par Dassé [16]. Le phénomène de *vena contracta* est bien visible.

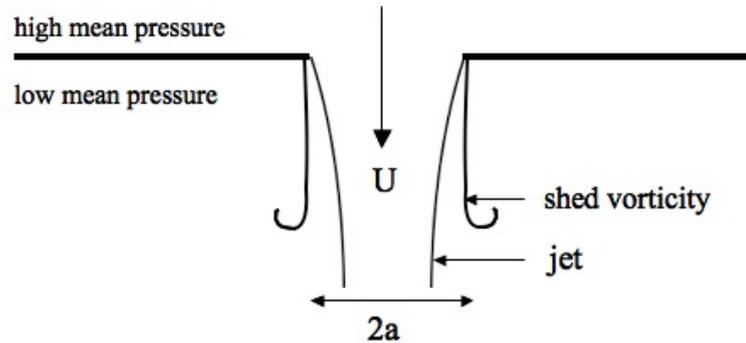


FIG. 3.1 – Phénomène de *vena contracta* d'un bias flow (vitesse U) au passage d'un orifice de diamètre $2a$.

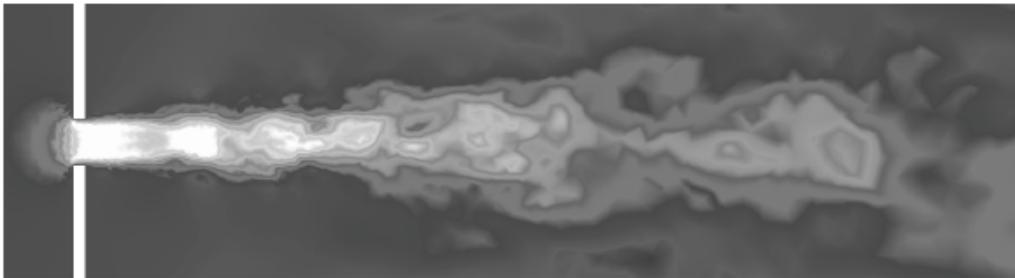


FIG. 3.2 – Profil de vitesse axiale en sortie de trou [16].

L'écoulement se trouve ainsi séparé en deux régions :

- la région amont et la région aval, où les ondes acoustiques planes se propagent dans les deux sens,
- la région où l'écoulement est compacté qui se comporte comme une région source ou puits, où va se passer la production/absorption d'énergie acoustique.

Si l'écoulement est soumis à une perturbation harmonique pulsative, on va observer un lâcher tourbillonnaire pulsé à la fréquence de l'excitation acoustique. Ce phénomène appelé *vortex shedding* est responsable de l'amortissement du son [29, 96], Chap. 5.3 de [32]. Les tourbillons absorbent l'énergie acoustique en la dégradant en énergie cinétique. L'analyse de Mendez et al. [60, 62] montre la présence de tourbillons contra-rotatifs dans la zone de détachement du jet. Le jet sortant se mélange avec l'écoulement principal, et les structures turbulentes sont convectées en aval et dissipées (Fig. 3.3). Ce comportement dépend de la fréquence de l'excitation acoustique comme montré sur la figure 3.4. A 400 Hz, le jet est déstabilisé plus facilement par l'excitation acoustique qu'à une fréquence de 250 Hz.

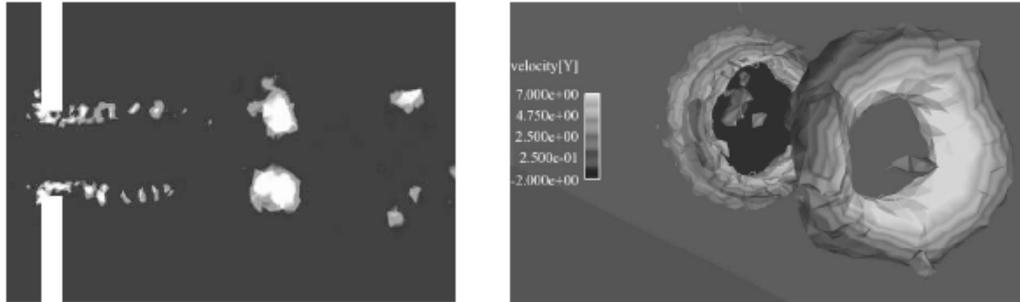


FIG. 3.3 – Structures tourbillonnaires en sortie de trou [16]. A gauche : profil de vitesse longitudinale. A droite : surface de critère Q

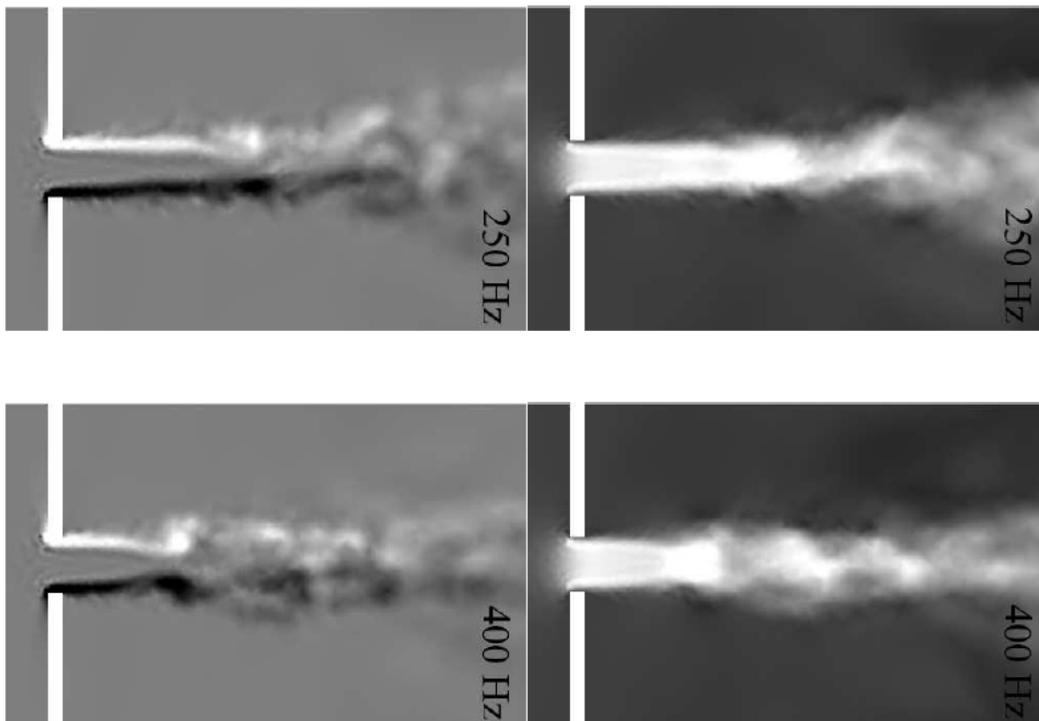


FIG. 3.4 – Solutions instantanées issues d'un calcul LES pulsé à 250 Hz et 400 Hz. Géométrie calculée montrée Fig. 3.12. Coupe en $z = 0$. A gauche, profil de vorticité dans la direction z , valeur de $-3 U/a$ (en noir) à $3 U/a$ (en blanc). A droite : Profil de vitesse selon x , valeur de $-0.5U$ (en blanc) à $1.5 U$ (en noir). [17]

2. Modèles acoustiques

Les modèles qui simulent le comportement des plaques perforées soumises à une excitation acoustique doivent être adaptés pour les conditions réelles auxquelles elles sont soumises. Les plaques perforées sont soumises à un écoulement axial (*bias flow*)

et à un écoulement tangentiel (*grazing flow*) (Voir Chap. 1). Dans certains cas, un seul de ces deux écoulements est présent. En l'absence d'écoulement, la dissipation du son est due à une convection non linéaire de la vorticité et son amortissement est dû à la viscosité [1, 2, 15, 14, 38, 58, 96, 95]. Rupp et al. [84] et Tran et al. [98] ont étudié la transition entre le domaine linéaire et le domaine non linéaire. L'absorption dans le domaine non linéaire devient fonction de l'amplitude de l'excitation acoustique en entrée. Elle augmente avec l'amplitude de l'excitation puis atteint un maximum. Augmenter encore l'amplitude de l'excitation amont entraîne au-delà du maximum une diminution de l'absorption. L'amortissement est accru par la présence d'un écoulement. Ce phénomène a été montré analytiquement par Howe [29] et expérimentalement par Dean [18] et Hughes et Dowling [35]. Les expériences de Jing et Sun [39] montrent que la présence d'un écoulement augmente non seulement l'amortissement mais aussi la bande de fréquence d'efficacité de l'amortissement. Dean a montré qu'il était possible de modifier l'impédance d'une plaque perfor e en agissant sur la vitesse de l'écoulement dans les trous [18]. Ce procédé est utilisé pour développer des moyens de contrôle actif basés sur les plaques multiperforées soumises à un écoulement [98],[108].

3. Le modèle de Howe

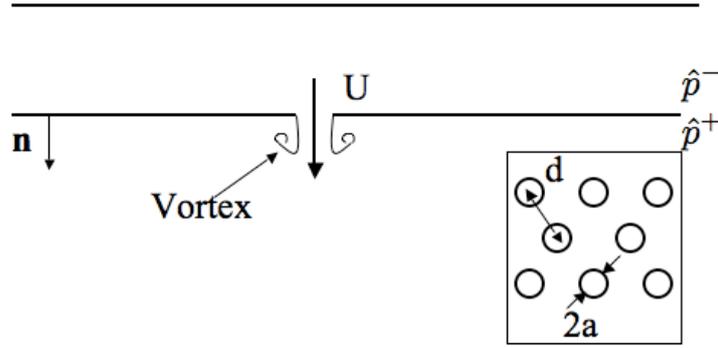


FIG. 3.5 – Plaque perfor e soumise à une excitation acoustique. Configuration propre au modèle de Howe.

Howe [29] a développé une théorie linéaire sur la dissipation due à l'écoulement moyen. Le comportement acoustique d'un orifice peut être décrit par sa conductivité de Rayleigh [80] définie comme :

$$K_a = \frac{i\rho_0\omega\hat{G}}{\hat{p}^+ - \hat{p}^-}, \quad (3.2)$$

où \hat{G} est le flux volumique fluctuant à travers l'orifice. Le comportement acoustique d'une plaque multiperfor e peut être exprimé à partir de la conductivité d'une perforation en faisant l'hypothèse que la structure de l'écoulement est identique au cas d'une seule perforation sur une plaque infinie. Cette hypothèse est valide tant que la

distance inter-orifice d est grande devant le rayon a des perforations. L'écoulement instationnaire à travers un seul orifice circulaire au coeur d'une plaque acoustiquement compacte est alors considéré. Cette hypothèse de compacité acoustique suppose que la longueur d'onde de l'excitation acoustique à laquelle est soumise la plaque est grande devant l'épaisseur de la plaque. Howe considère la plaque infiniment mince. \hat{p}^- et \hat{p}^+ sont les fluctuations de pression acoustique respectivement en amont et en aval de la plaque (Fig. 3.5). L'interaction entre la plaque et l'écoulement est linéaire si $\hat{p}^+ - \hat{p}^-$ est petit devant le saut de pression hydrodynamique qui impose l'écoulement à travers la plaque. Le nombre de Mach de l'écoulement étant considéré faible, l'écoulement près de la plaque est considéré incompressible de masse volumique ρ_0 . Le nombre de Reynolds $Re = \frac{Ua}{\nu}$ de l'écoulement est grand. La viscosité n'agit ainsi que sur les bords de l'orifice. L'écoulement se sépare au niveau des bords et forme un jet. Sous l'action d'une excitation acoustique de faible amplitude, des vortex sont générés par lâcher tourbillonnaire et convectés à la vitesse U de l'écoulement. Howe fait l'hypothèse que la vorticité est concentr e en une nappe tourbillonnaire (*vortex sheet*) de forme cylindrique séparant deux régions d'écoulement potentiel. Il utilise une condition de Kutta [3] pour évaluer la force du vortex. Il en déduit une expression analytique pour la conductivité de Rayleigh :

$$K_a = 2a(\Gamma_a - i\Delta_a). \quad (3.3)$$

Γ_a et Δ_a sont fonction du nombre de Strouhal :

$$\Gamma_a - i\Delta_a = 1 + \frac{\frac{\pi}{2}I_1(St)e^{-St} - iK_1(St)\sinh(St)}{St(\frac{\pi}{2}I_1(St)e^{-St} + iK_1(St)\cosh(St))}, \quad (3.4)$$

où I_1 et K_1 sont les fonctions de Bessel modifiées. Le nombre de Strouhal de l'écoulement est défini en fonction de la fréquence de l'excitation, du rayon de l'orifice et de la vitesse du *bias flow* :

$$St = \frac{\omega_r a}{U}. \quad (3.5)$$

La figure 3.6 montre l'évolution de la partie réelle de $\frac{K_a}{2a}$ (c'est-à-dire Γ_a) et de l'oppos e de sa partie imaginaire ($-\Delta_a$) en fonction du nombre de Strouhal. Γ_a et $-\Delta_a$ sont positifs pour tout St . $-\Delta_a$ atteint un maximum. L'amortissement dépend de la partie imaginaire de K_a (ceci sera montr e au chapitre 4 par une approche de bilans acoustiques). Il atteint par conséquent comme $-\Delta_a$ un maximum.

Avec les notations de la figure 1.4, le débit volumique fluctuant s'écrit :

$$\hat{G} = d^2 \hat{u}^\pm. \quad (3.6)$$

On utilise la notation \hat{u}^\pm pour désigner la fluctuation de vitesse acoustique qui est une grandeur homogène au saut de la plaque, contrairement à U qui est la vitesse débitante dans la perforation.

La combinaison de l'équation de la quantité de mouvement combinée avec l'Eq. (3.2) permet d'obtenir une relation entre le saut de pression acoustique à travers la plaque et la vitesse acoustique sur le bord :

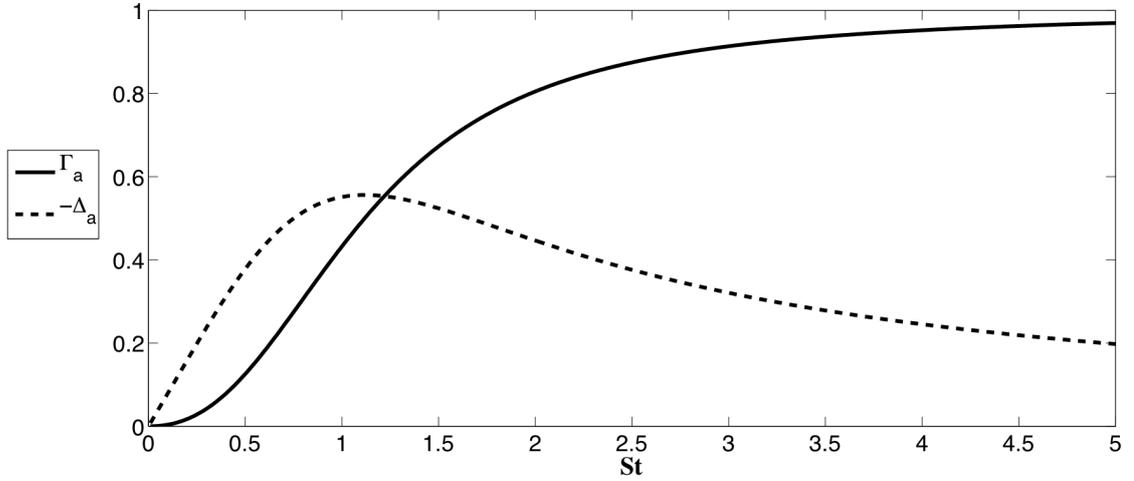


FIG. 3.6 – Evolution de Γ_a et $-\Delta_a$ en fonction de St .

$$[\hat{p}^+ - \hat{p}^-] = \frac{i\omega\rho_0}{K_a} d^2 \hat{u}^\pm. \quad (3.7)$$

L'impédance d'une plaque s'écrit alors :

$$z_{\text{MP}} = \frac{i\omega\rho_0 d^2}{K_a}. \quad (3.8)$$

En développant z_{MP} sous l'hypothèse $\omega_i \ll \omega_r$, l'impédance s'écrit :

$$z_{\text{MP}} = \frac{\rho_0 \omega d^2}{2a(\Gamma_a^2 + \Delta_a^2)} (-\Delta_a + i\Gamma_a), \quad (3.9)$$

et peut se décomposer en sa partie réelle (la résistance, R_{MP}) et sa partie imaginaire, (réactance X_{MP}).

$$R_{\text{MP}} = -\frac{\rho_0 \omega d^2}{2a(\Gamma_a^2 + \Delta_a^2)} \Delta_a \text{ et } X_{\text{MP}} = -\frac{\rho_0 \omega d^2}{2a(\Gamma_a^2 + \Delta_a^2)} \Gamma_a. \quad (3.10)$$

Comportement asymptotique de la conductivité de Rayleigh

Quand $St \rightarrow \infty$, c'est-à-dire en l'absence d'écoulement moyen, $\Gamma_a \rightarrow 1$ et $\Delta_a \rightarrow 0$, la conductivité de Rayleigh se réduit à $K_a = K_0 = 2a$. On montrera au chapitre 4 que l'amortissement est dû au terme Δ_a . Dans le cas où K_a est réel comme dans le cas limite cité ci-dessus, la plaque n'induit pas d'amortissement dans l'approximation linéaire.

Validation du modèle de Howe par les expériences

Le modèle de Howe a été adapté par Hughes et Dowling [35] pour déterminer l'impédance acoustique d'un écran perforé infiniment mince, derrière lequel une paroi est placée à distance l_c . De cette manière les ondes peuvent être presque totalement absorbées par réflexions multiples sur la paroi. La configuration est représentée sur la figure 3.7. Un bon accord est trouvé entre les impédances qu'ils dérivent et les impédances mesurées expérimentalement. Cette étude constitue donc une validation expérimentale du modèle de Howe. L'impédance de la cavité peut s'exprimer ainsi :

$$z_c = -\frac{i\rho_0 c_0}{\tan(kl_c)}. \quad (3.11)$$

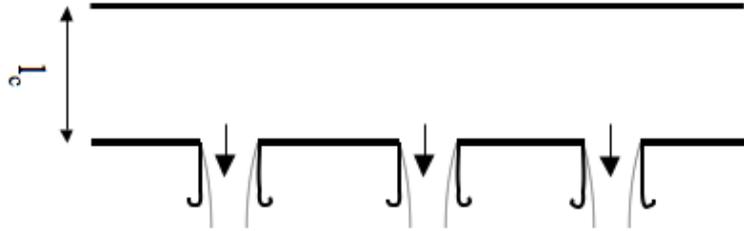


FIG. 3.7 – Evolution du rapport r/a en fonction de la distance au trou.

L'impédance totale du système s'écrit alors :

$$z_t = z_c + z_{MP} = i\rho_0 \omega \left(\frac{d^2}{K_a} - \frac{1}{k \tan(kl_c)} \right). \quad (3.12)$$

Le coefficient de réflexion du système peut alors être déduit

$$R = \frac{z_t + \rho_0 c_0}{z_t - \rho_0 c_0}, \quad (3.13)$$

puis le coefficient d'absorption correspondant.

$$\Delta = 1 - |R|^2. \quad (3.14)$$

Ce raisonnement est aussi utilisé par Tran [98, 99] ou Bellucci [4], tout comme Dassé [17] qui simule l'expérience de Bellucci par LES et compare les coefficients de réflexions mesurés expérimentalement et ceux donnés par les calculs numériques.

La plupart des autres modèles acoustiques existants sur les plaques multiperforées sont basées sur le modèle de Howe.

Prise en compte de l'écoulement tangentiel

La question de l'impact de l'écoulement tangentiel sur l'impédance d'une plaque

multi-perforée est encore une question ouverte à ce jour. Les données existantes sont souvent expérimentales et donnent des modèles empiriques. Les prédictions du modèle développé par Rice [82] vont à l'encontre des résultats issus des expériences. D'après ce modèle, la réactance ne dépend pas de la vitesse de l'écoulement tangentiel U_g mais la résistance de la plaque est fonction de la vitesse U_g . Jing et Sun [41] montrent au contraire que la réactance dépend de U_g . Howe et al [31] ont étudié les configurations montrées sur les figures 3.8 et 3.9. La conductivité de Rayleigh est obtenue numériquement pour un orifice circulaire et analytiquement pour un orifice rectangulaire. Dans le cas où l'écoulement est bi-latéral ($U_+ = U_-$), des intervalles quasi-périodiques de fréquence peuvent être délimités où le comportement de la plaque est alternativement dissipatif et amplificateur. Dans le cas où l'écoulement est unilatéral ($U_- = 0$), la forme de K_a est moins impactée. Cependant pour certains Strouhal la partie imaginaire de K_a est positive, ce qui peut induire une production d'énergie au lieu d'un amortissement : la figure 3.9 (cas $U_- = 0$) montre que entre $St = 1.9$ et $St = 3.9$, Δ_a est négatif. Grace et al [26] ont étudié l'impact de la forme des trous en présence d'un écoulement tangentiel bi-latéral. La forme des trous impacte peu la forme de la conductivité de Rayleigh. Sun et al [94] ont montré que l'impact du *grazing flow* était négligeable à haute vitesse. Dans les applications industrielles (régime de haute vitesse), il semble donc correct de négliger l'effet du *grazing flow*.

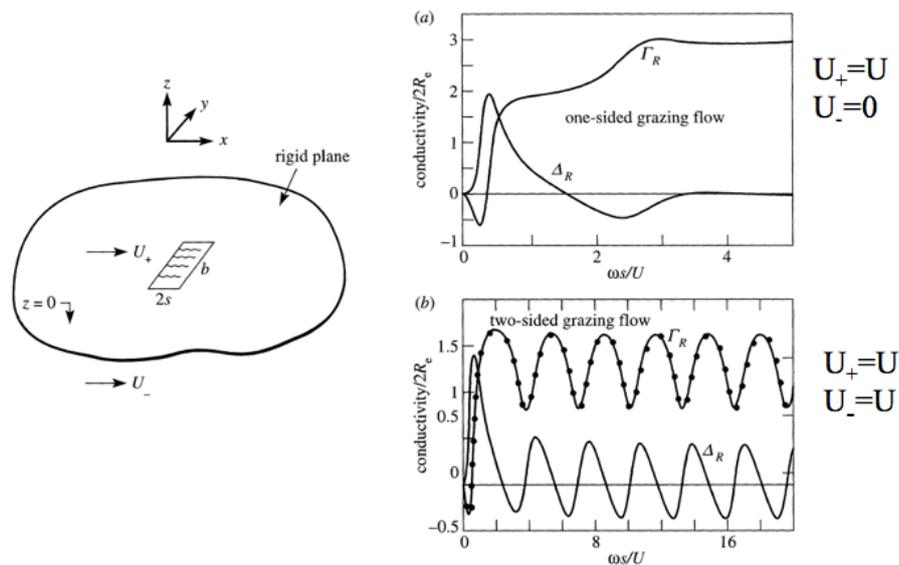


FIG. 3.8 – Evolution de K_a en fonction du nombre de Strouhal pour une ouverture rectangulaire.

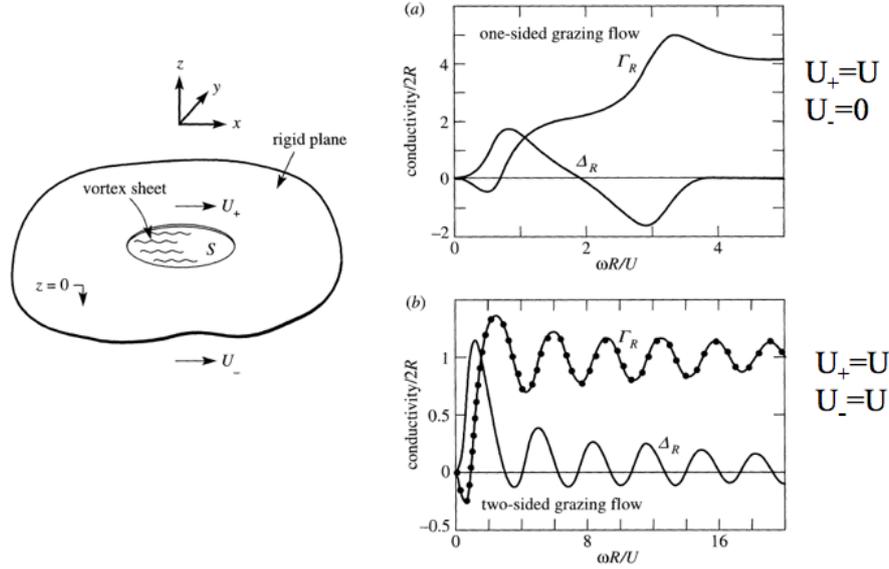


FIG. 3.9 – Evolution de K_a en fonction du nombre de Strouhal pour une ouverture circulaire.

Prise en compte de l'interaction entre orifices

Lee et al. [49] ont utilisé la BEM¹ pour étudier l'impact de la porosité sur l'impédance des plaques perforées. La réactance diminue quand la porosité augmente à cause de l'interaction entre les orifices. L'interaction est à prendre en compte au dessus d'une porosité de 20%. Les cas étudiés dans cette thèse ont une porosité inférieure à 3%. L'hypothèse effectuée par Howe pour étudier une perforation isolée est donc valide.

Prise en compte de l'épaisseur de la plaque

Le modèle de Howe ne prend pas en compte l'épaisseur de la plaque, cependant dans certaines applications, l'épaisseur de la plaque est comparable au rayon des perforations. Le modèle de Howe a donc été modifié pour prendre en compte l'épaisseur de la plaque [39, 40]. Jing et Sun [40] ont proposé une modification du modèle de Howe (MHM), en ajoutant un terme à la conductivité de Rayleigh qui contient l'épaisseur h de la plaque.

$$K_a = 2a \left(\frac{1}{\Gamma_a - i\Delta_a} + \frac{2h}{\pi a} \right)^{-1}. \quad (3.15)$$

Les figures 3.10 et 3.11 comparent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la conductivité de Rayleigh (adimensionnalisées par $2a$) prédite par les modèles de Howe classique et modifié (MHM). Cette comparaison est tracée pour différentes valeurs du rapport h/a , rapport entre l'épaisseur de plaque et le rayon des

¹Boundary Element Method

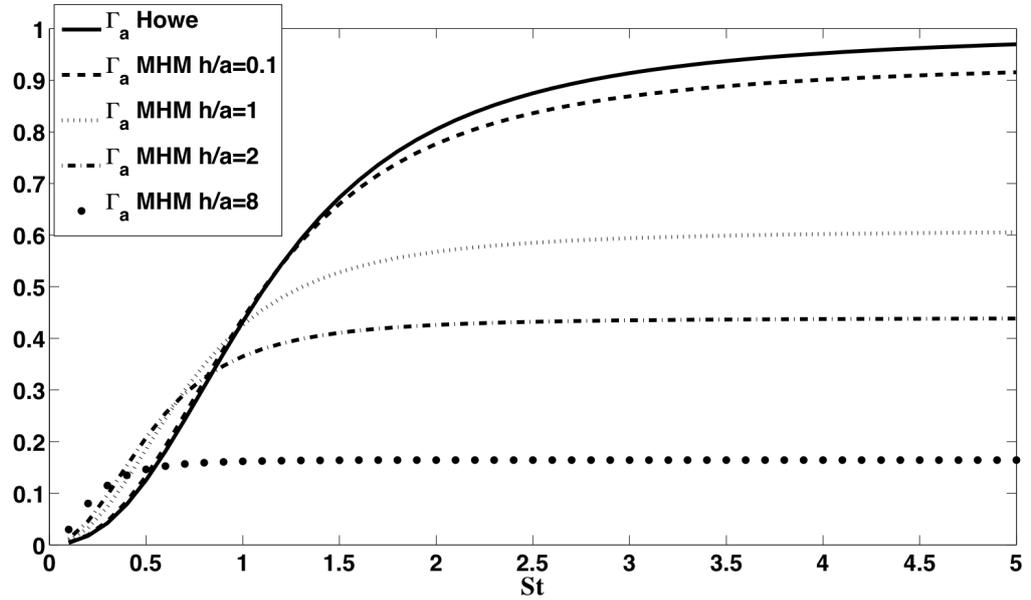


FIG. 3.10 – Evolution de Γ_a et $-\Delta_a$ en fonction de St .

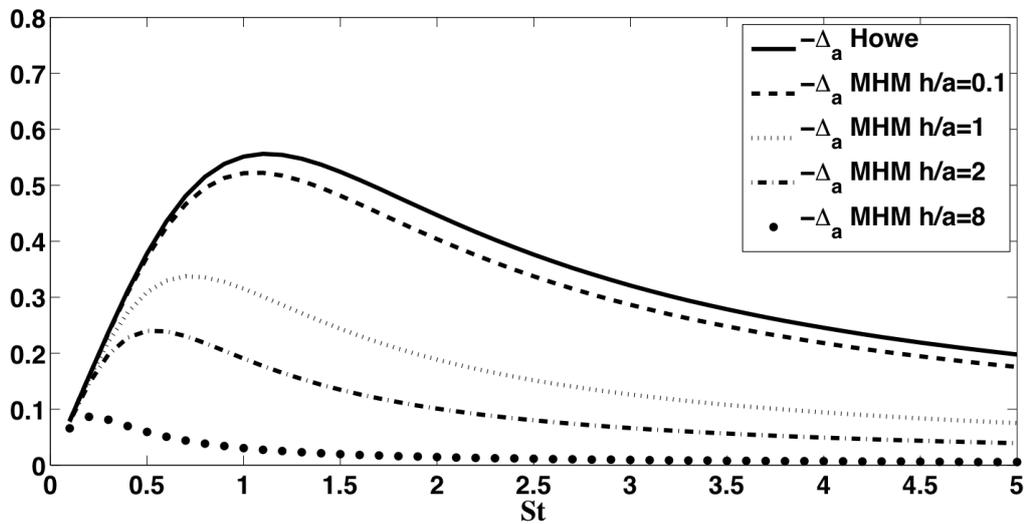


FIG. 3.11 – Evolution de Γ_a et $-\Delta_a$ en fonction de St .

perforations. L'écart prévu par les modèles augmente avec l'épaisseur de la plaque et dépend fortement du Strouhal. Jing et Sun [39, 40] ont montré expérimentalement que l'effet de l'épaisseur sur la conductivité de Rayleigh était négligeable à haute vitesse. Ce comportement est visible sur les figures. A faible Strouhal, les courbes

sont très proches.

Howe [30] montre qu'une plaque soumise à un écoulement rasant voit ses propriétés changer si on en modifie l'épaisseur. Cependant à faible nombre de Strouhal, l'impact de l'épaisseur sur K_a est négligeable. A partir de $St = 2.4$, certains cas existent pour lesquels $\Delta_a > 0$ et une énergie est produite. L'étude menée par Dassé et Mendez [17] permet de comparer les modèles prenant en compte l'épaisseur de plaque. La configuration calculée dans [17] est la configuration étudiée expérimentalement par Bellucci et al [4]. Le profil du jet est tracé et montré sur la figure 3.13. Les résultats LES sont en très bon accord avec le modèle numérique pour l'épaisseur développé par Jing et Sun (JSM). Cependant ce modèle numérique n'est pas adaptable dans un solveur de Helmholtz et ne pourra donc pas être utilisé ici. Les résultats du modèle de Howe modifié (MHM) sont également en bon accord. Dassé compare les résultats sur le coefficient de réflexion. Eldredge et Bodony [22] ont calculé la configuration de Mendez [63] et ont trouvé des meilleures correspondances entre la conductivité de Rayleigh calculée par la LES et la conductivité de Rayleigh prédite par le modèle de Howe modifié (MHM)[22].

Forme du jet

Une des hypothèses fortes du modèle de Howe porte sur la forme du jet, supposée cylindrique par Howe. L'étude de Dassé et Mendez [17] montre que le profil supposé par Howe est très loin de la réalité (Fig. 3.13). Le profil cylindrique prédit par Howe est représenté sur cette figure en pointillés. Le rayon est loin du profil prévu par la LES et le modèle numérique de Jing et Sun (JSM). Cependant les travaux de Luong [54] viennent appuyer le modèle de Howe même si l'hypothèse faite sur la forme du jet est erronée : Luong propose une expression simplifiée pour la conductivité de Rayleigh dans le cas d'une plaque infiniment mince

$$K_a = 2a \left(\frac{St}{St + 2i/\pi\sigma_j^2} \right), \quad (3.16)$$

où σ_j est le facteur de contraction du jet dans le phénomène de vena contracta. La conductivité de Rayleigh obtenue dans le cas où $\sigma_j = 0.75$ est très proche de celle du modèle de Howe classique. Cette étude appuie donc le fait que le modèle de Howe serait valide même si son hypothèse sur la forme du jet est fausse. Cette bonne concordance est expliquée par Luong [54] par le fait que les phénomènes dissipatifs sont impactés davantage par les vortex en sortie proche de l'orifice, où la contraction est encore faible comme montré sur la figure 3.13. Luong donne aussi une expression simplifiée pour la conductivité de Rayleigh dans le cas d'une épaisseur finie h :

$$K_a = \frac{K_0(\omega l_h/U)}{\omega l_h/U + i/\sigma_j^2}, \text{ avec } K_0 = \frac{\pi a^2}{l} \text{ et } l_h = \frac{\pi a}{2} + h. \quad (3.17)$$

Dans le cas limite où $h = 0$, K_0 a pour valeur $2a$.

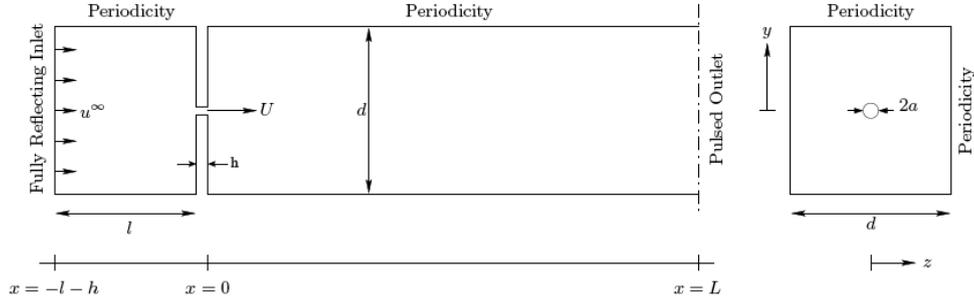


FIG. 3.12 – Représentation schématique du banc expérimental étudié par [4].

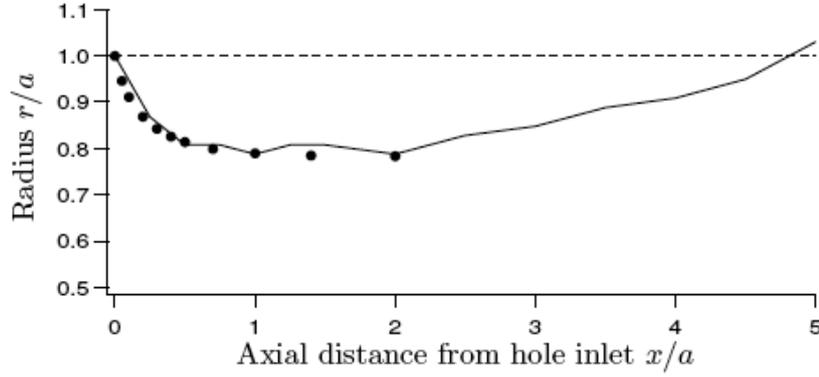


FIG. 3.13 – Evolution du rapport r/a en fonction de la distance au trou. \circ : profil numérique supposé par JSM, - - - : profil cylindrique de Howe, - : résultats LES [17].

Une autre approche : le modèle de Melling

Un autre modèle analytique pour les plaques perforées a été développé par Melling [58]. Une approche différente de celle de Howe est employée. Ce modèle est basé sur la linéarisation des équations de Navier-Stokes à l'intérieur de chaque orifice. La dissipation du son est due dans ce modèle aux couches limites visqueuses et non au lâcher tourbillonnaire comme le modèle de Howe. Si u_1^- et p_1^- correspondent à la vitesse et pression fluctuantes en amont de la plaque, et u_1 la fluctuation de vitesse à l'intérieur de la perforation, h l'épaisseur de la plaque, on a

$$p_1 - p_1^- = i\omega\rho_0h \left[1 + \frac{l_\nu}{a}(1+i) \right] u_1 \quad (3.18)$$

où $l_\nu = (2\nu/\omega)^{1/2}$ est l'épaisseur de la couche limite visqueuse acoustique et ν la viscosité cinématique. Si σ est la porosité de la plaque, et u_1^+ la fluctuation de vitesse en sortie du trou, on a :

$$u_1 = \sigma u_1^+ \quad (3.19)$$

et donc

$$p_1^+ - p_1^- = i\omega\rho_0 h \left[1 + \frac{l_\nu}{a}(1+i) \right] \frac{u_1^+}{\sigma} \quad (3.20)$$

puis

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{h \left(1 + \frac{l_\nu}{a}(1+i) \right)} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-]. \quad (3.21)$$

Ce modèle est adapté dans le cas par exemple étudié par Noiray [69] où un ensemble de flammelles accrochées sur une plaque multiperforée empêche le développement des structures tourbillonnaires. Mais dans le cas que l'on va étudier dans cette thèse, pour modéliser les plaques perforées dans les chambres, il n'est pas nécessaire de considérer le modèle de Melling.

En résumé

Le modèle de Howe a été validé par l'expérience. Son expression sous la forme d'une impédance acoustique est bien adaptée pour l'implémentation dans un solveur de Helmholtz. La modification de ce modèle pour la prise en compte de l'épaisseur pour donner le modèle de Howe modifié (MHM) a donné de bons accords avec les calculs LES. L'impact de l'écoulement tangentiel est négligeable à haute vitesse et l'interaction entre orifices n'est à prendre en compte qu'à partir d'une porosité élevée. L'hypothèse restrictive sur la forme du jet a été démontrée comme peu importante par Luong. Le modèle analytique de Howe apparaît donc comme bien adapté pour être implémenté dans le solveur de Helmholtz AVSP.

3.2 Implémentation du modèle pour les plaques perforées dans un solveur de Helmholtz

Cette section explique de quelle manière le modèle de Howe peut être adapté pour être implémenté dans AVSP. Elle renvoie à des parties placées dans l'annexe A utiles comme méthodologie pour lancer un calcul AVSP avec plaques perforées. Le codage est validé à l'aide de comparaisons analytiques sur des géométries simples.

3.2.1 Implémentation du modèle de Howe pour le cas isotherme

Le modèle de Howe a été dérivé dans le cas d'une plaque infiniment mince. Le fluide est considéré incompressible dans le voisinage de la plaque avec pour masse volumique ρ_0 . Le modèle de Howe s'écrit d'après la section 3.1.3 :

$$[\hat{p}^+ - \hat{p}^-] = \frac{i\omega\rho_0}{K_a} d^2 \hat{u}^\pm. \quad (3.22)$$

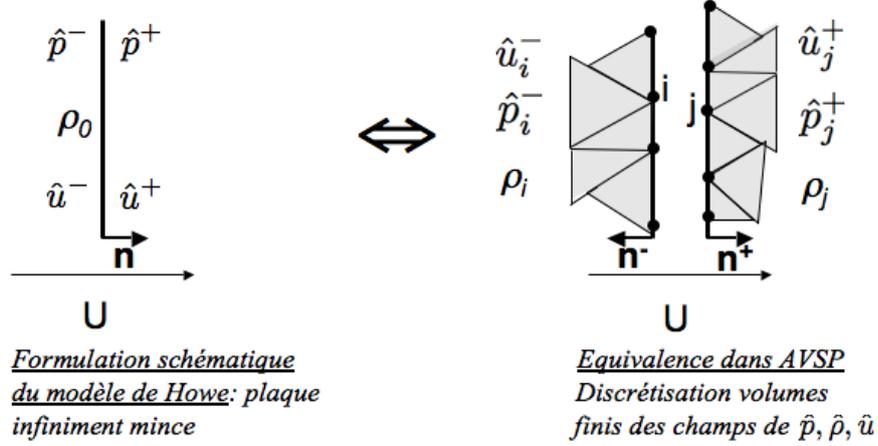


FIG. 3.14 – Equivalence entre le modèle de Howe et la formulation dans AVSP (cas isotherme).

La vitesse acoustique est conservée à la traversée de la plaque. La condition à coder dans AVSP est donc avec les notations de la figure 3.14 :

$$\hat{u}^+ = \hat{u}^-. \quad (3.23)$$

Le chapitre 2 montre que AVSP donne le champ de \hat{p} comme solution de l'Eq. (2.46). Pour coder l'Eq. (3.23) dans AVSP on utilise l'Eq. (2.15) de manière à obtenir une relation entre $\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n}$ et \hat{p} . L'égalité des fluctuations de vitesse acoustique s'écrit alors :

$$(\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^- = (\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^+. \quad (3.24)$$

Dans le cas d'une géométrie complexe, une plaque multiperforée est constituée de deux parois solides, et l'espace les séparant n'est pas maillé. Cet espace constitue l'épaisseur géométrique réelle de la plaque qui peut être différente de l'épaisseur h des modèles vus dans la section 3.1.3. En général l'épaisseur h considérée dans le MHM est proche de l'épaisseur géométrique de la plaque. La figure 3.14 illustre le principe de calcul des relations de saut sur une plaque multiperforée dans un code volumes finis. Le côté amont (noté $-$) est distingué du côté aval (noté $+$). Le vecteur pression est discrétisé par la méthode des volumes finis. Le saut de pression est donc évalué en calculant comme montré sur la figure 3.14

$$[\hat{p}_j - \hat{p}_i]. \quad (3.25)$$

Le coté aval de la plaque (ou côté noté $+$), se retrouve exactement dans la même configuration que le cas de Howe. La condition à imposer sur le côté $+$ est donc :

$$(\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^+ = \frac{K_a}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-]. \quad (3.26)$$

Or le saut de pression acoustique est défini pour chaque face de la plaque perforée comme la différence de pression entre la face opposée et elle-même. Le saut de pression $[\hat{p}]$ est donc défini pour la face + comme $[\hat{p}^- - \hat{p}^+]$ et pour la face - par $[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]$. On se retrouve donc à devoir coder dans AVSP :

$$(\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^+ = -\frac{K_a}{d^2} [\hat{p}] \quad (3.27)$$

Il faut maintenant trouver la condition à coder pour la face -. Le modèle de Howe s'écrit en considérant la plaque - :

$$(\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^- = \frac{K_a}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-]. \quad (3.28)$$

Or les normales sur les conditions limites dans AVSP étant définies comme des normales intérieures. La condition limite sur la face amont - s'écrit donc :

$$(\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^- = -\frac{K_a}{d^2} [\hat{p}]. \quad (3.29)$$

Une des difficultés dans l'implémentation de la condition de plaque multiperforée est que la condition doit fonctionner quel que soit le maillage, en particulier si les maillages des faces + et - ne sont pas coïncidants. Une étape de calcul préliminaire est alors nécessaire : pour chaque point M^- sur une face perforée, un point M^+ en lequel la valeur de la pression acoustique est interpolée d'après la valeur des trois points les plus proches du point M^+ [65]. La figure 3.15 décrit la situation. Soit M^- un noeud d'une des faces multiperforées, et M^+ le point coïncidant sur la plaque correspondante. La valeur de la pression acoustique au point M^+ est déduite des valeurs aux trois noeuds les plus proches M_1 , M_2 et M_3 . Si on note d_i ($i = 1, 2, 3$) la distance entre les noeuds M^- et M_i , on peut déduire la distance d'_i entre les noeuds M_i et M^+ à partir de l'épaisseur e de la plaque perforée, donc de la distance entre les deux faces. En négligeant la courbure de la plaque, d'après le théorème de Pythagore on a

$$d'_i = \sqrt{d_i^2 - h^2}. \quad (3.30)$$

La valeur de la pression acoustique au point M^+ est alors :

$$\hat{p}(M^+) = \frac{\hat{p}(M_1)d'_2d'_3 + \hat{p}(M_2)d'_3d'_1 + \hat{p}(M_3)d'_1d'_2}{d'_2d'_3 + d'_3d'_1 + d'_1d'_2}. \quad (3.31)$$

On note c_i les coefficients d'interpolation :

$$c_1 = \frac{d'_2d'_3}{d'_2d'_3 + d'_3d'_1 + d'_1d'_2}; c_2 = \frac{d'_3d'_1}{d'_2d'_3 + d'_3d'_1 + d'_1d'_2}; c_3 = \frac{d'_1d'_2}{d'_2d'_3 + d'_3d'_1 + d'_1d'_2}; \quad (3.32)$$

On a alors

$$\hat{p}(M^+) = c_1\hat{p}(M_1) + c_2\hat{p}(M_2) + c_3\hat{p}(M_3) \text{ avec } c_1 + c_2 + c_3 = 1. \quad (3.33)$$

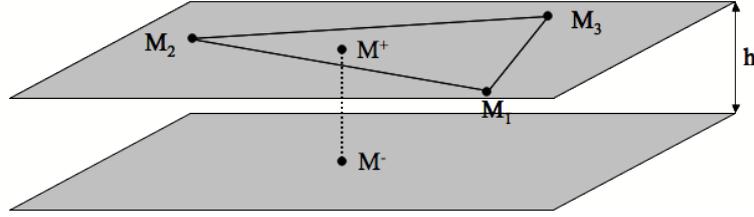


FIG. 3.15 – Interpolation entre deux maillages non coïncidents.

Dans le cas d'un maillage coïncident, où le point M^+ serait confondu avec le point M_1 , on a bien $c_1 = 1$ et $c_2 = c_3 = 0$.

Ce pré-traitement est codé dans un programme fortran à l'extérieur d'AVSP (voir Annexe A). Le fichier de sortie contient pour chaque noeud d'une plaque perforée la liste des trois points M_1 , M_2 et M_3 accompagnés de leur coefficients d'interpolation respectifs c_1 , c_2 , et c_3 .

Au début de chaque itération du solveur aux valeurs propres (chapitre 2), pour chaque noeud de multiperforation, la valeur de la pression au point correspondant est à nouveau calculée. La différence de pression acoustique $[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]$ est ensuite calculée à chaque itération. Compte tenu de la parallélisation du code, cette opération est assez complexe, car rien n'assure lors de la partition du domaine de calcul que le noeud M^- et les noeuds M_1 , M_2 et M_3 sont gérés par le même processeur. Un processus d'échange entre les différents processeurs est donc nécessaire.

3.2.2 Implémentation du modèle de Howe pour le cas anisotherme

A la différence du modèle de Howe et dans les configurations complexes réelles qu'on souhaite calculer, la masse volumique n'est pas égale de part et d'autre de la plaque. Les plaques perforées sont situées à l'interface entre un fluide froid en amont de masse volumique ρ^- et un fluide chaud de masse volumique ρ^+ . La figure 3.16 montre le résultat LES du profil de température autour d'une plaque perforée effectué par Mendez dans le cas anisotherme [61]. La température des gaz frais s'étend dans la zone des gaz chaud en sortie de la perforation. Il paraît donc judicieux de choisir comme masse volumique pour le modèle de Howe la masse volumique du fluide froid. Il est nécessaire d'adapter le modèle de Howe aux configurations réelles présentant un saut de masse volumique pour respecter la condition de l'Eq. (3.23).

Dans le cas anisotherme représenté sur la figure 3.17, l'égalité des vitesses acoustiques s'écrit :

$$\frac{1}{\rho^- i\omega} (\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^- = \frac{1}{\rho^+ i\omega} (\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^+ \quad (3.34)$$

La condition à imposer sur le côté + est à présent :

$$(\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^+ = \frac{\rho^+}{\rho^-} \frac{K_a}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-]. \quad (3.35)$$

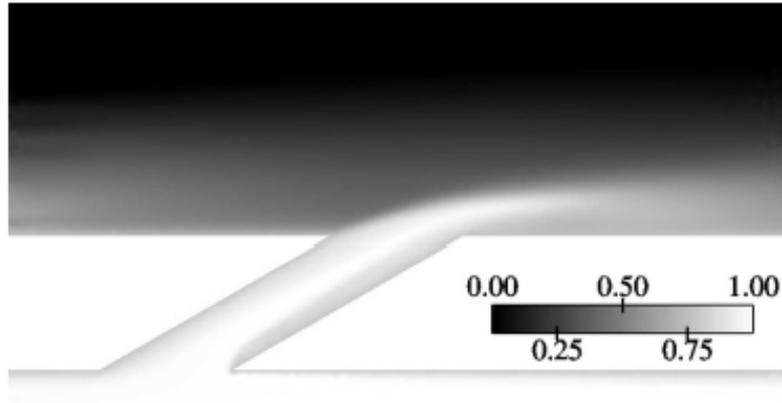


FIG. 3.16 – Coupe du profil de température dans une perforation. L'échelle correspond à 0 pour le fluide chaud et 1 pour le fluide froid [61].

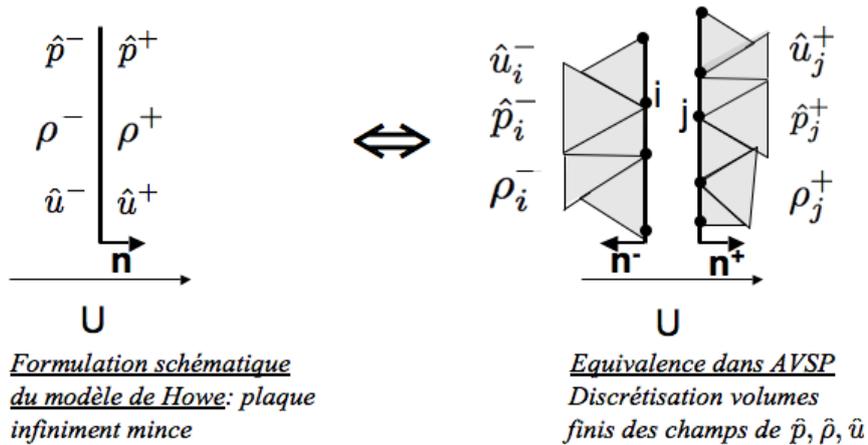


FIG. 3.17 – Equivalence entre le modèle de Howe et la formulation dans AVSP. Cas anisotherme.

Pour la face amont, le rapport des masses volumiques vaut l'unité et la condition à coder pour cette face est donc inchangée :

$$(\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})^- = -\frac{K_a}{d^2} [\hat{p}] \quad (3.36)$$

3.2.3 Modification des sources du code

La conductivité de Rayleigh est fixée pour une fréquence choisie en entrée du code. Le rapport entre gradient de pression sur les deux conditions limites (face amont et aval de

la plaque perforée) et saut de pression acoustique à travers la plaque est connu, comme montré dans les équations (3.36) et (3.27). Le codage de cette condition est proche de celui des conditions limites d'impédance (chapitre 2). En effet la condition de Robin exprime une relation entre gradient de pression et pression sur la condition limite d'impédance :

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = \frac{i\omega \hat{p}}{cZ}. \quad (3.37)$$

L'organigramme 47 donné en Annexe A récapitule de manière simplifiée les modifications effectuées dans les sources du code. L'annexe A donne également des détails quant à la procédure de lancement d'un calcul AVSP avec conditions de plaques perforées.

3.3 Discrétisation de l'équation de Helmholtz dans le cas d'une MP.

Le calcul de l'opérateur $\nabla \cdot c_0^2 \nabla \hat{p}|_j$ vu au chapitre 2 est à présent effectué dans le cas où le noeud j est placé sur une paroi multiperforée. La relation suivante est alors vérifiée :

$$(\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n})_j = -\frac{\rho(j) K_a}{\rho^-} \frac{1}{d^2} [\hat{p}].$$

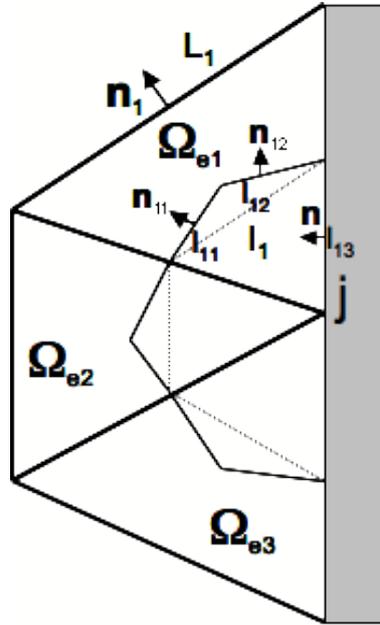


FIG. 3.18 – Définition de la cellule duale autour d'un noeud j .

On a donc maintenant

$$(c_0^2|_{\Omega_{e1}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e1}} \cdot l_{13} + c_0^2|_{\Omega_{e3}} \nabla \hat{p}|_{\Omega_{e3}} \cdot l_{33}) \cdot \mathbf{n} = -\frac{Kr(\omega) \rho_j}{d^2 \rho^-} [\hat{p}] (l_{13} + l_{33}) p_j. \quad (3.38)$$

Ici, K_a est une fonction de ω . Le problème aux valeurs propres est donc résolu par une méthode de point fixe comme dans le cas d'une condition limite d'impédance (Ch. 2). La fréquence à l'itération k est fixée à $\omega = \omega_k$ et par conséquent $K_a = K_a(\omega_k)$.

De cette manière, le problème matriciel devient

$$(\mathbf{A} + \omega_k \mathbf{B} + \mathbf{E})\mathbf{P} + \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{M}\mathbf{D}(\omega)\mathbf{P}, \quad (3.39)$$

avec

$$E_{lj} = -\frac{Kr(\omega_k)}{d^2} \frac{\rho_j}{\rho^-} [\hat{p}] \delta_{lj}. \quad (3.40)$$

De manière générale la convergence est obtenue au bout de trois ou quatre itérations du point fixe.

3.4 Validation du codage dans le cas d'un champ moyen uniforme

3.4.1 Présentation du cas

Le cas académique considéré pour la validation analytique est un cylindre plein, multiperforé par une plaque cylindrique coaxiale. La configuration est représentée sur la figure 3.20. Le cylindre est de rayon extérieur $r_2 = 0.25$ m et la plaque multiperforée (MP) est située à $r_1 = 0.2$ m. On désigne par r_1^- et r_1^+ la coordonnée radiale en amont et en aval de la plaque. Le cylindre est 3D, même si la représentation de la figure est 2D. Cependant la dimension selon z est petite devant les autres, les modes longitudinaux dans cette direction seront donc situés à haute fréquence et sont négligés ici. Pour une visualisation plus claire, l'épaisseur de la plaque a été agrandie sur le schéma, mais on prend comme épaisseur géométrique 1.10^{-5} m. On prend un champ de température qui correspond aux conditions normales de température et de pression, soit $c_0 = 347$ m.s⁻¹.

Les faces externes du cylindre sont considérées comme des murs. L'équation de Helmholtz et sa condition limite associée s'écrit :

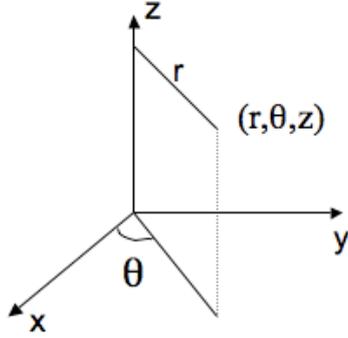
$$\begin{cases} \Delta \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0 \text{ sur } \Omega. \\ \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega. \end{cases} \quad (3.41)$$

où Ω est l'intérieur du domaine et $\delta\Omega$ sa frontière. On se place en coordonnées polaires, décrites sur la figure 3.19. On obtient après séparation des variables dont dépend le champ de pression ([75]) :

$$\hat{p}(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z) \quad (3.42)$$

En considérant $k^2 = k_r^2 + k_z^2$, l'Eq. (3.41) s'écrit alors en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z + (k_r^2 + k_z^2) = 0. \quad (3.43)$$



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

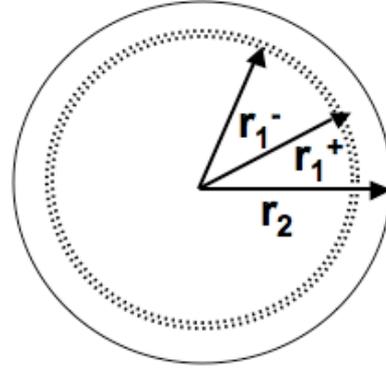


FIG. 3.19 – Système de coordonnées cylindriques utilisé.

FIG. 3.20 – Cylindre de rayon r_2 , avec une plaque multiperforée située en r_1 . Vue en $z = 0$.

On ne considère que les modes radiaux et azimutaux, on a donc :

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\Theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta + n_\theta^2 \right) + k_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} = 0. \quad (3.44)$$

Dans ces conditions, la partie radiale de l' Eq. (3.43) peut être réduite à une équation de Bessel [7] :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R \right) + R \times \left(k_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) = 0, \quad (3.45)$$

dont la solution générale est de la forme :

$$R(r) = AJ_{n_\theta}(k_r r) + BN_{n_\theta}(k_r r), \quad (3.46)$$

où J_{n_θ} désigne les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre n_θ et N_{n_θ} sont les fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre n_θ , aussi appelées fonctions de Neumann. La fonction de Neumann est singulière en 0, ce qui implique que dans le domaine $r \leq r_1$, la pression s'écrit :

$$R(r) = AJ_{n_\theta}(k_r r). \quad (3.47)$$

Dans le domaine $r_1^+ \leq r \leq r_2$, les solutions peuvent s'écrire :

$$R(r) = BJ_{n_\theta}(k_r r) + CN_{n_\theta}(k_r r). \quad (3.48)$$

On impose une vitesse acoustique nulle (condition de mur) sur $\delta\Omega$. $\hat{u} = 0$ en $r = r_2$, d'où :

$$BJ'_{n_\theta}(k_r r) + CN'_{n_\theta}(k_r r) = 0. \quad (3.49)$$

On écrit aussi les relations de saut au passage de la plaque multiperforée :

$$\hat{p}(r = r_1^+) - \hat{p}(r = r_1^-) = \frac{i\omega\rho d^2}{K_a} \hat{u}(r = r_1^-), \quad (3.50)$$

$$\hat{p}(r = r_1^-) - \hat{p}(r = r_1^+) = -\frac{i\omega\rho d^2}{K_a}\hat{u}(r = r_1^+). \quad (3.51)$$

On obtient alors le système :

$$[M][X] = 0,$$

où M est la matrice obtenue avec l'Eq. (3.49), l'Eq. (3.50) et l'Eq. (3.51), et donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & J'_{n_\theta}(k_r r_2) & N'_{n_\theta}(k_r r_2) \\ \frac{d^2}{K_a} k_r J'_{n_\theta}(k_r r_1) + J_{n_\theta}(k_r r_1) & -J_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) & -N_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) \\ J_{n_\theta}(k_r r_1) & -J_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) + \frac{d^2 k_r}{K_a} J'_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) & -N_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) + \frac{d^2 k_r}{K_a} N'_{n_\theta}(k_r r_2) \end{pmatrix},$$

X est le vecteur

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Résoudre

$$\det(M) = 0 \quad (3.52)$$

donne les valeurs de la fréquence. Par exemple dans le cas du premier mode radial, en posant $n_\theta = 0$, on doit résoudre :

$$\begin{aligned} & \left[J_0(k_r r_1^-) - \frac{d^2}{K_a} k_r J_1(k_r r_1^-) \right] \left[N_1(k_r r_2) \left(\frac{d^2 k_r}{K_a} J_1(k_r r_1^+) + J_0(k_r r_1^+) \right) \right] - \\ & J_1(k_r r_2) \left[N_0(k_r r_1^+) + \frac{d^2}{K_a} N_1(k_r r_1^+) \right] + \\ & J_0(k_r r_1^-) \left[-N_1(k_r r_2) J_0(k_r r_1^+) + J_1(k_r r_2) N_0(k_r r_1^+) \right], \end{aligned} \quad (3.53)$$

ce qui a été obtenu en utilisant la propriété de récurrence

$$J'_0(x) = -J_1(x), N'_0 = -N_1(x). \quad (3.54)$$

Les zéros de l'Eq. (3.52) sont obtenus numériquement à l'aide du logiciel Matlab.

3.4.2 Résultats et comparaison avec AVSP

On résout le même problème numériquement à l'aide d'AVSP.

Le maillage utilisé dans AVSP est constitué de 1186 noeuds. Il est représenté sur la figure 3.21. Les fréquences propres sont réunies dans le tableau 3.2. On considère les trois premiers modes. Par rapport aux fonctions de Bessel introduites précédentes, $n_\theta = 0$ correspond au premier mode radial, $n_\theta = 1$ et $n_\theta = 2$ respectivement au premier et deuxième mode azimutal.

Le résultat d'AVSP est donné sous la forme $Re(f) + iIm(f)$, où $Re(f)$ désigne la fréquence du mode et $Im(f)$ donne une information sur le facteur d'amplification du mode. Il paraît logique au vu de la figure 3.22 de définir comme taux d'amortissement le rapport des

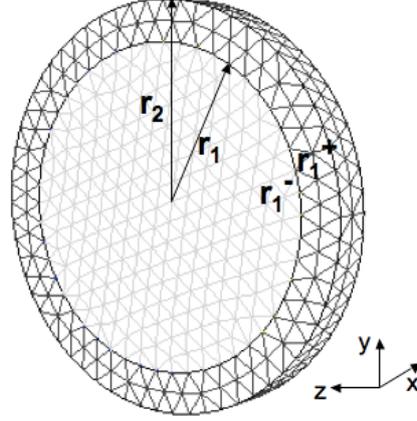


FIG. 3.21 – Maillage utilisé dans AVSP.

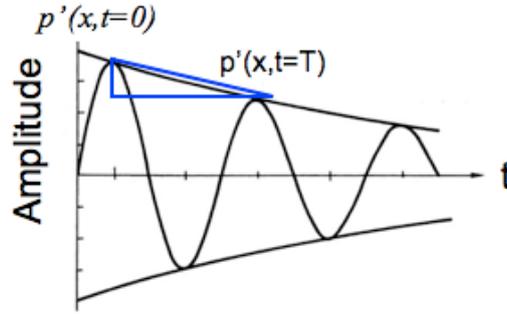


FIG. 3.22 – Evolution de la perturbation de pression en fonction du temps, pour une perturbation amortie.

amplitudes de pression en $t = T$ et en $t = 0$. La définition de ce taux d'amortissement est donc :

$$\frac{|p_1(x, t = T)|}{|p_1(x, t = 0)|} = \frac{\text{Re}(|\hat{p}(x)|e^{\omega_i T}e^{-i\omega_r T})}{\text{Re}(|\hat{p}(x)|)} = \frac{e^{\omega_i T}|\hat{p}(x)|\cos(\omega_r T)}{|\hat{p}(x)|} = e^{\omega_i T} = e^{2\pi \text{Im}(f)T} \quad (3.55)$$

En effet $\omega_r T = 2\pi$. On déduit un taux d'amplification \mathcal{A} en pourcent après une période T donné par :

$$\mathcal{A} = 100[1 - e^{2\pi \text{Im}(f)T}] = 100[1 - e^{2\pi \frac{\text{Im}(f)}{\text{Re}(f)}}]. \quad (3.56)$$

Les fréquences propres ont une partie imaginaire négative, ce qui veut dire que la fluctuation de pression est atténuée.

Les résultats d'AVSP sont en bon accord avec la théorie.

Les figures 3.23 et 3.24 donnent les profils radiaux de la partie réelle et de la partie imaginaire de \hat{p} donnée par AVSP pour les deux premiers modes. Les solutions analytiques sont données dans le but d'effectuer une comparaison. On peut remarquer que le saut de pression est visible au passage de la plaque multiperforée, et est visible aussi sur les isocontours du mode azimuthal (Fig. 3.23).

	Résultats AVSP avec MP		Analytique avec MP	
	$Re(f)$	$Im(f)$ ($\mathcal{A}\%$)	$Re(f)$	$Im(f)$ ($\mathcal{A}\%$)
$n_\theta = 1$	382.5 Hz	-18.8 s^{-1} (26.7 %)	382.56 Hz	-18.9 s^{-1} (27.8 %)
$n_\theta = 0$	534.1 Hz	-97.5 s^{-1} (68.2 %)	533.21 Hz	-97.5 s^{-1} (68.3 %)
$n_\theta = 2$	610.48 Hz	-21.4 s^{-1} (19.8 %)	611.04 Hz	-21.64 s^{-1} (19.9 %)

TAB. 3.2 – Comparaison des fréquences propres données par AVSP et la théorie.

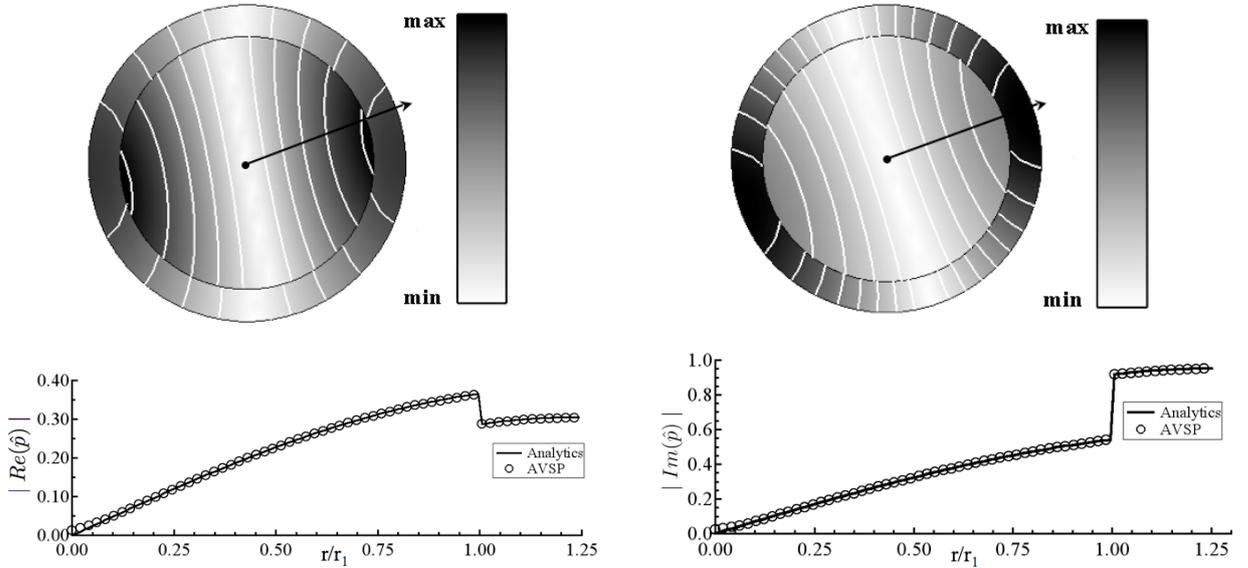


FIG. 3.23 – Premier mode azimuthal : $n_\theta = 1$, $Re(f) = 382.5$ Hz, $Im(f) = -18.8$ s^{-1} . A gauche : $Re(\hat{p})$. A droite : $Im(\hat{p})$. Haut : Résultats AVSP. Bas : Profils radiaux de la partie réelle et de la partie imaginaire de \hat{p} le long du rayon représenté par la flèche (comparaison Analytique/AVSP).

La figure 3.25 montre la distribution du saut de pression selon la coordonnée azimutale θ . Dans le cas du mode radial, le saut de pression est constant quelle que soit la valeur de θ . Cela explique que l'amortissement soit beaucoup plus important pour le mode radial que le mode azimuthal. Le saut de pression pour le mode azimuthal est plus élevé pour $U = 20$ $m.s^{-1}$ que pour $U = 5$ $m.s^{-1}$.

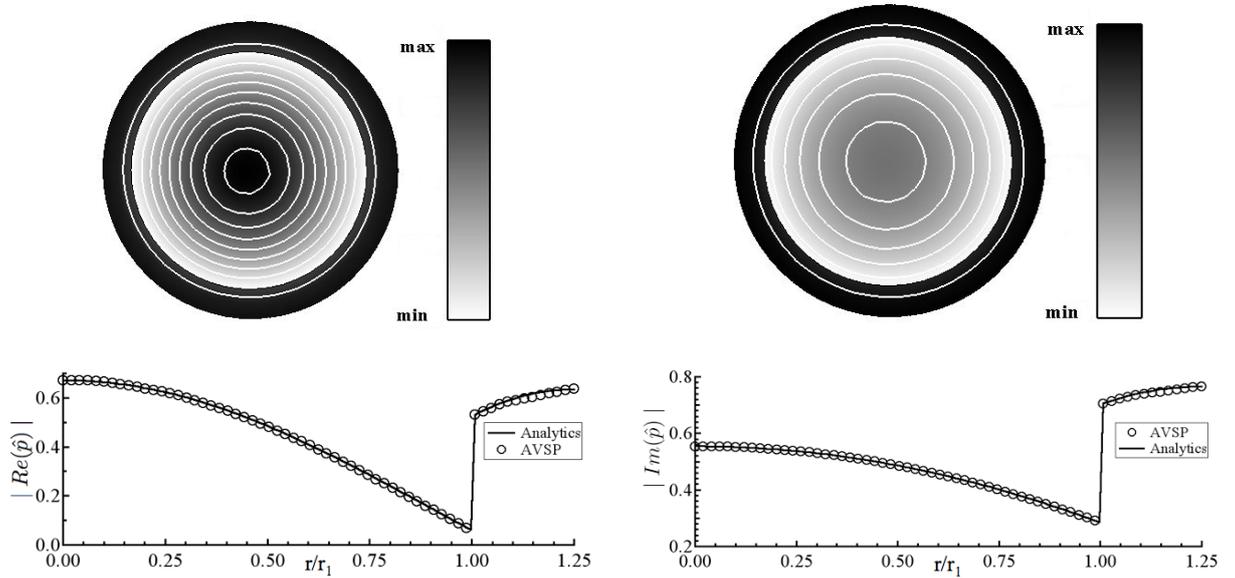


FIG. 3.24 – Mode radial : $n_\theta = 0$, $Re(f) = 534.1 \text{ Hz}$, $Im(f) = -97.5 \text{ s}^{-1}$. A gauche : $Re(\hat{p})$. A droite : $Im(\hat{p})$. Haut : Résultats AVSP. Bas : Profil radial de la partie réelle et imaginaire de \hat{p} (comparaison Analytique/AVSP).

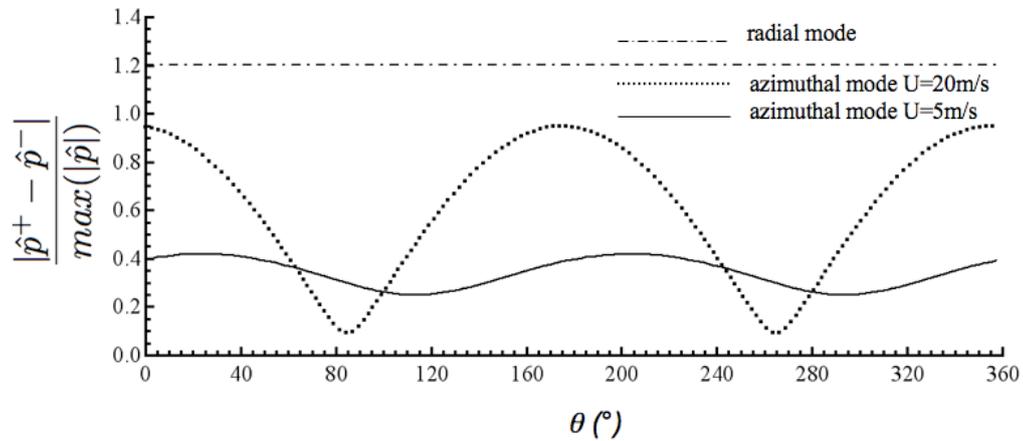


FIG. 3.25 – $\frac{|p^+ - p^-|}{\max(|\hat{p}|)}$ as a function of θ for the radial and the first azimuthal mode.

3.5 Validation du codage avec un champ avec un saut de température

On considère une configuration parallélépipédique de 0.5 m de long (voir Fig. 3.26). Une plaque perforée d'épaisseur 3 mm est située en $x = 0.375 \text{ m}$. Les paramètres géométriques

de la plaque perforée sont $a = 3$ mm, $d = 35$ mm, $e = 3$ mm. La vitesse de l'écoulement est de 5 m.s^{-1} . On impose un saut de température avec $T_1 = 300$ K, $T_2 = 1800$ K, ce qui pour une pression constante de 101325 Pa, donne $\rho_1 = 1.17 \text{ kg.m}^{-3}$, et $\rho_2 = 0.19 \text{ kg.m}^{-3}$.

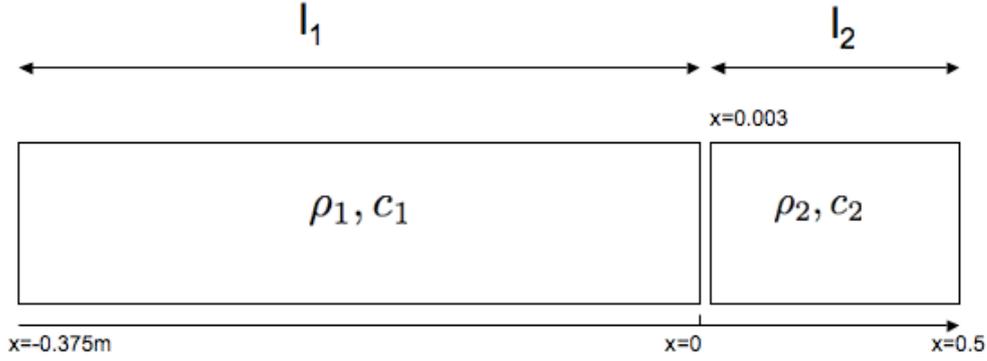


FIG. 3.26 – Configuration analytique avec saut de température.

On impose une condition limite acoustique type mur en entrée ($x = -0.375$ m) et en sortie ($x = 0.5$ m).

Soit $\hat{p}_1(x)$, $\hat{u}_1(x)$ les fluctuations de pression et de vitesse dans la partie froide ($x < 0$), et $\hat{p}_2(x)$, $\hat{u}_2(x)$ dans la partie chaude ($x > 0$); on peut écrire :

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(x) &= A_1^+ e^{ik_1(x+l_1)} + A_1^- e^{ik_1(x+l_1)} \\ \hat{u}_1(x) &= \frac{1}{\rho_1 c_1} [A_1^+ e^{ik_1(x+l_1)} - A_1^- e^{ik_1(x+l_1)}] \\ \hat{p}_2(x) &= A_2^+ e^{ik_2 x} + A_2^- e^{ik_2 x} \\ \hat{u}_2(x) &= \frac{1}{\rho_2 c_2} [A_2^+ e^{ik_2(x)} - A_2^- e^{ik_2(x)}] \end{aligned} \quad (3.57)$$

La condition limite $\hat{u}_1(x = -l_1) = 0$ donne

$$A_1^+ = A_1^- . \quad (3.58)$$

La condition limite $\hat{u}_2(x = l_2) = 0$ donne

$$A_2^+ e^{ik_2 l_2} - A_2^- e^{-ik_2 l_2} = 0. \quad (3.59)$$

La continuité de vitesse acoustique $u_1(x = 0) = u_2(x = 0)$ à l'interface de la plaque multiperforée impose :

$$A_1^+ (e^{ik_1 l_1} - e^{ik_1 l_1}) = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} (A_2^+ - A_2^-). \quad (3.60)$$

Et enfin on impose le saut de pression au passage de la plaque multiperforée :

$$\hat{p}_2(x = 0) - \hat{p}_1(x = 0) = \frac{i\omega \rho_1 d^2}{K_a} \hat{u}_1(x = 0), \quad (3.61)$$

ce qui donne :

$$-A_2^+ - A_2^- + A_1^+ \left[e^{ik_1 l_1} \left(1 + \frac{i\omega d^2}{K_a c_1}\right) + e^{-ik_1 l_1} \left(1 + \frac{i\omega d^2}{K_a c_1}\right) \right] \quad (3.62)$$

On en déduit le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} [e^{ik_1 l_1} - e^{-ik_1 l_1}] & \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} & -\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \\ 0 & -e^{-ik_2 l_2} & e^{ik_2 l_2} \\ -\left[e^{ik_1 l_1} \left(1 + \frac{i\omega d^2}{K_a c_1}\right) + e^{-ik_1 l_1} \left(1 + \frac{i\omega d^2}{K_a c_1}\right) \right] & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_2^- \\ A_2^+ \end{pmatrix} = 0 \quad (3.63)$$

La résolution de ce système linéaire dans Matlab donne alors les fréquences propres de la configuration. On obtient la fréquence du premier mode longitudinal à

$$f_{1L} = 245.9 - 57.4i \text{ Hz}. \quad (3.64)$$

Pour reconstruire les signaux de pression et de vitesse, en imposant l'amplitude $A_1^+ = A_1^-$, on déduit A_2^+ et A_2^- des conditions limites. On a alors

$$A_2^+ = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \frac{e^{ik_1 l_1} - e^{-ik_1 l_1}}{1 - e^{2ik_2 x_2}} A_1^+. \quad (3.65)$$

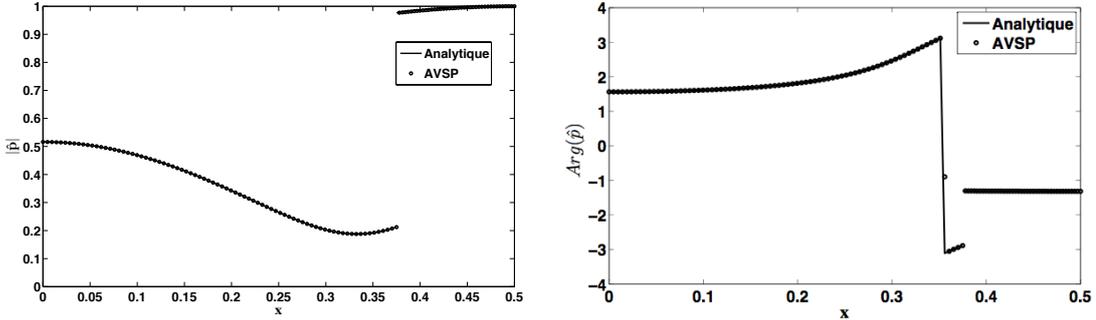


FIG. 3.27 – Comparaison analytique/numérique : à gauche, $|\hat{p}(x)|$. A droite, $\text{Arg}(\hat{p}(x))$.

Les figures 3.27 et 3.28 comparent les résultats analytiques et numériques pour la pression et la vitesse acoustique. La figure 3.28 montre que la vitesse est bien égale de part et d'autre de la plaque. Les résultats d'AVSP sont en bon accord avec l'analytique pour la pression et pour la vitesse.

En résumé, les résultats d'AVSP sont en bon accord avec l'analytique, à la fois sur la valeur des fréquences, et les profils de distribution de fluctuation de pression. En plus de la validation de l'implémentation du modèle de plaque dans le code AVSP, cette première section nous a permis de voir les effets d'une plaque multiperforée sur l'acoustique d'un cylindre : elle induit une partie imaginaire négative, et un saut de pression visible sur les profils de fluctuation de pression. La section suivante est dédiée à l'étude de l'influence des paramètres.

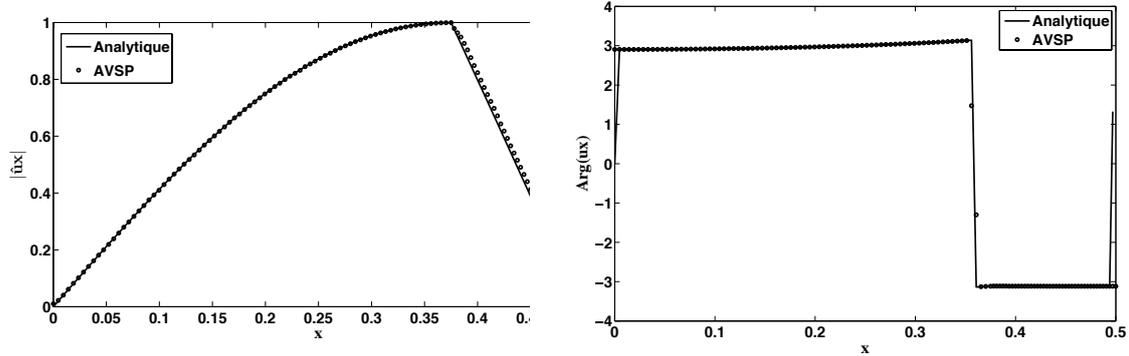


FIG. 3.28 – Comparaison analytique/numérique : à gauche, $|\hat{u}(x)|$. A droite, $\text{Arg}(\hat{u}(x))$.

3.6 Influence de la vitesse du *bias flow*

On reprend la configuration cylindrique introduite à la section 3.4. On fait varier la vitesse de l'écoulement dans les trous de 1 m.s^{-1} à 120 m.s^{-1} . On regarde l'évolution de la fréquence du mode obtenu, et de la partie imaginaire (donc l'amortissement).

On compare les quatre cas suivants :

- Pas de plaque : le cylindre perforé intérieur est retiré
- MP5 : le cylindre perforé intérieur est présent, et on applique à travers une vitesse de bias flow de 5 m.s^{-1}
- MP120 : Le cylindre perforé intérieur est présent et on applique à travers une vitesse de bias flow de 120 m.s^{-1} .
- Mur : à la place des plaques perforées, on applique une condition de mur.

Pas de plaque		MP5, $U = 5 \text{ m.s}^{-1}$ St=1.44		MP120, $U = 120 \text{ m.s}^{-1}$ St=0.06		Mur	
$\text{Re}(f)$	$\text{Im}(f)$	$\text{Re}(f)$	$\text{Im}(f)$ ($\mathcal{A}\%$)	$\text{Re}(f)$	$\text{Im}(f)$ ($\mathcal{A}\%$)	$\text{Re}(f)$	$\text{Im}(f)$
406.5 Hz	0 s^{-1}	382.5 Hz	-18.8 s^{-1} (26.7)	247.9 Hz	-16.8 s^{-1} (34.7)	246.5 s^{-1}	0 s^{-1}

TAB. 3.3 – Comparaison des fréquences pour le premier mode azimutal, sans plaque, avec un mur, avec plaque à basse vitesse, et plaque à haute vitesse. $\sigma = 2.3 \%$

Aucun amortissement n'est observé en l'absence de plaque : $\text{Im}(f) = 0$ pour les cas "sans plaque" et "murs". La plaque a un fort impact sur la partie réelle de la fréquence. Sans plaque, on obtient un premier mode azimutal à 406 Hz . L'ajout d'une plaque a tendance à baisser la fréquence : pour le cas MP5, la fréquence du premier mode azimutal baisse à 382.5 Hz . Quand on augmente la vitesse à travers les trous, à porosité fixée, la fréquence du mode diminue de plus en plus. Le cas MP120 donne une fréquence de 247.9 Hz . La figure 3.6 indique que entre le cas MP5 ($St = 1.44$) et le cas MP120 ($St=0.09$), Γ_a diminue. Diminuer Γ_a a pour impact de baisser la fréquence. A haute vitesse (MP120), la

partie réelle de la fréquence tend vers celle du mode en présence d'un mur (247 Hz).

Si la partie réelle de la fréquence diminue, l'évolution de la partie imaginaire passe elle par un maximum et baisse ensuite à nouveau. Cette tendance est expliquée par l'évolution de Δ_a montrée sur la figure 3.6. Quand on baisse le nombre de Strouhal en partant du cas de référence MP5 ($St = 1.44$), un maximum est atteint. Il existe donc une vitesse du *bias flow* pour laquelle l'amortissement est maximal. Cette tendance est également visible sur les figures 3.32 et 3.33.

La figure 3.29 montre la structure des modes dans les quatre cas. On peut observer le saut de pression acoustique induit par l'ajout d'une plaque perforée. La structure est légèrement modifiée pour le cas MP5 par rapport au cas sans plaque. Dans le cas où on a deux cylindres coaxiaux séparés par un mur, le mode azimutal se développe dans la couronne extérieure. Pour le cas MP120, on obtient la même fréquence que dans le cas d'un mur. La structure est aussi semblable, même si un amortissement est présent dans le cas MP120.

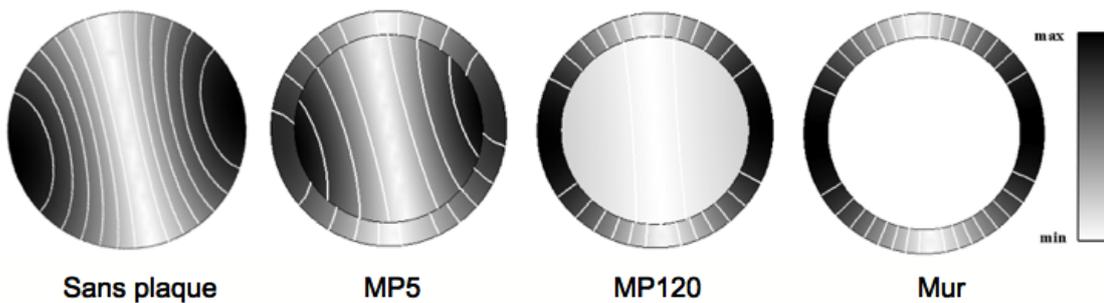


FIG. 3.29 – Evolution de la répartition du pression, sans plaque , à basse vitesse (MP5 : $f = 382.5 \text{ Hz}$, $\mathcal{A}=26.7 \%$) à vitesse élevée (MP120 : $f = 247.9 \text{ Hz}$, $\mathcal{A}=34.7 \%$), et en présence d'un mur ($f = 246.5 \text{ Hz}$, $\mathcal{A}=0 \%$).

Les figures 3.32 et 3.33 montrent l'évolution de l'amortissement pour deux porosités différentes en fonction de la vitesse du bias flow pour le premier mode azimutal. En effet le comportement de la plaque peut dépendre aussi de sa porosité [81]. On a vu précédemment que la partie imaginaire de la fréquence atteignait un maximum. Ici on regarde du point de vu de l'amortissement. Ceci se traduit par une vitesse pour laquelle l'amortissement est optimal comme mis en évidence par Hughes et Dowling [35]. Cette vitesse est de $U = 12 \text{ m.s}^{-1}$ pour une porosité $\sigma = 1.6\%$, et de 20 m.s^{-1} pour $\sigma = 2.3\%$.

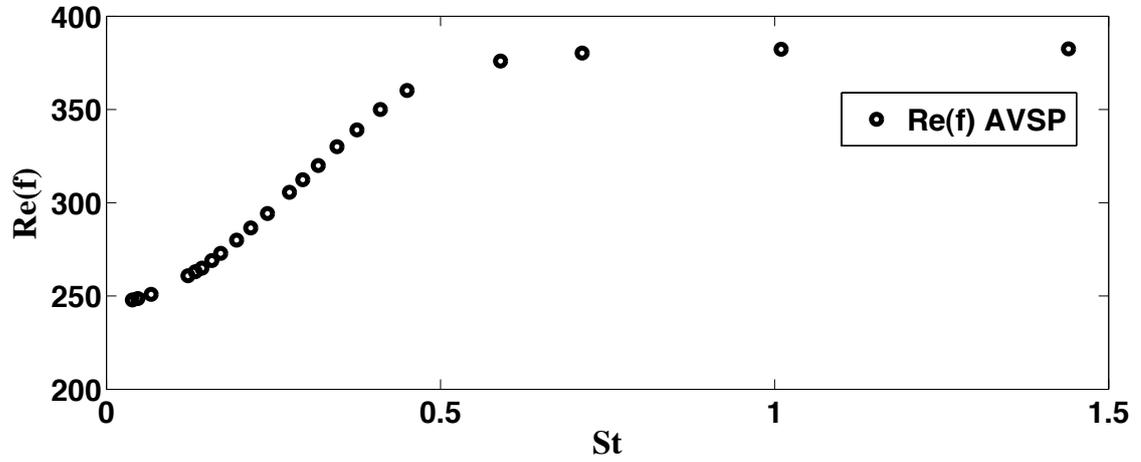


FIG. 3.30 – Evolution de $Re(f)$ en fonction du nombre de Strouhal.

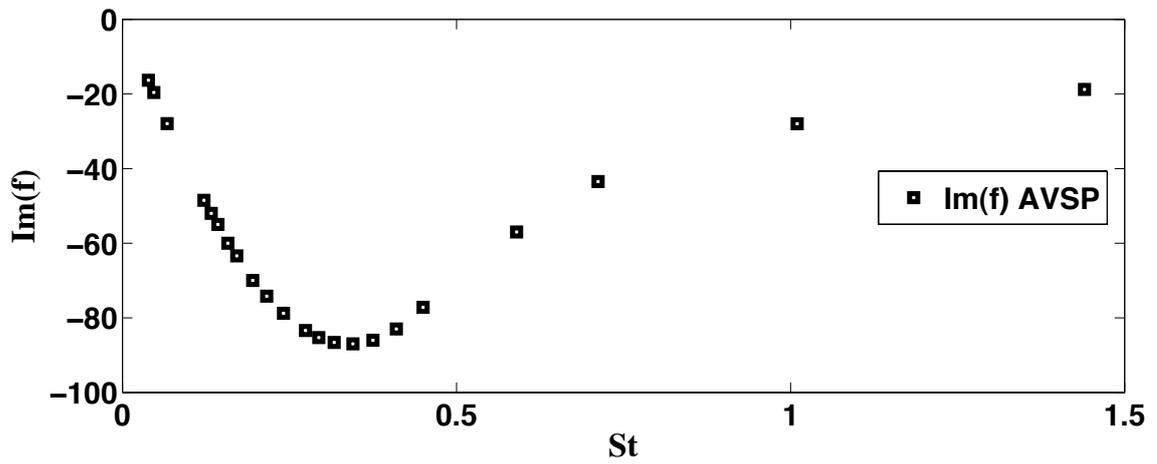


FIG. 3.31 – Evolution de $Im(f)$ en fonction du nombre de Strouhal.

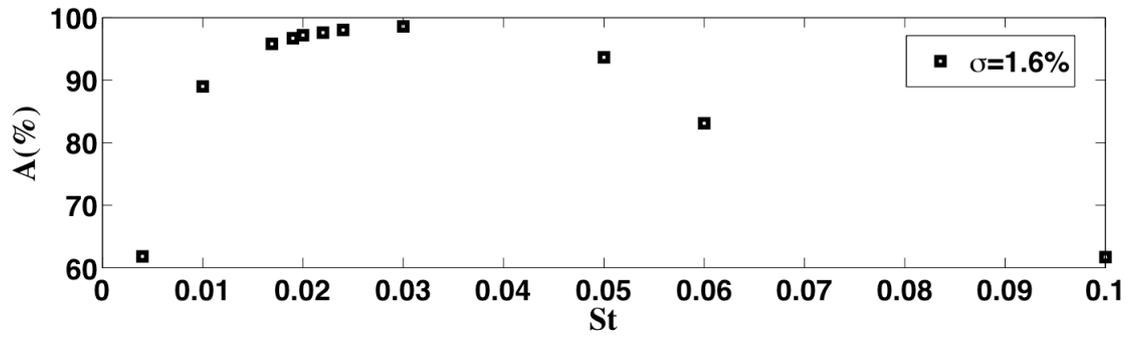


FIG. 3.32 – Evolution de l’amortissement en fonction de la vitesse U du bias flow.

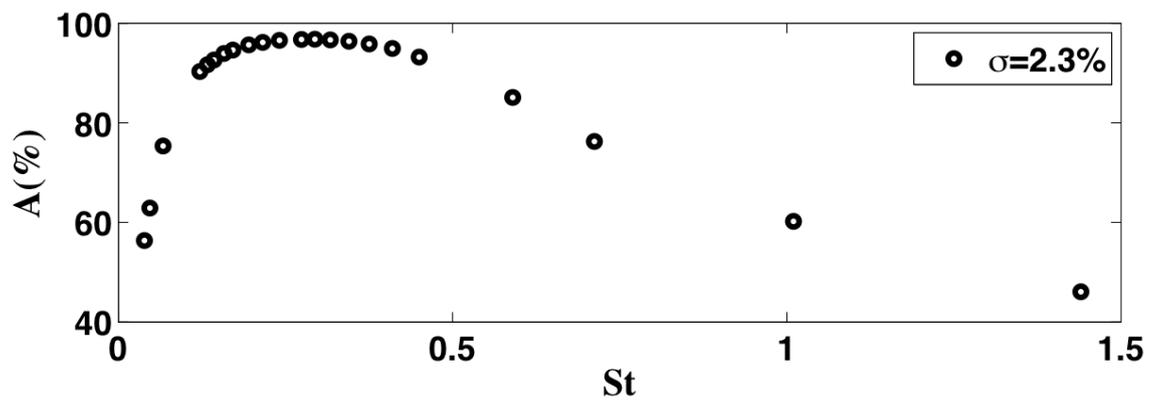


FIG. 3.33 – Evolution de l’amortissement en fonction de la vitesse U du bias flow.

3.7 Comportements limites

Dans cette section, les cas limites $U \rightarrow 0$ et $U \rightarrow \infty$ sont considérés. Comme vu à la Section 3, lorsque la vitesse de l'écoulement dans les trous est nulle, la conductivité de Rayleigh est réelle, et vaut $Ka = 2a$.²

Dans le cas d'une vitesse nulle (Tab. 3.4), la fréquence du premier mode azimutal est obtenue à 381 Hz. Elle est quasiment inchangée par rapport au cas avec MP5. La partie imaginaire est nulle, ce qui empêche tout amortissement.

A $U = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$, la partie imaginaire de la fréquence obtenue devient négative, mais l'amortissement n'est pas significatif. Dès $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ (cas MP1), un amortissement significatif apparaît.

Pour une très haute valeur de la vitesse, $U = 10^5 \text{ m.s}^{-1}$, on obtient la même valeur de la fréquence que pour un mur. La partie imaginaire est proche de 0. Physiquement, augmenter la vitesse autant est équivalent à diminuer le rayon des perforations ; on tend alors d'une plaque multiperforée à un écran opaque donc un mur.

Sans plaque		MP5, $U = 0 \text{ m.s}^{-1}$		MP0, $U = 5 \text{ m.s}^{-1}$		MP1, $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$	
$Re(f)$	$Im(f)$	$Re(f)$	$Re(f)$	$Im(f)$ ($\mathcal{A}\%$)	$Im(f)$ ($\mathcal{A}\%$)	$Re(f)$	$Im(f)$
406.5 Hz	0 s^{-1}	381 Hz	0 s^{-1} (0)	382.5 Hz	-18.8 s^{-1} (26.7)	381 Hz	-3.4 s^{-1} (5.5)

TAB. 3.4 – Comparaison des fréquences. Cas sans plaque, avec vitesse nulle, avec $U = 5 \text{ m.s}^{-1}$, avec $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$. $\sigma = 2.3 \%$

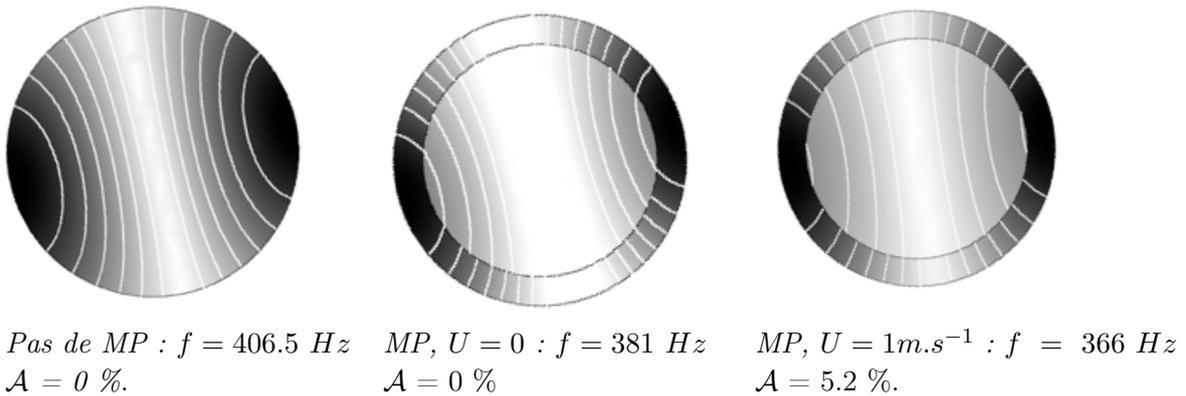


FIG. 3.34 – Structure spatiale et isolignes de \hat{p} pour le premier mode longitudinal.

²Dans AVSP, un test numérique est effectué sur la valeur de la vitesse. Si $U = 0$, $St = \infty$ et la conductivité de Rayleigh n'est alors pas définie. Une valeur fixe de $2a$ est imposée dans ce cas.

3.8 Epaisseur de plaque

L'impact de la prise en compte de l'épaisseur de la plaque est étudié. La configuration parallélépipédique de la Section 3.5 est calculée en utilisant le modèle de Howe modifié (MHM) décrit dans la section 3.1. Les mêmes caractéristiques géométriques sont utilisées. La plaque du parallélépipède a une épaisseur de 3 mm, ce qui est égal au rayon des perforations. Il est donc abusif dans ce cas de négliger l'épaisseur de la plaque. Des calculs systématiques sont effectués en faisant varier l'épaisseur de la plaque de $h = 0$ mm à $h = 5$ mm ($h/a = 1.7$). La partie réelle et la partie imaginaire de la fréquence du mode obtenu sont tracées en fonction du paramètre sans dimension h/a sur la figure 3.35. En symboles sont tracées la partie imaginaire et la partie réelle de la fréquence donnée par le modèle MHM [40]. Pour une épaisseur nulle et inférieure à $0.4 a$, les résultats sont très proches pour la partie imaginaire, alors qu'ils divergent plus rapidement pour la partie réelle.

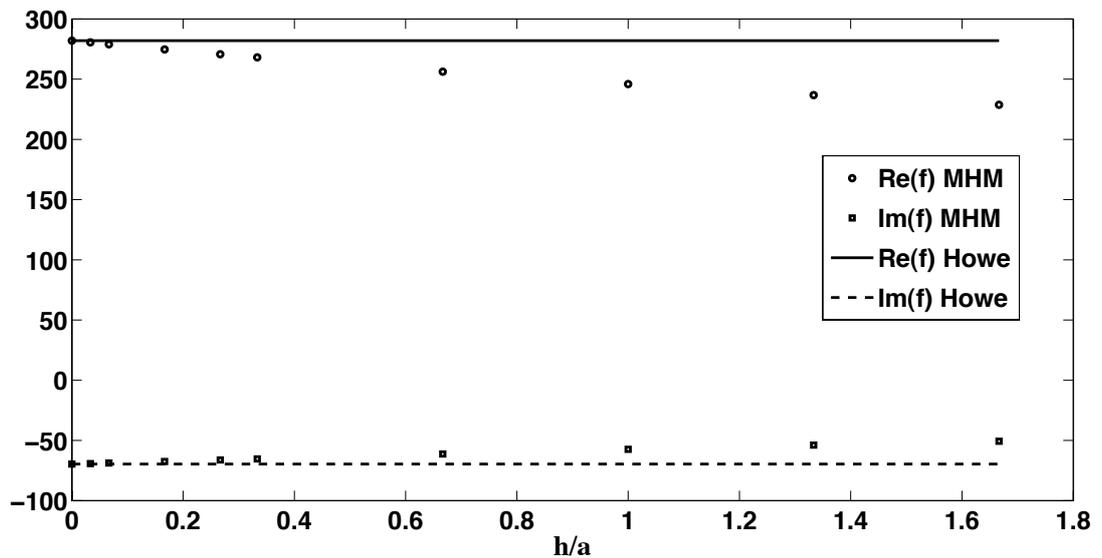


FIG. 3.35 – Evolution de $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ en fonction de l'épaisseur de la plaque.

Ce comportement peut être expliqué par la figure 3.36 où sont tracées les évolutions de Γ_a et Δ_a . Les courbes en trait fin et en pointillés correspondent aux valeurs données par le modèle de Howe, constantes quelle que soit l'épaisseur de la plaque. La valeur de la conductivité du modèle de Howe est comparée à celle modifiée par le modèle de Jing et Sun, notée MHM (voir Section 3.1). L'amortissement d'un mode étant relié à Δ_a , l'évolution de Δ_a donne des informations sur la partie imaginaire de la fréquence. L'écart de la valeur de Δ_a par rapport à la valeur du modèle de Howe est en effet très faible en dessous de $h/a = 0.4$ ($St=1$). Cependant pour $h/a = 1.6$, $St = 0.86$ et l'écart sur Δ_a est plus important qu'à $St = 1$, alors que l'écart sur la partie imaginaire de f

est plus faible. On peut donc conclure que le MHM peut donner une idée qualitative de l'influence de l'épaisseur sur l'amortissement et la fréquence, mais il est difficile d'évaluer quantitativement cet effet.

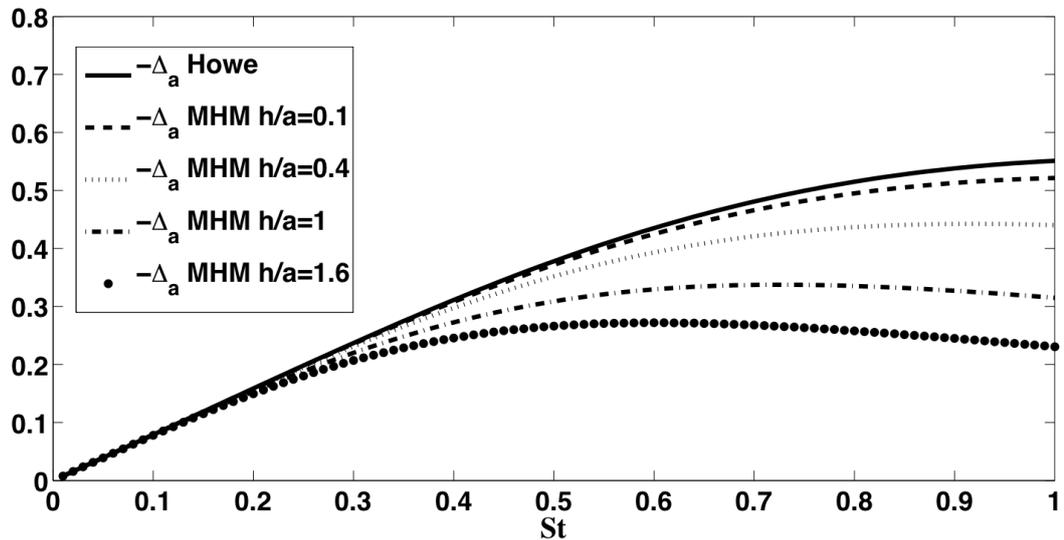


FIG. 3.36 – Evolution de $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ en fonction de l'épaisseur de la plaque.

3.9 Conclusion

Le comportement observé sur les configurations académiques simples peut être résumé comme suit.

- L'ajout d'une plaque perforée a pour tendance de baisser la partie réelle de la fréquence des modes.
- Quand la vitesse du *bias flow* augmente (ce qui est équivalent à diminuer le diamètre des trous), la partie réelle de la fréquence baisse. A haute vitesse, le comportement acoustique d'une plaque tend vers celui d'un mur.
- Il existe une combinaison de paramètres qui optimise l'amortissement d'une plaque. A porosité constante, une vitesse de *bias flow* notée U_{md} induit un amortissement maximal. Le même comportement pourrait être observé en faisant varier la porosité à vitesse constante.

Etude des modes thermoacoustiques par une approche de bilans énergétiques

Sommaire

4.1	Equation de bilan d'énergie acoustique	75
4.1.1	Equation de bilan	75
4.1.2	Expression du flux en fonction des conditions limites	77
4.2	Intégration des termes de flux acoustique dans AVSP	78
4.2.1	Relation entre flux acoustique et admittance	78
4.2.2	Relation entre flux acoustique et saut de pression à travers une paroi multiperforée	80
4.2.3	Bilan d'énergie acoustique avec terme source	83
4.3	Résultats et validations sur des cas simples	83
4.3.1	Condition limite d'impédance	83
4.3.2	Cas 3D parallélépipédique avec condition de plaque perforée	86
4.3.3	Cas 3D cylindrique avec condition de plaque perforée	90

Effectuer un calcul de bilans acoustiques est un outil intéressant pour appréhender les instabilités thermoacoustiques [25, 36, 37, 74]. Le calcul du bilan d'énergie acoustique sur les modes d'une configuration avec plaques multiperforées permettra de désigner quelles plaques sont les plus efficaces pour l'amortissement. Dans un premier temps, l'équation de bilan d'énergie acoustique est rappelée, puis le calcul du bilan est effectué sur des configurations géométriques de complexité croissante. Un rectangle puis un parallélépipède sont d'abord étudiés en imposant une condition d'impédance en sortie. Une configuration 3D parallélépipédique avec plaque multiperforée est ensuite considérée. L'erreur sur la fermeture des bilans est évaluée, ainsi que sa dépendance au maillage.

4.1 Equation de bilan d'énergie acoustique

4.1.1 Equation de bilan

On cherche à établir une équation de bilan pour une quantité $e_1(\mathbf{x}, t)$ qui permet de quantifier le niveau d'énergie acoustique d'un système. Cette quantité est définie par

Landau [46] comme étant l'énergie mécanique associée aux fluctuations acoustiques et définie par :

$$e_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\gamma p_0} p_1^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)^2. \quad (4.1)$$

On reprend les équations (2.17) et (2.21) du chapitre 2. L'équation de la quantité de mouvement linéarisée donne :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla p_1(\mathbf{x}, t). \quad (4.2)$$

En divisant l'équation (2.21) par $p_0 \rho_0$, on obtient :

$$\frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial p_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} q_1(\mathbf{x}, t). \quad (4.3)$$

En sommant Eq. (4.2)· \mathbf{u}_1 et Eq. (4.3)· p_1 , on fait apparaître l'énergie acoustique $e_1(\mathbf{x}, t)$ définie par l'équation (4.1) dans l'équation de bilan :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\gamma p_0} p_1^2(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)^2 \right) + \nabla \cdot p_1 \mathbf{u}_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} p_1(\mathbf{x}, t) q_1(\mathbf{x}, t). \quad (4.4)$$

Les termes de flux \mathbf{f}_1 et le terme source s_1 sont alors définis en posant :

$$\mathbf{f}_1 = p_1 \mathbf{u}_1, \quad (4.5)$$

$$\text{et } s_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} p_1 q_1. \quad (4.6)$$

Le bilan d'énergie de l'Eq. (4.4) peut alors être écrit sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} = s_1 - \nabla \cdot \mathbf{f}_1. \quad (4.7)$$

Le terme s_1 correspond à la corrélation entre le taux de dégagement de chaleur instationnaire et la pression instationnaire. Il correspond au critère de Rayleigh qui mesure le couplage entre l'acoustique et la flamme (Voir Ch. 1). Le terme $\nabla \cdot \mathbf{f}_1$ correspond au flux acoustique.

L'Eq. (4.7) est intégrée sur le volume Ω du domaine. En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient :

Soit \mathbf{n} la normale unitaire extérieure au domaine Ω ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} e_1(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\delta\Omega} p_1 \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Omega} s_1(\mathbf{x}, t) d\Omega \\ \frac{d}{dt} \bar{E}_1 + \mathcal{F}_1 &= S_1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

puis en intégrant sur une période T :

$$\int_T \frac{d\bar{E}_1}{dt} dt + \int_T \mathcal{F}_1 = \int_T S_1. \quad (4.9)$$

Le terme de flux \mathcal{F}_1 correspond à la somme des flux acoustiques aux frontières :

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{\delta\Omega} \iint p_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (4.10)$$

L'Eq. (4.9) permet d'évaluer le taux d'amplification d'une instabilité. L'instabilité sera amplifiée si le terme source est plus important que les flux, ce qui est équivalent à dire que le terme de droite de l'Eq. (4.9) sera positif. Dans ce cas l'évolution de e_1 en fonction du temps est alors positive et le mode amplifié.

4.1.2 Expression du flux en fonction des conditions limites

Dans le cas où il n'y a pas de source de chaleur, $S_1 = 0$ et l'Eq. (4.9) devient alors :

$$\int_T \frac{d\bar{E}_1}{dt} dt + \int_T \mathcal{F}_1 = 0. \quad (4.11)$$

La frontière $\delta\Omega$ d'un domaine géométrique Ω est constituée de plusieurs types de conditions acoustiques :

- des conditions acoustiques rigides (vitesse acoustique nulle) sur δ_W ,
- des conditions acoustiques ouvertes (pression acoustique nulle) sur δ_P ,
- des conditions limites d'impédance sur δ_Z ,
- des conditions limites de plaques multiperforées δ_{MP} .

Le terme de flux étant nul sur δ_W et δ_P , les seules conditions limites acoustiques qui contribuent au bilan énergétique sont les plaques multiperforées et les conditions limites d'impédance.

D'après le chapitre 3, la relation suivante relie la fluctuation de pression et de vitesse pour les plaques perforées :

$$(\nabla \hat{p}(x) \cdot \mathbf{n})^\pm = -\frac{\rho(x)}{\rho^-} \frac{K_a}{d^2} [\hat{p}], \quad (4.12)$$

où \mathbf{n} est la normale intérieure au domaine Ω .

Avec l'équation de la quantité de mouvement (Eq. (2.17))

$$\hat{\mathbf{u}}(x) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(x)i\omega} \nabla \hat{p}(x) \cdot \mathbf{n},$$

la vitesse acoustique sur δ_{MP} est donnée par :

$$\hat{\mathbf{u}}(x) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho(x)i\omega} \nabla \hat{p}(x) \cdot \mathbf{n} = -\frac{\rho(x)}{\rho^-} \frac{K_a}{\rho i \omega d^2} [\hat{p}]. \quad (4.13)$$

Sur δ_Z , combiner l'équation de quantité de mouvement et la condition de Robin $\nabla p \cdot \mathbf{n} = \frac{i\omega}{c_0 Z} \hat{p}$ donne par contre :

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0 Z}. \quad (4.14)$$

Les conventions d'hypothèse harmonique sont rappelées :

$$p_1(x, t) = \text{Re}(\hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) \text{ et } \mathbf{u}_1(x, t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}).$$

En explicitant les termes de flux avec les équations (4.13) et (4.14), l'Eq. (4.8) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{E}_1}{dt} = & - \iint_{\delta\Omega_Z} \text{Re}(\hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) \text{Re} \left(\frac{\hat{p}(\mathbf{x})}{\rho c Z} e^{-i\omega t} \right) dS \\ & - \iint_{\delta\Omega_{MP}} \text{Re}(\hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) \text{Re} \left(\frac{-\rho(x)}{\rho^- i\omega} \frac{K_a}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] e^{-i\omega t} \right) dS \end{aligned} \quad (4.15)$$

Avec

$$\int_T \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial t} = \bar{E}_1(t = T) - \bar{E}_1(t = 0), \quad (4.16)$$

le bilan revient à :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}_1(t = T)}{\bar{E}_1(t = 0)} - 1 = & - \frac{1}{\bar{E}_1(t = 0)} \left[\iint_{\delta\Omega_Z} \text{Re}(\hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) \text{Re} \left(\frac{\hat{p}(\mathbf{x})}{\rho c Z} e^{-i\omega t} \right) dS \right. \\ & \left. + \iint_{\delta\Omega_{MP}} \text{Re}(\hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) \text{Re} \left(\frac{-1}{\rho i\omega} \frac{K_a}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] e^{-i\omega t} \right) dS \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.2 Intégration des termes de flux acoustique dans AVSP

4.2.1 Relation entre flux acoustique et admittance

Etant donné que c'est l'admittance qui est en entrée d'AVSP, on s'intéresse ici à l'expression analytique détaillée du terme de flux dans le cas d'une condition limite d'admittance. L'admittance est définie par un rapport entre la fluctuation de pression \hat{p} et la fluctuation de vitesse normale à la frontière $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$, comme donné dans l'équation suivante :

$$Y = \frac{\rho c_0 \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}}{\hat{p}}. \quad (4.18)$$

On en déduit l'expression suivante pour le flux acoustique sur une frontière d'admittance Y :

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n} = e^{2\omega i t} \text{Re} \left[(\text{Re}(\hat{p}) + i \text{Im}(\hat{p})) (\cos(\omega_r t) + i \sin(\omega_r t)) \right] \text{Re} \left[-\frac{\hat{p} Y}{\rho c} (\cos(\omega_r t) + i \sin(\omega_r t)) \right]. \quad (4.19)$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n} = & \frac{e^{2\omega_i t}}{\rho c_0} \left(Re(\hat{p}) \cos(\omega_r t) + Im(\hat{p}) \sin(\omega_r t) \right) \\ & \left[- Re(\hat{p}) Re(Y) \cos(\omega_r t) + Im(\hat{p}) Im(Y) \cos(\omega_r t) \right. \\ & \left. - Re(\hat{p}) Im(Y) \sin(\omega_r t) - Im(\hat{p}) Re(Y) \sin(\omega_r t) \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

puis

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n} = & \frac{e^{2\omega_i t}}{\rho c_0} \left(\left[- Re(\hat{p})^2 Re(Y) + Im(\hat{p}) Re(\hat{p}) Im(Y) \right] \cos^2(\omega_r t) \right. \\ & - \left[Re(\hat{p}) Im(\hat{p}) Im(Y) + Im(\hat{p})^2 Re(Y) \right] \sin(\omega_r t) \\ & \left. \left[- Re(\hat{p})^2 Im(Y) + Im(\hat{p})^2 Im(Y) - 2Im(\hat{p}) Re(\hat{p}) Re(Y) \right] \sin(\omega_r t) \cos(\omega_r t) \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

On intègre maintenant en temps sur la période T d'une oscillation du mode considéré. Pour cela on définit alors trois intégrales A , B et C comme suit :

$$C = \int_0^T e^{2\omega_i t} \cos(\omega_r t) \sin(\omega_r t) dt = \frac{\omega_r (1 - e^{2\omega_i T})}{4(\omega_r^2 + \omega_i^2)} \quad \text{et si } \omega_i = 0, \quad C = 0, \quad (4.22)$$

$$A = \int_0^T e^{2\omega_i t} \cos^2(\omega_r t) dt = \frac{e^{2\omega_i T} - 1}{2\omega_i} + \frac{\omega_r}{\omega_i} C \quad \text{et si } \omega_i = 0, \quad A = \frac{T}{2}, \quad (4.23)$$

$$B = \int_0^T e^{2\omega_i t} \sin^2(\omega_r t) dt = -\frac{\omega_r}{\omega_i} C = \frac{\omega_r^2 (e^{2\omega_i T} - 1)}{4\omega_i (\omega_r^2 + \omega_i^2)} \quad \text{et si } \omega_i = 0, \quad B = \frac{T}{2}. \quad (4.24)$$

On montre alors que le flux acoustique à travers une frontière d'admittance Y est donné par l'expression :

$$\begin{aligned} \int_0^T p_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} dt = & \frac{1}{\rho c} \left(\left[- Re(\hat{p})^2 Re(Y) + Im(\hat{p}) Re(\hat{p}) Im(Y) \right] A \right. \\ & - \left[Re(\hat{p}) Im(\hat{p}) Im(Y) + Im(\hat{p})^2 Re(Y) \right] B \\ & \left. \left[- Re(\hat{p})^2 Im(Y) + Im(\hat{p})^2 Im(Y) - 2Im(\hat{p}) Re(\hat{p}) Re(Y) \right] C \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.2.2 Relation entre flux acoustique et saut de pression à travers une paroi multiperforée

4.2.2.1 Expression analytique exacte

D'après l'Eq. (4.13), le terme de flux peut être exprimé ainsi :

$$\int_0^T \mathbf{f}_1 \mathbf{n} dt = \int_0^T \text{Re}(\hat{p}(x)e^{-i\omega t}) \text{Re} \left(\frac{-\rho(x)}{\rho^-} \frac{K_a}{\rho i \omega d^2} [\hat{p}] e^{-i\omega t} \right) dt. \quad (4.26)$$

En introduisant les intégrales A, B et C comme précédemment, $\int_0^T \mathbf{f}_1 \mathbf{n} dt$ devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho^-(\omega_r^2 + \omega_i^2)} \left(\right. \\ & \quad A \left[\left(\omega_i \text{Im} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) + \omega_r \text{Re} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) \right) (-\text{Im}(p^+ - p^-) \text{Re}(\hat{p})) + \right. \\ & \quad \left. \left(\omega_i \text{Re} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) - \omega_r \text{Im} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) \right) \text{Re}(\hat{p}) \text{Re}(p^+ - p^-) \right] + \\ & \quad B \left[\left(\omega_i \text{Im} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) + \omega_r \text{Re} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) \right) (-\text{Re}(p^+ - p^-) \text{Im}(\hat{p})) + \right. \\ & \quad \left. \left(\omega_i \text{Re} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) - \omega_r \text{Im} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) \right) \text{Im}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-) \right] + \\ & \quad C \left[\left(\omega_i \text{Im} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) + \omega_r \text{Re} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) \right) (\text{Re}(\hat{p}) \text{Re}(p^+ - p^-) - \text{Im}(p^+ - p^-) \text{Im}(\hat{p})) + \right. \\ & \quad \left. \left(\omega_i \text{Re} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) - \omega_r \text{Im} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) \right) (\text{Im}(\hat{p}) \text{Re}(p^+ - p^-) + \text{Re}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-)) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Après factorisation, le calcul du flux acoustique sur une condition de plaque multiperforée se fait grâce à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^-(\omega_r^2 + \omega_i^2)} \left[\right. \\ & \quad \left[\omega_i \text{Im} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) + \omega_r \text{Re} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) \right] \left[-A \text{Re}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-) + B \text{Re}(p^+ - p^-) \text{Im}(\hat{p}) \right. \\ & \quad \left. + C \left(\text{Re}(\hat{p}) \text{Re}(p^+ - p^-) - \text{Im}(p^+ - p^-) \text{Im}(\hat{p}) \right) \right] + \\ & \quad \left[\omega_i \text{Re} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) - \omega_r \text{Im} \left(\frac{K_a}{d^2} \right) \right] \left[A \text{Re}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-) + B \text{Im}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-) \right. \\ & \quad \left. + C \left(\text{Im}(\hat{p}) \text{Re}(p^+ - p^-) + \text{Re}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-) \right) \right] \left. \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.2.2.2 Expression asymptotique

L'expression obtenue dans l'Eq. (4.28) doit être calculée sur chaque côté d'une plaque multiperforée pour obtenir la contribution nette de celle-ci. On peut aussi dériver une expression approximée du flux pour les plaques perforées dans le cas où on fait l'approximation $\omega_i \ll \omega_r$. Il est possible d'obtenir une expression simple pour la somme des contributions du flux des deux faces de la plaque perforée, comme montré sur la figure 4.1. Il est alors possible d'obtenir la contribution totale d'une plaque perforée et d'avoir une idée de son impact sur l'acoustique, ce qui n'est pas possible directement avec la solution exacte.

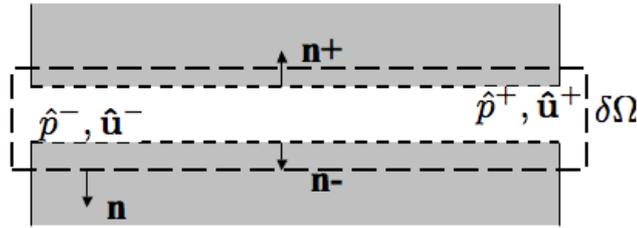


FIG. 4.1 – Calcul du flux sommé sur les deux faces d'une plaque perforée.

On exprime le terme \mathcal{F}_1 de l'Eq. (4.10) sur la configuration de la figure 4.1.

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{\delta\Omega} \iint p_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (4.29)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure au domaine Ω comme montré sur la figure 4.1. \mathcal{F}_1 devient alors :

$$\oint_{\delta\Omega} \text{Re}(\hat{p}^+ e^{-i\omega t}) \text{Re}(-\hat{\mathbf{u}}^+ \cdot \mathbf{n}^+ e^{-i\omega t}) + \text{Re}(\hat{p}^- e^{-i\omega t}) \text{Re}(\hat{\mathbf{u}}^- \cdot \mathbf{n}^- e^{-i\omega t}) \, dS. \quad (4.30)$$

Et en intégrant sur une période T ,

$$\int_T \mathcal{F}_1 \, dt = \int_T \oint_{\delta\Omega} \text{Re}(\hat{p}^+ e^{-i\omega t}) \text{Re}(-\hat{\mathbf{u}}^+ e^{-i\omega t}) + \text{Re}(\hat{p}^- e^{-i\omega t}) \text{Re}(\hat{\mathbf{u}}^- e^{-i\omega t}) \, dS \, dt. \quad (4.31)$$

Or $\hat{\mathbf{u}}^+ = \hat{\mathbf{u}}^-$, et utiliser l'Eq. (4.13) permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \int_T \mathcal{F}_1 \, dt &= \int_T \oint_S \text{Re}([\hat{p}^+ - \hat{p}^-] e^{-i\omega t}) \text{Re}(-\hat{\mathbf{u}}^+ e^{-i\omega t}) \, dS \, dt \\ &= - \int_T \oint_S \text{Re}([\hat{p}^+ - \hat{p}^-] e^{-i\omega t}) \text{Re}\left(\frac{K_a}{\rho^- i\omega d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] e^{-i\omega t}\right) \, dS \, dt. \end{aligned} \quad (4.32)$$

L'hypothèse $\omega_i \ll \omega_r$ donne :

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{1}{4} \left[[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]^* \left(\frac{K_a}{\rho^- i \omega d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] \right) + [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] \left(\frac{K_a}{\rho^- i \omega d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] \right)^* \right], \quad (4.33)$$

puis

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{1}{4} \left[|[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]|^2 \left(\frac{K_a}{\rho^- i \omega d^2} \right) + |[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]|^2 \left(\frac{K_a}{\rho^- i \omega d^2} \right)^* \right]. \quad (4.34)$$

Avec Eq. (3.3), $K_a = 2a(\Gamma_a - i\Delta_a)$

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{2a}{4\rho^- \omega_r d^2} |[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]|^2 [(-\Delta_a - i\Gamma_a) + (-\Delta_a + i\Gamma_a)], \quad (4.35)$$

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{2a}{4\rho^- \omega_r d^2} |[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]|^2 (-2\Delta_a), \quad (4.36)$$

et finalement,

$$\mathcal{F}_1 = \frac{a\Delta_a}{\rho^- \omega_r d^2} |[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]|^2, \quad (4.37)$$

dont le signe est positif puisque $\Delta_a > 0$. Le terme de flux \mathcal{F}_1 est donc positif et le volume de contrôle de la figure 4.1 perd de l'énergie acoustique :

$$\frac{d\bar{E}_1}{dt} < 0. \quad (4.38)$$

Ceci prouve qu'une plaque multiperforée, dans la limite $\omega_i \ll \omega_r$ ne peut qu'amortir l'énergie acoustique d'un système. Par ailleurs, l'amortissement généré par une MP est relié à la partie imaginaire de K_a .

Dans les Eq. (4.25) et (4.28), les expressions des termes de flux sont exactes, l'approximation $\omega_i \ll \omega_r$ n'ayant pas été faite pour les obtenir. Le bilan acoustique est donc exact mathématiquement pour toute solution de Helmholtz donc tout mode. Dans toute la suite, pour évaluer la fermeture des bilans, on évalue l'erreur entre le terme de gauche et le terme de droite de l'Eq. (4.17) définie par

$$\varepsilon = \left| \frac{\bar{E}_1(t=T)}{\bar{E}_1(t=0)} - 1 + \int_T \sum_{\delta\Omega} \iint p_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} dS \right|. \quad (4.39)$$

Des erreurs d'approximation numérique sont présentes sur les vecteurs de pression et de vitesse et il est donc probable que l'erreur ε soit non nulle. Le calcul de cette erreur peut servir de critère de qualité des modes calculés. Si $\varepsilon \ll 1$, la connaissance des différents termes du bilan permet de savoir pourquoi un mode est amorti ou amplifié.

4.2.3 Bilan d'énergie acoustique avec terme source

Dans le cas où la flamme est prise en compte dans un calcul thermoacoustique, le terme source S_1 s'ajoute au bilan acoustique et l'Eq. (4.9) donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}_1(t=T)}{\bar{E}_1(t=0)} - 1 &= -\frac{1}{\bar{E}_1(t=0)} \left[\iint_{\delta\Omega_Z} \operatorname{Re}(\hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{p}(\mathbf{x})}{\rho c Z} e^{-i\omega t}\right) dS \right. \\ &+ \iint_{\delta\Omega_{MP}} \operatorname{Re}(\hat{p}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) \operatorname{Re}\left(\frac{-1}{\rho i \omega} \frac{K_a}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] e^{-i\omega t}\right) dS \\ &\left. + \int_T \int_{\Omega} \frac{\gamma-1}{\gamma p_0} \operatorname{Re}(\hat{p}(x)e^{-i\omega t}) \operatorname{Re}(\hat{q}(x)e^{-i\omega t}) d\Omega. \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

où le terme source S_1 s'écrit :

$$S_1 = \int_T \int_{\Omega} \frac{\gamma-1}{\gamma p_0} \operatorname{Re}(\hat{p}(x)e^{-i\omega t}) \operatorname{Re}(\hat{q}(x)e^{-i\omega t}) d\Omega \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\gamma-1}{\gamma p_0} [\operatorname{Re}(\hat{p}) \operatorname{Re}(\hat{q}) A + \operatorname{Im}(\hat{p}) \operatorname{Re}(\hat{q}) B \\ &+ (\operatorname{Im}(\hat{p}) \operatorname{Re}(\hat{q}) + \operatorname{Im}(\hat{q}) \operatorname{Im}(\hat{p})) C], \end{aligned} \quad (4.42)$$

où A , B et C sont définies dans les équations (4.22), (4.24) et (4.23). L'erreur sur le bilan d'énergie est alors définie comme :

$$\varepsilon = \left| \frac{\bar{E}(t=T)}{\bar{E}(t=0)} - 1 + \int_T \sum_{\delta\Omega} \iint p_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{nd}S - S_1 \right|. \quad (4.43)$$

Le terme $\frac{\bar{E}(t=T)}{\bar{E}(t=0)} - 1$ s'écrit aussi $e^{2\omega_i T} - 1$. L'erreur s'écrit alors :

$$\varepsilon = \left| e^{2\omega_i T} - 1 + \int_T \sum_{\delta\Omega} \iint p_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{nd}S - S_1 \right|. \quad (4.44)$$

4.3 Résultats et validations sur des cas simples

4.3.1 Condition limite d'impédance

4.3.1.1 Cas 2D

Une configuration simple 2D (rectangle) est considérée en premier lieu. Le maillage contient 200 points. Il est représenté sur la figure 4.2. Les conditions limites sont des murs sauf sur la paroi droite où une admittance $Y = -1.5 - 2i$ ($Z = -0.24 + 0.32i$) est imposée. Le champ de température et du son sont imposés uniformes, avec $T = 293$ K, ce qui donne $c_0 = 343$ m.s⁻¹. Le premier et le troisième mode longitudinal notés respectivement 1L et 3L sont considérés.

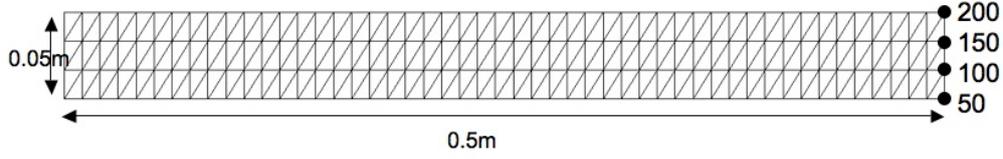


FIG. 4.2 – Configuration rectangulaire 2D de 200 points.

- Résolution analytique du cas

L'équation de Helmholtz sur ce cas 2D s'écrit :

$$\Delta^2 \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0. \quad (4.45)$$

La séparation des variables sur le champ de pression acoustique donne :

$$\hat{p}(x, y) = X(x)Y(y). \quad (4.46)$$

L'équation de Helmholtz devient alors

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dx^2} + k^2 \hat{p} = 0, \quad (4.47)$$

d'où $X'' + k^2 X = 0$ dont la solution est : $X = A \cos(kx) + B \sin(kx)$.

Les conditions limites en $x = 0$ et en $x = L$ donnent :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx}(x=0) = 0 \\ \frac{dX}{dx}(x=L) + \frac{i\omega}{c_0 Z} \hat{p}(x) = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Après développement, on obtient la relation de dispersion

$$k \sin(kL) - \frac{i\omega}{cZ} \cos(kL) = 0, \quad (4.49)$$

où k est le vecteur d'onde défini par $k = \frac{\omega}{c}$.

La relation suivante est alors obtenue :

$$\tan(kL) = \frac{i}{Z}, \quad (4.50)$$

puis

$$k = \frac{1}{L} \arctan\left(\frac{i}{Z}\right) + n\pi, \quad (4.51)$$

d'où

$$f = \frac{c}{2\pi L} \arctan\left(\frac{i}{Z}\right) + \frac{nc}{2L}. \quad (4.52)$$

Les fréquences analytiques des modes 1L et 3L sont donc :

$$f_{1L}^a = 136.0 - 24iHz \text{ et } f_{3L}^a = 822 - 24iHz.$$

- Résultats numériques

On utilise deux types de maillage pour réaliser une étude de l'erreur en fonction du maillage. Le premier maillage est grossier, il contient 200 noeuds, avec seulement 4 noeuds sur la face où est imposée la condition limite d'impédance. Le deuxième maillage contient 20 000 noeuds (40 points sur la frontière où est imposée la condition limite d'impédance).

Les fréquences calculées numériquement sur les deux maillages sont données dans le tableau 4.1. Pour le mode 1L, la convergence en maillage est obtenue dès le maillage grossier. Mais l'erreur sur les bilans acoustiques diminue quand même d'un facteur 6 entre les deux maillages. Pour le mode 3L, la valeur de la fréquence change plus sensiblement entre les deux maillages. L'erreur sur le bilan diminue d'un facteur 13. Les résultats du bilan d'énergie pour les modes longitudinaux 1L et 3L sont rassemblés dans le tableau 4.2.

	1L		2L	
Noeuds	Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)
200	136.0	-24.03 Hz	821.5Hz	-23.9146 Hz
20 000	136.0	-24.04 Hz	822.2 Hz	-24.036 Hz

TAB. 4.1 – Fréquences des modes longitudinaux (1L et 3L). Sensibilité au maillage.

	1L			3L		
Noeuds	$e^{2\omega_i t} - 1$	$-\mathcal{F}_1$	ε	$e^{2\omega_i t} - 1$	$-\mathcal{F}_1$	ε
200	- 0.8915	-0.8916	1.10^{-4}	-0.3063	-0.3066	1.10^{-4}
20000	-0.8915	-0.89148	2.10^{-5}	-0.3074	-0.3074	0

TAB. 4.2 – Cas 2D avec impédance : bilan sur les deux premiers modes longitudinaux pour deux maillages (200 noeuds et 20000 noeuds)

4.3.1.2 Cas 3D

Après avoir fait le bilan sur les modes longitudinaux 1L et 3L avec condition limite d'impédance sur un rectangle, le même bilan est calculé sur la configuration correspondante en 3D, ce qui revient donc à calculer le flux à travers la face que représente la figure 4.4.

On s'intéresse ici au deuxième mode, $479.15Hz - 24iHz$. Il y a deux manières de calculer les bilans dans AVSP. L'une d'elles consiste à calculer le terme de flux en utilisant la vitesse acoustique calculée dans AVSP, l'autre consiste à exprimer la vitesse en fonction



FIG. 4.3 – Visualisation du maillage de la configuration 3D.

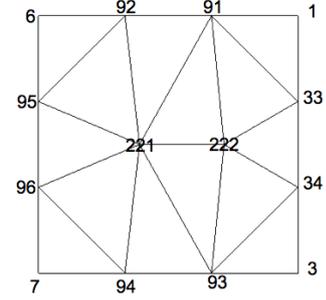


FIG. 4.4 – Face droite.

Noeuds	Avec $\hat{u} \sim \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n}$			Avec $\hat{u} = f(\hat{p}, Z)$		
	$e^{2\omega_i t} - 1$	$-\mathcal{F}_1$	ε	$e^{2\omega_i t} - 1$	$-\mathcal{F}_1$	ε
706	-0.4671	-0.465	$2.1 \cdot 10^{-3}$	-0.4670	-0.4675	$5 \cdot 10^{-4}$
2903	-0.4670	-0.4675	$5 \cdot 10^{-4}$	-0.4670	-0.4673	$3 \cdot 10^{-4}$

TAB. 4.3 – Comparaison de l’erreur pour deux expressions de la vitesse (cas 3D impédance)

de la pression et de l’impédance imposée à la frontière à partir du gradient du champ de pression. Le tableau 4.3 montre l’évolution de l’erreur avec les deux options de calcul de la vitesse. Le calcul de la vitesse par le gradient de pression induit des erreurs supplémentaires sur le bilan. L’erreur est en effet diminuée dans le cas où l’on exprime la vitesse en fonction de la pression et de l’impédance. Cette dernière méthode est donc retenue dans la suite du manuscrit.

4.3.2 Cas 3D parallélépipédique avec condition de plaque perforée

Un bilan d’énergie est maintenant conduit sur une configuration avec plaque multi-perforée. La géométrie de la section 3.5 du chapitre 3 est à nouveau considérée ici. Elle est représentée sur la figure 4.5. On cherche à étudier l’impact du maillage sur l’erreur du bilan acoustique. Dans un premier temps, on impose un champ moyen uniforme où $c_0 = 347 \text{ m.s}^{-1}$. Dans un deuxième temps, on impose un saut de température.

- Maillage Le tableau 4.4 répertorie les caractéristiques des 4 maillages utilisés et montrés Fig. 4.6 à Fig. 4.9. Le nombre de Helmholtz est calculé pour caractériser les différents maillages. Soit une taille caractéristique du maillage L_c égale ici à la moyenne entre la taille de la maille la plus élevée et la taille de la maille la plus petite, la définition du nombre de Helmholtz est :

$$He = \frac{L_c}{\lambda} = \frac{L_c f}{c_0}. \quad (4.53)$$

- Cas à froid

On s’intéresse ici au premier mode longitudinal (1L) et au deuxième mode longitudinal (2L). L’évolution de la fréquence de ces deux modes et de l’erreur sur le bilan

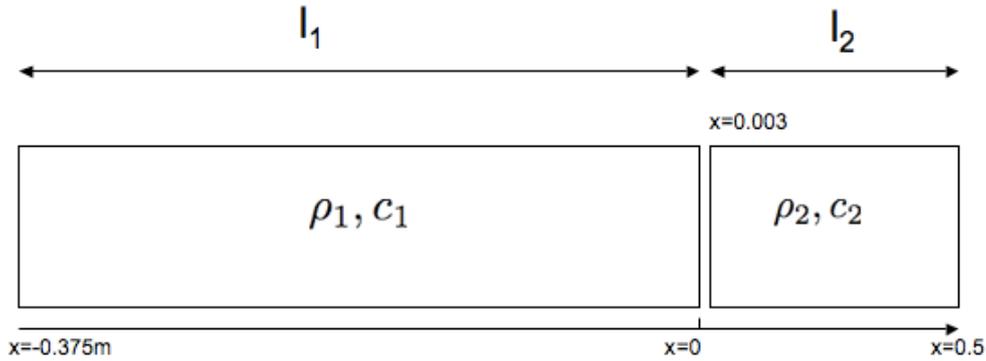


FIG. 4.5 – Configuration analytique 3D parallélépipédique avec plaque multiperforée.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Noeuds	56	424	6908	40709
V_{max}/V_{min}	41	24	7.95	84
L_c	0.06	0.008	0.02	0.0056
He_{1L}	0.04	0.005	0.015	0.0038

TAB. 4.4 – Caractéristiques des maillages utilisés.

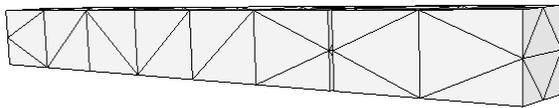


FIG. 4.6 – Maillage 1 (56 noeuds).

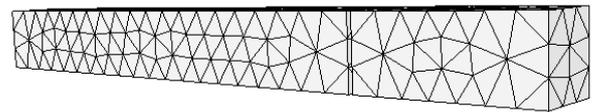


FIG. 4.7 – Maillage 2 (424 noeuds).

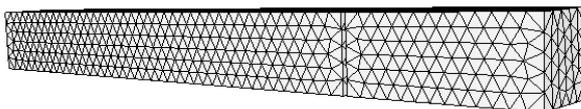


FIG. 4.8 – Maillage 3 (6908 noeuds).

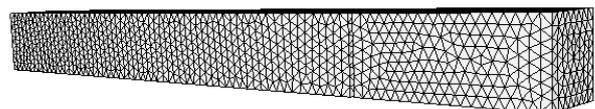


FIG. 4.9 – Maillage 4 (40709 noeuds).

acoustique est donnée dans le tableau 4.5.

– Cas avec saut de température

Un saut de température à travers la plaque multiperforée est à présent imposé. La température des gaz dans la partie gauche est imposée à $T_1 = 300\text{ K}$ et celle des gaz dans la partie droite est de $T_2 = 1800\text{ K}$. Pour une pression constante de 101325 Pa ,

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Noeuds	56	424	6908	40709
1L	235.9-54.4i	235.6-54.6i Hz	235.6-54.6i Hz	235.5-54.6i Hz
ε	0.21%	0.135%	0.022%	0.014%
2L	1291.7-33.7i	1436.2 - 33.1i	1463.47 -6.36	1443.6 -32.7
ε	8.3%	2.3%	0.021%	0.029%

TAB. 4.5 – Etude de l'évolution de l'erreur en fonction du maillage : cas à froid.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Noeuds	56	424	6908	40709
1L	246.1-57.03iHz	246.05-57.4iHz	246.04 -57.42 i Hz	246.04-57.43iHz
ε	0.037%	0.065%	0.00566%	0.004%
2L	1253-2.387iHz	1397 - 2.04 Hz i	1405.1 -2.03i Hz	1405-2.02i Hz
ε	42.46%	0.065%	0.39%	0.017%

TAB. 4.6 – Etude de l'évolution de l'erreur en fonction du maillage : cas à chaud.

les valeurs de masse volumique sont : $\rho_1 = 1.17 \text{ kg.m}^{-3}$, et $\rho_2 = 0.19 \text{ kg.m}^{-3}$.

On réalise une étude de maillage sur la fermeture du bilan le premier et le deuxième mode. Les résultats sont rassemblés Tab. 4.6. L'erreur sur le bilan est faible dès le maillage grossier pour le mode 1L, alors que l'erreur sur le mode 2L du maillage le plus grossier est très importante (42%). Cette dernière diminue fortement lorsque l'on raffine le maillage.

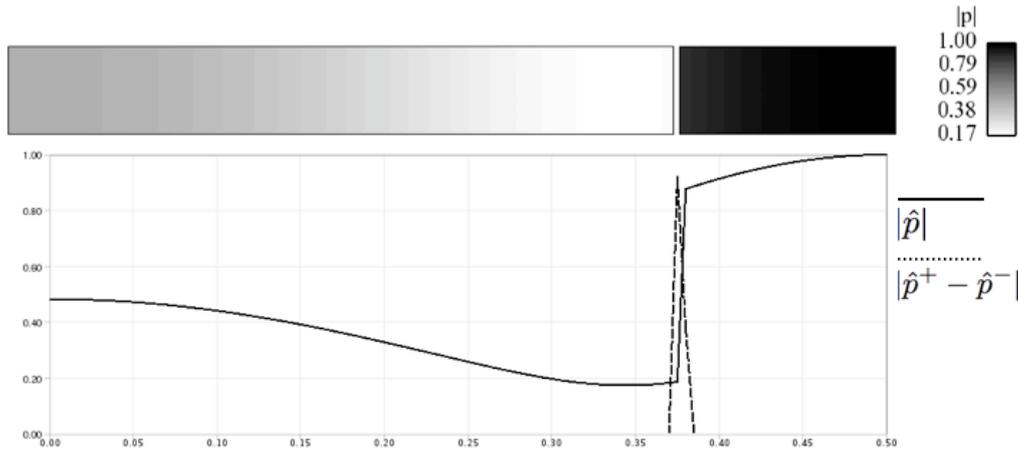


FIG. 4.10 – Configuration 3D avec multiperforation : maillage.

L'erreur diminue quand on raffine le maillage dans les cas chaud et froid pour le mode 1L.

L'erreur sur le mode 2L est beaucoup plus importante pour le maillage 1, en effet la longueur d'onde du mode est plus petite et il est nécessaire d'avoir plus de points de

Noeuds	Avec $\hat{u} \sim \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n}$			Avec $\hat{u} = f(K_a, [p^+ - p^-])$		
	$e^{2\omega_i t} - 1$	Flux	ε	$e^{2\omega_i t} - 1$	Flux	ε
424	-0.9456	-0.9042	4.4%	-0.9456	-0.9461	0.05%
6908	-0.9456	-0.931763	1.5%	-0.9456	-0.9459	0.03%
40708	-0.9456	-0.9351	1.11%	-0.9456	-0.9457	0.01%

TAB. 4.7 – Comparaison des erreurs pour deux expressions de la vitesse (cas multiperforé)

maillage dans la direction longitudinale pour capter correctement le mode. L'erreur augmente pour le maillage 3 par rapport au maillage 2, ce qui doit être dû aux caractéristiques du maillage.

- Amélioration de l'erreur sur les bilans en exprimant la vitesse acoustique en fonction de K_a et $f(K_a, [p^+ - p^-])$

Le tableau 4.7 montre que l'erreur sur le bilan diminue quand on exprime le flux en fonction de la conductivité de Rayleigh et du saut de pression plutôt que avec la vitesse calculée numériquement dans AVSP. Ceci est cohérent avec l'observation faite pour la prise en compte des frontières à impédance imposée (Tab. 4.3).

Paramètres				Fréquence (Hz)	A(%)	ε
a(mm)	U(m.s ⁻¹)	d(mm)	h(mm)			
3	5	35	3	382.5	46%	0.4%
3	20	35	3	312.55	96%	0.096%
3	70	35	3	250.9	74.9%	0.59 %

TAB. 4.8 – Mode 1A : Bilan énergétique pour différentes vitesses.

Paramètres				Fréquence (Hz)	A(%)	ε
a(mm)	U(m.s ⁻¹)	d(mm)	h(mm)			
3	5	35	3	534.1	89%	2.5%
3	10	35	3	250.9	89%	0.04%

TAB. 4.9 – Mode radial : Bilan énergétique pour différentes vitesses.

4.3.3 Cas 3D cylindrique avec condition de plaque perforée

Un bilan d'énergie est à présent calculé sur la géométrie cylindrique étudiée au chapitre 3. Le premier mode azimutal (1A) et le premier mode radial, étudiés précédemment dans le chapitre 3, sont à nouveau considérés ici.

Dans le tableau 4.8, on étudie l'évolution de l'amortissement du mode 1A pour trois valeurs de vitesse. La vitesse de 20 m.s⁻¹ a été identifiée au chapitre 3 comme étant la vitesse d'amortissement maximale. Au-delà l'amortissement diminue (d'où le choix de la valeur $U = 70$ m.s⁻¹ dans le tableau). Le tableau 4.9 montre les résultats d'un calcul de bilan pour deux valeurs de vitesse sur le mode radial. Comme pour les cas tests des sections 4.3.2 et 4.3.1, l'erreur sur le bilan acoustique est très faible, largement inférieure à 1% pour la plupart des cas. Ceci justifie l'utilisation des bilans comme outil d'analyse des modes thermoacoustiques issu du solveur de Helmholtz. Un tel outil peut s'avérer utile pour une meilleure compréhension des phénomènes d'amplification/amortissement dans les géométries complexes, comme illustré au chapitre suivant.

Etude thermoacoustique d'une chambre industrielle d'hélicoptère

Sommaire

5.1	Description de la chambre	91
5.2	Méthodologie d'un calcul sur chambre de combustion industrielle	93
5.2.1	Champ moyen et conditions limites	93
5.2.2	Paramètres géométriques et hydrodynamiques des plaques perforées	94
5.2.3	Choix du maillage	95
5.3	Calcul des modes longitudinaux sur un secteur	102
5.3.1	Répartition de la fluctuation de pression	102
5.3.2	Etude sur la vitesse du <i>bias flow</i>	102
5.4	Bilans acoustiques	105
5.4.1	Mode 1L	105
5.4.2	Bilan acoustique sur le mode 2L	107
5.5	Calculs sur la chambre complète : modes azimutaux	109
5.6	Impact de l'épaisseur de la plaque	112
5.7	Impact des films de refroidissement	114
5.7.1	Bilans acoustiques sur la chambre avec films de refroidissement (FR) et plaques multiperforées et (MP)	115
5.8	Calcul avec fonction de transfert de flamme	118
5.8.1	Calcul de la fonction de transfert de flamme avec AVBP	118
5.8.2	Calculs avec bilans acoustiques	119

Le présent chapitre vise à étudier l'impact des plaques perforées sur l'acoustique dans une chambre industrielle annulaire. A l'inverse des configurations académiques simples étudiées au chapitre 3, la chambre calculée ici est équipée de plusieurs couples de plaques multiperforées aux caractéristiques géométriques différentes.

5.1 Description de la chambre

La chambre calculée ici équipe un hélicoptère. C'est une chambre annulaire alimentée par 15 injecteurs. Elle est présentée dans sa globalité sur la figure 5.1. Les chambres qui équipent les hélicoptères sont différentes de celles qui équipent les avions. Elles doivent occuper un espace plus réduit que celui dont les moteurs d'avion disposent. Dans cette

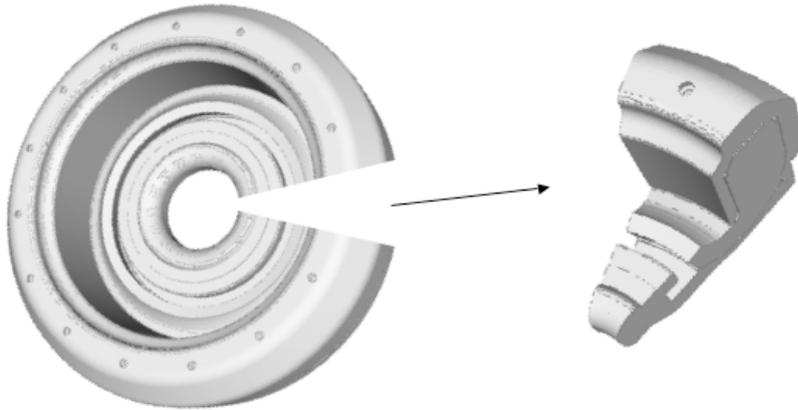


FIG. 5.1 – Chambre annulaire. Le domaine de calcul secteur correspond à un des 15 injecteurs.

optique, les chambres couramment utilisées pour les hélicoptères sont des chambres à flux inversé. Le sens de l'écoulement est montré sur la figure 5.2. L'air pénètre dans le contournement à la sortie d'une veine d'entrée non représentée sur le schéma. Il entre alors dans la chambre par le tourbillonneur, les trous primaires, les plaques perforées et les films de refroidissement. Le principe d'une chambre à flux inversé est que l'air qui vient du contournement pénètre dans le tube à flamme avec une direction opposée à celle de l'écoulement qui rentre dans la zone de combustion par le swirler.

Dans un premier temps, le calcul est limité à un secteur de la chambre. Le domaine de calcul est donc limité à une section de 24° et correspond à un injecteur (Fig. 5.1). Il a été montré qu'il est nécessaire de prendre en compte la totalité de la géométrie d'un secteur pour prédire correctement les modes longitudinaux [90]. Une bonne concordance avec les résultats de la LES n'est observée que dans le cas où toute la chambre de combustion est prise en compte. Cette étude a été réalisée sur le premier mode longitudinal. La géométrie du secteur comprend donc la chambre de combustion, le swirler et le contournement. Des simulations LES ont été faites sur cette chambre ([8],[93],[106]) et vont fournir le champ moyen.

En plus de la géométrie complète, il est nécessaire de prendre en compte les dissipations éventuelles qui peuvent avoir lieu à travers les conditions limites. Dans les calculs antérieurs à cette thèse, les plaques perforées étaient traitées comme des murs [91]. Pour évaluer l'impact des plaques perforées, on prendra justement comme cas de référence le cas où les plaques sont traitées comme des conditions acoustiquement rigides.

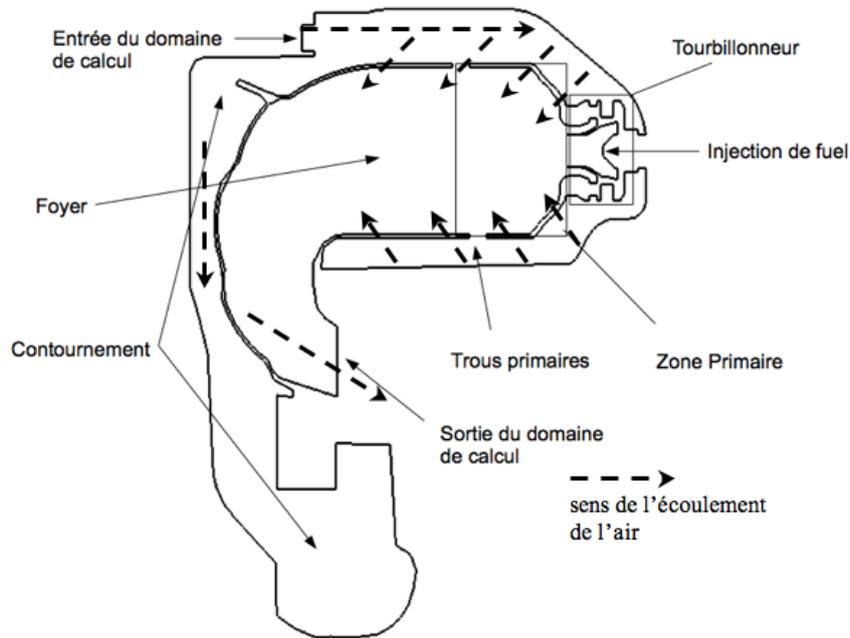


FIG. 5.2 – Représentation schématique d'une coupe d'un secteur de la chambre.

5.2 Méthodologie d'un calcul sur chambre de combustion industrielle

5.2.1 Champ moyen et conditions limites

– Champ moyen

La première étape est d'effectuer une simulation aux grandes échelles sur la chambre pour déterminer le champ moyen [106]. La LES est réalisée avec le code AVBP [9], un code compressible non structuré explicite qui résout les équations de Navier-Stokes. Le schéma numérique utilisé pour ce calcul est un schéma éléments finis de 3ème ordre en temps et en espace. Les petites échelles sont modélisées avec l'approche de Smagorinsky. Une chimie à une étape est utilisée pour calculer la réaction de combustion avec le mélange JP-10/air. Cinq espèces sont explicitement résolues : JP10, O, CO₂, H₂O et N₂. L'interaction flamme/turbulence est modélisée par le modèle de flamme épaissie [11]. A l'issue de ce calcul, on obtient le champ de température montré sur la figure 5.3. Une fois converti en solution AVSP comme expliqué au chapitre 2 (section 2.3), le champ de vitesse du son est également disponible (figure 5.4). La température atteint plus de 2600 K dans la zone de combustion, ce qui correspond à une vitesse du son de 960 m.s⁻¹.

– Adaptation de la géométrie utilisée pour la LES

Le champ de température montré sur la figure 5.3 a été calculé sur un maillage spécifique à la LES. La géométrie calculée dans la LES est différente de celle utilisée pour réaliser un calcul acoustique : les films de refroidissement pour le calcul LES ont été simplifiés en trois ou quatre trous en conservant la même section de passage pour conserver le débit de l'écoulement dans les trous. Dans la géométrie utilisée pour le calcul acoustique, les films de refroidissement vont être traités comme une condition de plaque perforée.

– Condition limite en sortie

Pour effectuer le calcul acoustique sans écoulement, la géométrie a été coupée en amont du col comme indiqué sur la figure 5.3. En première approximation, une condition de type mur a été utilisée pour cette frontière [55, 44].

– Condition limite en entrée

La question de l'impédance en entrée est encore une question non résolue à ce jour. Le problème a été étudié par Silva [92] pour tenter d'améliorer la procédure de génération des conditions limites acoustiques basé sur l'outil Nozzle développé par Lamarque [44]. L'approche développée par Silva [92] prend en compte la présence des compresseurs dans la veine d'air d'entrée en amont de la chambre. L'aire de la section d'entrée est très réduite par comparaison avec la taille de la chambre si bien que les résultats obtenus changent peu d'une condition limite acoustique $u' = 0$, ce qui est la condition limite en entrée que l'on choisira dans la suite.

5.2.2 Paramètres géométriques et hydrodynamiques des plaques perforées

Quatre paramètres géométriques sont nécessaires pour décrire acoustiquement des plaques perforées.

- la distance inter-orifices d ,
- le rayon des perforations a ,
- la vitesse de l'écoulement à travers les trous U ,
- l'épaisseur de la plaque h .

Un calcul RANS¹ effectué par Turbomeca fournit les différents débits d'air froid G à travers les plaques. La vitesse de l'écoulement à travers chaque plaque est donc déduite par la formule suivante (en reprenant les notations du chapitre 3).

$$U = \frac{G}{\rho S_b}. \quad (5.1)$$

¹Reynolds Averaged Navier-Stokes, le code RANS utilisé est COOLANT.

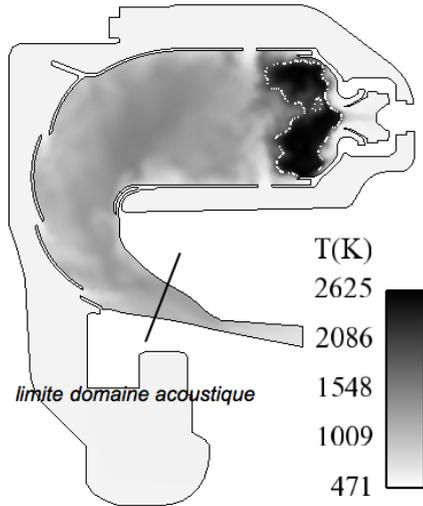


FIG. 5.3 – *Champ de température LES.*

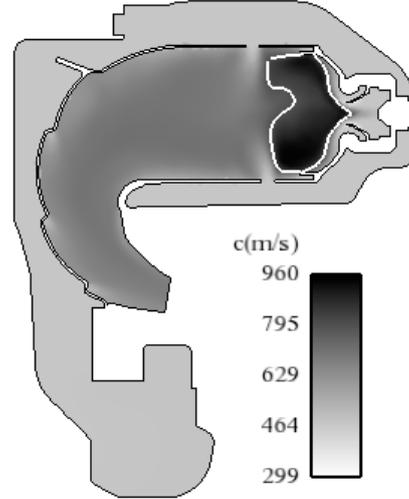


FIG. 5.4 – *Champ de vitesse du son en entrée du calcul acoustique.*

La distance inter-orifices est déduite de l'Eq. (1.3) rappelée ici :

$$d = \sqrt{\frac{S_{\text{tot}}\pi a^2}{S_b}}$$

Enfin, le rayon et l'épaisseur sont des données géométriques confidentielles.

5.2.3 Choix du maillage

Plusieurs maillages sont testés sur cette configuration pour déterminer lequel est le mieux adapté. Les caractéristiques des différents maillages sont répertoriés dans le tableau 5.1.

Les maillages utilisés sont raffinés progressivement. Le nombre de noeuds qu'ils contiennent va de 42584 noeuds (maillage M1) à plus de 3 millions de noeuds (maillage M6). Pour donner une idée de la régularité du maillage, la valeur du rapport du volume de la plus grande maille et du volume de la plus petite maille est donné. Le premier maillage (42584 noeuds) est donné à titre indicatif. Il est très irrégulier avec un rapport $\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}$ de plus de 130 000. Les autres maillages ont été faits avec un souci de régularité, ce qui est visible sur la faible valeur des rapports $\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}$. Des images des maillages sont données sur les figures 5.6 à 5.11. Pour chaque maillage, une vue en 3D est montrée, puis une coupe en $z = 0$, et enfin une idée du raffinement obtenu sur les plaques multiperforées dont l'emplacement est indiqué sur la figure 5.5.

Une valeur moyenne de la taille de maille sur les plaques perforées est obtenue en calculant

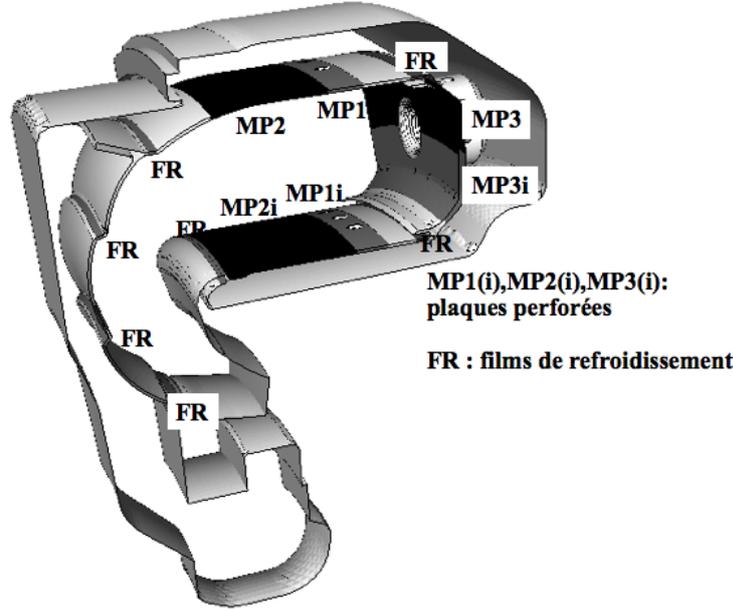


FIG. 5.5 – Emplacement et dénomination des plaques multiperforées dans la chambre.

$$h_{\text{moy}} = \sqrt{\frac{S_{\text{tot}}}{N_{\text{MP}}}}, \quad (5.2)$$

où S_{tot} est la surface géométrique d'une plaque perforée, et N_{MP} le nombre de noeuds sur cette condition limite.

Nom	Nombre de noeuds	$\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}$	h_{moy} (mm)					
			MP1	MP1i	MP2	MP2i	MP3	MP3i
M1	42584	137782	3.1	3.23	2.95	2.17	2.45	2.47
M2	48101	1441	1.95	2.03	1.87	1.81	2.08	2.06
M3	452 448	186	0.81	0.83	0.81	0.79	0.81	0.82
M4	1 041 998	137	0.602	0.598	0.596	0.597	0.608	0.612
M5	1 218 967	123	0.337	0.336	0.333	0.331	0.336	0.336
M6	3 675 883	528	0.395	0.398	0.389	0.390	0.392	0.394

TAB. 5.1 – Caractéristiques des six maillages étudiés sur la chambre industrielle.

Les figures 5.12 et 5.13 montrent l'évolution de $\text{Re}(f)$ en fonction du nombre de noeuds du maillage, tandis que les figures 5.14 et 5.15 montrent l'évolution de $\text{Im}(f)$. Une convergence en maillage est atteinte à partir du maillage M5. Les tendances des quatre figures sont comparables. Les maillages grossiers surestiment les fréquences. La fréquence diminue d'environ 15 Hz pour le mode 1L et 40Hz pour le mode 2L. L'erreur est supérieure sur le mode 2L, en effet la fréquence étant plus élevée, la longueur d'onde est plus petite, et nécessite davantage de points pour être précisément captée. La figure 5.16 montre l'évolution

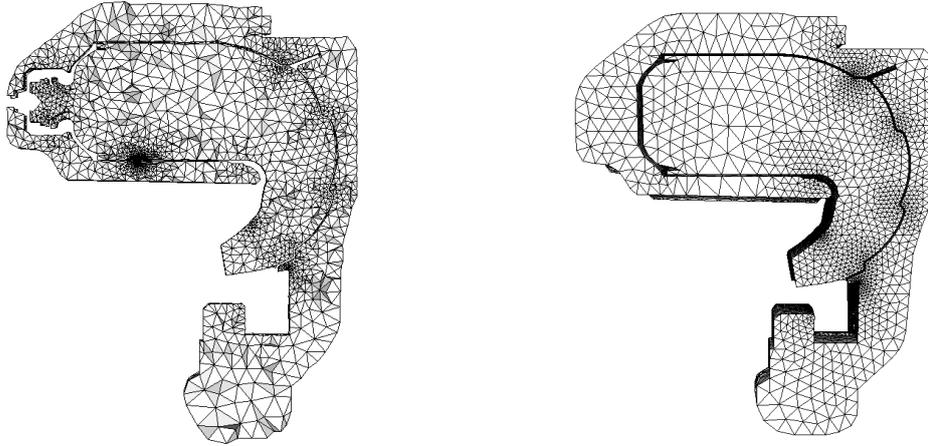


FIG. 5.6 – Maillage M1 : coupe en $z = 0$, vue 3D.

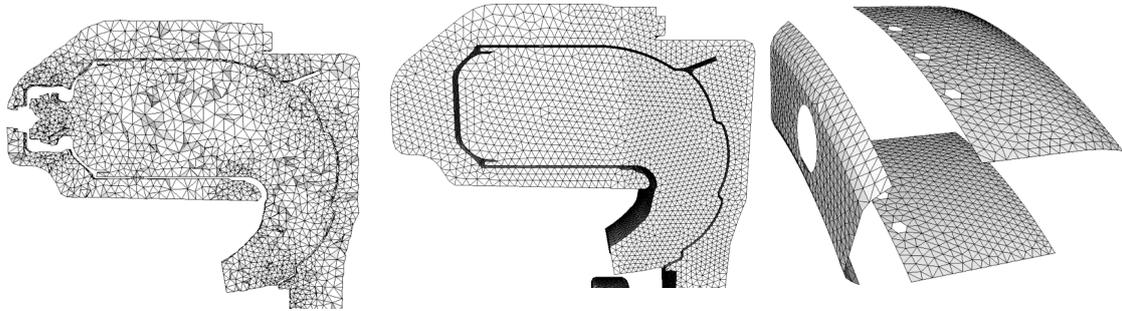


FIG. 5.7 – Maillage M2 : coupe en $z = 0$, vue 3D, maillage sur les MP.

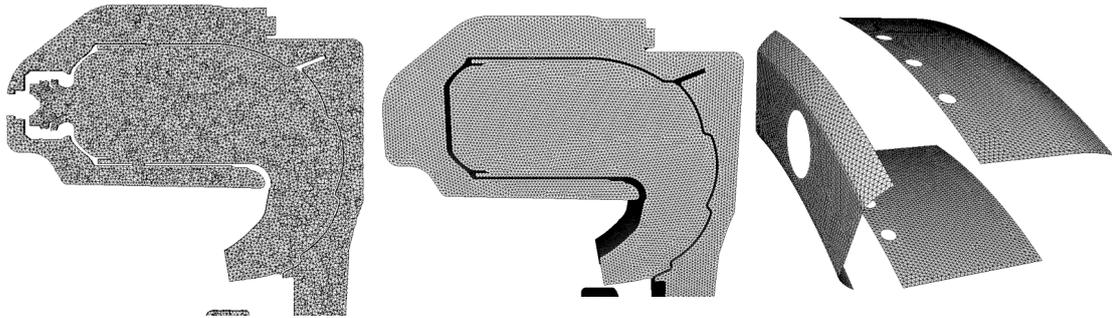


FIG. 5.8 – Maillage M3 : coupe en $z = 0$, vue 3D, maillage sur MP.

du temps de calcul en fonction des maillages pour les modes 1L et 2L. Le temps correspond au temps que met chaque processeur pour effectuer une itération du solveur aux valeurs propres. La tendance est sensiblement la même pour les deux modes longitudinaux. De manière générale, le temps de calcul augmente avec le nombre de noeuds du maillage sauf pour deux cas. Le maillage M4 donne un pic du temps CPU. Le temps de calcul sur le maillage M1 est plus long que sur le maillage M2 même si le nombre de points du maillage M1 est inférieur. Il est en effet très irrégulier. Il paraît raisonnable de choisir le maillage

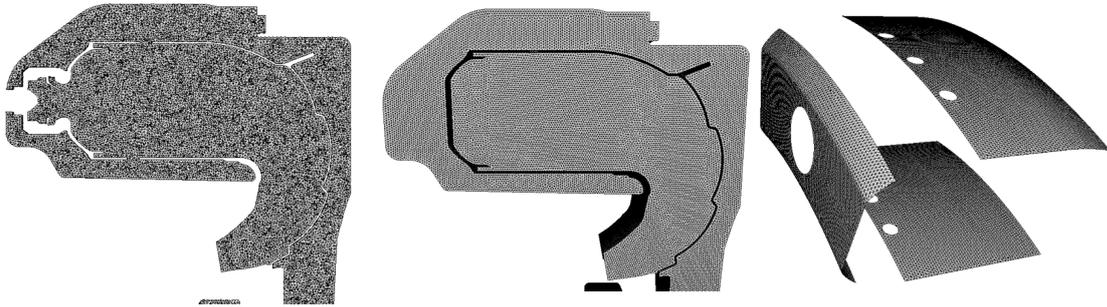


FIG. 5.9 – Maillage M_4 : coupe en $z = 0$, vue 3D, maillage sur MP.

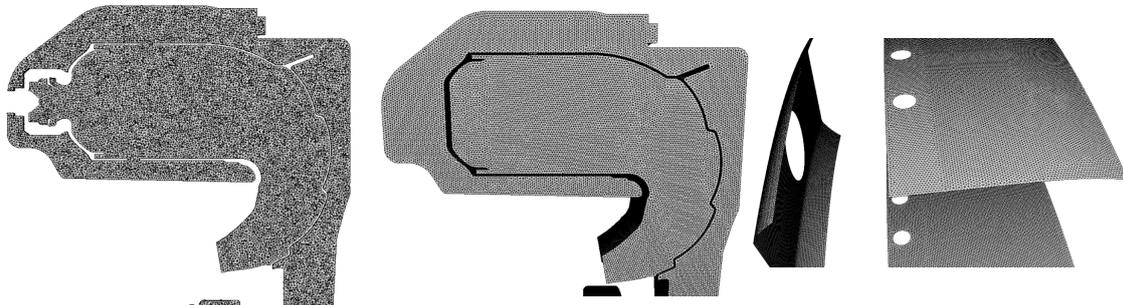


FIG. 5.10 – Maillage M_5 : coupe en $z = 0$, vue 3D, maillage sur MP.

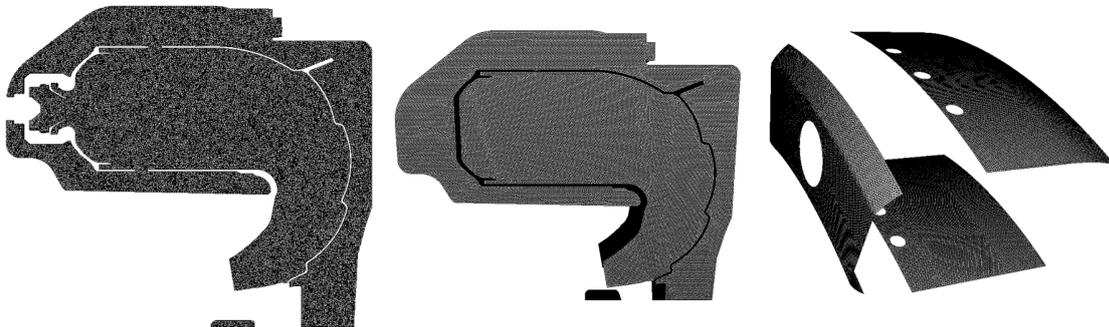


FIG. 5.11 – Maillage M_6 : coupe en $z = 0$, vue 3D, maillage sur MP.

M2. Le temps de calcul est largement inférieur pour le maillage M2. La précision obtenue sur $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ avec ce maillage est satisfaisante.

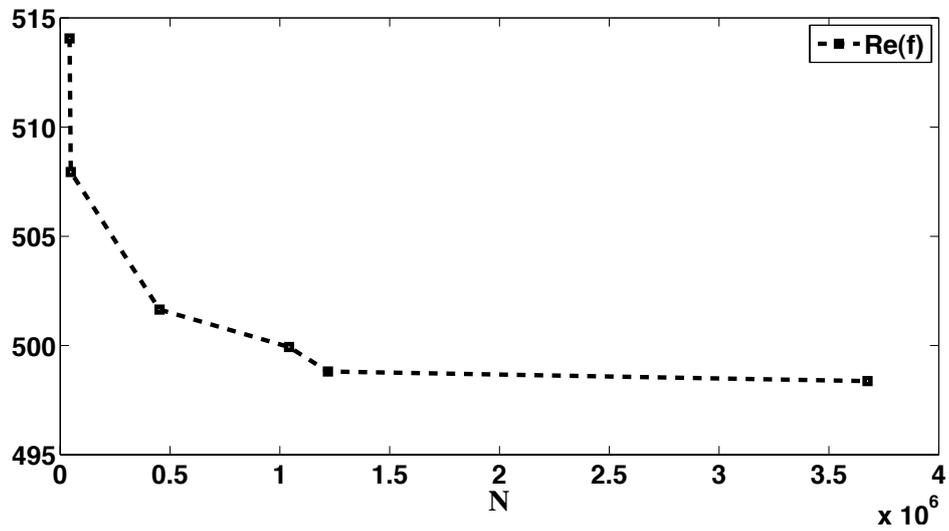


FIG. 5.12 – Evolution de $Re(f)$ en fonction du nombre de noeuds du maillage N . (mode 1L).

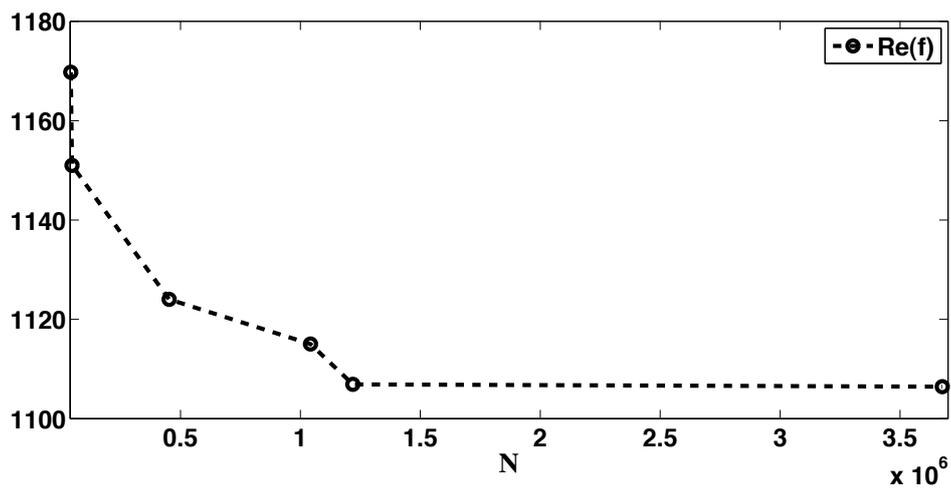


FIG. 5.13 – Evolution de $Re(f)$ en fonction de N (mode 2L).

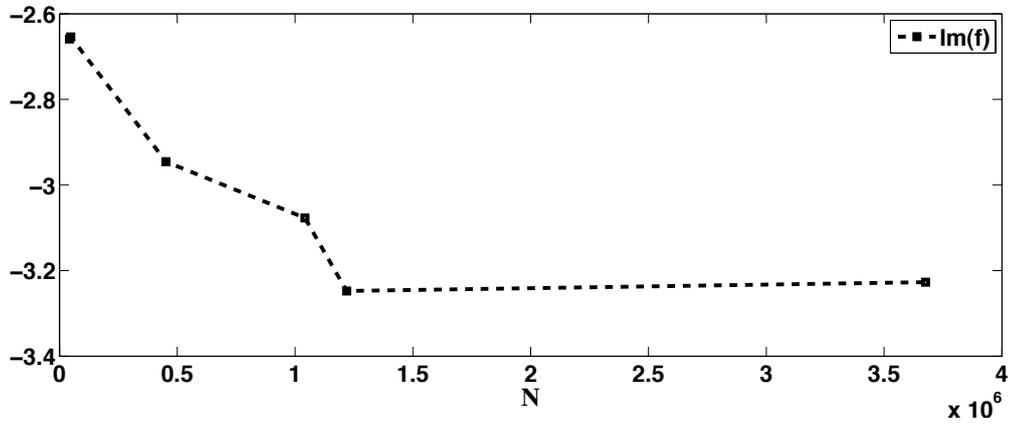


FIG. 5.14 – Evolution de $Im(f)$ en fonction de N (mode 1L).

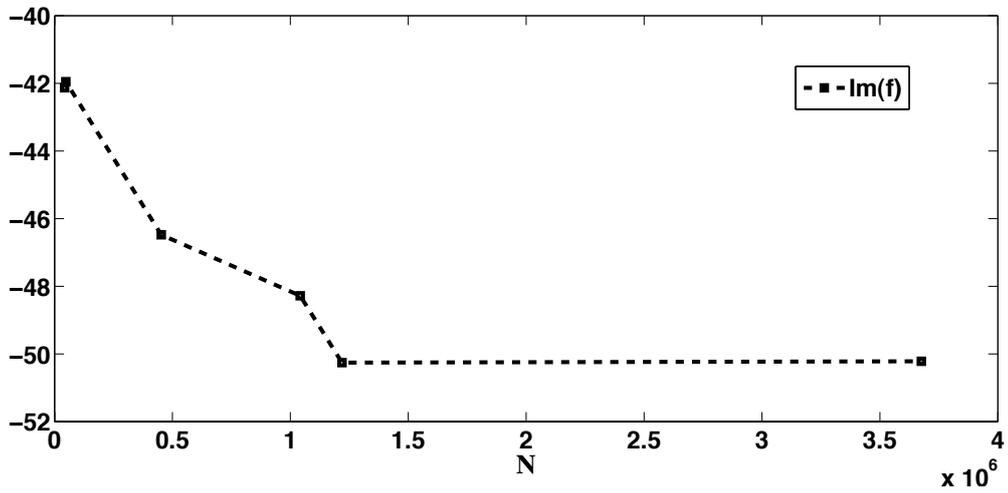


FIG. 5.15 – Evolution de $Im(f)$ en fonction de N (mode 2L).

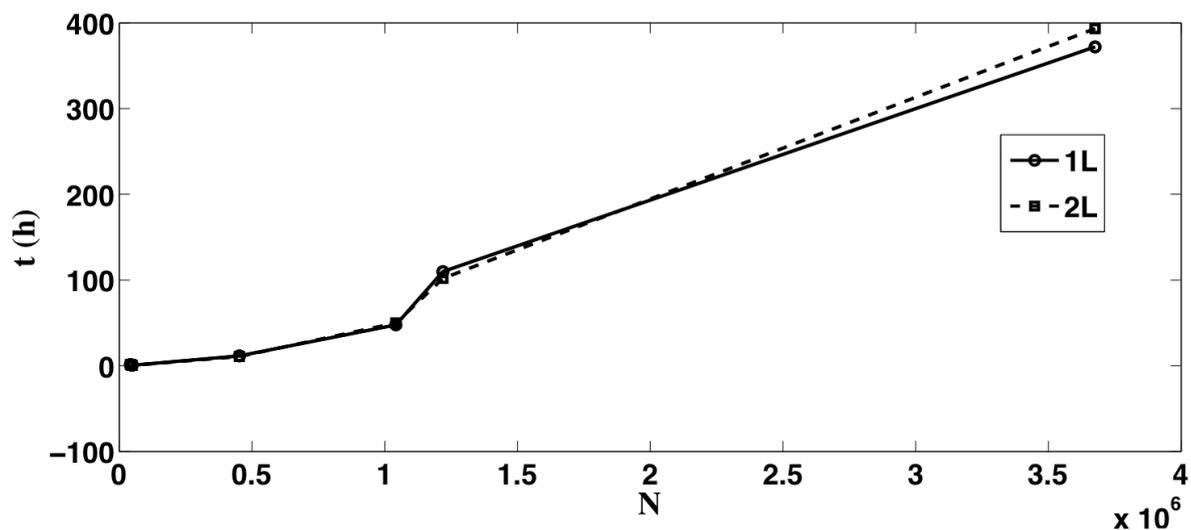


FIG. 5.16 – Evolution du temps de calcul en fonction du nombre de points du maillage. Modes 1L et 2L.

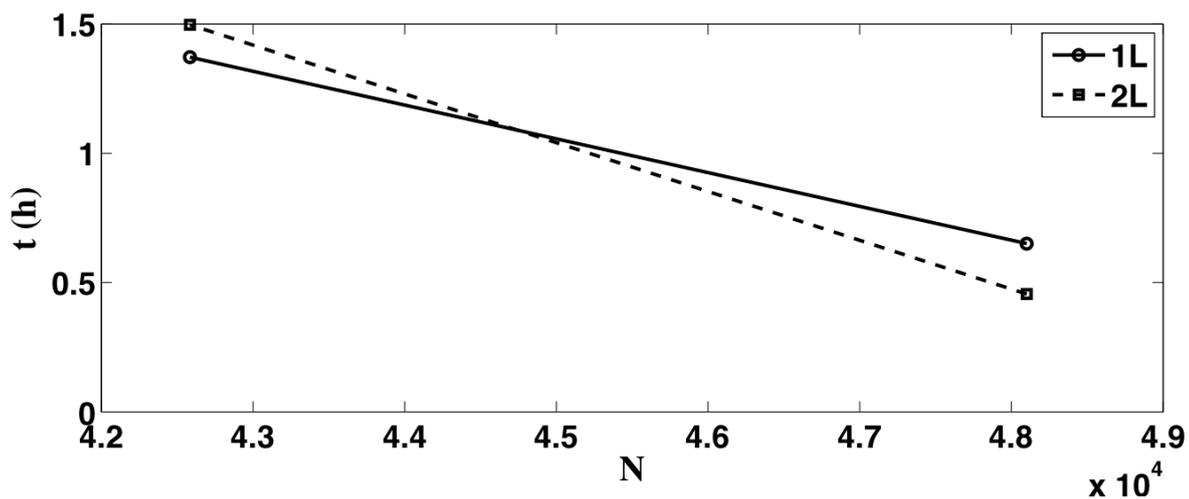


FIG. 5.17 – Evolution du temps de calcul en fonction du nombre de points du maillage. Modes 1L et 2L.

5.3 Calcul des modes longitudinaux sur un secteur

	1L		2L	
	Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)
	507.94 Hz	-2.65 Hz	1150.98 Hz	-41.95 Hz
A(%)	6.3%		37.3%	

TAB. 5.2 – Fréquences des deux premiers modes longitudinaux (1L et 2L).

Les premiers calculs sont limités à un secteur de la chambre. Seuls les modes longitudinaux sont alors considérés. L'emplacement des zones multiperforées est présenté sur la figure 5.5. Au vu des résultats de la section 5.2.3, le maillage M2 est choisi pour effectuer les calculs. Le premier mode longitudinal est noté 1L et le deuxième mode est noté 2L. Le tableau 5.2 rassemble les fréquences et les taux d'amplification obtenus. L'amortissement du mode 2L est clairement plus important que pour le mode 1L. Cette tendance peut être expliquée par différentes approches :

1. en regardant la répartition du module de pression (Section 5.3.1),
2. en étudiant l'évolution des modes acoustiques en fonction de la vitesse du *bias flow* (Section 5.3.2),
3. enfin par une approche par bilans acoustiques dans la section suivante (Section 5.4).

5.3.1 Répartition de la fluctuation de pression

La figure 5.18 montre la répartition du module de pression pour le mode 1L et le mode 2L. Pour le mode 1L, il n'y a qu'une zone où le saut de pression est important (la zone qui correspond à l'emplacement de la plaque MP2 (cf. Fig. 5.5)). La pression est homogène du contournement vers la chambre pour les plaques MP1i et MP2i et MP3i, ce qui n'est pas le cas pour le mode 2L. Le saut de pression est plus important sur la plaque MP3 pour le mode 2L que pour le mode 1L. Le pouvoir amortissant d'une MP étant proportionnel au saut de pression acoustique à travers celle-ci (cf. Eq. 3.2), la structure du mode 2L est par conséquent plus apte à rendre les plaques perforées efficaces pour l'amortissement.

5.3.2 Etude sur la vitesse du *bias flow*

Pour mieux comprendre la faiblesse de l'amortissement sur le premier mode longitudinal, on modifie la vitesse U du *bias flow* à porosité fixe. La figure 5.19 et la figure 5.20 montrent l'évolution de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Re}(f)$ dans le plan complexe en fonction de la vitesse U pour les deux premiers modes longitudinaux. Pour le mode 1L comme pour le mode 2L, une vitesse notée U_{md} maximise l'amortissement. Dans les deux cas, la partie réelle de la fréquence du mode augmente quand la valeur de la vitesse du *bias flow* diminue. Cette tendance a été aussi observée sur le cas test du cylindre (Ch. 3). La valeur de la vitesse du régime réel de la chambre est notée U_{ref} . La valeur de la vitesse d'amortissement maximal est plus proche de U_{ref} pour le mode 2L que pour le mode 1L. Ceci explique que

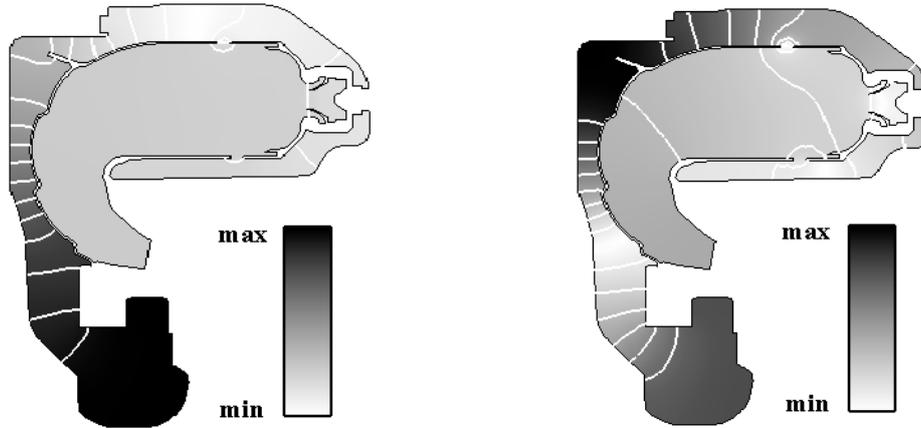


FIG. 5.18 – Distribution spatiale de $|\hat{p}|$ pour le mode 1L (à gauche) et le mode 2L (à droite).

l'amortissement est plus important pour le mode 2L que pour le mode 1L. A partir de cette étude paramétrique en vitesse, l'amortissement est tracé en fonction du paramètre sans dimension U/U_{md} sur la figure 5.21 pour le mode 1L. L'amortissement maximal est obtenu pour un nombre de Strouhal égal à 0.09. Il y atteint une valeur de 34% par période. Au point de fonctionnement réel de la chambre, l'amortissement est seulement de 6.3% par période. Dans le chapitre 3, la figure 3.33 montrait la vitesse maximale obtenue pour le cylindre pour un jeu de paramètres identiques à ceux des plaques de la chambre (porosité de 1.6 %). La vitesse maximale d'amortissement était trouvée à un Strouhal égal à 0.02 alors que le nombre de Strouhal qui maximise l'amortissement pour la chambre est de 0.09. Il est donc nécessaire de prendre en compte la totalité de la géométrie pour prédire avec précision le régime qui permet d'obtenir un amortissement maximal.

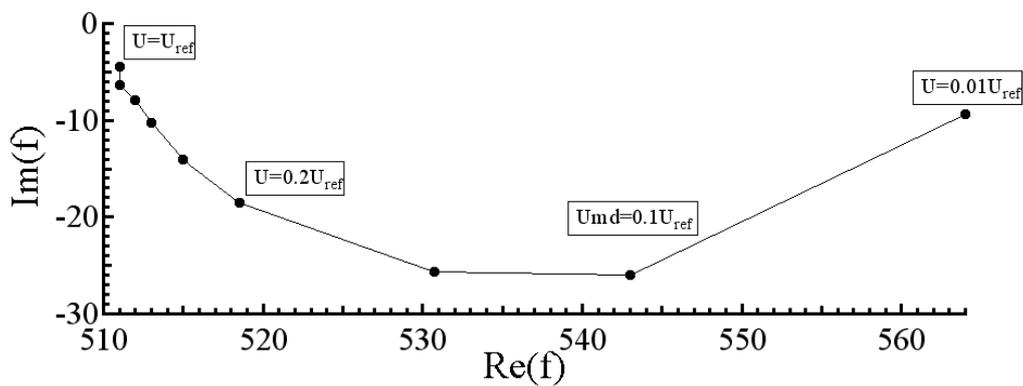


FIG. 5.19 – Evolution de $Im(f)$ en fonction de U pour le mode 1L.

La figure 5.22 montre le champ de pression acoustique pour différents cas :
 – $U = U_{md}$: correspond à l'amortissement maximal

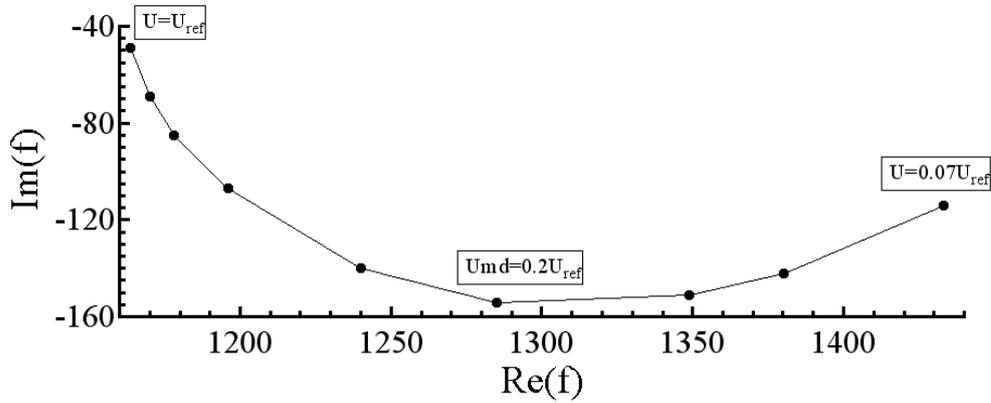


FIG. 5.20 – Evolution de $Im(f)$ en fonction de U pour le mode $2L$.

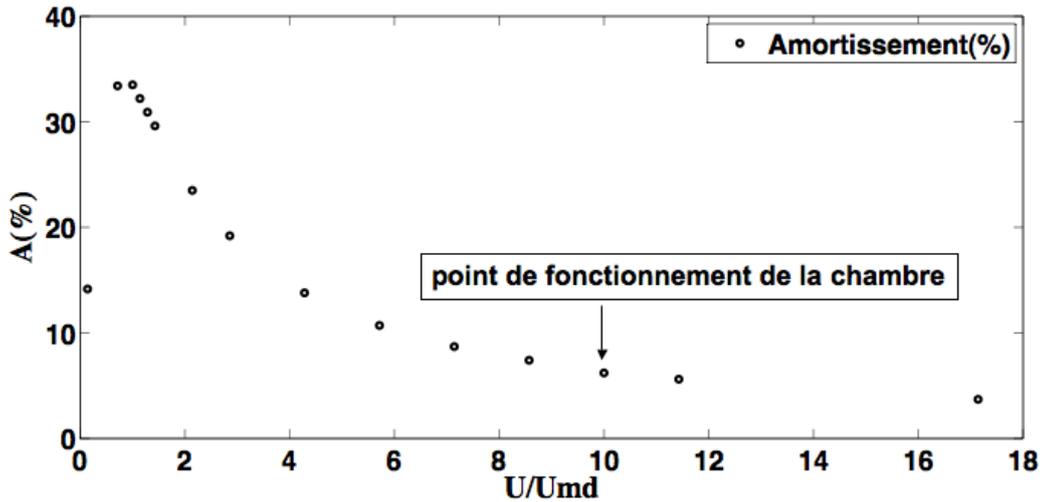


FIG. 5.21 – Evolution de l'amortissement en fonction de U (mode $1L$).

- $U = 10 U_{md}$: correspond au débit réel de la chambre.
- Pas de plaques perforées.

La structure du mode est semblable pour le cas avec des murs et des plaques perforées à la vitesse du régime réel ($U = 10 U_{md}$). Les plaques multiperforées n'ont pas d'impact sur la répartition du module de pression au régime réel. La répartition change cependant à la vitesse maximale d'amortissement. Le noeud de pression est décalé vers l'amont du contournement.

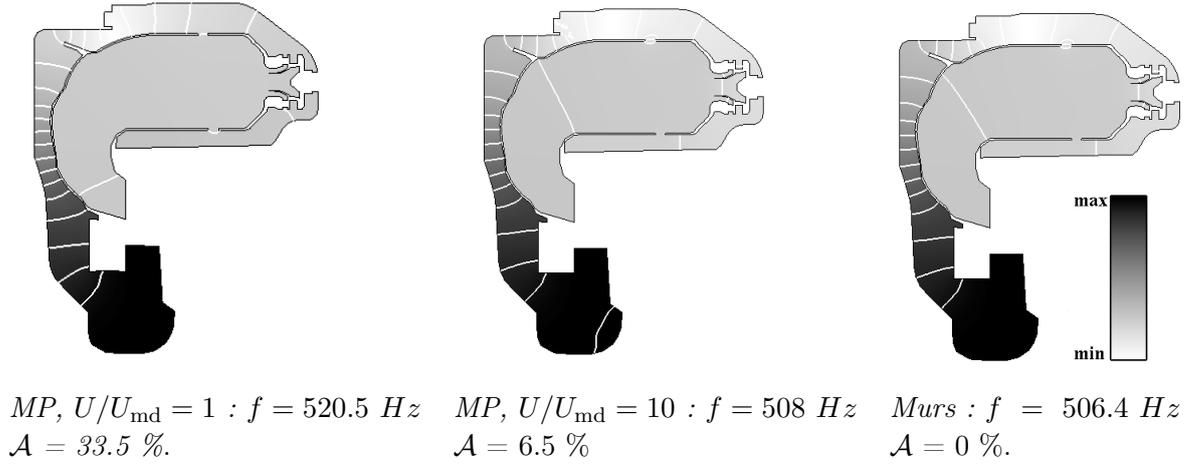


FIG. 5.22 – Structure spatiale et isolignes de \hat{p} pour le premier mode longitudinal.

5.4 Bilans acoustiques

5.4.1 Mode 1L

5.4.1.1 Paramètres réels

Un bilan d'énergie est en premier lieu calculé pour le premier mode longitudinal. Le maillage M2 est utilisé. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 5.3. Tous les termes sont donnés en pourcentage. Toutes les contributions du tableau sont normalisées par l'énergie du mode en $t = 0$ ($\bar{E}_1(t = 0)$, cf Ch. 4).

$$e^{2\omega_i T} = 1 + MP1 + MP1i + MP2 + MP2i + MP3 + MP3i, \quad (5.3)$$

où MPk est la contribution de la plaque MPk . Pour chaque plaque, on donne également la contribution à l'amortissement global. Par exemple, la plaque MP2 dont l'amortissement est d'environ 5.4% contribue à 34% de l'amortissement total. Pour le mode 1L, l'amortissement global est de 6.4% sur une période. Le bilan d'énergie est fermé avec une erreur de 0.36%. Le tableau 5.3 montre que la dissipation la plus importante est due à la plaque MP2. Cette plaque est responsable à elle seule de plus de la moitié de l'amortissement global. Le résultat du bilan corrobore donc ce qui était observé en regardant la répartition du module de pression dans la section 5.3.1. Le saut de pression était maximal au travers de la plaque MP2.

Au vu de ce résultat, l'impact de la plaque MP2 sur la structure du mode est étudié. Un autre calcul est alors effectué en remplaçant la plaque MP2 par une condition acoustiquement imperméable. Alors que l'amortissement global était avant de 6.4% avec la plaque MP2, il est maintenant de 1%, ce qui correspond presque exactement à l'amortissement global moins la contribution de la plaque MP2 (5.36%). La partie imaginaire étant très

1L	$e^{2\omega_i T} - 1$	ε	MP1	MP1i	MP2	MP2i	MP3	MP3i
toutes MP	-6.4	0.36	0.625	$4.5 \cdot 10^{-3}$	5.36	$1.7 \cdot 10^{-2}$	0.526	0.186
			4	0.0288	34.3	0.109	3.37	1.19
sans MP2	-1.1	0.2	0.637	$4.41 \cdot 10^{-3}$	–	$1.7 \cdot 10^{-2}$	0.541	0.195
			57.9	0.4	–	1.55	49	17.7

TAB. 5.3 – Bilan acoustique sur le mode 1L.

petite ($Im(f) = -0.46$ Hz), on peut dire que le mode est marginalement stable.

La figure 5.23 montre que remplacer la plaque par un mur n'a pas modifié la structure du mode. Le noeud de pression reste situé au niveau de la plaque MP2, ce qui explique que la contribution des autres plaques ne puisse évoluer entre les deux cas. L'amortissement ne peut donc être assuré par les autres plaques, et le mode devient marginalement stable.

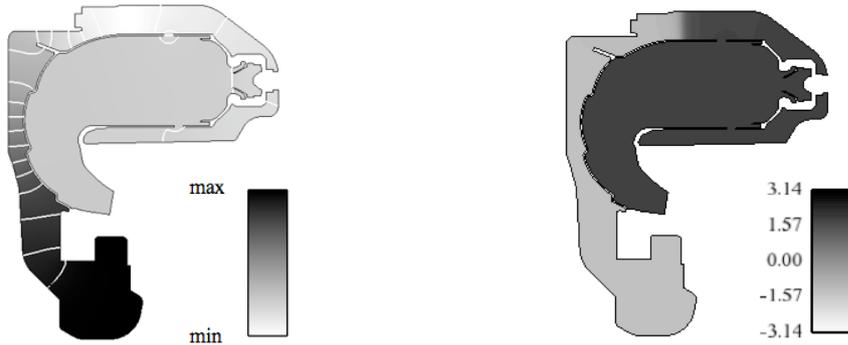


FIG. 5.23 – $|\hat{p}|$ (à gauche) et $Arg(\hat{p})$ (à droite) pour le mode 1L sans la plaque MP2.

5.4.1.2 Paramètres maximisant l'amortissement

Le comportement montré précédemment est dû au fait que les plaques n'ont pas un impact important avec les paramètres réels. Un autre calcul est effectué en utilisant la vitesse qui maximise l'amortissement comme montré dans la section 5.3. Les nouvelles contributions des plaques sont montrées dans le tableau 5.4. La plaque MP2 est beaucoup plus efficace que dans le cas précédent. Elle contribue à presque 85% de l'amortissement total et l'amortissement global est lui aussi plus élevé.

La figure 5.24 montre la structure du mode quand toutes les plaques perforées sont actives, et la figure 5.25 le cas où MP2 est un mur. Le saut de pression à travers la plaque MP2 est maximal sur la figure 5.24, mais la figure 5.25 montre que la structure du mode est impactée. La contribution de la plaque MP1 est par conséquent impactée. Dans ce

1L	$e^{2\omega_i T} - 1$	ε	MP1	MP1i	MP2	MP2i	MP3	MP3i
$U = U_{\text{md}}$, toutes MP	-33.4	1.54	3.3	$2.10 \cdot 10^{-2}$	28.4	0.19	2.12	0.679
			9.87	$6.28 \cdot 10^{-2}$	84.9	0.57	6.34	2.03
$U = U_{\text{md}}$, sans MP2	-8.3	1.50	5.08	$2.6 \cdot 10^{-2}$	–	$8.6 \cdot 10^{-2}$	3.6	1
			61.2	0.313	–	1.04	43.4	12.0

TAB. 5.4 – Bilan acoustique pour le mode 1L avec $U = U_{\text{md}}$.

cas, le nouvel amortissement obtenu n'est pas égal à l'amortissement auquel on aurait retiré la contribution de la plaque MP2. Dans des configurations complexes, on ne peut pas simplement considérer que les contributions des différentes plaques s'ajoutent. En d'autres termes, l'effet amortissant d'une MP dépendant de la structure du mode, il peut être modifié de manière sensible même si la MP elle-même est inchangée. Une optimisation acoustique à base de MP nécessite donc le calcul de la structure complète des modes et ne peut être faite a priori sans considérer la géométrie du système à optimiser.



FIG. 5.24 – $|\hat{p}|$ (à gauche) et $\text{Arg}(\hat{p})$ (à droite) pour le mode 1L, $U = U_{\text{md}}$.

5.4.2 Bilan acoustique sur le mode 2L

Le même calcul est à présent effectué sur le mode 2L. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 5.5. L'amortissement total est de 36.7%. Ici encore, c'est la plaque MP2 qui est la plus efficace à amortir. Sa contribution est de presque la moitié de l'amortissement total. L'amortissement est de 20.9% alors qu'il est seulement de 5.36% pour le mode 1L. Les autres plaques, en particulier MP1 et MP3, contribuent de façon significative à l'amortissement total, ce qui n'était pas le cas pour le mode 1L. L'approche par bilans

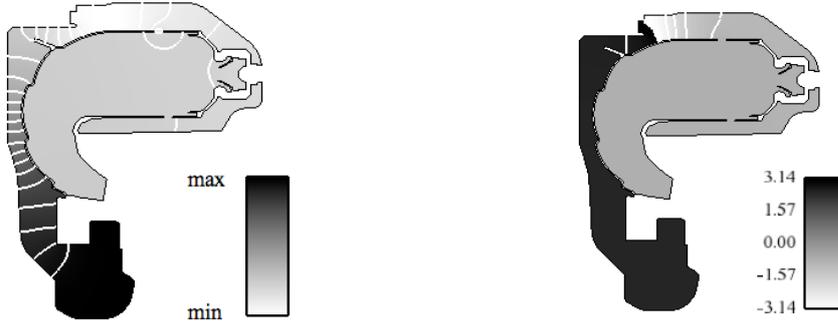


FIG. 5.25 – $|\hat{p}|$ (à gauche) et $Arg(\hat{p})$ (à droite), $U = U_{md}$, sans MP2

acoustiques permet d'expliquer plus précisément pourquoi l'amortissement du mode 2L est plus important que le mode 1L.

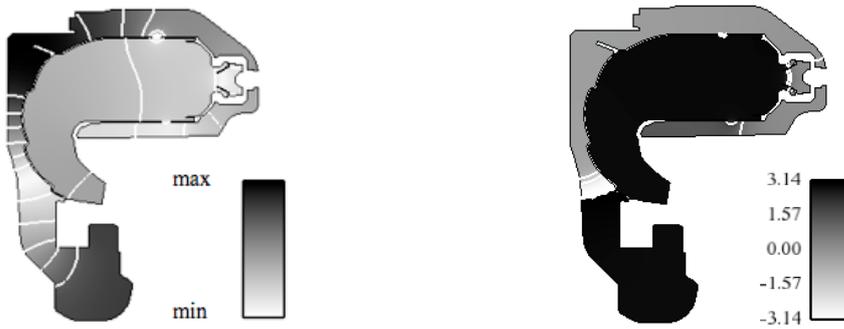


FIG. 5.26 – $|\hat{p}|$ (à gauche) et $Arg(\hat{p})$ (à droite), mode 2L, sans MP2.

2L	$e^{2\omega_i T} - 1$	ϵ	MP1	MP1i	MP2	MP2i	MP3	MP3i
all MP	-36.7	1.47	3.42	0.294	20.9	2.05	6.49	4.03
			9.20	0.79	56.2	5.52	17.4	10.8
sans MP2	-17.9	0.41	3.99	0.322	-	2.23	7.28	4.49
			22.3	1.80	-	12.4	40.7	25.1

TAB. 5.5 – Bilan d'énergie acoustique sur le mode 2L, maillage M2.

5.5 Calculs sur la chambre complète : modes azimutaux

Jusqu'ici seuls les modes longitudinaux ont été considérés. Or dans les chambres industrielles, les modes azimutaux prédominent souvent [46]. Ces modes sont caractérisés par une dépendance de la fluctuation de pression à la coordonnée azimutale.

Le maillage de la chambre complète contient 466 485 noeuds. Il a été obtenu par rotation du maillage secteur. Le champ de vitesse du son a été obtenu lui aussi en effectuant une rotation du champ LES. Cette technique permet d'éviter d'effectuer un calcul LES sur une chambre complète, ce qui économise beaucoup de temps de calcul.

Le premier mode obtenu à l'issue d'un calcul complet 360 degrés correspond au premier mode longitudinal, que l'on obtenait précédemment sur un calcul secteur. Sa fréquence est donnée dans le tableau 5.6. Cette valeur est très proche de celle obtenue sur un maillage secteur (Tab. 5.2) avec 2 Hz seulement d'écart. La distribution du module de pression et de son argument sont montrés Fig. 5.27. La figure montre bien une distribution de $|\hat{p}|$ et de $Arg(\hat{p})$ ne dépendant pas de la coordonnée azimutale. Le mode est bien purement longitudinal. En effectuant une coupe en un θ aléatoire comme effectué Fig. 5.27, on retrouve bien la distribution de $|\hat{p}|$ et de $Arg(\hat{p})$ obtenus précédemment sur un secteur.

1L		1A		2A	
Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)
509.9	-2.54 Hz	615.6 Hz	-0.92 Hz	985 Hz	-8.38 Hz

TAB. 5.6 – Mode 1L, mode 1A et mode 2A issus d'un calcul sur chambre complète.

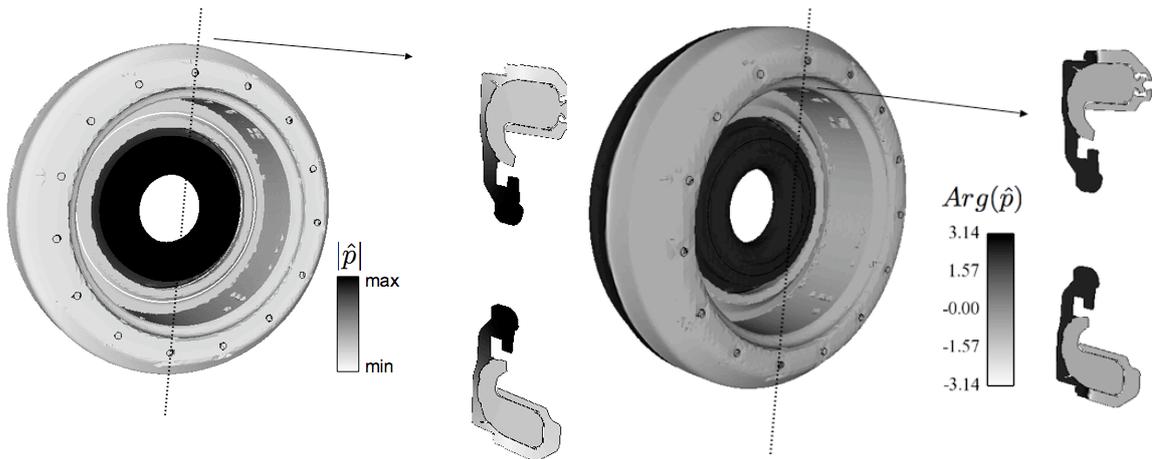


FIG. 5.27 – Distribution de $|\hat{p}|$ et de $Arg(\hat{p})$ mode 1L sur chambre complète.

Les modes de fréquence supérieure correspondent au premier (1A) et au second mode azimutal (2A). Les fréquences sont données Tab. 5.6. Les modes azimutaux vont par paire,

comme montré sur la figure 5.28. Le premier mode azimuthal est caractérisé par la présence de deux noeuds de pression (en blanc sur l'image, repérés par un $-$) et de deux ventres de pression (en noir, repérés par un $+$). Ces modes sont dit orthogonaux et sont à la même fréquence (610 Hz). Le mode 1A est trouvé marginalement stable, avec une partie imaginaire proche de 0.

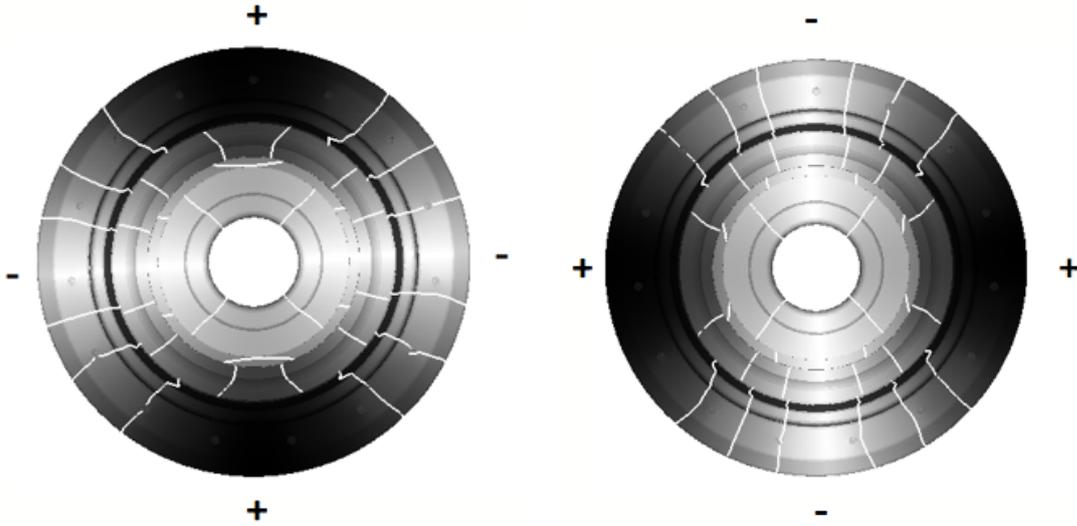


FIG. 5.28 – Distribution de $|\hat{p}|$ pour le mode 1A.

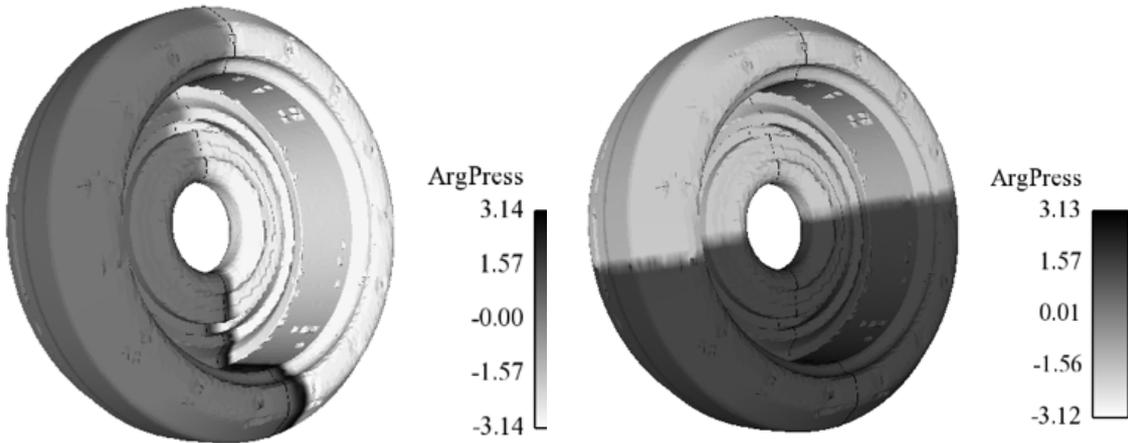


FIG. 5.29 – Distribution de $Arg(\hat{p})$ pour les modes 1A couplés.

La figure 5.30 montre la répartition du module de pression du deuxième mode azimuthal et la figure 5.31 l'argument de la pression associé. Ces calculs ont été réalisés dans le cas du régime effectif de la chambre.

La figure 5.32 montre l'évolution de la fréquence dans le plan complexe. La vitesse dans les perforations va de U_{ref} à $U = 0.01 U_{ref}$. Une tendance semblable à celle des

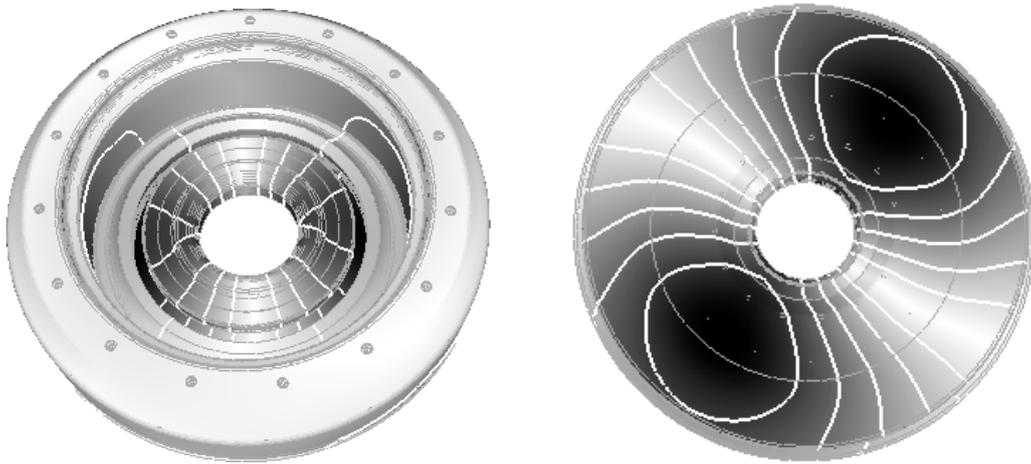


FIG. 5.30 – Distribution de $|\hat{p}|$ pour le mode 2A. Vue des deux côtés de la chambre.

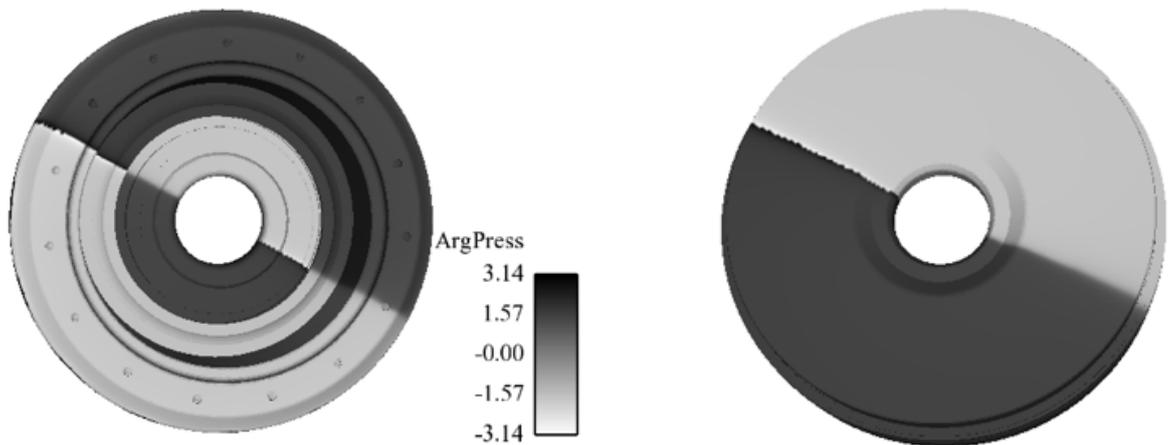


FIG. 5.31 – Distribution de $Arg(\hat{p})$ (mode 2A).

modes longitudinaux est observée. Plus U décroît, plus la fréquence augmente. L'amortissement rencontre un maximum à $U_{md} = 0.2 U_{ref}$. L'amortissement obtenu à cette valeur de la vitesse atteint 16%. Au-delà, l'amortissement décroît à nouveau.

Un bilan d'énergie acoustique est calculé pour le deuxième mode azimutal. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.7. La plaque MP2 est encore la plaque la plus efficace à amortir pour le mode 1A.

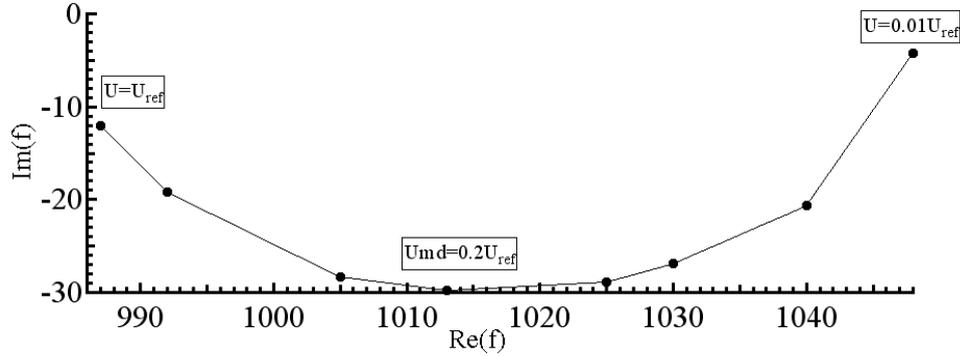


FIG. 5.32 – Evolution de la fréquence dans le plan complexe pour le mode 2A.

$e^{2\omega_i T} - 1$	ε	MP1	MP1i	MP2	MP2i	MP3	MP3i
-10.1	0.58	1.02	$3.90 \cdot 10^{-3}$	8.63	0.0101	0.803	0.27
		10.1	0.0386	85.4	0.1	7.95	2.67

TAB. 5.7 – Bilan acoustique pour le mode 1A.

5.6 Impact de l'épaisseur de la plaque

Modèle de Howe classique		Modèle de Howe modifié	
Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)
507.94 Hz	-2.65 Hz	507.89 Hz	-2.67 Hz

TAB. 5.8 – Comparaison des fréquences du mode 1L avec prise en compte ou non des plaques multiperforées.

Le tableau 5.8 compare les fréquences du mode 1L pour deux calculs. L'un ne prend pas en compte l'épaisseur de la plaque (modèle de Howe classique [29]) et l'autre prend en compte l'épaisseur de la plaque (modèle de Howe modifié par Jing et Sun [94]). L'épaisseur de la plaque dans le moteur n'a pas d'impact. L'écart sur Re(f) est de seulement 0.1 Hz et de 0.02 Hz sur Im(f).

Le rapport $\frac{h}{a}$ dans le cas de la chambre industrielle est pourtant de 4 ou 6 selon les plaques perforées. D'après la figure 3.35, l'impact de l'épaisseur devrait être important. La figure 5.33 montre l'évolution de la conductivité de Rayleigh en fonction du nombre de Strouhal. Γ_a est prédite différente pour les deux épaisseurs dès un nombre de Strouhal très faible. Δ_a n'est elle impactée que au dessus d'un Strouhal supérieur à 0.2. Cependant

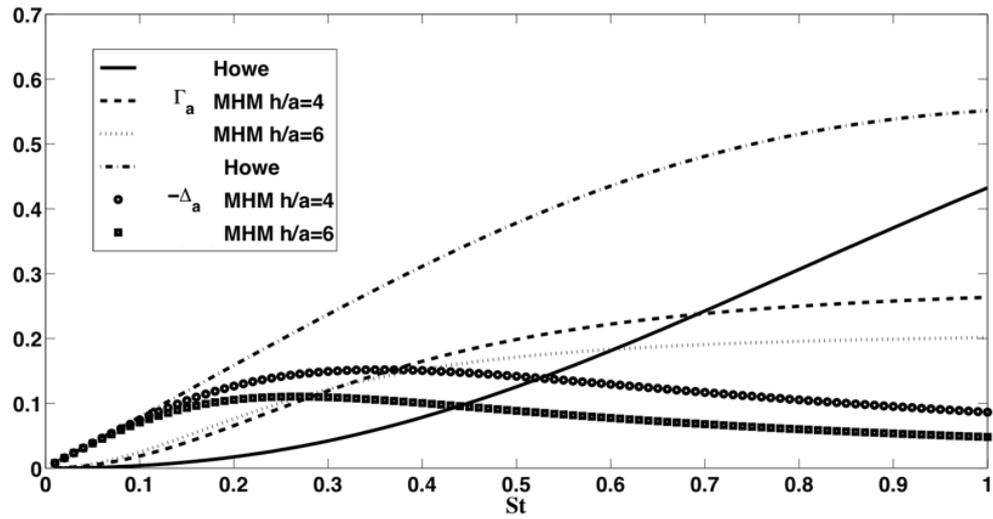


FIG. 5.33 – Evolution de Γ_a et $-\Delta_a$ en fonction du nombre de Strouhal, pour deux épaisseurs de plaque. Modèle de Howe et modèle de Howe modifié (MHM).

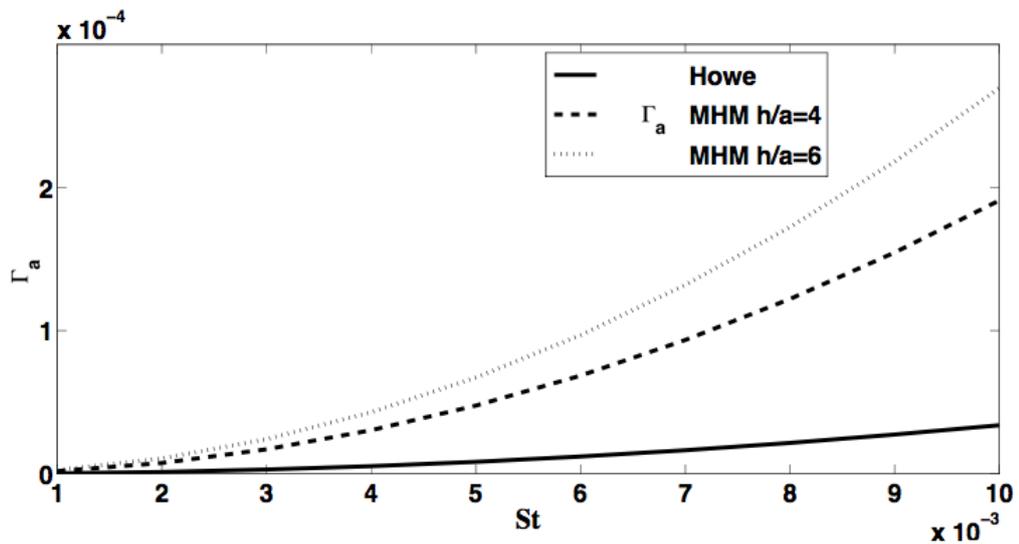


FIG. 5.34 – Evolution de Γ_a en fonction du nombre de Strouhal. Zoom autour de $St = 0.009$.

le nombre de Strouhal du régime réel est de 0.009. Les figures 5.34 et 5.35 montrent l'évolution de Γ_a et $-\Delta_a$ pour les deux épaisseurs qui sont présentes dans la chambre autour du nombre de Strouhal du régime effectif. Δ_a n'est pas du tout impactée, ce qui explique

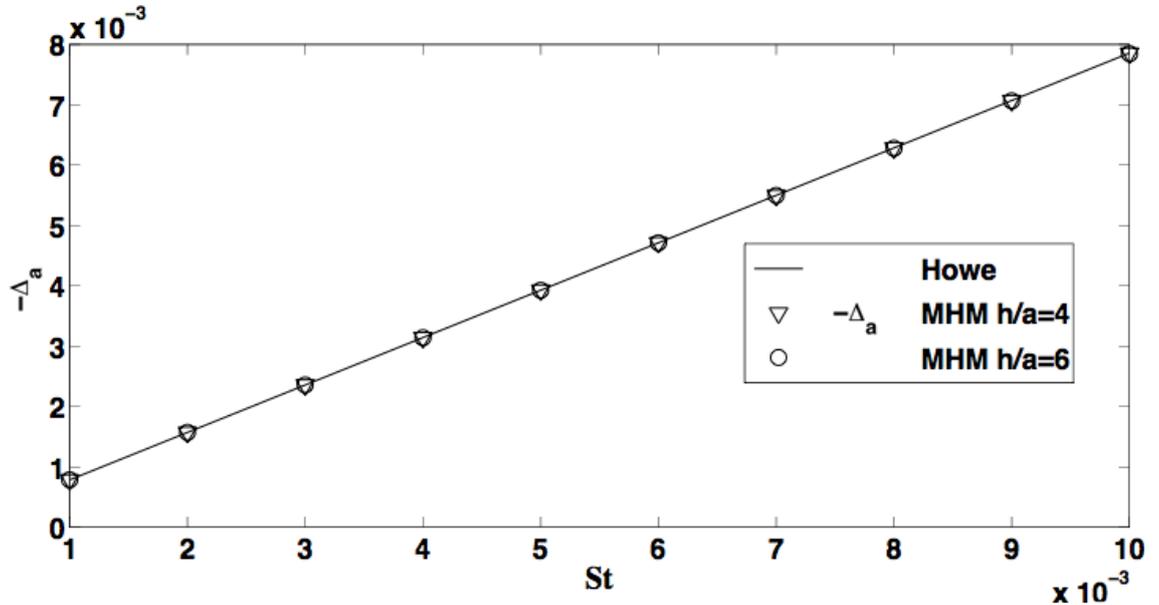


FIG. 5.35 – Evolution de $-\Delta_a$ en fonction du nombre de Strouhal. Zoom autour de $St = 0.009$ pour deux épaisseurs de plaque.

que la partie imaginaire des fréquences dans les deux cas soient les mêmes. La partie réelle est impactée mais de façon trop faible. Γ_a diffère en effet de 2.10^{-4} m^{-1} .

5.7 Impact des films de refroidissement

En plus des plaques multiperforées, cette chambre est également équipée de films de refroidissement. Les caractéristiques de ces films ont été abordées dans le chapitre 1. De manière générale, les diamètres des perforations des films sont plus élevés : jusqu'à 0.75 mm de diamètre pour un film, contre 0.4 mm de diamètre pour une plaque perforée. L'amortissement du premier mode longitudinal est comparé entre deux cas. Dans un cas, les plaques multiperforées et les films de refroidissement sont traités comme des plaques multiperforées. Dans l'autre cas, seuls les films de refroidissement sont traités comme des plaques multiperforées, les plaques multiperforées étant elles considérées comme des murs. La localisation des films de refroidissement est montrée sur la figure 5.36. Le film F1 et le film F2 sont des films à jets impactant comme décrit dans le chapitre 1. Les calculs sont réalisés avec le maillage M3, une résolution suffisante étant nécessaire pour calculer localement le saut de pression montré sur les figures 5.37 et 5.39.

Le tableau 5.9 montre les résultats d'un calcul sur le mode 1L où les MP sont déclarées en murs et les films en MP, et un autre calcul où les MP et les films sont déclarées en MP. L'amortissement obtenu est beaucoup plus important que dans le cas où les films

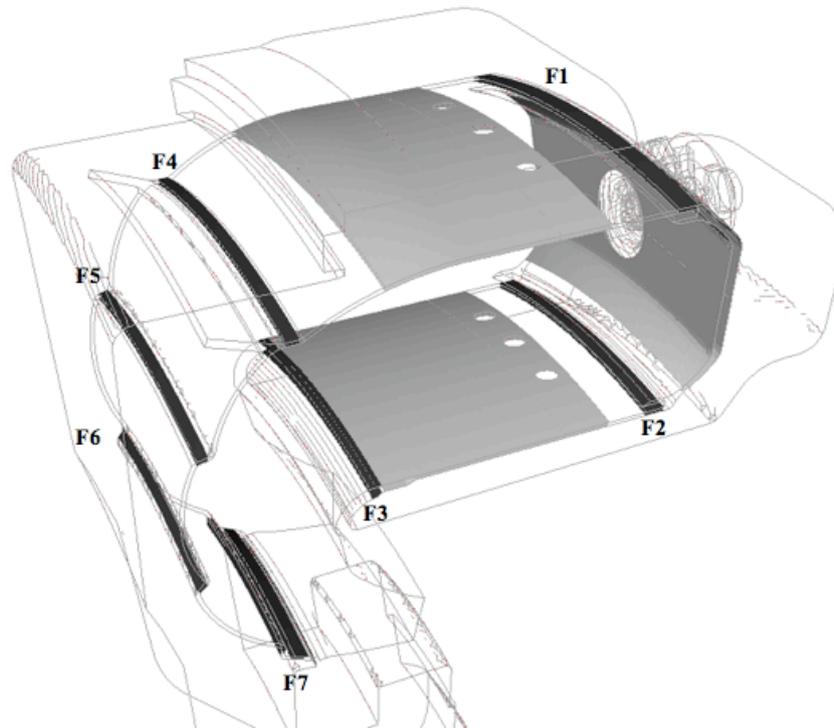


FIG. 5.36 – Emplacement des films de refroidissement sur la chambre étudiée.

de refroidissement sont traités en murs. La figure 5.37 montre la distribution du saut de pression spatiale dans la chambre. Cette figure est à comparer avec la figure 5.39. L'efficacité des films est due au fait qu'ils sont situés dans les zones où le saut de pression est plus important.

Les films de refroidissement sont beaucoup plus efficaces que les plaques perforées. La répartition de pression autour des films fait qu'un fort saut de pression se trouve au niveau des films notés F3, F4, F5, F6 et F7. Les films F1 et F2, situés à proximité des plaques perforées, ont un impact très faible et comparable à celle des plaques perforées.

5.7.1 Bilans acoustiques sur la chambre avec films de refroidissement (FR) et plaques multiperforées et (MP)

Un bilan d'énergie acoustique est effectué sur un cas avec MP et FR, que l'on compare avec un calcul où seuls les FR ont été déclarés en MP, mais les MP classiques sont déclarées en conditions acoustiques imperméables. Le calcul est réalisé sur le maillage M2 et le maillage M3. Les résultats sont rassemblés tableau 5.10 pour le cas avec films uniquement et dans le tableau 5.11 pour le cas où sont activées à la fois les films de refroidissement et les plaques multiperforées. L'erreur sur le bilan est fortement améliorée en utilisant le maillage M3. Elle est en effet environ 6 fois inférieure par rapport au cas effectué avec le maillage M2. Un écart assez important de 7 Hz environ sur les deux fréquences.

MP+Films		Films		MP	
Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)
548 Hz	-144.4 Hz	545.21 Hz	-142.4 Hz	507.94 Hz	-2.65 Hz

TAB. 5.9 – Comparaison sur le premier mode longitudinal, configuration avec plaques multiperforées et films, et films de refroidissement uniquement.

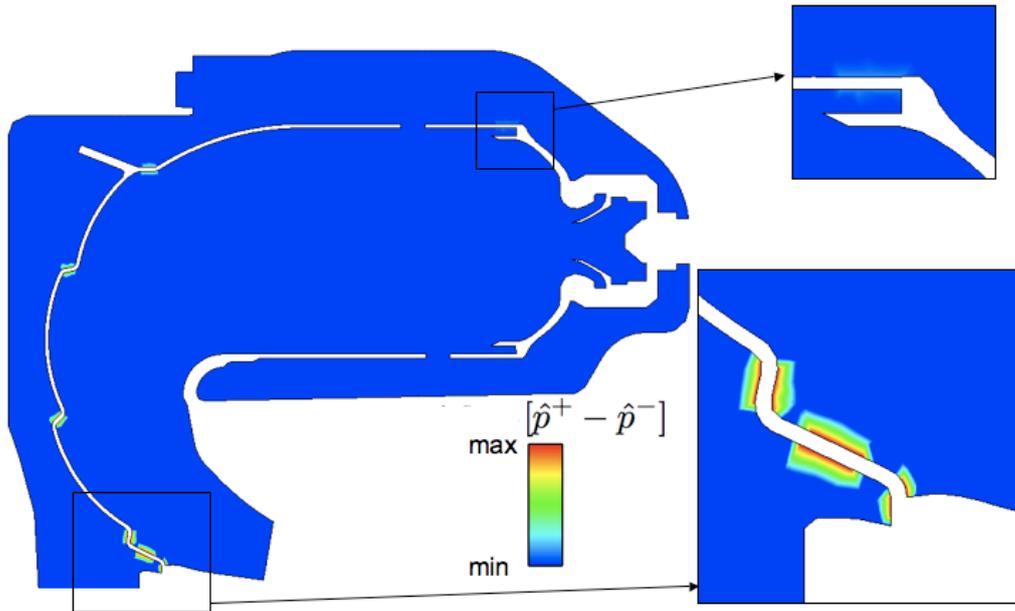


FIG. 5.37 – Champ de $[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]$. Cas films uniquement.

	FILMS				
	Re(f) (Hz)	Im(f) (Hz)	$e^{2\omega_i T} - 1$	Flux	ε (%)
M2	578.04	-169.97	-0.975	-1.04	7.37
M3	545.2	-142.4	-0.962	-0.979	1.68

TAB. 5.10 – Bilans sur deux maillages M2 et M3 avec films.

La contribution des différentes conditions limites peut être mise en évidence. La figure 5.41 correspond au cas où les films et les MP sont traitées en conditions de plaques perforées et la figure 5.42 un cas avec films seulement. La contribution des plaques perforées est extrêmement faible, ce qui explique le peu de modification dans l'amortissement entre le cas films+MP et films. En dépit de leur petite surface comparée aux MP, les films sont très efficaces, car situés dans des zones de fort saut de pression. La section des perfo-

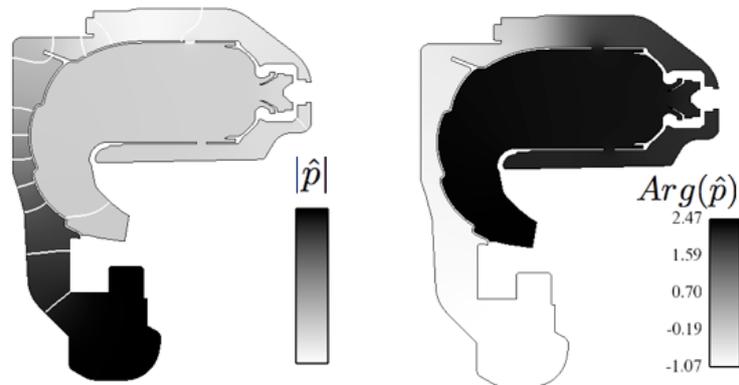


FIG. 5.38 – Champ de \hat{p} . Cas films uniquement.

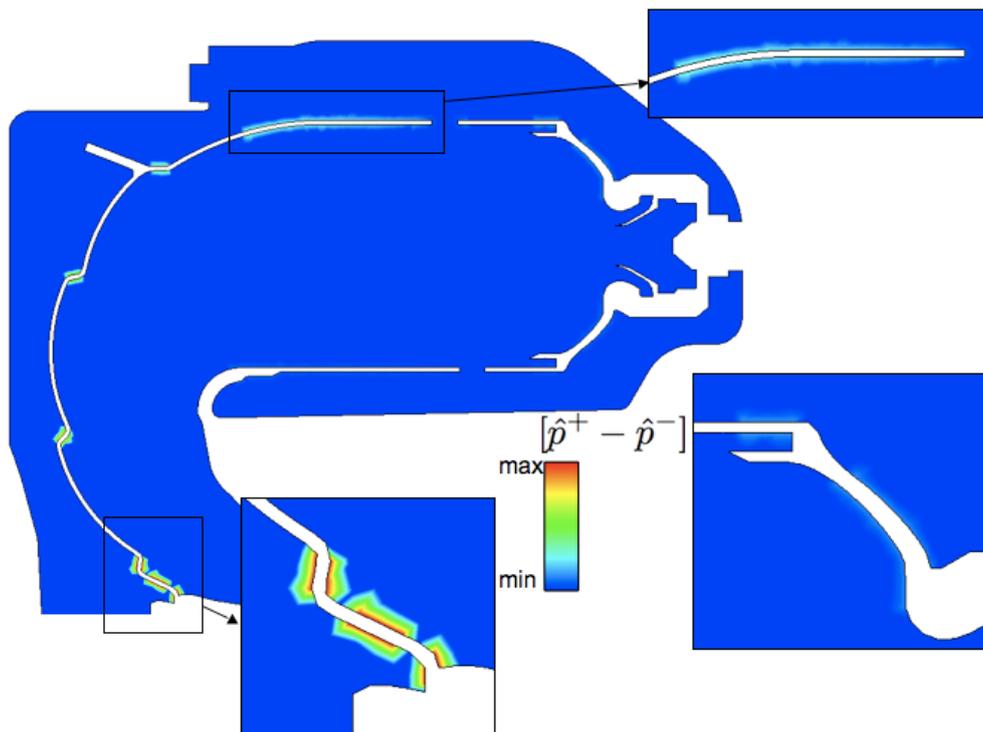


FIG. 5.39 – Champ de $[\hat{p}^+ - \hat{p}^-]$. Cas films et plaques perforées.

rations dans les films de refroidissement étant plus importante, la vitesse de l'écoulement dans les trous est plus faible et plus proche de U_{md} . Il est à noter que le film F4 contribue à lui seul à plus de 20% de l'amortissement global.

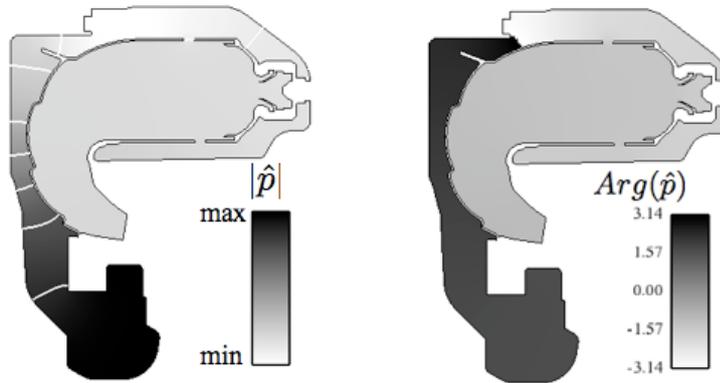


FIG. 5.40 – Champ de $|\hat{p}|$. Cas films et plaques perforées.

		FILMS + MP			
	Re(f) (Hz)	Im(f) (Hz)	$e^{2\omega_i T} - 1$	Flux	ε (%)
M2	583	-172.2	-0.975	-1.03	6.28
M3	576.4	-170.8	-0.975	-0.991	1.52

TAB. 5.11 – Bilans sur deux maillages M2 et M3 avec films et MP.

Jusqu'ici, la stabilité des modes a été considérée seulement en prenant en compte l'amortissement induit par les plaques multiperforées. Les calculs ont été effectués avec un champ moyen issu de la LES, cependant l'action de la flamme sur l'acoustique n'a pas été pris en compte. Il est nécessaire d'étudier ce que devient l'amortissement dans le cas où une source de chaleur est présente. La flamme a tendance en général à amplifier les modes acoustiques, car elle agit comme une source acoustique, alors que les plaques perforées amortissent. Qu'en est-il de la combinaison des deux phénomènes ? La prise en compte de la flamme active par le modèle $n - \tau$ a été rappelée dans la section 2.6. L'objectif de cette section est de prédire le comportement de la chambre dans le cas où la dissipation due aux plaques multiperforées est considérée et est couplée à l'action de la flamme.

5.8 Calcul avec fonction de transfert de flamme

5.8.1 Calcul de la fonction de transfert de flamme avec AVBP

Pour déterminer la FTF, la LES est soumise à un forçage acoustique de fréquence 700 Hz en entrée du domaine. L'entrée correspond ici à l'entrée du contournement. Le choix du positionnement du point de référence pour le modèle $n - \tau$ est déterminant pour

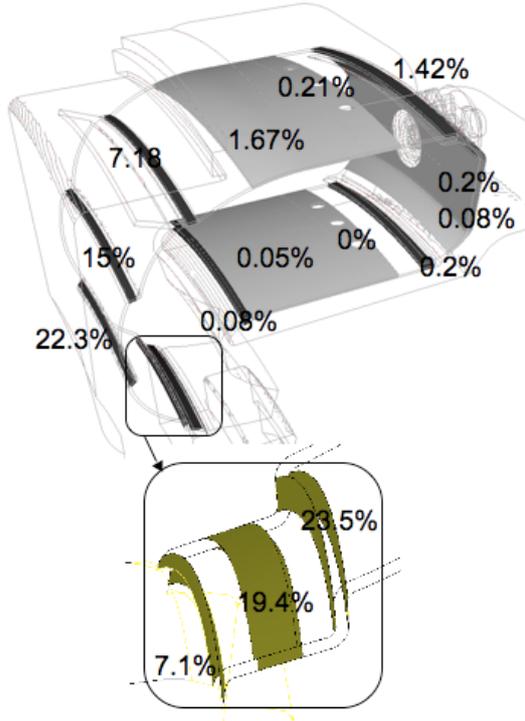


FIG. 5.41 – Bilan sur le cas avec films et plaques perforées.

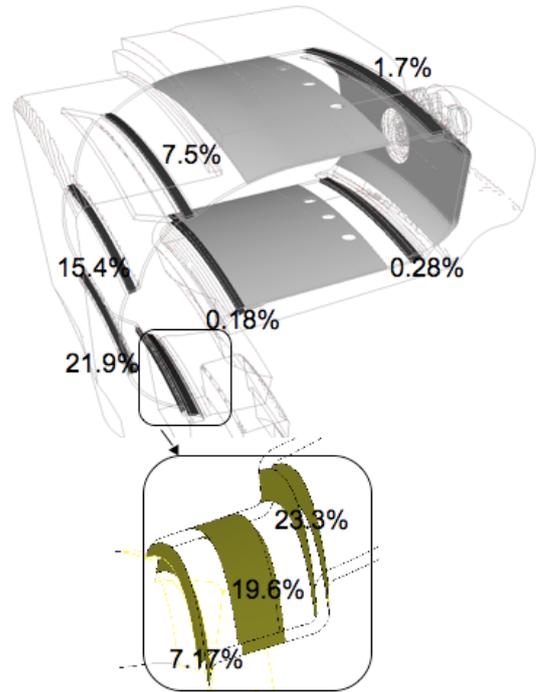


FIG. 5.42 – Bilan sur le cas avec films uniquement.

caractériser au mieux la relation entre l'acoustique dans le tourbillonneur et le dégagement de chaleur dans la chambre de combustion.

La figure 5.43 montre le champ de n_u et la figure 5.44 le champ de τ_u correspondant. Sur la figure 5.44, apparaît également l'isocontour (en blanc) $n_u = 5 \cdot 10^7$, le champ de τ_u est en effet imposé nul si $n_u < 5 \cdot 10^7$.

5.8.2 Calculs avec bilans acoustiques

Les maillages définis dans la section 5.2.3 sont à nouveau considérés ici. Les calculs sont effectués sur les maillages M2 et M3 contenant respectivement environ 48 000 noeuds et 450 000 noeuds.

Maillage	MP sans flamme active		MP avec flamme active	
	Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)
M2	507.9 Hz	-2.71 Hz	589.1 Hz	3.4 Hz
M3	501.6 Hz	-2.94 Hz	587.1 Hz	3.84 Hz

TAB. 5.12 – Résultats avec MP avec et sans flamme active, mode 1L.

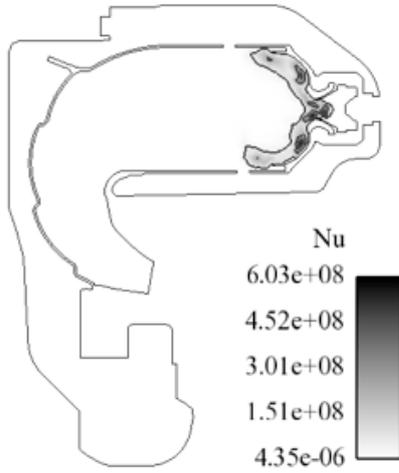


FIG. 5.43 – Profil de n_u

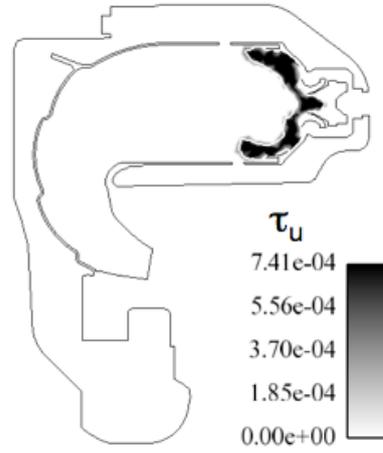


FIG. 5.44 – Profil de τ_u .

Maillage	MP sans flamme active		MP avec flamme active	
	Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f)
M2	1151 Hz	-41.9 Hz	1329 Hz	-18.3 Hz
M3	1124 Hz	-46.48 Hz	-	-

TAB. 5.13 – Résultats avec MP avec et sans flamme active, mode 2L.

Les tableaux 5.12 et 5.13 donnent les fréquences du premier et du deuxième mode longitudinal pour le cas avec et sans flamme active. Le premier mode devient amplifié puisque sa partie imaginaire devient positive sous l'action de la flamme. Le deuxième mode longitudinal reste amorti même si la partie imaginaire de sa fréquence augmente sous l'action de la flamme.

$e^{2\omega_i T - 1}$	$-\mathcal{F}_1$	S_1	ε	MP1	MP1i	MP2	MP2i	MP3	MP3i
7.5	-3.14	17.34	6.5	0.22	0.017	2.76	0.1	0.01	0.022
				2.93	0.227	36.8	1.33	0.133	0.293

TAB. 5.14 – Bilan acoustique pour le mode 1L maillage M2.

Les figures 5.45 et 5.46 montrent la répartition du module de pression et de l'argument respectivement pour le mode 1L et pour le mode 2L et les tableaux 5.14 et 5.15 rassemblent les résultats des bilans acoustiques. Cette fois un nouveau terme apparaît dans le bilan, il s'agit du terme source noté S_1 (voir chapitre 4). Le terme source dans le cas du mode 2L est très faible, alors qu'il est fort dans le cas du mode 1L. Ceci explique que le mode 2L

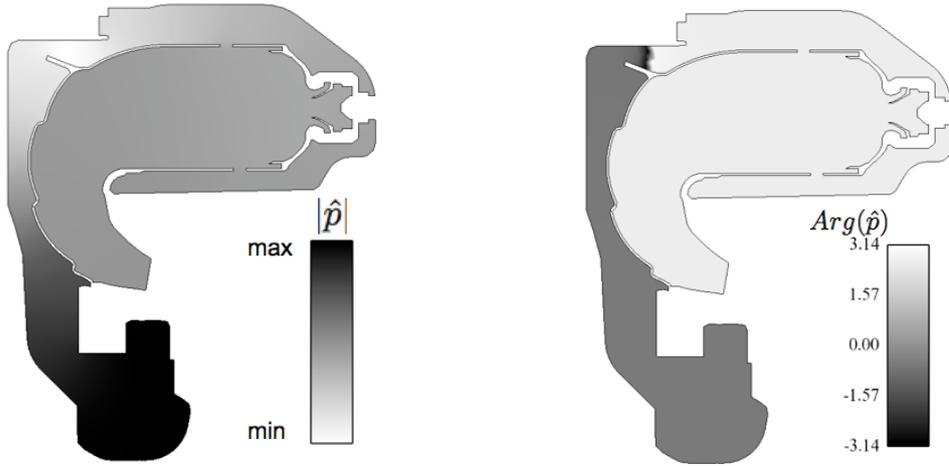


FIG. 5.45 – A gauche : champ de $|\hat{p}|$. A droite, champ de $Arg(\hat{p})$, mode 1L.

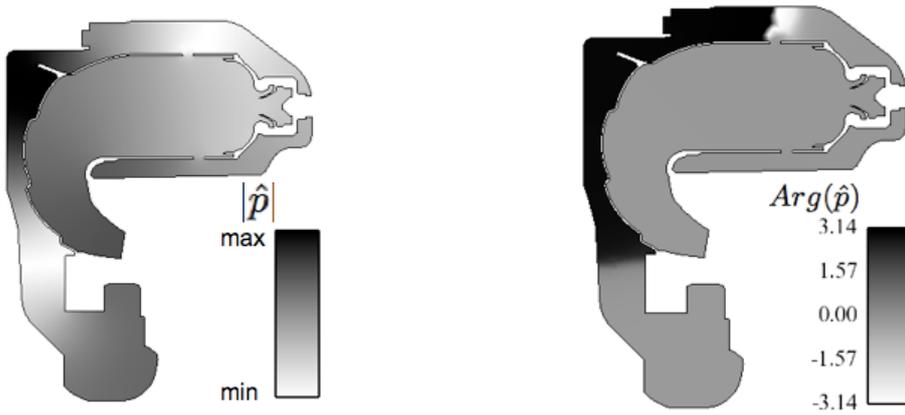


FIG. 5.46 – A gauche : champ de $|\hat{p}|$. A droite, champ de $Arg(\hat{p})$, mode 2L.

$e^{2\omega_i T - 1}$	$-\mathcal{F}_1$	S_1	ε	MP1	MP1i	MP2	MP2i	MP3	MP3i
-15.89	-13.8	1.93	4	0.98	0.13	11.51	0.95	0.05215	0.169
				6.16	0.838	72.4	5.97	0.328	1.06

TAB. 5.15 – Bilan acoustique pour le mode 2L maillage M2.

demeure amorti tandis que le mode 1L est amplifié sous l'action de la flamme.

Les résultats de ces tableaux sont à comparer avec ceux des tableaux 5.3 et 5.5 Les contributions respectives des plaques montrent une fois encore que la plaque la plus efficace est la plaque MP2. Pour le cas du mode 1L, la plaque MP2 a une contribution similaire à

l'amortissement global (36.8%) que dans le cas sans flamme active (34.3%). La contribution des autres plaques diminue, ce qui est dû à la modification de la répartition du saut de pression montré sur la figure 5.45. La pression est devenue homogène à travers les plaques MP3 , MP1i et MP2i dont la contribution est très faible dans le cas avec flamme active. De même l'impact de la flamme active sur la répartition de la pression du mode 2L induit que les sauts de pression sont fortement diminués à travers les plaques MP1i et MP3 notamment. Il serait intéressant d'effectuer un calcul avec flamme active dans le régime de vitesse d'amortissement maximal pour le mode 1L de manière à déterminer si le mode 1L reste amorti.

Conclusion et perspectives

Au regard des modèles existants pour simuler le comportement acoustique des plaques multiperforées soumises à une modulation de pression, le modèle de Howe est apparu comme le mieux adapté à être implémenté dans le solveur de Helmholtz existant AVSP. Il est en effet l'un des seuls modèles uniquement analytiques existants et sa forme d'impédance est particulièrement bien adaptée pour être utilisée dans le contexte harmonique d'un solveur acoustique. Le phénomène physique responsable de l'amortissement et que le modèle de Howe cherche à représenter est la génération de structures tourbillonnaires au bord des orifices. L'énergie acoustique est convertie en énergie cinétique convectée en aval de la plaque puis dissipée par effet visqueux.

L'implémentation du modèle a été validée en effectuant des calculs avec plaques multiperforées dans un premier temps sur des configurations simples. Sur des géométries simples type cylindre ou parallélépipède, il est en effet possible de résoudre l'équation de Helmholtz de façon analytique. Dans tous les cas, les calculs avec plaques multiperforées donnent pour résultat un amortissement des modes, comme attendu. Une étude de paramètres montre que cet amortissement dépend fortement de la vitesse de l'écoulement à travers les trous. Sur les configurations simples les résultats sont aussi sensibles à l'épaisseur de la plaque.

Des calculs sur une chambre industrielle de Turbomeca ont ensuite été effectués. L'amortissement sur le premier mode longitudinal est trouvé faible. Le deuxième mode longitudinal est plus amorti, ce qui s'explique par la forme de la répartition du module de pression. Pour le premier mode longitudinal, la répartition de pression est sensiblement la même que lorsque les plaques perforées sont considérées comme des conditions acoustiques rigides (i.e. des murs).

En plus des plaques multiperforées, la chambre est équipée de films de refroidissement ; ces films sont semblables à des plaques perforées avec la seule différence que les orifices ont un diamètre plus grand que ceux des plaques perforées. Le modèle de Howe peut donc là aussi être appliqué pour les modéliser. L'amortissement d'un calcul avec films et plaques perforées montre que l'amortissement dû aux films domine largement celui dû aux plaques perforées. En effet les films sont placés dans des positions stratégiques par rapport à la distribution du module de pression.

La totalité de la chambre a ensuite été considérée pour déterminer ses modes azimutaux. La dépendance de l'amortissement des plaques aux paramètres est retrouvée sur la chambre industrielle. Une étude paramétrique en fonction de la vitesse de l'écoulement à travers les orifices permet de mettre en évidence une vitesse maximale d'absorption. Ce comportement est vérifié sur les modes azimutaux. La valeur de la vitesse maximale d'absorption, assez éloignée de la valeur du régime de fonctionnement de la chambre, permet d'expliquer que l'amortissement observé dans la chambre soit relativement faible. A vitesse maximale d'absorption, la distribution du module de pression est modifiée, ce qui

augmente l'amortissement dû aux plaques. Les plaques perforées n'étant pas égales dans la contribution à l'amortissement, l'étude des bilans acoustiques permet de déterminer quelle plaque est la plus efficace dans l'amortissement de la chambre.

Il était aussi nécessaire de mesurer l'impact de la flamme en présence des plaques perforées. Il était impossible de prévoir d'avance si l'amplification due à la flamme l'emporterait sur la dissipation due aux plaques. Le premier mode longitudinal devient amplifié alors que le deuxième mode longitudinal demeure amorti. Là aussi les bilans sont un indicateur précieux pour évaluer la contribution des termes de flux et des termes sources à l'évolution globale de l'énergie.

L'importance de prendre en compte les plaques multiperforées dans la simulation numérique des chambres de combustion a bien été démontrée. La dépendance de l'amortissement aux paramètres a été soulignée. Le solveur de Helmholtz peut ainsi être un outil pour optimiser l'amortissement des plaques multiperforées en agissant sur les paramètres des plaques. La nécessité de prendre en compte la totalité de la géométrie d'une chambre pour estimer l'effet d'une zone multiperforée rend incontournable de faire cette étude paramétrique systématique, et il serait impossible d'optimiser une plaque dans une chambre complexe par une approche simplifiée ne prenant pas en compte l'intégralité de la géométrie et donc la forme des modes acoustiques.

Bibliographie

- [1] AUREGAN, Y., LEROUX, M., AND PAGNEUX, V. Measurement of liner impedance with flow by an inverse method. Tech. rep., Laboratoire d'Acoustique du Maine. 45
- [2] AUREGAN, Y., AND PACHEBAT, M. Measurement of the nonlinear behavior of acoustical rigid porous materials. *Phys. of Fluids* 11, 6 (1998). 45
- [3] BECHERT, D. W. Sound absorption caused by vorticity shedding, demonstrated with a jet flow. *J. Sound Vib.* 70, 3 (1980), 389–405. 46
- [4] BELLUCCI, V., FLOHR, P., AND PASCHEREIT, C. O. Numerical and experimental study of acoustic damping generated by perforated screens. *AIAA Journal* 42, 8 (2004), 1543–1548. 48, 52, 53
- [5] BENOIT, L. *Prédiction des instabilités thermo-acoustiques dans les turbines à gaz*. Phd thesis, Université Montpellier II, 2005. 15, 23
- [6] BERENBRINK, P., AND HOFFMANN, S. Suppression of dynamic combustion instabilities by passive and active means. ASME Turbo Expo 2000. 13
- [7] BLACKSTOCK, D. T. *Fundamentals of Physical Acoustics*. John Wiley & Sons, 2000. 61
- [8] BOUDIER, G., LAMARQUE, N., STAFFELBACH, G., GICQUEL, L. Y. M., AND POINSOT, T. Thermo-acoustic stability of a helicopter gas turbine combustor using large-eddy simulations. *International Journal of Aeroacoustics*. 8, 1 (2009), 69–94. 92
- [9] CERFACS. *AVBP Handbook* - http://cerfacs.fr/~avbp/AVBP_V5.X/HANDBOOK. CERFACS, 2009. 35, 93
- [10] CHEURET, F. *Instabilités thermoacoustiques de combustion haute fréquence dans les moteurs fusées*. PhD thesis, Université de Provence - Aix Marseille 1, 2005. 9
- [11] COLIN, O., DUCROS, F., VEYNANTE, D., AND POINSOT, T. A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion. *Phys. Fluids* 12, 7 (2000), 1843–1863. 93
- [12] CROCCO, L. Aspects of combustion instability in liquid propellant rocket motors. part i. *J. American Rocket Society* 21 (1951), 163–178. 9, 31, 32
- [13] CROCCO, L. Aspects of combustion instability in liquid propellant rocket motors. part ii. *J. American Rocket Society* 22 (1952), 7–16. 16, 31
- [14] CUMMINGS, A. Acoustic nonlinearities and power losses at orifices. *AIAA Journal* 22, 6 (1984). 45
- [15] CUMMINGS, A., AND EVERSMAAN, W. High amplitude acoustic transmission through duct terminations : theory. *J. Sound Vib.* 91, 4 (1983), 503–518. 45
- [16] DASSE, J. Caractérisation acoustique d'une plaque multi-perforée. Master's thesis, Ensica, 2007. 43, 44

- [17] DASSE, J., AND MENDEZ, S. Large-eddy simulation of the acoustic response of a perforated plate. 14th AIAA/CEAS. 44, 48, 52, 53
- [18] DEAN, P. On the 'in-situ' control of acoustic liner attenuation. In *Gas Turbine Conference and Products Show* (1976). 45
- [19] DOWLING, A. A kinematic model of a ducted flame. *J. Fluid Mech.* 394 (1999), 51–72. 31
- [20] DUCRUIX, S., SCHULLER, T., DUROX, D., AND CANDEL, S. Combustion dynamics and instabilities : Elementary coupling and driving mechanisms. *J. Prop. Power* 19, 5 (September - October 2003). 9, 10, 31
- [21] DUROX, D., SCHULLER, T., NOIRAY, N., BIRBAUD, A., AND CANDEL, S. Rayleigh criterion and acoustic energy balance in unconfined self-sustained oscillating flames. *Combust. Flame* 155, 3 (2008), 416–429. 11
- [22] ELDRIDGE, J., BODONY, D., AND SCHOEYBI, M. Numerical investigation of the acoustic behavior of a multiperforated liner. 13 th AIAA/CEAS. 52
- [23] ELNADY, T., AND BODEN, H. On the modelling of the acoustic impedance of perforates with flow. *AIAA Paper 2003-3304* (2003). 13, 14, 41
- [24] FERZIGER, J. H., AND PERIĆ, M. *Computational Methods for fluid Dynamics*, 3rd ed. Springer, 2002. 25
- [25] GIAUQUE, A., POINSOT, T., BREAR, M., AND NICOUD, F. Budget of disturbance energy in gaseous reacting flows. In *Proc. of the Summer Program* (2006), Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., pp. 285–297. 11, 75
- [26] GRACE, S. M., HORAN, K. P., AND HOWE, M. S. The influence of shape on the rayleigh conductivity of a wall aperture in the presence of grazing flow. *J. Fluids Struct.* 12 (1998), 335–351. 49
- [27] GUO, Y., TONON, D., MARGIOTTA, L., SCHRAM, C., HOFMANS, G., AND HIRSCHBERG, A. A semi-analytical model for perforated pipe mufflers. 14th AIAA/CEAS. 41
- [28] HOFMANS, G., BOOT, R., DURRIEU, P., AND AURÉGAN, Y. Aeroacoustic response of a slit-shaped diaphragm in a pipe at low helmholtz number, 1 : Quasi-steady results. *J. Sound Vib.* 244, 1 (2001), 35–56. 42
- [29] HOWE. On the theory of unsteady high reynolds number flow through a circular aperture. *Proc. Roy. Soc.* 366, 1725 (1979). 42, 43, 45, 112, 137, 138
- [30] HOWE, M. Influence of wall thickness on Rayleigh conductivity and flow-induced aperture tones. *J. Fluids Struct.* 11 (1997), 351–366. 52
- [31] HOWE, M., SCOTT, M., AND SIPCIC, S. The influence of tangential mean flow on the rayleigh conductivity of an aperture. *Proc. Roy. Soc.* 452 (1996), 2303–2317. 42, 49
- [32] HOWE, M. S. *Acoustics of Fluid-Structure Interaction*. Cambridge University Press, 1998. 43

- [33] HUANG, Y., AND YANG, V. Dynamics and stability of lean-premixed swirl-stabilized combustion. *Prog. Energy Comb. Sci.* (2009), 293–364. 9, 12
- [34] HUBER, A. *Impact of fuel supply impedance and fuel staging on gas turbine combustion stability*. PhD thesis, Technische Universität München, 2009. 12, 31
- [35] HUGHES, I., AND DOWLING, A. The absorption of sound by perforated linings. *J. Fluid Mech.* 218 (1990), 299–335. 45, 48, 69
- [36] IBRAHIM, Z. M., WILLIAMS, F., BUCKLEY, S., AND LEE, J. An acoustic energy approach to modeling combustion oscillations. ASME Turbo Expo 2006. 11, 75
- [37] IBRAHIM, Z. M., WILLIAMS, F., BUCKLEY, S., AND TWARDOSCHLEB, C. An acoustic-energy method for estimating the onset of acoustic instabilities in premixed gas-turbine combustors. *J. Eng. Gas Turb. and Power* 130, 5 (2008). 11, 75
- [38] INGARD, U., AND ISING, H. Acoustic non linearity of an orifice. *J. Acous. Soc. Am.* 41, 6 (1967), 1582–1583. 45
- [39] JING, X., AND SUN, X. Experimental investigations of perforated liners with bias flow. *J. Acous. Soc. Am.* (1999). 45, 50, 51
- [40] JING, X. SUN, X. Effect of plate thickness on impedance of perforated plates. *AIAA Journal* 38, 9 (2000). 50, 51, 73
- [41] JING, X. SUN, X., WU, J., AND MENG, K. Effect of Grazing Flow on the Acoustic Impedance of an Orifice. *AIAA Journal* 39, 8 (2001). 42, 49
- [42] KOOLJMAN, G. *Acoustical Response of Shear Layers*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2008. 42
- [43] KULKARNI, R. Predicting limit cycle amplitudes by combining a helmholtz solver with a flame describing function. n3l- Int’l Summer School and Workshop on Non-Normal and Nonlinear Effects in Aero- and Thermoacoustics. 37
- [44] LAMARQUE, N., AND POINSOT, T. Boundary conditions for acoustic eigenmodes computation in gas turbine combustion chambers. *AIAA Journal* 46, 9 (2008), 2282–2292. 94
- [45] LAMRAOUI, A., TRAN, N., RICHECOEUR, F., SCHULLER, T., AND DUCRUIX, S. Acoustic reconstruction of the fuel and air feeding line impedances in a swirled burner during combustion instabilities. 3rd European Conference for Aerospace Sciences EUCASS. 9
- [46] LANDAU, L., AND LIFCHITZ, E. *Physique Theorique - Tome 6 : Mecanique des Fluides*. Ed. Librairie du Globe- Editions MIR, 1984. 76, 109
- [47] LANG, W., POINSOT, T., BOURIENNE, F., CANDEL, S., AND ESPOSITO, E. Suppression of combustion instabilities by active control. In *23rd Joint Propulsion Conference* (1987), A. P. 87-1876, Ed. 12
- [48] LANG, W., POINSOT, T., AND CANDEL, S. Active control of combustion instability. *Combust. Flame* 70 (1987), 281–289. 12
- [49] LEE, S., IH, J., AND PEAT, K. A model of acoustic impedance of perforated plates with bias flow considering the interaction effect. *J. Sound Vib.* 303 (2007), 741–752. 50

- [50] LEFEBVRE, A. H. *Gas Turbines Combustion*. Taylor & Francis, 1999. 2, 4, 5, 6, 12
- [51] LEHOUCQ, R., AND SORENSEN, D. Arpack : Solution of large scale eigenvalue problems with implicitly restarted arnoldi methods. www.caam.rice.edu/software/arpack. User's guide, 1997. 30
- [52] LIDOINE, S., TERRASSE, I., ABOUD, T., AND A., B. Numerical prediction of sdof-perforated plate acoustic treatment impedance. part 1 : Linear domain. 13 th AIAA/CEAS. 13, 14, 41
- [53] LIEUWEN, T., AND YANG, V. *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms and Modeling*. Progress in Astronautics and Aeronautics, 2005. 13
- [54] LUONG, T., HOWE, M. S., AND MCGOWAN, R. S. On the rayleigh conductivity of a bias-flow aperture. *J. Fluids Struct.* 21 (2005), 769–778. 42, 52
- [55] MARBLE, F. E., AND CANDEL, S. Acoustic disturbances from gas nonuniformities convected through a nozzle. *J. Sound Vib.* 55 (1977), 225–243. 94
- [56] MARTIN, C., BENOIT, L., SOMMERER, Y., NICOUD, F., AND POINSOT, T. Large-eddy simulation and acoustic analysis of a swirled staged turbulent combustor. *AIAA Journal* 44, 4 (2006). 15
- [57] MARTINEZ, P., KARTHIK, B., AND SCHRAM, C. Low-order modeling of a side branch at low mach numbers. AIAA. 15
- [58] MELLING, T. The acoustic impedance of perforates at medium and high sound pressure levels. *J. Sound Vib.* 29, 1 (1973), 1–65. 42, 45, 53
- [59] MENDEZ, S. *Simulation numérique et modélisation de l'écoulement autour des parois multiperforées*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 2007. 8
- [60] MENDEZ, S., AND ELDREDGE, J. Acoustic modeling of perforated plates with bias flow for large-eddy simulations. *J. Comput. Phys.* 228, 13 (2009), 4757–4772. 43
- [61] MENDEZ, S., AND NICOUD, F. Numerical investigation of an anisothermal turbulent flow with effusion. In *5th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena* (2007), Berlin, Germany. 57, 58
- [62] MENDEZ, S., AND NICOUD, F. Large-eddy simulation of a bi-periodic turbulent flow with effusion. *J. Fluid Mech.* 598 (2008), 27–65. 43
- [63] MENDEZ, S., NICOUD, F., AND MIRON, P. Direct and large eddy simulation of a turbulent flow with effusion. In *Proceedings of the 6th International ERCOFTAC Workshop - Direct and Large-Eddy Simulation* (2005), pp. 415–422. 52
- [64] METTENLEITER, M., HAILE, E., AND CANDEL, S. Adaptive control of aeroacoustic instabilities. *J. Sound Vib.* 230, 4 (1999), 761–789. 12
- [65] MILLOT, G. Simulation numérique d'écoulements en présence de plaques multiperforées : Etude et validation d'un modèle homogène sous avbp. Tech. rep., CERFACS, 2008. 56
- [66] NICOUD, F., BENOIT, L., AND SENSAU, C. Acoustic modes in combustors with complex impedances and multidimensional active flames. *AIAA Journal* 45 (2007), 426–441. 15, 23, 29, 32

- [67] NICOUD, F., AND POINSOT, T. Thermoacoustic instabilities : should the rayleigh criterion be extended to include entropy changes? *Combust. Flame* 142 (2005), 153–159. 11
- [68] NICOUD, F., AND WIECZOREK, K. About the zero mach number assumption in the calculation of thermoacoustic instabilities. *Int. J. Spray and Combustion Dynamics* 1, 1 (2009), 67–112. 15
- [69] NOIRAY, N. *Analyse linéaire et non linéaire des instabilités de combustion, application aux systèmes à injection multipoints et stratégies de contrôle*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2007. 34, 54
- [70] NOIRAY, N., DUROX, D., SCHULLER, T., AND CANDEL, S. A unified framework for nonlinear combustion instability analysis based on the flame describing function. *J. Fluid Mech.* 615 (2008), 139–167. 34
- [71] OSCHWALD, M., FARAGO, Z., SEARBY, G., AND CHEURET, F. Resonance frequencies and damping of a cylindrical combustor acoustically coupled to an absorber. *J. Prop. Power* 24, 3 (2008), 524–533. 13
- [72] PALIES, P., DUROX, D., SCHULLER, T., AND CANDEL, S. The combined dynamics of swirler and turbulent premixed swirling flames. *Combust. Flame* 157, 9 (2010), 1698–1717. 31, 33
- [73] PALIES, P., DUROX, D., SCHULLER, T., AND CANDEL, S. Swirling flame instability analysis based on the flame describing function methodology. ASME Turbo Expo 2010. 31, 33, 38
- [74] PIERINGER, J., SATTELMAYER, T., AND FASSL, F. Simulation of combustion instabilities in liquid rocket engines with acoustic perturbation equations. *J. Prop. Power* 25, 5 (2009). 75
- [75] POINSOT, T., AND VEYNANTE, D. *Theoretical and Numerical Combustion*. R.T. Edwards, 2nd edition., 2005. 9, 33, 60
- [76] POINSOT, T., VEYNANTE, D., YIP, B., TROUVÉ, A., SAMANIEGO, J.-M., AND CANDEL, S. Active control methods and applications to combustion instabilities. *J. Phys. III July* (1992), 1331–1357. 12
- [77] POLIFKE, W., AND PASCHEREIT, C. O. Determination of thermo-acoustic transfer matrices by experiment and computational fluid dynamics. ERCOFTAC bulletin, p. 38. 31
- [78] PUTNAM, A. A. *Combustion driven oscillations in industry*, fuel and energy science series, j.m. beer ed. American Elsevier, 1971. 9
- [79] RAYLEIGH, L. The explanation of certain acoustic phenomena. *Nature July 18* (1878), 319–321. 11
- [80] RAYLEIGH, L. *The Theory of Sound*. Mac Millan (reprinted by Dover, New York, 1945), 1894. 45
- [81] REHMAN, S. Numerical investigation of a bias-flow perforated liner for damping of thermoacoustic instabilities. ASME Turbo Expo 2007. 69

- [82] RICE, E. A theoretical study of the acoustic impedance of orifices in the presence of a steady grazing flow. Tech. rep., NASA TM, 1976. 49
- [83] ROUX, S., LARTIGUE, G., POINSOT, T., MEIER, U., AND BÉRAT, C. Studies of mean and unsteady flow in a swirled combustor using experiments, acoustic analysis and large eddy simulations. *Combust. Flame* 141 (2005), 40–54. 15
- [84] RUPP, J., CAROTTE, J., AND SPENCER, A. Interaction between the acoustic pressure fluctuations and the unsteady flow field through circular holes. ASME Turbo Expo 2009. 45
- [85] SAWYER. Science based policy for addressing energy and environmental problems. *Proc. Combust. Inst.* 32 (2009), 45–56. 1
- [86] SCHADOW, K., AND GUTMARK, E. Combustion instability related to vortex shedding in dump combustors and their passive control. *Prog. Energy Comb. Sci.* 18, 2 (1992), 117–132. 13
- [87] SCHULLER, T., DUROX, D., AND CANDEL, S. A unified model for the prediction of laminar flame transfer functions : comparisons between conical and v-flames dynamics. *Combust. Flame* 134 (2003), 21–34. 31
- [88] SEARBY, G., NICOLE, A., HABIBALLAH, M., AND LAROCHE, E. Prediction of the efficiency of acoustic damping cavities. *J. Prop. Power* 24, 3 (May-June 2008). 11
- [89] SELLE, L., BENOIT, L., POINSOT, T., NICOUD, F., AND KREBS, W. Joint use of compressible large-eddy simulation and helmoltz solvers for the analysis of rotating modes in an industrial swirled burner. *Combust. Flame* 145, 1-2 (2006), 194–205. 15
- [90] SENSIAU, C. *Simulations numériques des instabilités thermoacoustiques dans les chambres de combustion annulaires*. PhD thesis, University Montpellier II, 2008. 31, 92
- [91] SENSIAU, C., NICOUD, F., AND POINSOT, T. A tool to study azimuthal and spinning modes in annular combustors. *International Journal of Aeroacoustics.* 8, 1 (2009), 57–68. 92
- [92] SILVA, C. *Numerical Study of combustion noise in gas turbines*. PhD thesis, Université de Montpellier II, 2010. 94
- [93] STAFFELBACH, G., GICQUEL, L., BOUDIER, G., AND POINSOT, T. Large eddy simulation of self excited azimuthal modes in annular combustors. *Proc. Combust. Inst.* (2008). 92
- [94] SUN, X., JING, X., H, Z., AND SHI, Y. Effect of grazing-bias flow interaction on acoustic impedance of perforated plates. *J. Sound Vib.* 254, 3 (2002), 557–573. 49, 112
- [95] TAM, C. A computational and experimental study of slit resonators. *J. Sound Vib.* (2005), 947–984. 13, 45
- [96] TAM, C., AND KURBATSKII, A. A numerical and experimental investigation of the dissipation mechanisms of resonant acoustic liners. *J. Sound Vib.* 245, 3 (2001), 545–557. 43, 45

- [97] TRAN, N. *Influence de la condition limite acoustique amont sur les instabilités de combustion de grande amplitude : Conception d'un système robuste de contrôle d'impédance*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2007. 11
- [98] TRAN, N., DUCRUIX, S., AND SCHULLER, T. Damping combustion instabilities with perforates at the premixer inlet of a swirled burner. *Proc. Combust. Inst.* . 45, 48
- [99] TRAN, N., DUCRUIX, S., AND SCHULLER, T. Analysis and control of combustion instabilities by adaptive reflection coefficients. *Proceedings of the 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference* (2007). 12, 48
- [100] TRUFFIN, K., AND POINSOT, T. Comparison and extension of methods for acoustic identification of burners. *Combust. Flame* 142, 4 (2005), 388–400. 31
- [101] TSIEN, H. S. Servo stabilization of combustion in rocket motors. *J. American Rocket Society* 22, 256-262 (1952). 12
- [102] WICKER, J.M. ZND YOON, M. W., AND YANG, V. Linear and non-linear pressure oscillations in baffled combustion chambers. *J. Sound Vib.* 184, 1 (1995), 141–171. 13
- [103] WIECZOREK, K. Thermoacoustic instabilities in non zero mach number mean flow configurations. In *European Combustion Meeting* (2009). 15
- [104] WIECZOREK, K. *Numerical Study of Mach number effects on Combustion Instability*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2010. 15
- [105] WIECZOREK, K., SENSIAU, C., POLIFKE, W., AND NICOUD, F. Assessing non-normal effects in thermoacoustic systems with non zero baseline flow. In *n3l - Int'l Summer School and Workshop on Non-Normal and Nonlinear Effects in Aero- and Thermoacoustics, Munich, May 17-21, 2010*. 20
- [106] WOLF, P., STAFFELBACH, G., ROUX, A., GICQUEL, L., POINSOT, T., AND MOURAU, V. Massively parallel les of azimuthal thermo-acoustic instabilities in annular gas turbines. *C. R. Acad. Sci. Mécanique* 337, 6-7 (2009), 385–394. 92, 93
- [107] ZHAO, D., A'BARROW, C., MORGANS, A., AND CARROTTE, J. Acoustic damping of a helmholtz resonator with an oscillating volume. *AIAA Journal* 47, 7 (2009). 13
- [108] ZHAO, H., AND SUN, X. Active control of wall acoustic impedance. *AIAA Journal* 37, 7 (1999). 12, 45

Annexe A

Implémentation numérique du modèle de Howe dans AVSP.

L'organigramme de la figure 47 est une représentation schématique du codage du modèle de Howe dans AVSP.

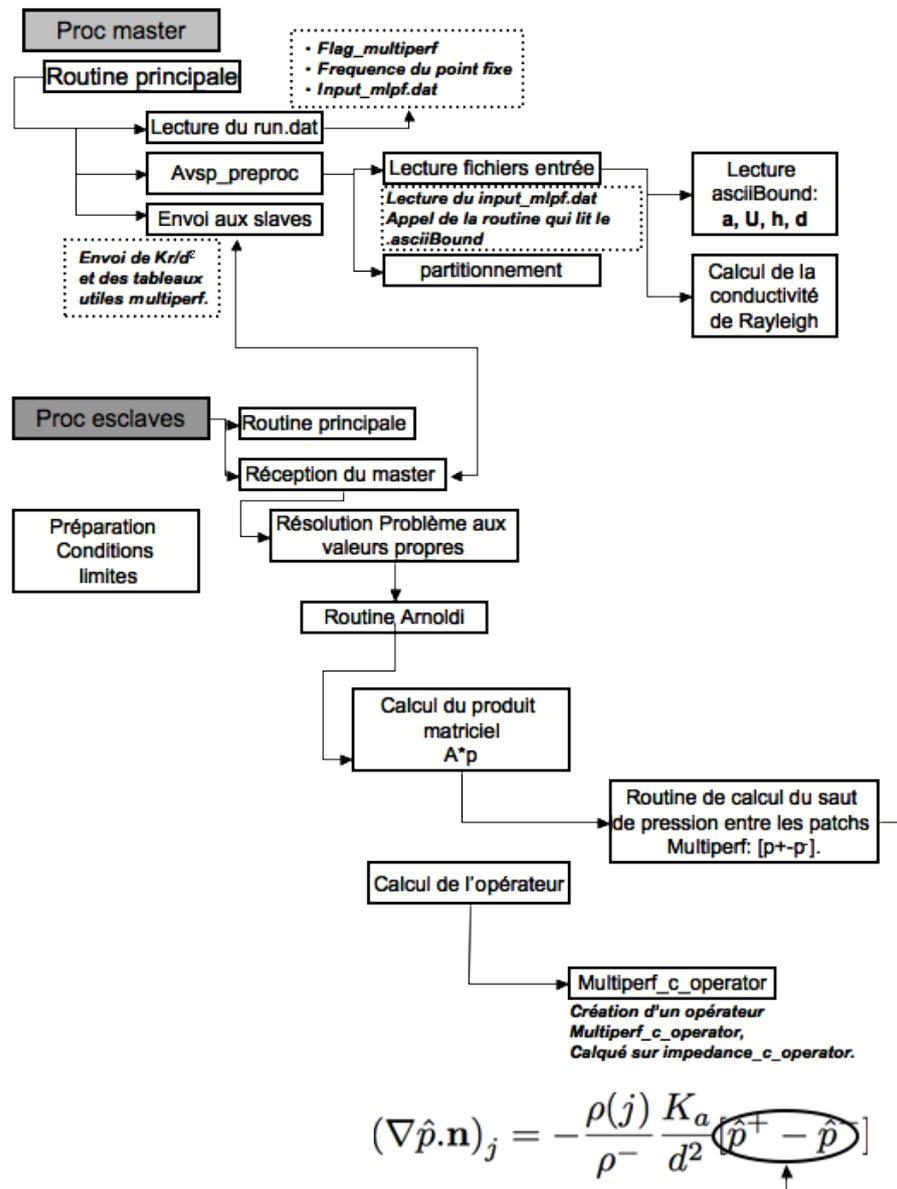


FIG. 47 – Modification des sources d'AVSP pour coder le modèle de Howe.

L'outil qui prépare un pré-traitement à un calcul avec plaques multiperforées dans AVSP appelé PREPROC_MULTIPERF est expliqué plus en détail dans cette annexe. Le fichier d'entrée lu par cet outil se présente sous cette forme :

```
*****
Set paths for preproc_mlpf tool
*****
```

```
 './mesh.coor'      !coor file of the mesh
./mesh.asciibound' !asciiBound file
      2             !Number of couples of multiperforated boundary walls
      2 8 1.0d-2    !First couple, wall thickness.
      13 15 1.0d-2 !Second couple, wall thickness.
```

Le fichier de sortie de l'outil expliqué dans le chapitre 3 est nommé input_mlpf.dat Il contient :

- un tableau de la taille le nombre de plaques multiperforées, qui contient la numérotation des conditions limites correspondantes,
- un tableau de correspondance entre les conditions limites (ex : 2 correspond à 8, 13 correspond à 15...),
- la liste des voisins pour chaque point d'une plaque (de taille 3 fois le nombre de noeuds sur les frontières MP),
- la liste de leurs coefficients associés (taille 3 fois le nombre de noeuds sur les conditions MP).

Ce fichier est en entrée du code, il est donc spécifié dans le run.dat.

Une modification du run.dat a été nécessaire pour le codage de la multiperforation dans AVSP. Une section concernant les calculs pour plaques perforées a donc été ajoutée dans le run.dat. Le run.dat contient un nombre égal à 0 ou 1 qui indique la présence ou l'absence de plaques multiperforées. D'après le modèle de Howe, la conductivité de Rayleigh est une fonction du nombre de Strouhal, donc de la fréquence. On effectue donc une convergence par point fixe (voir Ch. 2), dont la fréquence est entrée dans le run.dat. Pour chaque calcul, la conductivité de Rayleigh est constante.

run.dat

```
*****Plaques perforées*****
```

```
      1             ! flag multiperf : 1 si condition de MP, 0 sinon.
 './output.dat'    ! fichier issu de l'outil preproc
(150.0,0.0)        ! fréquence pour le point fixe de la MP
```

```
*****
```

Les paramètres physiques de la plaque perforée sont déclarés dans le fichier de conditions limites `.asciiBound` : on y renseigne le rayon des perforations, la vitesse du bias flow, la distance inter-orifices et l'épaisseur des plaques, prise en compte dans le modèle MHM. Si le paramètre épaisseur de plaque est mis à 0, le terme qui prend en compte l'épaisseur dans la formule du MHM sera nul, et on utilisera alors un modèle de Howe classique.

Exemple d'entrée dans le fichier de spécification des conditions limites :

```
-----  
Patch: 2  
Multiperforation  
WALL_LAW_MULTIPERF  
  
-----  
3d-3  ! rayon des orifices  
    5  !vitesse U du bias flow  
35d-3 !distance inter-orifices  
    0  !épaisseur de plaque  
-----
```


Annexe B

Publications

Effect of multiperforated plates on the acoustic modes in combustors

Publié dans le Compte Rendu de l'Académie des Sciences. Présenté à : 2nd colloque INCA, Rouen, 2007.

Abstract

The analytical model derived by Howe [29] assessing the acoustic effect of perforated plates has been implemented in a 3D Helmholtz solver. This solver allows to compute the acoustic modes of industrial chambers taking into account the multiperforated plates present for the cooling of the walls. An academic test case consisting of two coaxial cylinders, with the inner one being perforated is used to validate the implementation in the general purpose AVSP code. This case is also used to show the effects of the presence of the plates. In particular, the sensitivity of the acoustic damping to the bias flow speed will be studied. A maximum absorption speed is shown, and the behaviour towards an infinite speed will be illustrated by the academic case. Computations are also conducted in the case of an industrial helicopter chamber. The value of the maximum absorption speed is discussed to explain why the modes are in fact not much absorbed by the perforated plates, and that the frequencies are the same as for walls.

Damping Effect of Perforated Plates on the Acoustics of Annular combustors

Présenté à : 15th AIAA Aeroacoustics Conference, 11-13 May, 2009, Miami

Abstract

This paper aims at showing the influence of perforated plates on the acoustic modes in aeronautical gas turbines combustion chambers. The analytical model developed by Howe [29] was implemented in a 3D acoustic Helmholtz solver to account for the effect of perforated plates. First, an analytic test case is used to validate the coding in the acoustic solver. Then, a computation of the acoustic modes in an actual industrial chamber is conducted, taking into account the perforated liners. Both longitudinal and azimuthal modes are studied.

Damping and energy balance study for perforated plates on the acoustics in annular combustors

Soumis à l'AIAA Journal

Abstract

This paper aims at showing the influence of perforated plates on the acoustic modes in aeronautical gas turbines combustion chambers. The analytical model developed by Howe [29] was implemented in a 3D acoustic Helmholtz solver to account for the effect of perforated plates. First, an analytic test case is used to validate the coding in the acoustic solver. Then, a computation of the acoustic modes in an actual industrial chamber is conducted, taking into account the perforated liners. For both cases, a study of the influence of the bias flow speed is conducted. A disturbance energy budget is also carried out to evaluate the respective contribution of the perforated plates. In the case of the industrial chamber, some plates are proved to be more effective than the others.



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Mecanique ●●● (●●●●) ●●●-●●●



COMPTES RENDUS

MECANIQUE

Combustion for aerospace propulsion

Effect of multiperforated plates on the acoustic modes in combustors

Elsa Gullaud^{a,*}, Simon Mendez^b, Claude Sensiau^b, Franck Nicoud^c, Thierry Poinso^d^a SNECMA Villaroche, 77550 Moissy-Cramayel, France^b CERFACS, CFD team, 42, avenue Coriolis, 31057 Toulouse, France^c Université Montpellier, France^d IMF Toulouse, France

Abstract

The analytical model derived by Howe assessing the acoustic effect of perforated plates has been implemented in a 3D Helmholtz solver. This solver allows one to compute the acoustic modes of industrial chambers taking into account the multiperforated plates present for the cooling of the walls. An academic test case consisting of two coaxial cylinders, with the inner one being perforated is used to validate the implementation in the general purpose AVSP code. This case is also used to show the effects of the presence of the plates. In particular, the sensitivity of the acoustic damping to the bias flow speed will be studied. A maximum absorption speed is shown, and the behaviour towards an infinite speed will be illustrated by the academic case. Computations are also conducted in the case of an industrial helicopter chamber. The value of the maximum absorption speed is discussed to explain why the modes are in fact not much absorbed by the perforated plates, and that the frequencies are the same as for walls. **To cite this article:** *E. Gullaud et al., C. R. Mecanique ●●● (●●●●).*

© 2009 Published by Elsevier Masson SAS on behalf of Académie des sciences.

Résumé

Impact des plaques multiperforées sur l'acoustique dans les chambres de combustion. Le modèle analytique de Howe évaluant l'impact des plaques multiperforées sous l'effet d'une onde acoustique a été intégré dans un solveur de Helmholtz 3D. Ce code ainsi modifié permet de calculer les modes de chambres industrielles tout en prenant en compte la présence des plaques multiperforées utiles pour le refroidissement des parois. Le cas académique de deux cylindres coaxiaux dont l'un est perforé est considéré pour valider l'implémentation du modèle dans le code AVSP. Ce premier cas est aussi l'occasion d'illustrer l'effet des plaques perforées sur l'acoustique et en particulier l'influence de la vitesse de l'air dans les trous. Une vitesse correspondant à une absorption maximale est mise en évidence. Le comportement à grande vitesse est aussi étudié. Des calculs sont ensuite effectués dans le cas d'une chambre d'hélicoptère. Le fait que les modes de cette chambre ne sont pas très impactés dans le cas d'une utilisation industrielle est expliqué par le fait que la vitesse maximale d'absorption est loin de celle réellement utilisée. **Pour citer cet article :** *E. Gullaud et al., C. R. Mecanique ●●● (●●●●).*

© 2009 Published by Elsevier Masson SAS on behalf of Académie des sciences.

Keywords: Combustion; Acoustics; Multiperforated plates; Damping; Combustion instabilities**Mots-clés :** Combustion ; Acoustique ; Plaques multiperforées ; Amortissement ; Instabilités de combustion

* Corresponding author.

E-mail addresses: elsa.gullaud@cerfacs.fr (E. Gullaud), smendez@stanford.edu (S. Mendez), sensiau@tum.de (C. Sensiau), franck.nicoud@univ-montp2.fr (F. Nicoud), Thierry.Poinso@imft.fr (T. Poinso).

1. Introduction

Multiperforated plates (MP) are widely used in the combustion chambers of turbofan engines to cool the walls of the chambers which are submitted to high temperatures [1]. These plates consist of submillimeter apertures, across which the mean pressure jump forces a cold jet through the holes, from the casing into the combustion chamber. The micro-jets then coalesce to form a cooling film. Due to the tiny diameter of the perforations, the holes cannot be meshed for numerical computations. It is therefore necessary to have a model to account for the impact of perforated plates. This problem was encountered when performing computational fluid dynamics calculations [2,3] but also when computing acoustic modes of a combustion chamber. Indeed, MP are known to have a damping effect on acoustics [4,5], which is enhanced by the presence of a mean bias flow [6]. Acoustic waves interact with the shear layer, creating a vortex breakdown at the rims of the apertures, which converts part of the acoustic energy into vortical energy.

Howe proposed a model for this phenomenon [5], which will be recalled in Section 2. This model provides the acoustic impedance of a multiperforated plate in the presence of an acoustic wave and is well adapted to be inserted in the Helmholtz solver. It was validated, showing good agreement with experiments [6]. Improvements of this model have been made to take into account the thickness of the plate [7] and the interaction between the apertures [8]. Studies of the parameters influencing the sound absorption have been conducted [6]. In the present study, the implementation of Howe's model in the Helmholtz solver AVSP [9,10] is presented. AVSP solves the eigenvalue problem related to the wave equation in the frequency domain, and is able to provide the acoustic modes of a combustion chamber. With the implementation of Howe's model, it is now possible to compute the acoustic modes of a chamber, taking into account the multiperforated plates. After a brief description of Howe's model in Section 2, the coding is validated by comparing AVSP results to the ones given by an analytic solution on an academic test case in Section 3. A study of the influence of the parameters is also conducted in this section. The computations are then performed in Section 4 on a real industrial chamber.

2. Howe's model in AVSP

Howe's approach is the most classical model used to represent the behaviour of a multiperforated plate with bias flow and submitted to an acoustical excitation. Let us consider an array of circular perforations of diameter $2a$, with an inter-orifice spacing d , through which a mean flow of speed U , parallel to the apertures axis is imposed (see Fig. 1). When an acoustic perturbation is imposed, Howe's model can represent the behaviour of a multiperforated plate under the following hypotheses [5]:

- The acoustic excitation is at a low frequency, so that the wavelength is much larger than the orifice radius;
- The flow has a high Reynolds number, the viscosity is then only dominant at the rims of the aperture leading to the shedding of vorticity;
- The Mach number of the mean flow is low, so that the flow is incompressible in the vicinity of the aperture;
- The plate is infinitely thin;
- The aperture spacing is high compared to the aperture radius, so that the interaction between the apertures is negligible.

Acoustic energy is converted into vortical energy, due to the vortex shedding occurring at the aperture rims.

The Rayleigh conductivity K_R [11] of the aperture, relating the harmonic volume flux \hat{Q} to the acoustic pressure jump across the plate, is defined by

$$K_R = \frac{i\omega\rho\hat{Q}}{\hat{p}^+ - \hat{p}^-} \quad (1)$$

where ρ is the mean density in the vicinity of the aperture, ω is the pulsation of the acoustic perturbation and \hat{p}^+ and \hat{p}^- are the harmonic pressures upstream and downstream of the aperture respectively. We have

$$\hat{Q} = d^2\hat{u}^\pm \quad (2)$$

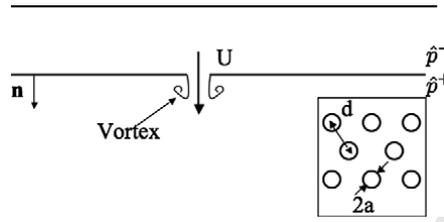


Fig. 1. Array of circular apertures, of diameter $2a$ and aperture spacing d , with a bias flow of speed U .

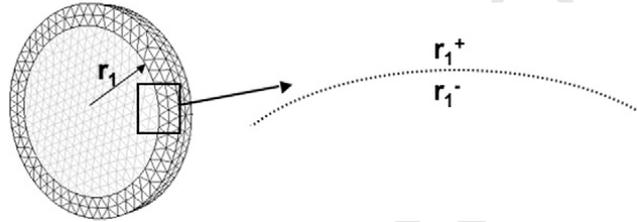


Fig. 2. Academic configuration: cylinder of radius r_2 , with a perforated plate at r_1 .

where \hat{u}^\pm is the acoustic velocity on the plate, equal on both sides. Hence,

$$K_R = \frac{i\omega\rho_0 d^2 \hat{u}^\pm}{\hat{p}^+ - \hat{p}^-} \quad (3)$$

Howe expresses the Rayleigh conductivity for a circular aperture in an infinitely thin plate [5] as:

$$K_R = 2a(\Gamma_R - i\Delta_R) \quad (4)$$

where

$$\Gamma_R - i\Delta_R = 1 + \frac{\frac{\pi}{2} I_1(St) e^{-St} - i K_1(St) \sinh(St)}{St(\frac{\pi}{2} I_1(St) e^{-St} + i K_1(St) \cosh(St))} \quad (5)$$

St is the Strouhal number defined by $\omega a / U$. Using the momentum equation and Eq. (3), we obtain:

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = \frac{K_R}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] \quad (6)$$

Eq. (6) can be used as a Neumann boundary condition in the Helmholtz solver. The normal pressure gradient on each multiperforated boundary is expressed as a function of a , d , U , but non-linear in the pulsation ω . This non-linearity is handled by using an iterative method where a quadratic eigenvalue problem is solved at each sub-iteration in the code. Note that this procedure was developed initially to deal with complex valued boundary impedance in the Helmholtz solver [10].

3. Analytic validation

3.1. Analytics

First, an academic test configuration, for which an analytic solution can be derived, is presented. We consider the geometry depicted in Fig. 2. It consists of two coaxial cylinders, the inner one being perforated. The outer radius is r_2 . The perforated plate is located at r_1 . r_1^- and r_1^+ denote the upstream part of the plate and the downstream part respectively. Although the cylinder is 3D, the third dimension is considered small in regard to the others and so we will only consider radial and azimuthal modes, the longitudinal ones appearing at much higher frequencies.

Let us consider the wave equation written in the frequency domain [12].

The interior of the domain is denoted by Ω , and the boundary by $\delta\Omega$.

$$\begin{cases} \Delta \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0 & \text{on } \Omega \\ \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \delta\Omega \end{cases} \quad (7)$$

Considering $k^2 = k_r^2 + k_z^2$, Eq. (7) can be cast in polar coordinates (Eq. (8)), with $\hat{p} = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ [13].

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2\Theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z + (k_r^2 + k_z^2) = 0 \quad (8)$$

Since we only consider the radial and azimuthal modes, we have

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\Theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta + n_\theta^2 \right) + k_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} = 0 \quad (9)$$

In these conditions, the radial part of Eq. (8) can be reduced to a Bessel equation:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{r} \frac{dr}{dr} R \right) + R \times \left(k_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) = 0 \quad (10)$$

whose general solution is of the form:

$$R(r) = AJ_{n_\theta}(k_r r) + BN_{n_\theta}(k_r r) \quad (11)$$

where J_{n_θ} and N_{n_θ} are Bessel functions of the n_θ order. In the domain $r \leq r_1$, the pressure can be written:

$$R(r) = AJ_{n_\theta}(k_r r) \quad (12)$$

The Neumann function, which is singular in $r = 0$, is put aside. In the domain $r_1^+ \leq r \leq r_2$, solutions may be written:

$$R(r) = BJ_{n_\theta}(k_r r) + CN_{n_\theta}(k_r r) \quad (13)$$

A null acoustic speed is imposed on the outer cylinder. Applying the condition $\hat{u} = 0$ in $r = r_2$, we obtain:

$$BJ'_{n_\theta}(k_r r) + CN'_{n_\theta}(k_r r) = 0 \quad (14)$$

Jump conditions can also be written across the perforated plate:

$$\hat{p}(r = r_1^+) - \hat{p}(r = r_1^-) = \frac{i\omega\rho d^2}{K_R} \hat{u}(r = r_1^-) \quad (15)$$

$$\hat{p}(r = r_1^-) - \hat{p}(r = r_1^+) = -\frac{i\omega\rho d^2}{K_R} \hat{u}(r = r_1^+) \quad (16)$$

We then obtain the system

$$[M][X] = 0$$

where M is the matrix obtained by using Eq. (14), Eq. (15) and Eq. (16), and given by

$$\begin{bmatrix} 0 & J'_{n_\theta}(k_r r_2) & N'_{n_\theta}(k_r r_2) \\ \frac{d^2}{K_R} k_r J'_{n_\theta}(k_r r_1) + J_{n_\theta}(k_r r_1) & -J_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) & -N_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) \\ J_{n_\theta}(k_r r_1) & -J_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) + \frac{d^2 k_r}{K_R} J'_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) & -N_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) + \frac{d^2 k_r}{K_R} N'_{n_\theta}(k_r r_2) \end{bmatrix}$$

and X is the vector

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Solving

$$\det(M) = 0 \quad (17)$$

releases the eigenvalues of the configuration.

Table 1
Comparison of the eigenfrequencies between AVSP and analytics.

	AVSP results with MP		Analytics with MP	
	Re(f)	Im(f) (A%)	Re(f)	Im(f) (A%)
$n_\theta = 1$	382.5 Hz	-18.8 s ⁻¹ (26.7%)	382.56 Hz	-18.9 s ⁻¹ (27.8%)
$n_\theta = 0$	534.1 Hz	-97.5 s ⁻¹ (68.2%)	533.21 Hz	-97.5 s ⁻¹ (68.3%)
$n_\theta = 2$	610.48 Hz	-21.4 s ⁻¹ (19.8%)	611.04 Hz	-21.64 s ⁻¹ (19.9%)

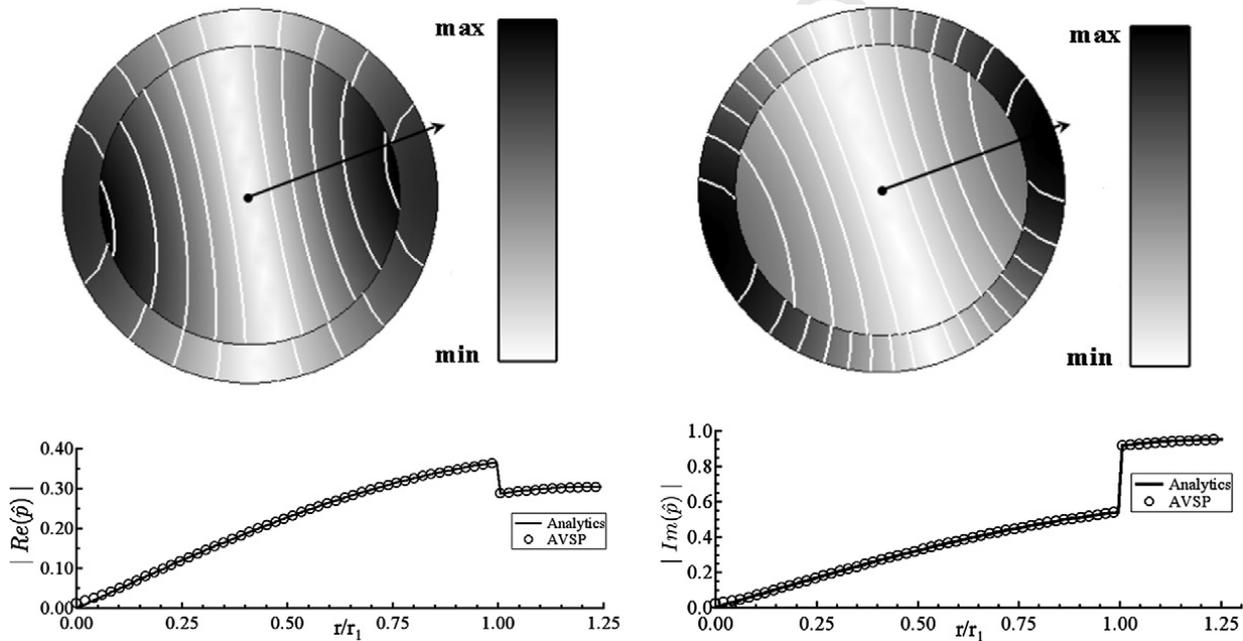


Fig. 3. First azimuthal mode: $n_\theta = 1$, $\text{Re}(f) = 382.5$ Hz, $\text{Im}(f) = -18.8$ s⁻¹. Left: $\text{Re}(\hat{p})$. Right: $\text{Im}(\hat{p})$. Above: AVSP results. Below: Radial profiles of the real and imaginary part of \hat{p} along the radius represented by the arrow (comparison analytics/AVSP).

3.2. Results

Let us consider the following parameters for the plate: $U = 5$ m/s, $a = 3$ mm and $d = 35$ mm, $r_1 = 0.2$ m and $r_2 = 0.25$ m. The configuration calculated in AVSP contains a tetrahedric mesh of 1186 nodes shown on Fig. 2. The sound speed is uniform and equal to 347 m/s. The eigenfrequencies are gathered in Table 1 and compared to the analytical results obtained by solving Eq. (17). The first three modes are considered. AVSP provides a complex frequency $\text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$ where $\text{Re}(f)$ consists of the frequency of the mode, and $\text{Im}(f)$ expresses the amplification rate of the mode. With the adopted convention $p'(x, t) = \text{Re}(\hat{p}(x)e^{-i\omega t})$, the ratio between the value of the pressure fluctuation at $t = 0$ and $t = T$ is given by Eq. (18).

$$\frac{|p'(x, t = T)|}{|p'(x, t = 0)|} = |e^{\text{Im}(\omega)T}| \quad (18)$$

Hence, the attenuation factor \mathcal{A} in percent at a period T is given by $100[1 - |e^{2\pi \frac{\text{Im}(f)}{\text{Re}(f)}}|]$.

As expected, the eigenfrequencies have a negative imaginary part, which means the pressure fluctuation is damped. AVSP results are in good accordance with the theory. Figs. 3 and 4 show the radial profiles of the real and imaginary parts of \hat{p} given by AVSP for the first and second modes. Analytic solutions are also given for comparison. Again, a good accordance is found. Note that the pressure jump across the perforated plate is visible on the real and imaginary parts of the harmonic pressure fluctuations, as well as on the isolines for the first azimuthal mode (Fig. 3). This comparison is conducted for a fixed bias flow speed (5 m/s), but Fig. 5 also shows good accordance between AVSP and analytical results for various bias flow speeds.

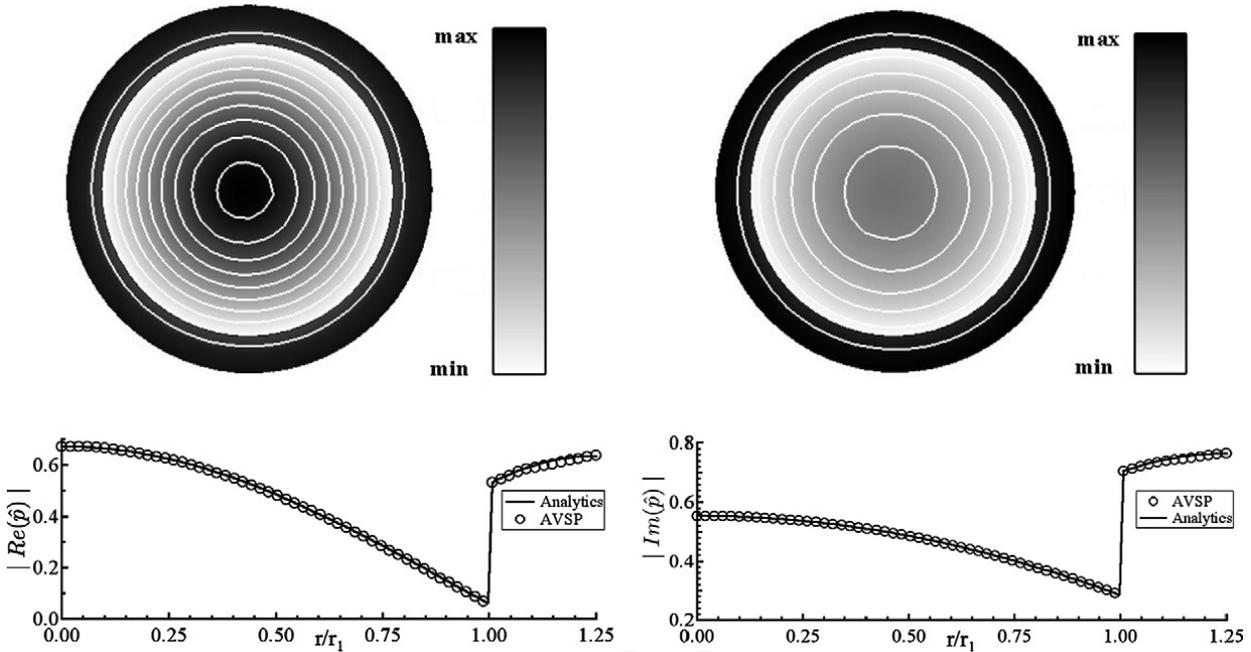


Fig. 4. Radial mode: $n_\theta = 0$, $\text{Re}(f) = 534.1 \text{ Hz}$, $\text{Im}(f) = -97.5 \text{ s}^{-1}$. Left: $\text{Re}(\hat{p})$. Right: $\text{Im}(\hat{p})$. Above: AVSP results. Below: Radial profiles of the real and imaginary part of \hat{p} (comparison analytics/AVSP).

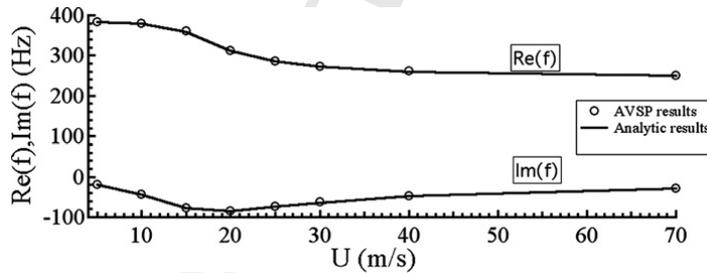


Fig. 5. Comparison between AVSP frequencies and analytics, for various speeds.

3.3. Study of the influence of the parameters

The impact of MP is further analysed in this section by comparing the results of four runs in Table 2.

- No plate: the inner cylinder is removed;
- Wall: the inner cylinder is replaced by a impermeable solid wall.
- MP5: the MP inner cylinder is present and the bias flow speed is $U = 5 \text{ m/s}$;
- MP120: the MP inner cylinder is present and the bias flow speed is $U = 120 \text{ m/s}$.

No damping occurs in absence of a MP: $\text{Im}(f) = 0$ for the cases “wall” and “no plate”. The influence of the mean bias flow speed on the damping is investigated at a fixed porosity ($\sigma = \pi a^2/d^2$). Table 2 shows the comparison of the first azimuthal mode ($n_\theta = 1$), at low bias flow speed (5 m/s) and at a high bias flow speed (120 m/s). The MP has a strong influence on the frequency. Fig. 6 shows that not only the frequency tends to the frequency of a wall at a high bias flow speed but also the structure of the mode does. Isolines of the harmonic pressure fluctuations are also plotted for a better understanding of the mode structure.

Fig. 7 shows the evolution of the damping in percent generated by the plate, when the bias flow speed changes between 5 m/s and 120 m/s. As previously shown by Hughes and Dowling [6], a speed optimizing the absorption is found. For the plate with a 3 mm radius perforation and a 35 mm inter-orifice distance ($\sigma = 2.3\%$), the jet speed

Table 2

Comparison of the first azimuthal mode, without MP, at low bias flow speed, at high bias flow speed, and with a wall. $\sigma = 2.3\%$.

No plate		MP5, $U = 5$ m/s		MP120, $U = 120$ m/s		Walls	
Re(f)	Im(f)	Re(f)	Im(f) ($\mathcal{A}\%$)	Re(f)	Im(f) ($\mathcal{A}\%$)	Re(f)	Im(f)
406.5 Hz	0 s^{-1}	382.5 Hz	-18.8 s^{-1} (26.7)	247.9 Hz	-16.8 s^{-1} (34.7)	246.5 s^{-1}	0 s^{-1}

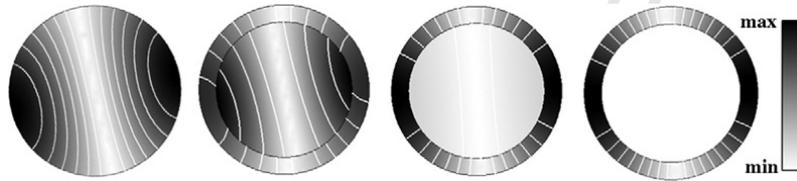


Fig. 6. Evolution of the first mode, without plate, at low (MP5: $f = 382.5$ Hz, $\mathcal{A} = 26.7\%$) and high bias flow speed (MP120: $f = 247.9$ Hz, $\mathcal{A} = 34.7\%$), and with a wall ($f = 246.5$ Hz, $\mathcal{A} = 0\%$).

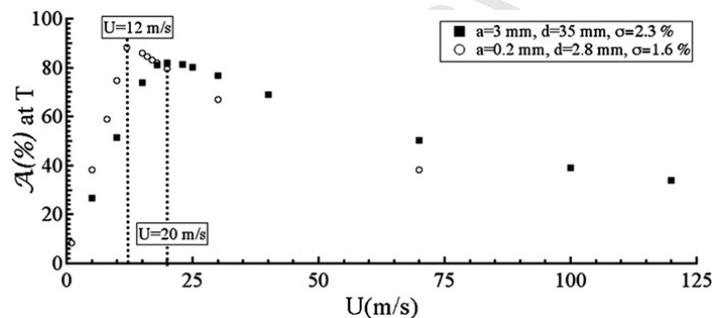


Fig. 7. Evolution of the damping as a function of the bias flow speed U , σ fixed.

corresponding to the maximum absorption is 20 m/s. Above this value, the damping drops. Another set of parameters is tested here ($\sigma = 1.6\%$) for which the maximum absorption speed is 12 m/s. This will be discussed in Section 4.

4. Computations on an industrial helicopter chamber

Computations are now conducted with AVSP in the case of an actual industrial chamber. This helicopter chamber is a reverse-flow annular chamber fueled by 15 injectors and is equipped with MP for cooling purpose, allowing the fresh air coming from the casing into the chamber to cool the walls. The computational domain is limited here to a 24° section, corresponding to one injector (Fig. 8). It contains the combustion chamber, the casing and the swirler. The influence of the geometry on the acoustics of this chamber was previously studied [14] and many computational fluid dynamics calculations were conducted [15,16]. The purpose here is to study the influence of the MP on the acoustics of the chamber. The locations of the MP are given in Fig. 8. The sound speed field is deduced from a previous LES¹ computation [17] (Fig. 9).

A unstructured mesh of 36445 nodes is used in AVSP. Since we only consider a section of the chamber, only longitudinal modes will here be studied. The bias flow speed is calculated from the LES data and the geometrical characteristics of each plate.

4.1. Results

To assess the impact of MP in this chamber, we use a reference case when walls are used in place of the MP. Table 3 gives the eigenmodes for the computation with walls and MP. Frequencies are very close. The damping on the first eigenmode is very low (6.7% per period).

¹ Large Eddy Simulation.

Table 3
Comparison of the first two eigenfrequencies corresponding to the first two longitudinal modes, with walls, and with MP.

Walls		MP	
Re(f)	Im(f) ($\mathcal{A}\%$)	Re(f)	Im(f) ($\mathcal{A}\%$)
506.4 Hz	0 s^{-1} (0%)	507.04	-5.60 s^{-1} (6.7%)
1105.4 Hz	0 s^{-1} (0%)	1118.7 Hz	-61.54 s^{-1} (29.2%)

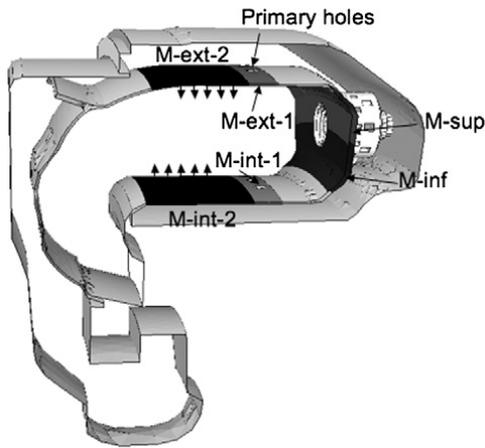


Fig. 8. Location of the MP on the chamber.

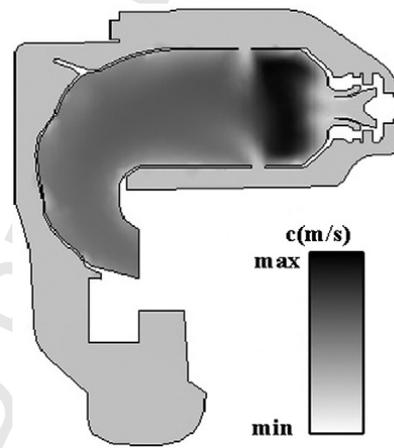


Fig. 9. Sound speed field.

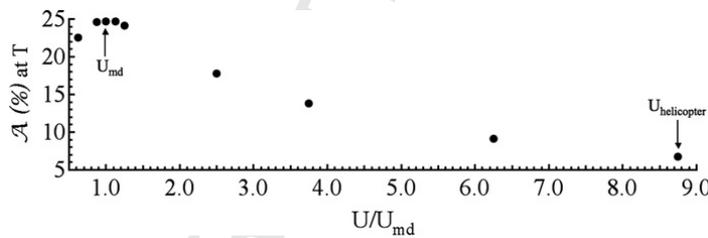
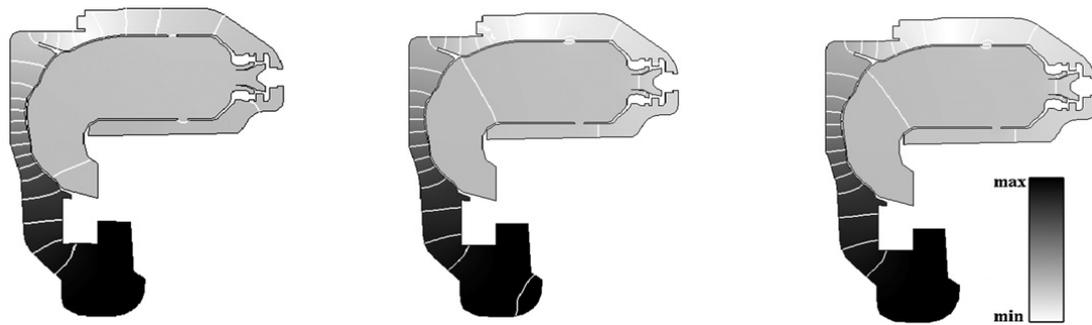


Fig. 10. Evolution of the damping of the first mode at 506.4 Hz in a period as a function of U/U_{md} .

For a better understanding of this low impact of the MP of the modes on this chamber, we are looking for the maximum absorption speed, for a fixed porosity. In Fig. 7, the set of parameters corresponding to the porosity of the chamber studied here was taken on the cylinder case, and the maximum absorption speed turned out to be 12 m/s. The maximal absorption occurs here at U_{md} (Fig. 10), which is the same order of magnitude as for the cylinder. But still the difference is not negligible and shows that the full geometry must be accounted for to predict the maximum absorption speed. At $U = U_{md}$, the damping is 25% per period. But at the real bias flow speed of the regime considered here, the damping drops to 6.7% per period. Indeed, the speed U_{md} is in the domain where the frequencies tend to be the ones when there is a wall. This shows that acoustics and the cooling process are two decoupled phenomena. For the bias flow speed corresponding to the best cooling of the chamber walls, acoustics are not impacted. Indeed, the behaviour of the chamber is very close to the one when walls are in place of the plates (see Fig. 11). On this figure, the acoustic pressure fields (real part of the acoustic pressure fluctuation) and its isocontours are presented for two different regimes of MP and with a wall. At the maximum absorption speed, the pressure node is not in the same place in the casing and the pressure gradient diminishes in the swirler.

5. Conclusion

A model for the acoustic behaviour of perforated plates has been implemented in the Helmholtz solver AVSP. This tool allows one to take into account MP in computations of the acoustics of a chamber. AVSP predicts damped acoustic modes, in agreement with what could be expected with perforated plates. The frequencies given by the code



With MP, $U/U_{md} = 1$: $f = 530.9 \text{ Hz}$ With MP, $U/U_{md} = 8.75$: $f = 507.04 \text{ Hz}$ With walls: $f = 506.4 \text{ Hz}$
 $A = 28.6\%$ $A = 6.7\%$ $A = 0\%$

Fig. 11. Spatial structure and isolines of \hat{p} for the first mode.

have a negative imaginary part. But this damping strongly depends on both the parameters of the perforated plate and the bias flow speed. There exists a speed for which the damping reaches its maximum, and beyond this value, the perforated plate tends to behave like a wall and the damping drops. MP are used in industrial chambers in the purpose of cooling the chamber walls. They are not designed to have the best acoustic damping. It was found that with the geometrical characteristics of the perforated plates of the helicopter chamber considered here, and the flow rate injected in the perforations, the speed appears to be far above the maximum absorption speed. Therefore, the damping observed is low, and the frequencies of oscillations are not changed significantly. The cooling of the chamber is carried out without impacting on the chamber acoustics. However, with this tool, it is possible to know if by changing the regime of the cooling of the chambers, the acoustics will also get impacted.

Acknowledgements

The authors are grateful to the CINES (Centre informatique national pour l'enseignement supérieur) for the access to the supercomputer facilities.

References

- [1] A.H. Lefebvre, Gas Turbines Combustion, Taylor & Francis, 1999.
- [2] S. Mendez, F. Nicoud, Large-eddy simulation of a bi-periodic turbulent flow with effusion, *Journal of Fluid Mechanics* 598 (2008) 27–65.
- [3] S. Mendez, F. Nicoud, Adiabatic homogeneous model for flow around a multiperforated plate, *AIAA Journal* 46 (10) (2008) 2623–2633.
- [4] A. Cummings, Acoustics nonlinearities power losses at orifices, *AIAA Journal* 22 (6) (1983) 786–792.
- [5] M.S. Howe, On the theory of unsteady high Reynolds number flow through a circular aperture, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 366 (1725) (1979) 205–223.
- [6] I.J. Hughes, A.P. Dowling, The absorption of sound by perforated linings, *Journal of Fluid Mechanics* 218 (1990) 299–335.
- [7] X. Jing, X. Sun, Effect of plate thickness on impedance of perforated plates with bias flow, *AIAA Journal* 38 (9) (2000) 1573–1578.
- [8] S.H. Lee, J.G. Ih, K.S. Peat, A model of acoustic impedance of perforated plates with bias flow considering the interaction effect, *Journal of Sound and Vibration* 303 (3–5) (2007) 741–752.
- [9] L. Benoit, Prédiction des instabilités thermo-acoustiques dans les turbines à gaz, Ph.D. thesis, Université de Montpellier II, 2005.
- [10] F. Nicoud, L. Benoit, C. Sensiau, Acoustic modes in combustors with complex impedances multidimensional active flames, *AIAA Journal* 45 (2007) 426–441.
- [11] L. Rayleigh, *The Theory of Sound*, Mac Millan, 1894. Reprinted by Dover, New York, 1945.
- [12] D.T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, John Wiley & Sons, 2000.
- [13] T. Poinso, D. Veynante, *Theoretical and Numerical Combustion*, second ed., R.T. Edwards, 2005.
- [14] C. Sensiau, Simulations numériques des instabilités thermoacoustiques dans les chambres de combustion aéronautiques, PhD thesis, Université de Montpellier II, 2008.
- [15] G. Staffelbach, L.Y.M. Gicquel, G. Boudier, T. Poinso, Large eddy simulation of self excited azimuthal modes in annular combustors, *Proc. Combust. Inst.* (2008).
- [16] G. Boudier, N. Lamarque, G. Staffelbach, L.M.Y. Gicquel, T. Poinso, Thermo-acoustic stability of a helicopter gas turbine combustor using large-eddy simulations, *International journal of Aeroacoustics* 8 (1) (2009) 69–94.
- [17] G. Millot, Simulation numérique d'écoulements en présence de plaques multiperforées: étude et validation d'un modèle homogène sous avbp, Technical report, Rapport confidentiel, 2008.

Damping Effect of Perforated Plates on the Acoustics of Annular combustors

Elsa Gullaud*, Simon Mendez†, Claude Sensiau‡ and Pierre Wolf §

CERFACS, 31057 Toulouse, France

Franck Nicoud¶

Université Montpellier II, 34095 Montpellier, France

This paper aims at showing the influence of perforated plates on the acoustic modes in aeronautical gas turbines combustion chambers. The analytical model developed by Howe¹ was implemented in a 3D acoustic Helmholtz solver to account for the effect of perforated plates. First, an analytic test case is used to validate the coding in the acoustic solver. Then, a computation of the acoustic modes in an actual industrial chamber is conducted, taking into account the perforated liners. Both longitudinal and azimuthal modes are studied.

Nomenclature

\bar{A}, \bar{B}	NxN matrices	U	Bias flow speed <i>m/s</i>
\bar{P}	Acoustic pressure amplitude N vector	U_{md}	Speed of maximal damping <i>m/s</i>
\mathbf{n}	Unit normal vector	U_{ref}	Actual speed used in the industrial chamber <i>m/s</i>
$\delta\Omega$	Boundary of the computational domain	Z	Complex impedance
γ	Polytropic coefficient	<i>Subscripts</i>	
\hat{p}	Spatial pressure fluctuation	0	Time averaged quantity
\hat{u}	Spatial velocity fluctuation	<i>Conventions</i>	
Ω	Computational domain	∇z	Spatial gradient of <i>z</i>
ω	Angular frequency <i>rad/s</i>	i	Imaginary complex number
ρ	Density <i>kg/m³</i>	$Im(z)$	Imaginary part of the complex value <i>z</i>
a	Aperture radius <i>m</i>	$Re(z)$	Real part of the complex value <i>z</i>
c	Sound speed <i>m/s</i>	<i>Superscripts</i>	
d	Aperture distance <i>m</i>	+	value upstream
f	Mode frequency <i>Hz</i>	-	value downstream
K_R	Rayleigh conductivity <i>1/m</i>	'	Fluctuating quantity
N	Number of discretization nodes		
St	Strouhal number $\frac{\omega a}{U}$		
t	Time		

*Ph.D. Student, CFD Team, 42, Av. Gaspard Coriolis; gullaud@cerfacs.fr.

†Ph.D., former Ph.D. student at CERFACS, currently at Stanford University; smendez@stanford.edu.

‡Ph.D., former Ph.D. student at CERFACS, currently at TUM, Munich; sensiau@td.mw.tum.de

§Ph.D. Student, CFD Team, wolf@cerfacs.fr

¶Professor, Université Montpellier II, I3M - CNRS UMR 5149 - CC51; franck.nicoud@univ-montp2.fr.

I. Introduction

In order to cut down pollutant emissions, industrial gas turbine combustion chambers are run on lean premixed regimes which on the other hand make them more subject to combustion instabilities.² These instabilities result from an unfavorable coupling between the combustion process and the acoustic modes of the chamber. They might cause harmful damages to the combustion chamber and therefore need to be accurately predicted. Numerical simulations have proven to be efficient to predict combustion instabilities³⁻⁵ However, it has recently been shown that even small changes in the geometry accounted for in simulations may have an impact on the acoustic modes of the combustion chambers, and thus on the prediction of combustion instabilities.^{5,6}

In aeronautical gas turbines, walls of recent combustion chambers are generally perforated with sub-millimeter holes for cooling purposes. It allows fresh air flowing in the casing (outside the combustion chamber) to enter the combustion chamber due to the pressure difference between the two sides of the walls. The jets issuing from the holes coalesce to form a protecting cooling film that isolates the wall from the hot gases flowing in the chamber. This technique is called full-coverage film cooling (FCFC).^{7,8} In addition to modifying the dynamical and the thermal characteristics of the flow near the walls, FCFC may have an impact on the acoustics of the chamber. Indeed, perforated plates are known to have a damping effect on incident acoustic waves.^{1,9} The damping effect is generally enhanced by the presence of a bias flow through the plate,^{10,11} as encountered in FCFC. Acoustic waves force the shear layer between the jet and the main flow to break down and form vortex rings. This mechanism efficiently converts part of the acoustic energy into vortical energy. Vortices are in turn dissipated by viscosity without substantial sound production.

To perform predictive simulations of combustion instabilities, one should then either account for the presence of multiperforated walls in the chamber, or show that their effect can be neglected. To the authors' knowledge, no study in the literature has properly addressed this question. Indeed, accounting for FCFC in simulations is a difficult task: due to the tiny diameter of the apertures, meshing the holes in numerical computations is clearly impossible.

It is thus necessary to use models to represent the macroscopic effect of perforated walls. This issue is encountered in computational fluid dynamics calculations,^{8,12} but also when resolving the Helmholtz equation to determine the acoustic modes of a chamber. This is the focus of the present paper. Howe proposed a model to represent the acoustic damping of perforated plates with bias flow.¹ Howe's model provides the acoustic impedance of a perforated plate and is therefore well adapted to Helmholtz solvers. To account for the plate thickness, which is neglected in Howe's model, Jing and Sun¹³ proposed a modified version of Howe's model. However, the use of the modified model does not provide significant difference on the configurations studied here. Efforts have also been made to account for the presence of the grazing flow,^{14,15} but no analytical model has yet been developed and thus can't be implemented numerically.

In the present study, we will show how Howe's model can be integrated in a Helmholtz solver to account for the presence of perforated walls in aeronautical combustion chambers. It will be applied to a helicopter industrial chamber. In section II.A, the Helmholtz solver AVSP^{16,17} is described. Howe's model will be recalled in section II.B. Section III is dedicated to the analytic validation of the implementation of the model in an academic test case consisting in two coaxial cylinders separated by a perforated plate. A study of the influence of the parameters is also conducted in this section. Finally, computations are performed in a real industrial chamber, considering longitudinal modes in section IV.A and azimuthal modes in section IV.B.

II. Howe's model in the Helmholtz solver AVSP¹⁷

II.A. Description of the Helmholtz solver

Under the hypothesis of a non viscous, low Mach number mean flow and linear acoustics (which means the fluctuating quantities are small compared to the mean quantities), the wave equation can be written in a non reactive media as follows:¹⁸

$$\frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \right) = 0 \quad (1)$$

Harmonic variations are supposed for p' and u' , such that $\mathbf{u}' = \text{Re}(\hat{\mathbf{u}}(x)e^{-i\omega t})$ and $p' = \text{Re}(\hat{p}(x)e^{-i\omega t})$.

AVSP resolves the wave equation in the frequency domain, which amounts to resolving the system (Eq. (2)): the Helmholtz equation and the corresponding boundary condition.

$$\begin{cases} \nabla \cdot c^2 \nabla \hat{p} + \omega^2 \hat{p} = 0 & \text{on } \Omega \\ cZ \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} - i\omega \hat{p} = 0 & \text{on } \delta\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

Z being the complex impedance on the boundary of the domain.

After a decomposition in finite volumes, the problem takes the following matricial form:

$$\bar{A}\bar{P} + \omega\bar{B}(\omega)\bar{P} + \omega^2\bar{P} = 0, \quad (3)$$

where \bar{A} is the matrix corresponding to the operator $\nabla \cdot c^2 \nabla \hat{p}$, \bar{B} is the matrix corresponding to the boundary conditions and \bar{P} is the pressure vector. AVSP determines the eigenelements of Eq. (3) and so releases the field of harmonic acoustic pressure and the angular frequency.

II.B. Description of the model and numerical implementation

Let us consider an array of circular apertures of radius a , with an aperture spacing d , through which a mean flow parallel to the apertures axis goes at the speed U . Under the excitation of an acoustic wave, Howe's model can represent the reaction of this flow under the following hypotheses:¹

- The acoustic excitation is at a low frequency, so that the wavelength is much larger than the orifices radius.
- The flow has a high Reynolds number, the viscosity is then only dominant at the rims of the aperture leading to the shedding of vorticity.
- The Mach number of the mean flow is low, so that the flow is incompressible in the vicinity of the aperture.
- The plate is infinitely thin.
- The aperture spacing is high compared to the aperture radius, so that the interaction between the apertures is negligible.

The reasoning is then done for an isolated hole.

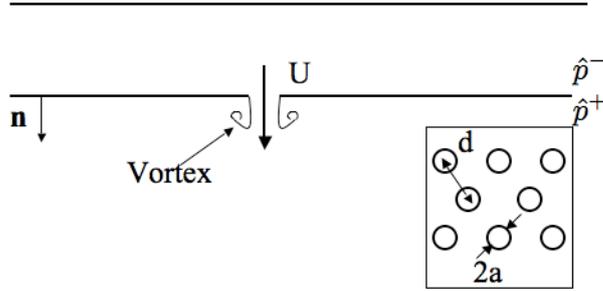


Figure 1. Array of circular apertures, of diameter $2a$ and aperture spacing d , with a bias flow of speed U .

The Rayleigh conductivity K_R ¹⁹ of the aperture, relating the harmonic volumic flux \hat{Q} to the acoustic pressure jump across the plate, is defined by

$$K_R = \frac{i\omega\rho\hat{Q}}{\hat{p}^+ - \hat{p}^-}, \quad (4)$$

where ρ is the mean density in the vicinity of the aperture, ω is the pulsation of the acoustic perturbation and \hat{p}^+ and \hat{p}^- are the harmonic pressures upstream and downstream of the aperture respectively. We have

$$\hat{Q} = d^2 \hat{u}^\pm, \quad (5)$$

3 of 12

where \hat{u}^\pm is the acoustic velocity on the plate, equal on both sides. Hence,

$$K_R = \frac{i\omega\rho_0 d^2 \hat{u}^\pm}{\hat{p}^+ - \hat{p}^-}. \quad (6)$$

Howe expresses the Rayleigh conductivity for a circular aperture in an infinitely thin plate as:

$$K_R = 2a(\Gamma_R - i\Delta_R), \quad (7)$$

where

$$\Gamma_R - i\Delta_R = 1 + \frac{\frac{\pi}{2}I_1(St)e^{-St} - iK_1(St)\sinh(St)}{St(\frac{\pi}{2}I_1(St)e^{-St} + iK_1(St)\cosh(St))}, \quad (8)$$

with $St = \frac{\omega a}{U}$. Using the momentum equation and Eq. (6), we obtain:

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = \frac{K_R}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] \quad (9)$$

Eq. (9) can then be used as a Neumann boundary condition in the Helmholtz solver. The normal pressure gradient on each multiperforated boundary is expressed as a function of a , d , U and ω . The dependence in ω of Z implies that the matrix \bar{B} in Eq. (3) is a non linear function of the frequency. The non-linearity of the problem is handled by an iterative method. Each sub iteration considers that the matrix \bar{B} is constant and resolves a quadratic eigenvalue problem.¹⁷

III. Analytic validation of the coding

First, an academic test configuration, for which an analytic solution can be derived, is presented. We consider the geometry depicted in Fig. 2. It consists of two coaxial cylinders, the inner one being perforated. The outer radius is r_2 . The perforated plate is located at r_1 . r_1^- and r_1^+ denote the upstream part of the plate and the downstream part respectively. Although the cylinder is 3D, the third dimension is considered small in regard to the others and so we will only consider radial and azimuthal modes, the longitudinal ones occurring at much higher frequencies.

III.A. Determination of the analytical solution

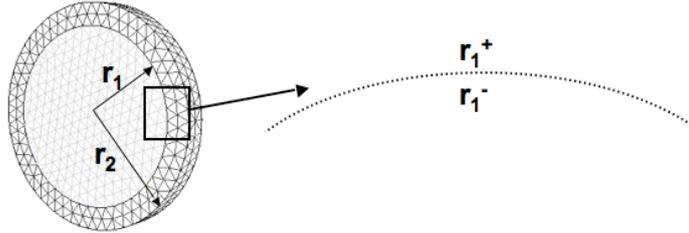


Figure 2. Academic configuration: cylinder of radius r_2 , with a perforated plate at r_1 .

For this simple case, Eq. (2) takes the following form, Ω denoting the interior of the domain and $\delta\Omega$ the domain boundary.

$$\begin{cases} \Delta \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0 \text{ on } \Omega. \\ \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \delta\Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Considering $k^2 = k_r^2 + k_z^2$, Eq. (10) can be cast in polar coordinates (Eq. (11)), with $\hat{p} = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$.^{18,20}

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z + (k_r^2 + k_z^2) = 0. \quad (11)$$

Since we only consider the radial and azimuthal modes, we have

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\Theta} \frac{d^2}{d^2\theta} \Theta + n_\theta^2 \right) + k_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} = 0. \quad (12)$$

Under these conditions, the radial part of Eq. (11) can be reduced to a Bessel equation:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R \right) + R \times \left(k_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) = 0, \quad (13)$$

whose general solution is of the form:

$$R(r) = AJ_{n_\theta}(k_r r) + BN_{n_\theta}(k_r r), \quad (14)$$

where J_{n_θ} and N_{n_θ} are Bessel functions of the n_θ order. In the domain $r \leq r_1$, the pressure can be written:

$$R(r) = AJ_{n_\theta}(k_r r). \quad (15)$$

The Neumann function, which is singular in $r = 0$, is put aside. In the domain $r_1^+ \leq r \leq r_2$, solutions may be written:

$$R(r) = CJ_{n_\theta}(k_r r) + DN_{n_\theta}(k_r r). \quad (16)$$

A null acoustic speed is imposed on the outer cylinder. Applying the condition $\hat{u} = 0$ in $r = r_2$, we obtain:

$$CJ'_{n_\theta}(k_r r_2) + DN'_{n_\theta}(k_r r_2) = 0. \quad (17)$$

According to Eq. (6), jump conditions can also be written across the perforated plate:

$$\hat{p}(r = r_1^+) - \hat{p}(r = r_1^-) = \frac{i\omega\rho d^2}{K_R} \hat{u}(r = r_1^-), \quad (18)$$

$$\hat{p}(r = r_1^-) - \hat{p}(r = r_1^+) = -\frac{i\omega\rho d^2}{K_R} \hat{u}(r = r_1^+). \quad (19)$$

We then obtain the system

$$[M][X] = 0,$$

where M is the matrix obtained by using Eq. (17), Eq. (18) and Eq. (19), and given by

$$\begin{bmatrix} 0 & J'_{n_\theta}(k_r r_2) & N'_{n_\theta}(k_r r_2) \\ \frac{d^2}{K_R} k_r J'_{n_\theta}(k_r r_1^-) + J_{n_\theta}(k_r r_1^-) & -J_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) & -N_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) \\ J_{n_\theta}(k_r r_1^-) & -J_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) + \frac{d^2 k_r}{K_R} J'_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) & -N_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) + \frac{d^2 k_r}{K_R} N'_{n_\theta}(k_r r_2) \end{bmatrix},$$

and X is the vector

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Solving

$$\det(M) = 0 \quad (20)$$

releases the eigenvalues of the configuration.

III.B. Results

Let us consider the following parameters for the multiperforated plate (MP): $U = 5 \text{ m/s}$, $a = 3 \text{ mm}$ and $d = 35 \text{ mm}$, $r_1 = 0.2 \text{ m}$ and $r_2 = 0.25 \text{ m}$. The configuration calculated in the Helmholtz solver AVSP¹⁷ contains a tetrahedric mesh of 1186 nodes shown on Fig. 2. The sound speed is uniform and equal to 347 m/s . The eigenfrequencies are gathered in Table 1 and compared to the analytical results obtained by solving Eq. (20). The first three modes are considered. AVSP provides a complex frequency $Re(f) + iIm(f)$ where $Re(f)$ is the frequency of the mode, and $Im(f)$ is related to the amplification rate of the mode. With

the adopted convention $p'(x, t) = \text{Re}(\hat{p}(x)e^{-i\omega t})$, the ratio between the value of the pressure fluctuation at $t = 0$ and $t = T$ is given by Eq. (21).

$$\frac{|p'(x, t = T)|}{|p'(x, t = 0)|} = |e^{Im(\omega)T}|. \quad (21)$$

Hence, the attenuation factor \mathcal{A} in percent at a period T is given by $100[1 - |e^{2\pi \frac{Im(f)}{Re(f)}}|]$.

	AVSP results with MP		Analytics with MP	
	$Re(f)$	$Im(f)$ ($\mathcal{A}\%$)	$Re(f)$	$Im(f)$ ($\mathcal{A}\%$)
$n_\theta = 1$	382.5 Hz	-18.8 s^{-1} (26.7 %)	382.56 Hz	-18.9 s^{-1} (27.8 %)
$n_\theta = 0$	534.1 Hz	-97.5 s^{-1} (68.2 %)	533.21 Hz	-97.5 s^{-1} (68.3 %)
$n_\theta = 2$	610.48 Hz	-21.4 s^{-1} (19.8 %)	611.04 Hz	-21.64 s^{-1} (19.9 %)

Table 1. Comparison of the eigenfrequencies between AVSP and analytics.

As expected, the eigenfrequencies have a negative imaginary part, which means the pressure fluctuation is damped. AVSP results are in good agreement with the theory. Figures 3 and 4 show the radial profiles of the real and imaginary parts of \hat{p} given by AVSP for the first and second modes. Analytical solutions are also given for comparison. Again, a good agreement is found. Note that the pressure jump across the perforated plate is visible on the real and imaginary parts of the harmonic pressure fluctuations, as well as on the isolines for the first azimuthal mode (Fig. 3).

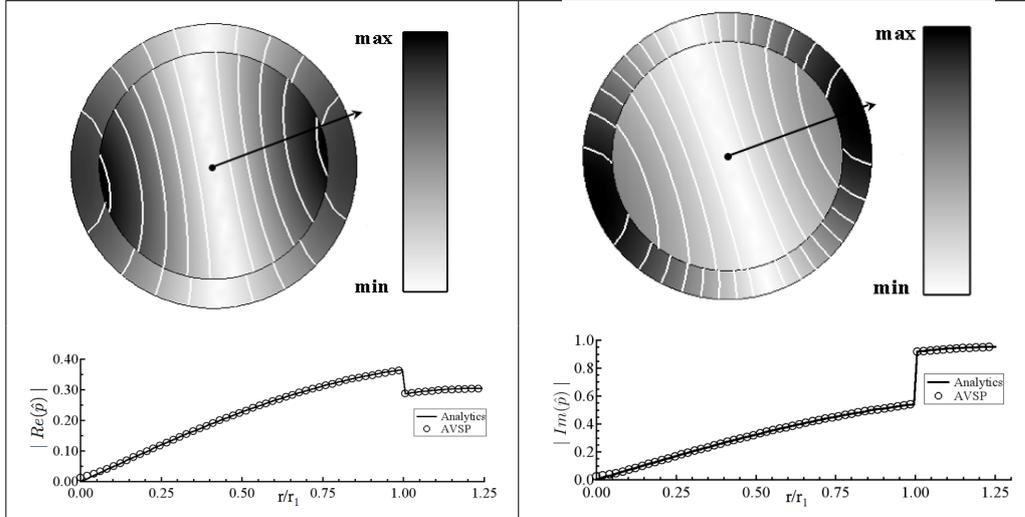


Figure 3. First azimuthal mode: $n_\theta = 1$, $Re(f) = 382.5$ Hz, $Im(f) = -18.8$ s^{-1} . Left: $Re(\hat{p})$. Right: $Im(\hat{p})$. Above: AVSP results. Below: Radial profiles of the real and imaginary part of \hat{p} along the radius represented by the arrow (comparison analytics/AVSP).

This comparison is conducted for a fixed bias flow speed (5 m/s), but Fig. 5 also shows good agreement between AVSP and analytical results of eigenfrequencies for various bias flow speeds.

Figure 6 shows the evolution of the resonant frequencies for the radial mode and the first azimuthal mode as a function of the bias flow speed. As the bias flow speed increases, the resonant frequency of both modes decreases. But in the case of the azimuthal mode, the resonant frequencies varies in a range from 380 Hz to 260 Hz, whereas the frequency of the radial mode varies a lot, it drops from 500 Hz to 80 Hz. The frequency of the radial mode hence becomes close to the one of the azimuthal mode and then is lower than it. Figure 7 displays the amplification rate of the radial and the first azimuthal mode as a function of the bias flow speed. In the case of the radial mode, the damping raises until reaching almost 100% and keeping this

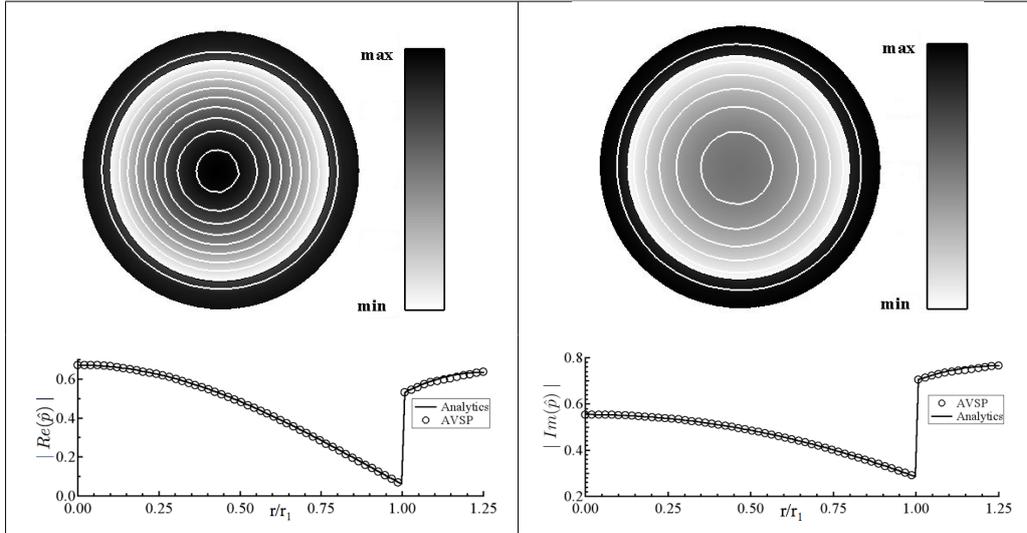


Figure 4. Radial mode: $n_\theta = 0$, $Re(f) = 534.1 \text{ Hz}$, $Im(f) = -97.5 \text{ s}^{-1}$. Left: $Re(\hat{p})$. Right: $Im(\hat{p})$. Above: AVSP results. Below: Radial profiles of the real and imaginary part of \hat{p} (comparison Analytics/AVSP).

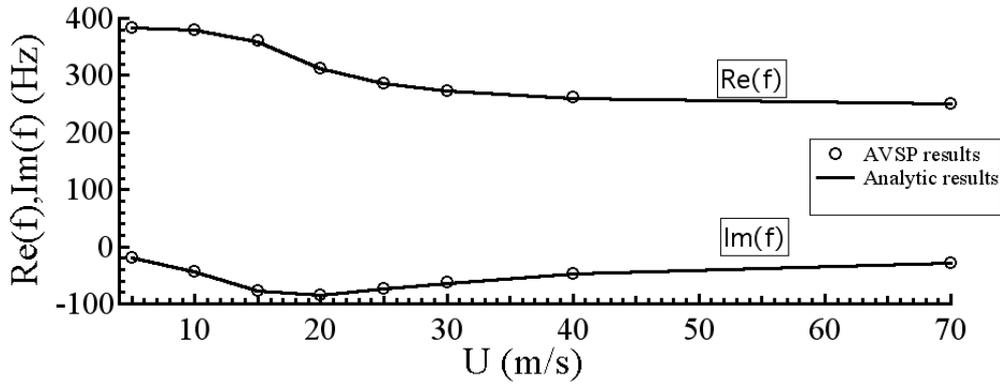


Figure 5. Comparison between AVSP frequencies and analytics, for various speeds.

very high value of damping. On the contrary, the damping for the first azimuthal mode reaches a maximum at $U = 20 \text{ m/s}$ and then decreases.

The impact of the perforated plates is more important on radial modes than on azimuthal modes. Indeed, in this configuration, the pressure gradient for the radial mode across the perforated plate is more important than for an azimuthal mode. This can be seen on the structure of the modes on Fig. 4. For the radial mode, the perforated plate is located between a pressure node and a pressure antinode, which makes the pressure gradient important, and thus, according to Eq. (9), the perforated plate has a strong impact.

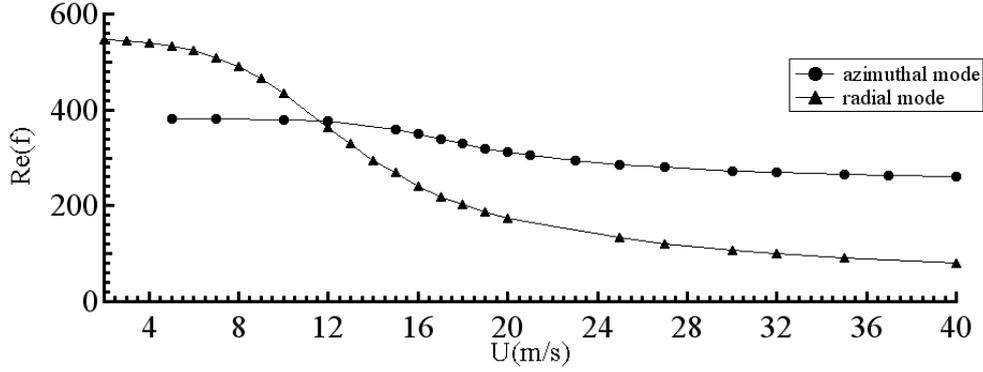


Figure 6. Resonant frequencies as a function of the bias flow speed for the radial and the first azimuthal mode.

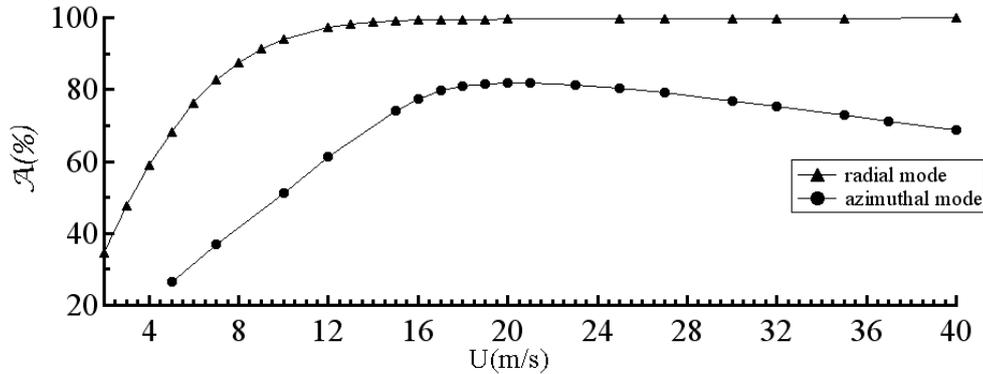


Figure 7. $\mathcal{A}(\%)$ as a function of the bias flow speed U for the radial and the first azimuthal mode.

IV. Computations on an industrial helicopter chamber

Now that the coding in the Helmholtz solver has been validated on a simple test case, the purpose of this section is to run computations in an actual industrial chamber.

IV.A. Longitudinal modes

The combustion chamber studied here is part of an engine designed to equip a 6-ton helicopter, with a power of 900 kW at take off. It is built around a gas generator and the cold flow compressed by the two compressor stages enters the combustor chamber through the casing. A part of the air gets into the combustion chamber through the perforated plates in order to cool the walls. The chamber is a reverse-flow annular chamber fueled by 15 injectors. In this first section, the computational domain is limited here to a 24 degree sector. The computational domain includes the swirler, the casing and the chamber. The influence of the geometry on the acoustics of this chamber was previously studied⁶ and many computational fluid dynamics calculations were conducted^{21,22} but always neglecting the presence of perforated plates. The purpose of this section is to investigate the influence of the perforated liners on the acoustic modes. The locations of the MP are given in Fig. 8. The sound speed field is deduced from a previous LES^a computation (Fig. 9).²³

To assess the impact of MP in this chamber, we use a reference test case when walls are used in place of

^aLarge Eddy Simulation.

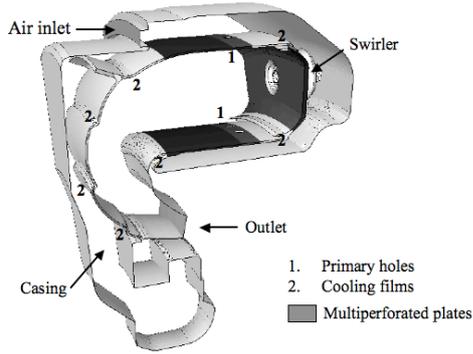


Figure 8. Location of the MP in the chamber.

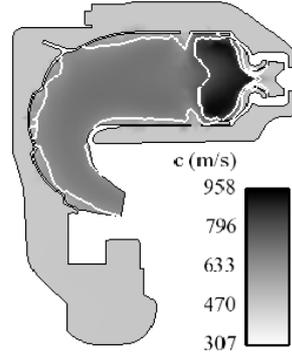


Figure 9. Sound speed field.

the plates. Table 2 gives the first two eigenfrequencies for the computation with walls and MP. Once again, the modes are found damped, but only weakly for the first longitudinal mode (L_1).

Figure 10 shows the spatial structure of the pressure fluctuation within the chamber. The pressure gradient

Walls		MP	
$Re(f)$	$Im(f)$ (A(%))	$Re(f)$	$Im(f)$ (A(%))
510 Hz	$0 s^{-1}$ (0%)	511.4	$-4.5 s^{-1}$ (5.4 %)
1153.7 Hz	$0 s^{-1}$ (0%)	1163.7 Hz	$-48.9 s^{-1}$ (23.2 %)

Table 2. Comparison of the first two eigenfrequencies corresponding to the first two longitudinal modes, with walls, and with MP.

across the perforated plates is more important for the second longitudinal mode (L_2) than for L_1 . This explains why the damping is better for L_2 , as pointed to in section III.B. The dependency of the modes to the bias flow speed is now considered to see if the damping can be optimized. Figures 11 and 12 respectively show the evolution of the frequencies in the complex plan. The reference speed noted U_{ref} corresponds to the regime at which the chamber is actually run. Figures 11 and 12 respectively show the evolution of the frequencies in the complex plan as a function of U, U ranging from $0.01 U_{ref}$ for L1 and $0.07 U_{ref}$ for L2 to U_{ref} .

Both modes have a similar behaviour. The resonant frequency increases when decreasing the bias flow speed, which was also observed on the cylinder. For both modes, a maximum damping speed U_{md} can be found. The value of this speed is $U_{md}(L_1) = 0.1 U_{ref}$ for L_1 and $U_{md}(L_2) = 0.2 U_{ref}$ for L_2 . Beyond this speed, the damping of both modes decreases. The fact that U_{ref} is closer to $U_{md}(L_2)$ than $U_{md}(L_1)$ explains why the damping is more important for L_2 . The maximum damping reached by L_2 is much more important (50%) than the one reached by L_1 (26%).

Damping and energy balance study for perforated plates on the acoustics in annular combustors

E. Gullaud*

CERFACS, 31057 Toulouse, France

F. Nicoud†

Université Montpellier II, 34095 Montpellier, France

This paper aims at showing the influence of perforated plates on the acoustic modes in aeronautical gas turbines combustion chambers. The analytical model developed by Howe¹ was implemented in a 3D acoustic Helmholtz solver to account for the effect of perforated plates. First, an analytic test case is used to validate the coding in the acoustic solver. Then, a computation of the acoustic modes in an actual industrial chamber is conducted, taking into account the perforated liners. For both cases, a study of the influence of the bias flow speed is conducted. A disturbance energy budget is also carried out to evaluate the respective contribution of the perforated plates. In the case of the industrial chamber, some plates are proved to be more effective than the others.

Nomenclature

\bar{A}, \bar{B}	NxN matrices	U	Bias flow speed m/s
\bar{P}	Acoustic pressure amplitude N vector	U_{md}	Speed of maximal damping m/s
\mathbf{n}	Unit normal vector	U_{ref}	Actual speed used in the industrial chamber m/s
$\delta\Omega$	Boundary of the computational domain	Z	Complex impedance
γ	Polytropic coefficient	<i>Subscripts</i>	
\hat{p}	Spatial pressure fluctuation	0	Time averaged quantity
\hat{u}	Spatial velocity fluctuation	<i>Conventions</i>	
Ω	Computational domain	∇z	Spatial gradient of z
ω	Angular frequency rad/s	i	Imaginary complex number
ρ	Density kg/m^3	$Im(z)$	Imaginary part of the complex value z
a	Aperture radius m	$Re(z)$	Real part of the complex value z
c	Sound speed m/s	<i>Superscripts</i>	
d	Aperture distance m	+	value upstream
f	Mode frequency Hz	-	value downstream
K_R	Rayleigh conductivity $1/m$	'	Fluctuating quantity
N	Number of discretization nodes		
St	Strouhal number $\frac{\omega a}{U}$		
t	Time		

*Ph.D. Student, CFD Team, 42, Av. Gaspard Coriolis; gullaud@cerfacs.fr.

†Professor, Université Montpellier II, I3M - CNRS UMR 5149 - CC51; franck.nicoud@univ-montp2.fr.

Copyright © 2009 by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. The U.S. Government has a royalty-free license to exercise all rights under the copyright claimed herein for Governmental purposes. All other rights are reserved by the copyright owner.

I. Introduction

In order to cut down pollutant emissions, industrial gas turbine combustion chambers are run on lean premixed regimes which on the other hand make them more subject to combustion instabilities.² These instabilities result from an unfavorable coupling between the combustion process and the acoustic modes of the chamber. They might cause harmful damages to the combustion chamber and therefore need to be accurately predicted. Numerical simulations have proven to be efficient to predict combustion instabilities.³⁻⁵ However, it has recently been shown that even small changes in the geometry accounted for in simulations may have an impact on the acoustic modes of the combustion chambers, and thus on the prediction of combustion instabilities.^{5,6}

In aeronautical gas turbines, walls of recent combustion chambers are generally perforated with sub-millimeter holes for cooling purposes. It allows fresh air flowing in the casing (outside the combustion chamber) to enter the combustion chamber due to the pressure difference between the two sides of the walls. The jets issuing from the holes coalesce to form a protecting cooling film that isolates the wall from the hot gases flowing in the chamber. This technique is called full-coverage film cooling (FCFC).^{7,8} In addition to modifying the dynamical and the thermal characteristics of the flow near the walls, FCFC may have an impact on the acoustics of the chamber. Indeed, perforated plates are known to have a damping effect on incident acoustic waves.^{1,9} The damping effect is generally enhanced by the presence of a bias flow through the plate,^{10,11} as encountered in FCFC. Acoustic waves force the shear layer between the jet and the main flow to break down and form vortex rings. This mechanism efficiently converts part of the acoustic energy into vortical energy. Vortices are in turn dissipated by viscosity without substantial sound production.

To perform predictive simulations of combustion instabilities, one should then either account for the presence of multiperforated walls in the chamber, or show that their effect can be neglected. To the authors' knowledge, no study in the literature has properly addressed this question. Indeed, accounting for FCFC in simulations is a difficult task: due to the tiny diameter of the apertures, meshing the holes in numerical computations is clearly impossible.

It is thus necessary to use models to represent the macroscopic effect of perforated walls. This issue is encountered in computational fluid dynamics calculations,^{8,12} but also when resolving the Helmholtz equation to determine the acoustic modes of a chamber. This is the focus of the present paper. Howe proposed a model to represent the acoustic damping of perforated plates with bias flow.¹ Howe's model provides the acoustic impedance of a perforated plate and is therefore well adapted to Helmholtz solvers. To account for the plate thickness, which is neglected in Howe's model, Jing and Sun¹³ proposed a modified version of Howe's model. However, the use of the modified model does not provide significant difference on the configurations studied here. Efforts have also been made to account for the presence of the grazing flow,^{14,15} but no analytical model has yet been developed and thus can't be implemented numerically.

In the present study, we will show how Howe's model can be integrated in a Helmholtz solver to account for the presence of perforated walls in aeronautical combustion chambers. It will be applied to a helicopter industrial chamber. In section II.A, the Helmholtz solver AVSP^{16,17} is described. Howe's model will be recalled in section II.B. Section III is dedicated to the analytic validation of the implementation of the model in an academic test case consisting in two coaxial cylinders separated by a perforated plate. A study of the influence of the parameters is also conducted in this section. Finally, computations are performed in a real industrial chamber, considering longitudinal modes.

II. Howe's model in the Helmholtz solver AVSP¹⁷

II.A. Description of the Helmholtz solver

Under the hypothesis of a non viscous, low Mach number mean flow and linear acoustics (which means the fluctuating quantities are small compared to the mean quantities), the wave equation can be written in a non reactive media as follows:¹⁸

$$\frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p' \right) = 0 \quad (1)$$

Harmonic variations are supposed for p' and u' , such that $\mathbf{u}' = \text{Re}(\hat{\mathbf{u}}(x)e^{-i\omega t})$ and $p' = \text{Re}(\hat{p}(x)e^{-i\omega t})$. AVSP resolves the wave equation in the frequency domain, which amounts to resolving the system (Eq. (2)):

the Helmholtz equation and the corresponding boundary condition.

$$\begin{cases} \nabla \cdot c^2 \nabla \hat{p} + \omega^2 \hat{p} = 0 \text{ on } \Omega \\ cZ \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} - i\omega \hat{p} = 0 \text{ on } \delta\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

Z being the complex impedance on the boundary of the domain.

After a decomposition in finite volumes, the problem takes the following matricial form:

$$\bar{A}\bar{P} + \omega\bar{B}(\omega)\bar{P} + \omega^2\bar{P} = 0, \quad (3)$$

where \bar{A} is the matrix corresponding to the operator $\nabla \cdot c^2 \nabla \hat{p}$, \bar{B} is the matrix corresponding to the boundary conditions and \bar{P} is the pressure vector. AVSP determines the eigenelements of Eq. (3) and so releases the field of harmonic acoustic pressure and the angular frequency.

II.B. Description of the model and numerical implementation

Let us consider an array of circular apertures of radius a , with an aperture spacing d , through which a mean flow parallel to the apertures axis goes at the speed U . Under the excitation of an acoustic wave, Howe's model can represent the reaction of this flow under the following hypotheses:¹

- The acoustic excitation is at a low frequency, so that the wavelength is much larger than the orifices radius.
- The flow has a high Reynolds number, the viscosity is then only dominant at the rims of the aperture leading to the shedding of vorticity.
- The Mach number of the mean flow is low, so that the flow is incompressible in the vicinity of the aperture.
- The plate is infinitely thin.
- The aperture spacing is high compared to the aperture radius, so that the interaction between the apertures is negligible.

The reasoning is then done for an isolated hole.

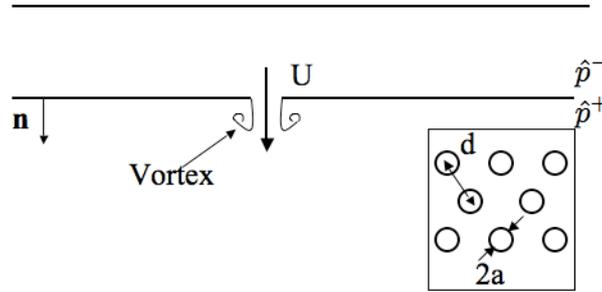


Figure 1. Array of circular apertures, of diameter $2a$ and aperture spacing d , with a bias flow of speed U .

The Rayleigh conductivity K_R ¹⁹ of the aperture, relating the harmonic volumic flux \hat{Q} to the acoustic pressure jump across the plate, is defined by

$$K_R = \frac{i\omega\rho\hat{Q}}{\hat{p}^+ - \hat{p}^-}, \quad (4)$$

where ρ is the mean density in the vicinity of the aperture, ω is the pulsation of the acoustic perturbation and \hat{p}^+ and \hat{p}^- are the harmonic pressures upstream and downstream of the aperture respectively. We have

$$\hat{Q} = d^2\hat{u}^\pm, \quad (5)$$

where \hat{u}^\pm is the acoustic velocity on the plate, equal on both sides. Hence,

$$K_R = \frac{i\omega\rho_0 d^2 \hat{u}^\pm}{\hat{p}^+ - \hat{p}^-}. \quad (6)$$

Howe expresses the Rayleigh conductivity for a circular aperture in an infinitely thin plate as:

$$K_R = 2a(\Gamma_R - i\Delta_R), \quad (7)$$

where

$$\Gamma_R - i\Delta_R = 1 + \frac{\frac{\pi}{2}I_1(St)e^{-St} - iK_1(St)\sinh(St)}{St(\frac{\pi}{2}I_1(St)e^{-St} + iK_1(St)\cosh(St))}, \quad (8)$$

with $St = \frac{\omega a}{U}$. Using the momentum equation and Eq. (6), we obtain:

$$\nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = \frac{K_R}{d^2} [\hat{p}^+ - \hat{p}^-] \quad (9)$$

Eq. (9) can then be used as a Neumann boundary condition in the Helmholtz solver. The normal pressure gradient on each multiperforated boundary is expressed as a function of a , d , U and ω . The dependence in ω of Z implies that the matrix \bar{B} in Eq. (3) is a non linear function of the frequency. The non-linearity of the problem is handled by an iterative method. Each sub iteration considers that the matrix \bar{B} is constant and resolves a quadratic eigenvalue problem.¹⁷

III. Analytic validation of the coding

First, an academic test configuration, for which an analytic solution can be derived, is presented. We consider the geometry depicted in Fig. 2. It consists of two coaxial cylinders, the inner one being perforated. The outer radius is r_2 . The perforated plate is located at r_1 . r_1^- and r_1^+ denote the upstream part of the plate and the downstream part respectively. Although the cylinder is 3D, the third dimension is considered small in regard to the others and so we will only consider radial and azimuthal modes, the longitudinal ones occurring at much higher frequencies.

III.A. Determination of the analytical solution

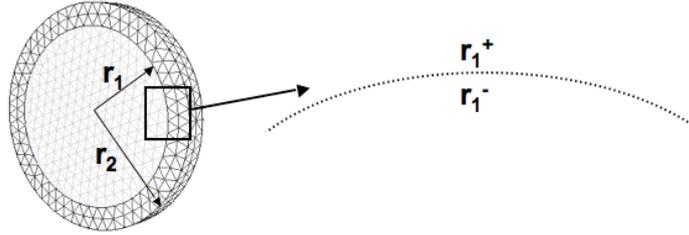


Figure 2. Academic configuration: cylinder of radius r_2 , with a perforated plate at r_1 .

For this simple case, Eq. (2) takes the following form, Ω denoting the interior of the domain and $\delta\Omega$ the domain boundary.

$$\begin{cases} \Delta \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0 \text{ on } \Omega. \\ \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \delta\Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Considering $k^2 = k_r^2 + k_z^2$, Eq. (10) can be cast in polar coordinates (Eq. (11)), with $\hat{p} = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$.^{18,20}

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z + (k_r^2 + k_z^2) = 0. \quad (11)$$

Since we only consider the radial and azimuthal modes, we have

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{rR} \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\Theta} \frac{d^2}{d^2\theta} \Theta + n_\theta^2 \right) + k_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} = 0. \quad (12)$$

Under these conditions, the radial part of Eq. (11) can be reduced to a Bessel equation:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} R + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R \right) + R \times \left(k_r^2 - \frac{n_\theta^2}{r^2} \right) = 0, \quad (13)$$

whose general solution is of the form:

$$R(r) = AJ_{n_\theta}(k_r r) + BN_{n_\theta}(k_r r), \quad (14)$$

where J_{n_θ} and N_{n_θ} are Bessel functions of the n_θ order. In the domain $r \leq r_1$, the pressure can be written:

$$R(r) = AJ_{n_\theta}(k_r r). \quad (15)$$

The Neumann function, which is singular in $r = 0$, is put aside. In the domain $r_1^+ \leq r \leq r_2$, solutions may be written:

$$R(r) = CJ_{n_\theta}(k_r r) + DN_{n_\theta}(k_r r). \quad (16)$$

A null acoustic speed is imposed on the outer cylinder. Applying the condition $\hat{u} = 0$ in $r = r_2$, we obtain:

$$CJ'_{n_\theta}(k_r r_2) + DN'_{n_\theta}(k_r r_2) = 0. \quad (17)$$

According to Eq. (6), jump conditions can also be written across the perforated plate:

$$\hat{p}(r = r_1^+) - \hat{p}(r = r_1^-) = \frac{i\omega\rho d^2}{K_R} \hat{u}(r = r_1^-), \quad (18)$$

$$\hat{p}(r = r_1^-) - \hat{p}(r = r_1^+) = -\frac{i\omega\rho d^2}{K_R} \hat{u}(r = r_1^+). \quad (19)$$

We then obtain the system

$$[M][X] = 0,$$

where M is the matrix obtained by using Eq. (17), Eq. (18) and Eq. (19), and given by

$$\begin{bmatrix} 0 & J'_{n_\theta}(k_r r_2) & N'_{n_\theta}(k_r r_2) \\ \frac{d^2}{K_R} k_r J'_{n_\theta}(k_r r_1^-) + J_{n_\theta}(k_r r_1^-) & -J_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) & -N_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) \\ J_{n_\theta}(k_r r_1^-) & -J_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) + \frac{d^2 k_r}{K_R} J'_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) & -N_{n_\theta}(k_r(r_1^+)) + \frac{d^2 k_r}{K_R} N'_{n_\theta}(k_r r_2) \end{bmatrix},$$

and X is the vector

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}.$$

Solving

$$\det(M) = 0 \quad (20)$$

releases the eigenvalues of the configuration.

III.B. Results

Let us consider the following parameters for the multiperforated plate (MP): $U = 5 \text{ m/s}$, $a = 3 \text{ mm}$ and $d = 35 \text{ mm}$, $r_1 = 0.2 \text{ m}$ and $r_2 = 0.25 \text{ m}$. The configuration calculated in the Helmholtz solver AVSP¹⁷ contains a tetrahedric mesh of 1186 nodes shown on Fig. 2. The sound speed is uniform and equal to 347 m/s . The eigenfrequencies are gathered in Table 1 and compared to the analytical results obtained by solving Eq. (20). The first three modes are considered. AVSP provides a complex frequency $Re(f) + iIm(f)$ where $Re(f)$ is the frequency of the mode, and $Im(f)$ is related to the amplification rate of the mode. With

the adopted convention $p'(x, t) = \text{Re}(\hat{p}(x)e^{-i\omega t})$, the ratio between the value of the pressure fluctuation at $t = 0$ and $t = T$ is given by Eq. (21).

$$\frac{|p'(x, t = T)|}{|p'(x, t = 0)|} = |e^{Im(f)T}|. \quad (21)$$

Hence, the attenuation factor \mathcal{A} in percent at a period T is given by $100[1 - |e^{2\pi \frac{Im(f)}{Re(f)}}|]$.

	AVSP results with MP		Analytics with MP	
	$Re(f)$	$Im(f)$ ($\mathcal{A}\%$)	$Re(f)$	$Im(f)$ ($\mathcal{A}\%$)
$n_\theta = 1$	382.5 Hz	-18.8 s^{-1} (26.7 %)	382.56 Hz	-18.9 s^{-1} (27.8 %)
$n_\theta = 0$	534.1 Hz	-97.5 s^{-1} (68.2 %)	533.21 Hz	-97.5 s^{-1} (68.3 %)
$n_\theta = 2$	610.48 Hz	-21.4 s^{-1} (19.8 %)	611.04 Hz	-21.64 s^{-1} (19.9 %)

Table 1. Comparison of the eigenfrequencies between AVSP and analytics.

As expected, the eigenfrequencies have a negative imaginary part, which means the pressure fluctuation is damped. AVSP results are in good agreement with the theory. Figures 3 and 4 show the radial profiles of the real and imaginary parts of \hat{p} given by AVSP for the first and second modes. Analytical solutions are also given for comparison. Again, a good agreement is found. Note that the pressure jump across the perforated plate is visible on the real and imaginary parts of the harmonic pressure fluctuations, as well as on the isolines for the first azimuthal mode (Fig. 3).

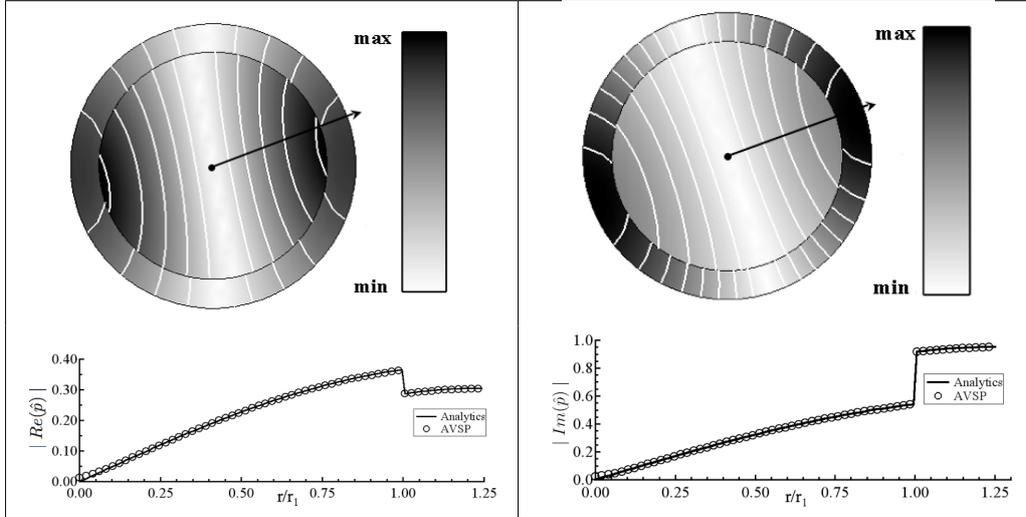


Figure 3. First azimuthal mode: $n_\theta = 1$, $Re(f) = 382.5 \text{ Hz}$, $Im(f) = -18.8 \text{ s}^{-1}$. Left: $Re(\hat{p})$. Right: $Im(\hat{p})$. Above: AVSP results. Below: Radial profiles of the real and imaginary part of \hat{p} along the radius represented by the arrow (comparison analytics/AVSP).

This comparison is conducted for a fixed bias flow speed (5 m/s), but Fig. 5 also shows good agreement between AVSP and analytical results of eigenfrequencies for various bias flow speeds.

Figure 6 shows the evolution of the resonant frequencies for the radial mode and the first azimuthal mode as a function of the bias flow speed. As the bias flow speed increases, the resonant frequency of both modes decreases. But in the case of the azimuthal mode, the resonant frequencies varies in a range from 380 Hz to 260 Hz, whereas the frequency of the radial mode varies a lot, it drops from 500 Hz to 80 Hz. The frequency of the radial mode hence becomes close to the one of the azimuthal mode and then is lower than it. Figure 7 displays the amplification rate of the radial and the first azimuthal mode as a function of the bias flow speed. In the case of the radial mode, the damping raises until reaching almost 100% and keeping this

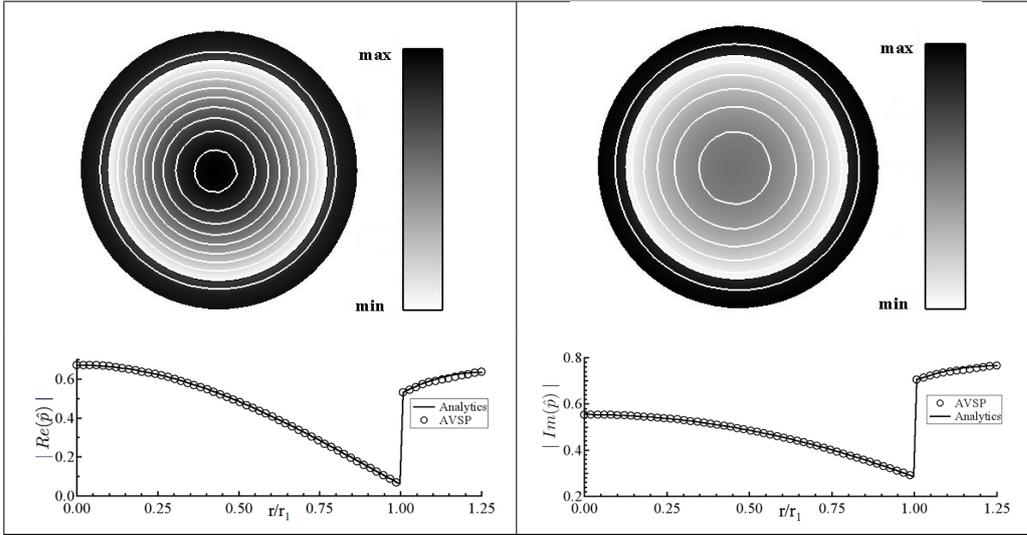


Figure 4. Radial mode: $n_\theta = 0$, $Re(f) = 534.1 \text{ Hz}$, $Im(f) = -97.5 \text{ s}^{-1}$. Left: $Re(\hat{p})$. Right: $Im(\hat{p})$. Above: AVSP results. Below: Radial profiles of the real and imaginary part of \hat{p} (comparison Analytics/AVSP).

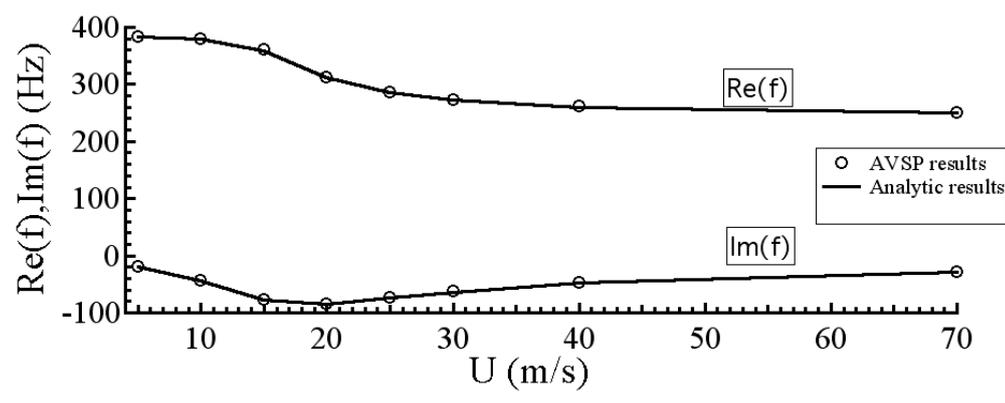


Figure 5. Comparison between AVSP frequencies and analytics, for various speeds.

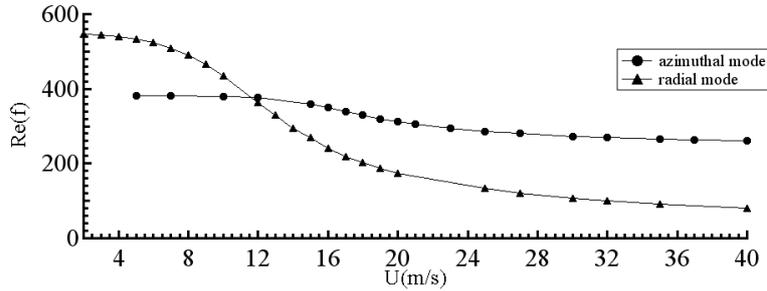


Figure 6. Resonant frequencies as a function of the bias flow speed for the radial and the first azimuthal mode.

very high value of damping. On the contrary, the damping for the first azimuthal mode reaches a maximum at $U = 20 \text{ m/s}$ and then decreases.

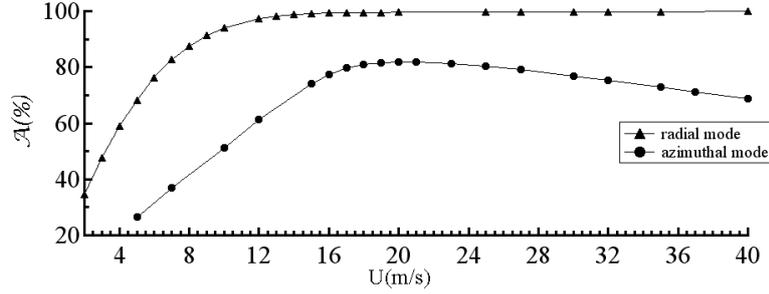


Figure 7. $\mathcal{A}(\%)$ as a function of the bias flow speed U for the radial and the first azimuthal mode.

The impact of the perforated plates is more important on radial modes than on azimuthal modes. Indeed, in this configuration, the pressure gradient for the radial mode across the perforated plate is more important than for an azimuthal mode. This can be seen on the structure of the modes on Fig. 4. For the radial mode, the perforated plate is located between a pressure node and a pressure antinode, which makes the pressure gradient important, and thus, according to Eq. (9), the perforated plate has a strong impact.

IV. Energy analysis

In order to evaluate the dissipation induced by perforated plates, an analysis of the energy budget is done for the cylinder configuration. In the non reactive case, the conservation equation for the acoustic energy $E(x, t) = \frac{1}{2}\rho u_1^2(x, t) + \frac{1}{2\gamma p_0}p_1^2(x, t)$ can be written as follows:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot p_1 \mathbf{u}_1 = 0. \quad (22)$$

Integrating Eq. (22) over the volume and on a time period T , it yields:

$$\int_T \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = - \int_T \sum_{boundaries} \iint p_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n} dS, \quad (23)$$

where $\bar{E} = \iiint_V E dv$. Finally, it yields:

$$\frac{\bar{E}(t=T)}{\bar{E}(t=0)} - 1 = - \frac{1}{\bar{E}(t=0)} \int_T \sum_{boundaries} \int_S p_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n} dS \quad (24)$$

Here, the boundaries consist of walls and the perforated plates. The contribution of the flux on walls is null because the term $p_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n}$ vanishes. The dissipation then only occurs through the perforated plates.

IV..1. Analytic expression of the acoustic flux through perforated plates.

Combining Euler Equation $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho i \omega} \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n}$, and Eq. (9), we obtain the following relation between the acoustic velocity fluctuation and the acoustic pressure jump:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\rho i \omega} \frac{K_r}{d^2} [p^+ - p^-] \quad (25)$$

And so the flux term can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \int_0^T p_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} dt = & \frac{1}{\rho(\omega_r^2 + \omega_i^2)} [\omega_i \text{Im} \left(\frac{K_r}{d^2} \right) + \omega_r \text{Re} \left(\frac{K_r}{d^2} \right)] \\ & [-A \text{Re}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-) + B \text{Re}(p^+ - p^-) \text{Im}(\hat{p}) + C (\text{Re}(\hat{p}) \text{Re}(p^+ - p^-) - \text{Im}(p^+ - p^-) \text{Im}(\hat{p}))] \\ & + \frac{1}{\rho(\omega_r^2 + \omega_i^2)} [\omega_i \text{Re} \left(\frac{K_r}{d^2} \right) - \omega_r \text{Im} \left(\frac{K_r}{d^2} \right)] \\ & [A \text{Re}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-) + B \text{Im}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-) + C (\text{Im}(\hat{p}) \text{Re}(p^+ - p^-) + \text{Re}(\hat{p}) \text{Im}(p^+ - p^-))]. \end{aligned} \quad (26)$$

with A, B, and C temporal integrations defined as follows in Eq. (27):

$$\begin{cases} C = \int_0^T e^{2\omega_i t} \cos(\omega_r t) \sin(\omega_r t) dt = \frac{\omega_r(1-e^{2\omega_i T})}{4(\omega_r^2 + \omega_i^2)} & \text{and if } \omega_i = 0, \quad C = 0, \\ A = \int_0^T e^{2\omega_i t} \cos^2(\omega_r t) dt = \frac{e^{2\omega_i T} - 1}{2\omega_i} + \frac{\omega_r}{\omega_i} C & \text{and if } \omega_i = 0, \quad A = \frac{T}{2}, \\ B = \int_0^T e^{2\omega_i t} \sin^2(\omega_r t) dt = -\frac{\omega_r}{\omega_i} C = \frac{\omega_r^2(e^{2\omega_i T} - 1)}{4\omega_i(\omega_r^2 + \omega_i^2)} & \text{et si } \omega_i = 0, \quad B = \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (27)$$

Both terms of Eq. (24) can be assessed numerically by the Helmholtz solver, this is illustrated on the cylinder case in Section IV..2.

IV..2. Numerical calculation of dissipation through perforated plates.

In the case of the first azimuthal mode where $f = 382Hz$, the balance of energy is well fulfilled, with a relative error of 0.4%. The term $\frac{E(t=T)}{E(t=0)} - 1$ releases -46.19%, which means 46.19% of damping, while $-\int_T \sum_{boundaries} \int \int p_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n} dS$ gives -46.37%.

For the case of the radial mode, the damping found is of 89.9%. It is interesting to consider the case of the maximal damping speed found for this mode in Section III.B. With this bias flow speed, the azimuthal mode is damped by 96.7%. The relative error is again of 0.4%. The mode structure is shown on Fig. 8. Since the pressure gradient inside the inner cylinder is cut down, and the pressure gradient tends to be in the outer crown, the pressure gradient across the perforated plates is higher than with a bias flow speed of 5 m/s.

This explanation also stands for the case of the radial mode shown on Fig. 9, with a bias flow speed of 10 m/s. For this mode, the damping almost reaches 100%.

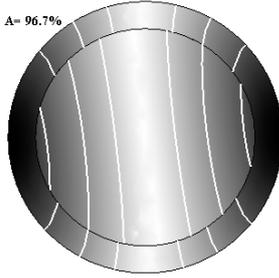


Figure 8. Mode structure of the azimuthal mode with $U = 20m/s$.

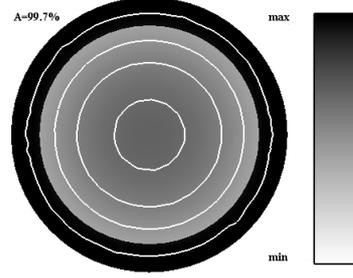


Figure 9. Mode structure for the radial mode with $U = 10m/s$.

V. Acoustic energy analysis on an industrial helicopter chamber

Now that the coding in the Helmholtz solver has been validated on a simple test case, the purpose of this section is to run computations in an actual industrial chamber. Unlike the academic test case, the chamber contains several pairs of MP. An analysis of the energy budget is therefore carried out in order to evaluate which perforated plates are the most responsible for the damping.

V.A. Description of the chamber and first results

The chamber studied here is a reverse-flow annular combustor equipping a helicopter of 900kW power at take-off. The air inlet comes out of the compressor stage through the casing. Some of this air is used to cool the chamber walls by two means: both perforated plates and cooling films are drilled in the walls. This forms a cooling coat of air on the inside walls and protects them. The whole chamber contains fifteen burners. The computational domain is limited to a 24-degree sector of this chamber, corresponding to one burner. It includes the swirler, the casing and the burner. The tetrahedric mesh used contains 42584 nodes.

Figure 10 shows the location of the cooling devices on a sector of the chamber: the cooling films are denoted by F, and the different perforated plates are denoted by numbers going from 1 to 3. The index i stands for interior, since the plates on the outside and the inside part of the chamber are fairly symmetrical.

The sound speed field input in the Helmholtz solver is deduced from a previous LES^a computation (Fig. 11).²¹

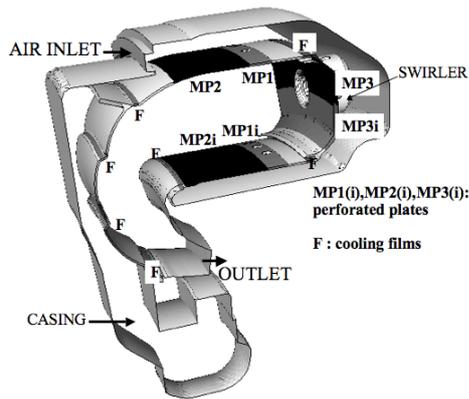


Figure 10. Location of the MP in the chamber.

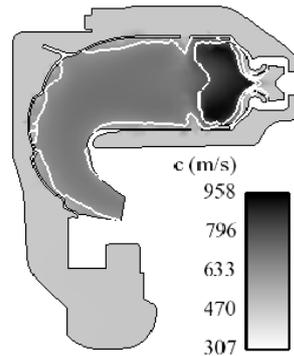


Figure 11. Sound speed field.

This helicopter chamber has already been computed among other works: for example the influence of the geometry on the acoustics of this chamber was previously studied⁶ and many computational fluid dynamics calculations were conducted.^{22,23} The influence of the presence of perforated plates has previously been studied by the authors.²⁴ It was shown that when using the actual parameters of bias flow through the perforated plates, a very slight influence of the plates on the first longitudinal mode is found. The mode structure is hardly changed and the damping is weak. The second longitudinal mode was found more damped, due to the structure of the mode. Indeed the pressure gradient in the second mode is more important and well located to be efficient for the MP.

A study of the influence of the bias flow speed in the holes was also conducted.²⁴ A bias flow speed inducing a maximum damping was highlighted. The purpose of this section is to investigate the influence of the perforated liners on the acoustic modes using an acoustic energy analysis. In some cases, the maximum damping speed will be used. In all following pictures, the field of $p' = \hat{p}(x)\cos[\arg(\hat{p})]$ is shown.

^aLarge Eddy Simulation.

V.B. Energy analysis on the first longitudinal mode

V.B.1. First longitudinal mode with actual parameters

An energy budget is first conducted for the first longitudinal mode. The two terms of Eq. (24) can be assessed and for the right hand side term, each contribution of each perforated plate is computed. For the first longitudinal mode, the term $\frac{\bar{E}(t=T)}{\bar{E}(t=0)} - 1$ gives 10.5%, which corresponds to a damping of 10.5%, in terms of energy. The balance of energy is reasonably well fulfilled, with a relative error of 13%. Figure 12 shows that the main dissipation is assured by the plate referred to as 2 in Fig. 10, since it is responsible for 6.75% of the total damping. Indeed this is due to the pressure gradient, which is maximum across plate 2.

A case is run without this plate (Fig. 13). With plate 2, the total damping was of 11.5%, now it drops to

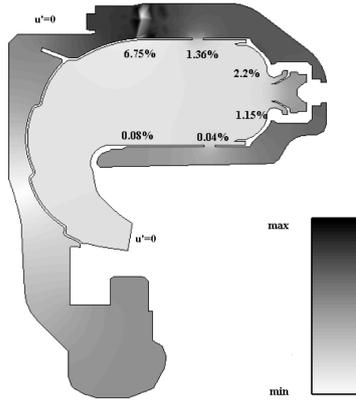


Figure 12. Mode structure for the first longitudinal mode with perforated plates, $A = 11.5\%$.

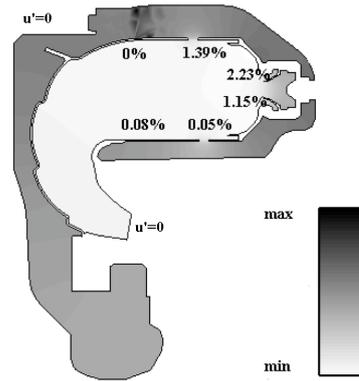


Figure 13. Mode structure for the first mode withdrawing the plate 2, $A = 4.9\%$.

4.9%, which is almost exactly the previous total damping minus the contribution of plate 2 (6.75%). The contribution of the other plates remain almost the same. This can be explained by the fact that the presence of the perforated plates hardly changes the mode structure in this case. The pressure anti-node remains above plate 2. The pressure node in the casing disappears but without affecting the efficiency of the plates, since there is no plate in this location.

V.B.2. First longitudinal mode with maximal bias flow speed

The behavior shown previously is due to the fact that with the parameters used in the actual chamber, the perforated plates don't have a strong influence. A maximal damping bias flow speed has been found for this very helicopter chamber in a previous study.²⁴ A case is run changing this parameter. Figure 14 shows the mode structure for the case where all perforated plates are active. Plate 2 proves to be much more effective (33.4%) than with the actual bias flow speed (6.75%), due to a very strong pressure gradient across it, since the node and anti-node are respectively on each side of the plate. But when withdrawing plate 2, as shown on Fig. 15, the high pressure gradient disappears. The zone of maximum pressure is much smaller, which changes the gradient for plate 1 as well. Withdrawing the plate had the consequence of modifying the mode structure in the casing, while it remains the same in the swirlers and inside the chamber. This impacts on the contribution of the other plates: plate 1 damps much less (from 6.7% to 1.35%), as for plates 3 (6.8% to 2.16%) and 3i (2.02% to 1.2%). One can also notice that the mode structure is comparable to the one shown on Fig. 13. Since the main damping in this case came from plate 2, withdrawing it boils down to the case when a small damping is observed with the actual bias flow speed.

V.C. Energy analysis on the second longitudinal mode

V.C.1. Spatial structure can stand for the efficiency of plates

The second longitudinal mode is at 1170 Hz, with an energy damping percentage of 49.1%. The structure of p' and the acoustic energy budget results are given in Fig. 16. Clearly plate 2 is the most efficient at

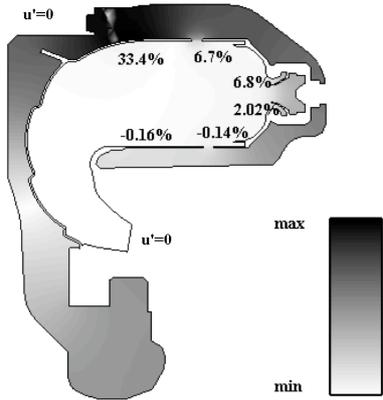


Figure 14. Mode structure for the first longitudinal mode with all plates, with maximum damping bias flow speed.

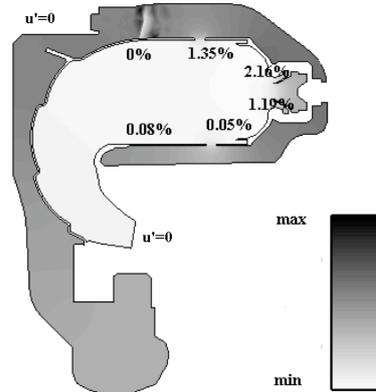


Figure 15. Mode structure for the first mode withdrawing the plate 2, with maximum damping bias flow speed.

damping again, which corresponds to the maximum pressure gradient between the casing and the chamber. For plates 3, 3i and 1, it's hard to tell the difference just looking at the pressure structure, but the slight damping of plates 1i and 2i is explained by the weak pressure gradient across them.

Since it is responsible for half of the damping, another case is run without plate 2 to see if it modifies the contribution of the other plates. A null acoustic speed condition is applied in this case on plate 2. The frequency of the mode is hardly changed from 1170Hz to 1167 Hz, which implies that the mode structure doesn't change. Fig. 17 shows the acoustic energy analysis. As found for the first longitudinal mode, the whole damping is diminished by the damping of plate 2. The damping indeed drops to 27.6%. Once again, the contribution of the other plates is hardly changed.

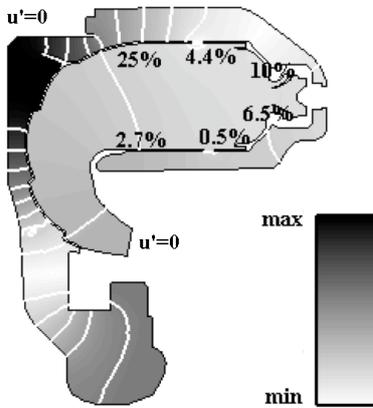


Figure 16. Mode structure for the second longitudinal mode with perforated plates, $A = 49.1\%$.

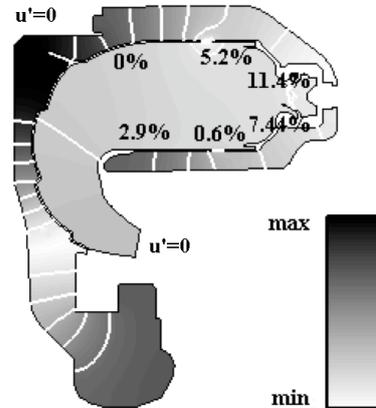


Figure 17. Mode structure for the 2nd mode withdrawing plate 2, $A = 27.6\%$.

V.D. Energy analysis on a amplified mode

In this section, the particular case of an amplified mode is studied. In this case, the outlet boundary condition is a null acoustic pressure. A reference case with all perforated plates active is first run. The mode is found to be slightly amplified by 1.4%. The presence of a pressure node at the outlet impacts on the structure of the mode inside the chamber. When a null acoustic speed was imposed at the outlet as in all previous cases, the structure inside the chamber was uniform, and sometimes a pressure node (Section V.B.2). Here, the pressure node is located at the outlet and therefore, there is a pressure gradient inside the chamber. This pressure gradient implies that there is no pressure gradient across the plate that usually damps the

most (plate 2, here at 0.2%). And plates 3 and 3i amplify in this case instead of damping. Plate 2i damps the most, because it is located at a strong pressure gradient, but not enough to compensate the amplifying behavior of plates 3 and 3i. It is possible to regain a damping behavior of 1.3% by withdrawing plates 3 and 3i, as shown in Fig. 19.

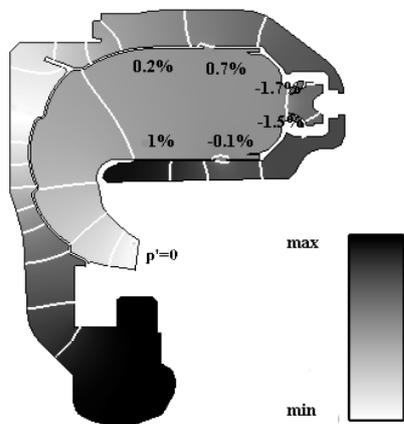


Figure 18. Mode structure for the second longitudinal mode with all active plates and null acoustic pressure at the outlet.

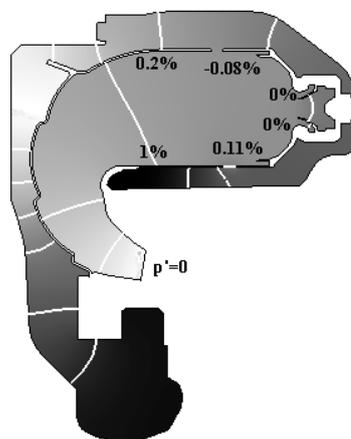


Figure 19. Mode structure for the second longitudinal mode without 3i and 3.

VI. Conclusion

A model for the acoustic behavior of perforated plates was implemented in a Helmholtz solver. This tool allows to take into account MP in computations on acoustics in industrial chambers. The coding also made possible the computations of energy budget analysis in complex cases. This allows to know which perforated plates are the most efficient for damping and gives some clues why.

In most cases run on the helicopter chamber, the plate located near the inlet is found to be the the most efficient. It is indeed located where the pressure gradient is the most important. But it is also the plate with the larger surface.

In cases when the perforated plates don't have a too strong influence, the damping is linear and withdrawing a plate just cuts down the total damping by the percentage of this plate. When the plates have a stronger influence and impact on the mode structure, withdrawing a plate can modify the structure again and the contribution of the other plates to the total damping, because the distribution of the pressure gradient changes.

While usually all modes with MP are found damped, a case was found on the helicopter chamber for which the mode structure doesn't present a pressure node inside the chamber, which cuts down the pressure gradient across the casing and the chamber. As a result, the mode is amplified. This appears when imposing a null acoustic pressure at the chamber outlet. It was shown that by withdrawing the plates that amplify the most, a damping state can be recovered.

Acknowledgments

The authors are grateful to CINES (Centre Informatique National pour l'Enseignement Supérieur) for the access to computing resources.

References

- ¹Howe, M. S., "On the Theory of Unsteady High Reynolds Number Flow Through a Circular Aperture," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 366, No. 1725, 1979, pp. 205–223.
- ²Lieuwen, T. and Yang, V., "Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms and Modeling," *Progress in Astronautics and Aeronautics AIAA*, Vol. 210, 2005.
- ³Martin, C., Benoit, L., Sommerer, Y., Nicoud, F., and Poinso, T., "LES and acoustic analysis of combustion instability in a staged turbulent swirled combustor," *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 4, 2006, pp. 741–750.
- ⁴Boudier, G., Lamarque, N., Sensiau, C., Staffelbach, G., Poinso, T., and Moureau, V., "Investigating the Thermoacoustic Stability of a Real Gas Turbine Combustion Chamber Using Large-Eddy Simulations." *11th CEAS-ASC Workshop and 2nd Scientific Workshop of X3 Noise*, 2007.
- ⁵Sensiau, C., Nicoud, F., and Poinso, T., "Thermoacoustic analysis of an helicopter combustion chamber," *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2008.
- ⁶Sensiau, C., *Simulations numériques des instabilités thermoacoustiques dans les chambres de combustion aéronautiques*, Ph.D. thesis, Université de Montpellier II, 2008.
- ⁷Lefebvre, A. H., *Gas Turbines Combustion*, Taylor & Francis, 1999.
- ⁸Mendez, S. and Nicoud, F., "Large-eddy simulation of a bi-periodic turbulent flow with effusion," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. Vol. 598, 2008, pp. pages 27–65.
- ⁹Cummings, A., "Acoustics nonlinearities and power losses at orifices," *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 6, 1983, pp. 786–792.
- ¹⁰Hughes, I. J. and Dowling, A. P., "The absorption of sound by perforated linings," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 218, 1990, pp. 299–335.
- ¹¹Tran, N., *Influence de la condition limite acoustique amont sur les instabilités de combustion de grande amplitude: Conception d'un système robuste de contrôle d'impédance.*, Ph.D. thesis, Ecole Centrale Paris, 2009.
- ¹²Mendez, S. and Eldredge, J. D., "Acoustic modeling of perforated plates with bias flow for Large-Eddy Simulations," *Journal of Computational Physics*, in press.
- ¹³Jing, X. and Sun, X., "Effect of plate thickness on Impedance of perforated plates with bias flow," *AIAA Journal*, Vol. Vol. 38, No. N°9, 2000, pp. pages 1573–1578.
- ¹⁴Sun, X., Jing, X., Zhang, H., and Shi, Y., "Effect of Grazing-Bias flow interaction on acoustic impedance of perforated plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. Vol.3, No. N°254, 2002, pp. pages 557–573.
- ¹⁵Howe, M., Scott, M., and S.R.Sipic, "The influence of tangential mean flow on the Rayleigh conductivity of an aperture," *Proceedings of the Royal Society of London*, , No. 452, 1996, pp. pages 2303–2317.
- ¹⁶Benoit, L., *Prédiction des instabilités thermo-acoustiques dans les turbines à gaz*, Phd thesis, Université de Montpellier II, 2005.
- ¹⁷Nicoud, F., Benoit, L., Sensiau, C., and Poinso, T., "Acoustic Modes in Combustors with Complex Impedances and Multidimensional Active Flames," *AIAA Journal*, Vol. 45, 2007, pp. 426–441.
- ¹⁸Poinso, T. and Veynante, D., *Theoretical and numerical combustion*, R.T. Edwards, 2nd edition., 2005.
- ¹⁹Rayleigh, L., *The Theory of Sound*, Mac Millan (reprinted by Dover, New York, 1945), 1894.
- ²⁰Blackstock, D. T., *Fundamentals of Physical Acoustics*, John Wiley & Sons, 2000.
- ²¹Wolf, P., Staffelbach, G., Roux, A., Gicquel, L., Poinso, T., and Moureau, V., "Massively parallel LES of azimuthal thermo-acoustic instabilities in annular gas turbines," *Comptes Rendus Mécaniques de l'Académie des Sciences*, Vol. 337, No. 6-7, 2009, pp. 385–394.
- ²²Staffelbach, G., Gicquel, L., Boudier, G., and Poinso, T., "Large Eddy Simulation of self excited azimuthal modes in annular combustors." *Proceedings of the Combustion Institute*, 2008.
- ²³Boudier, G., Lamarque, N., Staffelbach, G., Gicquel, L. Y. M., and Poinso, T., "Thermo-acoustic stability of a helicopter gas turbine combustor using large-eddy simulations." *International Journal of Aeroacoustics*, Vol. 8, No. 1, 2009, pp. 69–94.
- ²⁴Gullaud, E., Mendez, S., Sensiau, C., Nicoud, F., and Poinso, T., "Effect of multiperforated plates on the acoustic modes in combustors," *Comptes Rendus Mécaniques de l'Académie des Sciences*, Vol. Vol. 337, No. 6-7, 2009, pp. 406–414.