

# THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II**

*Ecole doctorale* : ISS

*Spécialité* : Mathématiques et Modélisation

*Directeur de thèse* : Franck Nicoud

Par M. **Claude SENSAU**

<p style="text-align: center;"><b>SIMULATIONS NUMERIQUES DES INSTABILITES THERMOACOUSTIQUES DANS LES CHAMBRES DE COMBUSTION ANNULAIRES</b></p>
--

Soutenue le 16 Octobre 2008 devant le jury composé de :

L. GIRAUD	Professeur à l'ENSEEIH	Rapporteur
A. HIRSCHBERG	Professeur à l'Université Technique de Eindhoven	Rapporteur
S. DUCRUIX	Chargé de Recherche CNRS, Ecole CENTRALE Paris	Examineur
V. MOUREAU	Ingénieur Turbomeca	Examineur
M. VAN GIJZEN	Assistant Professeur à l'Université Technique de Delft	Examineur
J. DRONIOU	Professeur à l'Université Montpellier II	Examineur
S. ROUX	Ingénieur Snecma	Invité
F. NICOUD	Professeur à l'Université Montpellier II	Directeur de Thèse



---

## RÉSUMÉ :

Les instabilités thermoacoustiques résultent du couplage entre les phénomènes instationnaires de combustion et les modes propres acoustiques basse fréquence de la configuration. Ce phénomène dégrade considérablement les performances du moteur et peut engendrer sa destruction. Ces instabilités sont pourtant couramment observées par les concepteurs de moteurs aéronautiques ou de turbines à gaz industrielles lors des essais et restent très difficiles à maîtriser. Dans cette thèse est proposée une méthodologie pour le calcul numérique de ces instabilités thermoacoustiques applicable sur des géométries industrielles annulaires complexes. Le couplage acoustique-combustion est modélisé par une équation de Helmholtz munie d'un terme spécifique aux écoulements réactifs. La discrétisation de cette équation par une méthode de type éléments finis conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres non linéaire, matriciel, de taille  $N$  (le nombre de noeuds du maillage). L'utilisation d'un algorithme de point fixe combiné avec des méthodes itératives de sous espace (Arnoldi intégré dans ARPACK et Jacobi-Davidson) permet de traiter ce type de problème efficacement. Les chambres de combustion aéronautiques présentent généralement des géométries annulaires multi-injecteurs ; une fonction de transfert de flamme ( $n - \tau$ ) multi-référencée est proposée pour appréhender ce type de configuration. Ce modèle thermoacoustique montre l'existence de mode azimutaux amortis ou amplifiés, stationnaires ou tournants, selon le paramètre  $\tau$  de la fonction de transfert. Cette méthodologie intégrée dans la chaîne de calcul QUIET (AVBP-N3S-NOZZLE-AVSP) est utilisée pour faire l'étude thermoacoustique de la chambre équipant un moteur développé par Turbomeca. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les simulations grandes échelles de la chambre annulaire complète.

## MOTS CLÉS :

Instabilités thermoacoustiques, Equation de Helmholtz, Problèmes aux valeurs propres, Simulations Grandes Echelles, Fonctions de Transfert de Flamme, Chambres de combustion annulaires.

---

## Numerical simulations of thermoacoustic instabilities in annular combustion chambers

### ABSTRACT :

Thermoacoustic instabilities are spontaneously excited by a feedback loop between an oscillatory combustion process and one of the natural acoustic modes of the combustor. This phenomenon causes loss of performance and severe damages to the engine. However, aeronautical engines or gas turbines manufacturers often observe this kind of instabilities during the experiments. In this work we propose a methodology dedicated to the computation of thermoacoustic instabilities usable in an industrial context. The coupling between acoustics and combustion is accounted for thanks to a specific Helmholtz equation including a reacting flow term. Using a finite element approach leads to an algebraic non-linear eigenvalue problem with  $N$  dimensions ( $N$  the number of nodes in the mesh). A point fix algorithm mixed with subspace iterative methods (Arnoldi implemented in ARPACK or Jacobi-Davidson) permits to solve this problem efficiently. Because aeronautical combustors usually present an annular shape with 10 to 20 injectors located all over the circumference, a multi-referenced  $(n - \tau)$  flame transfer function is proposed. This thermoacoustic model shows amplified or damped, standing or spinning azimuthal modes depending on the parameter  $\tau$ . This methodology is integrated in the calculation chain QUIET (AVBP-N3S-NOZZLE-AVSP) and it is used to study thermoacoustic instabilities of a Turbomeca engine. The results are shown to be in good accordance with large eddy simulations of the whole combustor.

### KEYWORDS :

Thermoacoustic instabilities, Helmholtz equation, Eigenvalue problems, Large Eddy Simulations, Flame Transfer Functions, Annular combustion chambers.

CLAUDE SENSIAU.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modélisation des instabilités thermoacoustiques</b>	<b>15</b>
1.1	Equations fondamentales . . . . .	16
1.2	Energie acoustique . . . . .	20
1.3	Equation des ondes . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Discrétisation de l'équation des ondes</b>	<b>29</b>
2.1	Fonctions de forme . . . . .	31
2.2	Gradient de pression . . . . .	32
2.3	Vitesse du son . . . . .	33
2.4	Calcul de $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big _j$ . . . . .	34
2.5	Le second membre . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Problèmes aux valeurs propres</b>	<b>45</b>
3.1	Les méthodes de projection . . . . .	50
3.2	La méthode d'Arnoldi . . . . .	52
3.3	La méthode de Jacobi-Davidson . . . . .	59
3.4	Comparaisons . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Modélisation du couplage acoustique-combustion</b>	<b>69</b>
4.1	Cas test : géométrie annulaire académique avec flamme mince . . . . .	75
4.2	Mesure de la fonction de transfert de flamme . . . . .	91

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>5 Etude d'une chambre industrielle</b>	<b>99</b>
5.1 La chaîne QUIET . . . . .	100
5.2 La chambre de combustion . . . . .	102
5.3 Etude d'un secteur de la chambre . . . . .	103
5.4 Etude de la configuration annulaire . . . . .	110
<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>
<b>Annexes</b>	<b>131</b>

# Introduction

## Contexte général :

Les instabilités thermoacoustiques résultent du couplage entre les fluctuations du taux de dégagement de chaleur et l'un des modes propres acoustiques basse fréquence qui se développent dans un milieu confiné. Les premières observations de ce phénomène ont été rapportées par les souffleurs de verre. Ils ont constaté que, dans certains cas, un son pouvait être émis par la *canne* (tube creux, métallique de environ 1m à 1,75 m de long, avec une paraison de verre en fusion accrochée à une extrémité et une ouverture utilisée pour souffler à l'autre). Rijke en 1859, propose une expérience pour étudier ce phénomène [66]. *Le tube de Rijke* est un tube de verre de 0.8 m de long avec une gaze de fil de fer placée à 0.2 m de la sortie. Il suffit alors de chauffer la gaze jusqu'au rouge pour que, quelques instants plus tard, un son émane du tube. En 1878, Lord Rayleigh propose une explication de ce phénomène dans [65] et, par analogie au pendule oscillant forcé, propose un critère de stabilité : *"If heat be given at the moment of greatest condensation the vibration is encouraged. On the other hand, if heat be given at the moment of greatest rarefaction the vibration is discouraged."* Bien qu'elles soit connues dans le monde académique depuis longtemps, ce type d'instabilités reste très difficile à maîtriser. De nos jours, elles sont toujours observées, essentiellement dans les industries qui utilisent la combustion pour produire de l'énergie.

L'écoulement dans une chambre de combustion aéronautique ou de brûleur industriel est généralement tourbillonnant, fortement turbulent et induit de ce fait une combustion instationnaire qui s'accompagne de fluctuations importantes du dégagement de chaleur. Ces changements brusques de température provoquent des variations soudaines de densité qui donnent naissance aux ondes acoustiques. Ces ondes se propagent dans la chambre de combustion, se réfléchissent sur les parois et peuvent revenir perturber l'écoulement dans la zone d'injection et ainsi influencer sur la réaction de combustion en aval. Cette boucle fermée est potentiellement instable. Un régime de combustion instable accroît les émissions polluantes. Lorsque l'instabilité est de faible amplitude, le moteur est bruyant, la chambre de combustion vibre, les contraintes mécaniques en fatigue augmentent ce qui engendre des surcoûts de maintenance. Le moteur est donc moins performant, plus polluant et il coûte plus cher à l'entretien ! Si l'amplitude des ondes de pression continue de croître les fluctuations de vitesse dans l'injecteur sont de plus en plus importantes et finissent par conduire au phénomène de *"flashback"* ou remontée de flamme entraînant la destruction de l'injecteur et du moteur.

Des entreprises comme Alstom ou Siemens, qui conçoivent des turbines à gaz destinées à la production d'électricité, rencontrent ce type de problème et mènent des recherches pour tenter de toujours

mieux comprendre le phénomène afin de le maîtriser. Les concepteurs de chambre de combustion aéronautiques (Turbomeca et Snecma pour le groupe SAFRAN mais aussi Pratt-Withney, General Electric, Rolls-Royce ... ) sont également confrontés aux problèmes des instabilités de combustion [46]. De façon plus générale, tous les systèmes qui utilisent la combustion en milieu confiné sont sujets à ce problème : les brûleurs industriels (Air-Liquide, St Gobain) utilisés dans l'industrie du verre par exemple, ou même, les brûleurs domestiques [56, 57].

Ce travail, financé en partie par le groupe Safran s'intéresse plus particulièrement à l'étude et au développement d'outils numériques dédiés à la simulation de ce phénomène dans les chambres de combustion aéronautiques. Dans le contexte environnemental et économique actuel, le défi principal que doivent relever les constructeurs de turboréacteur est la diminution des émissions polluantes. Le conseil consultatif pour la recherche aéronautique en Europe (ACARE) a fixé, entre autres, les objectifs suivants :

- réduction de 50 % des émissions de  $CO_2$  (un des principaux contributeurs à l'effet de serre),
- réduction de 80 % des émissions de  $NO_x$  ( $N_2O$  est un gaz à effet de serre,  $NO$  et  $NO_2$  sont des toxiques pour l'homme),

entre 2000 et 2020. A l'échelle française, le projet INCA (INitiative en Combustion Avancée) signé entre les partenaires Snecma, ONERA et le CNRS résume la problématique qui en découle de la façon suivante : *"[...] Seule une réduction de la consommation spécifique permet d'abaisser la quantité de  $CO_2$  produite par les turboréacteurs et pour cela, des taux de compression très élevés sont incontournables. Ce domaine de recherche est très ouvert et des plus complexes, car la conception et la mise au point de machines expérimentales est d'autant plus difficile que la pression dans le foyer est élevée. Par ailleurs, les fortes températures atteintes dans la chambre favorisent la formation des  $NO_x$  et il est donc nécessaire de concevoir spécifiquement des foyers à bas niveau d'émission, en recourant en particulier à la combustion pauvre. Un compromis est à trouver entre les forts taux de compression, nécessaires à la réduction des émissions de  $CO_2$  et le besoin de réduire les émissions de  $NO_x$  par une combustion pauvre avec des zones à basse température. Cet antagonisme est un formidable challenge scientifique en soi, car il a un impact considérable sur la stabilisation de la flamme, avec en particulier les risques inhérents de retour de flamme et d'auto-inflammation des injecteurs [...]"*.

### **Etat de l'art :**

De par ses enjeux académiques, industriels, environnementaux et économiques, le phénomène d'instabilité thermoacoustique est étudié de façon intensive par de nombreuses équipes de recherches dans beaucoup de nations à la pointe des développements scientifiques. Il n'est donc pas possible ici de faire une liste exhaustive des travaux réalisés dans ce domaine. On peut toutefois distinguer les grands courants de cette recherche.

La **recherche académique** et la **recherche industrielle** sont sur ce sujet en étroite collaboration. Les industriels ont en effet besoin de l'expertise et des nouvelles méthodes issues de la recherche académique qui bénéficie en retour de leurs ressources financières. De façon générale en physique et c'est donc le cas dans le domaine des instabilités thermoacoustiques, les grandes avancées sont issues des efforts



conjugués entre **recherche fondamentale** et **recherche appliquée**, utilisant à la fois les **méthodes analytiques**, les **mesures expérimentales** et les **simulations numériques**.

- Les **méthodes analytiques**, traditionnellement utilisées dans le monde académique, permettent une compréhension approfondie des phénomènes étudiés. Le principal inconvénient de ce type de méthode est qu'elles nécessitent souvent beaucoup d'hypothèses simplificatrices et ne sont utilisables que dans des géométries académiques [24, 23, 87, 25, 33, 32, 83, 27, 50]. Les méthodes analytiques sous-tendent aussi les outils numériques largement utilisés par les industriels, on peut citer comme exemple les travaux du Pr. Culick [20, 21, 22].
- Les **méthodes expérimentales** sont largement utilisées pour l'étude des instabilités thermoacoustiques. Là encore, industriels et chercheurs s'associent pour monter des projets d'envergure pouvant répondre aux enjeux académiques et industriels posés. Dans le cas de la France on peut citer les travaux expérimentaux qui sont réalisés en collaboration entre le groupe Safran et le CNRS. L'Ecole Centrale Paris est très active dans le domaines des instabilités de combustion, et possède plusieurs bancs d'essai dédiés à leur étude [25, 8, 57, 56, 15, 17]. De grandes universités en Angleterre, en Allemagne ou encore aux Etats-Unis sont également des leaders dans ce domaine [63, 59, 74, 43, 49].

L'étude expérimentale des instabilités thermoacoustiques présente cependant un certain nombre de difficultés. A l'heure actuelle les chambres de combustion aéronautiques, fonctionnent à très hautes pression (de 3 à 10 bars), ceci pour augmenter le rendement du moteur et diminuer les émissions de  $CO_2$ . Ces conditions extrêmes sont très difficiles à reproduire sur un banc d'essai. De plus les chambres de combustion aéronautiques présentent généralement une géométrie annulaire qui offre le meilleur compromis entre encombrement et rendement par rapport aux chambres tubulaires et tubo-annulaires [44]. Ce type de chambre de combustion possède généralement entre 15 et 30 injecteurs, et exhibent des modes azimutaux instables [46]. Très peu de bancs d'essai académiques ont une géométrie annulaire, ils ne permettent donc pas d'étudier ce type d'instabilité. Il faut donc se baser sur les observations rapportées par les industriels. Or ce type de résultats est généralement partiel ou même confidentiel. Ces raisons expliquent probablement le faible nombre de résultats expérimentaux et même théoriques en ce qui concerne les instabilités thermoacoustiques azimutales.

- Enfin la **simulation numérique** est, bien sûr, très largement utilisée pour étudier ce phénomène. Là encore les intérêts industriels et académiques sont complémentaires. Le développement d'outils numériques utilisant des méthodes toujours plus performantes issues des recherches académiques nécessite des moyens de calculs très importants et très coûteux que seuls les grands groupes industriels peuvent financer en association avec les organismes de recherche. Les simulations aux grandes échelles réalisées au CERFACS en sont un très bon exemple [10, 81]. Différents types de simulation numériques sont utilisés pour l'étude des instabilités thermoacoustiques. On peut les classer en différentes catégories :

Les **codes réseaux** qui reposent sur une représentation par blocs élémentaires de la configuration étudiée, présentent l'avantage d'être très rapides et nécessitent peu de puissance de calcul. Ils sont couramment utilisés par les industriels. Le principal inconvénient est le faible niveau de prise en compte des détails géométriques de la configuration. De plus la forme des ondes doit être présumée ce qui contraint l'utilisation à des géométries tubulaires de section carrée ou cylindrique.

Les codes qui reposent sur une approche **éléments finis** permettent de mailler toute la complexité géométrique de la configuration. On distingue les codes qui résolvent les équations d'**Euler linéarisées** en milieu réactif. La turbulence n'est pas prise en compte, ce qui simplifie grandement le

développement théorique de l'outil et diminue beaucoup le temps de calcul car le maillage est plus léger. D'autant que ce niveau de précision n'est pas requis pour simuler correctement les instabilités thermoacoustiques, qui mettent en jeu les modes basse fréquence de la configuration. En revanche le couplage acoustique/combustion doit être modélisé à la différence des codes de **simulation aux grandes échelles** qui résolvent les équations de Navier-Stokes en milieu réactif. Dans cette dernière approche l'écoulement turbulent, compressible est résolu, ce qui nécessite d'importantes ressources de calcul pour être applicable sur des configurations industrielles. Le principal inconvénient de la simulation temporelle est la difficulté que cela implique pour prendre en compte les conditions limites acoustiques. En effet, la réflexion des ondes sur les bords du domaine de calcul est fonction de la fréquence. Il faut donc appliquer un traitement spectral au signal temporel mesuré sur le bord du domaine pour modéliser correctement l'effet d'une impédance acoustique.

Dans ce travail on utilise un code qui résout l'**équation de Helmholtz** (équation d'onde dans le domaine fréquentiel sous l'hypothèse d'onde harmonique) par une méthode de discrétisation sur maillage non structuré. On peut ainsi prendre en compte toute la complexité de la géométrie industrielle sans avoir à présumer de la forme de l'onde. L'approche fréquentielle permet de considérer de façon naturelle les impédances acoustiques. De plus, la résolution du problème aux valeurs propres, permet d'obtenir plusieurs modes propres ainsi que leur taux d'amplification et pas seulement le plus amplifié comme dans le cas d'une simulation temporelle. Le couplage acoustique combustion est pris en compte par un modèle de type  $n - \tau$  [19].

## Objectifs de la thèse :

Cette thèse est financée par la DGA (Direction Générale de l'Armement) avec un contrat d'accompagnement SAFRAN et a été réalisée au sein du Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS). Comme tous les constructeurs de turboréacteurs et de turbomoteurs, Snecma et Turbomeca sont confrontés au problème des instabilités thermoacoustiques. Ils collaborent de ce fait avec l'équipe "CFD-combustion" du CERFACS pour le développement d'outils numériques dédiés à la prévision des instabilités thermoacoustiques dans les chambres de combustion. L'objectif est de concevoir des outils numériques et des méthodes utilisables dans un contexte industriel qui permettraient d'étudier la sensibilité des foyers aéronautiques dès la phase de conception du moteur. A l'heure actuelle deux outils de simulation dédiés aux instabilités thermoacoustiques sont issus de cette collaboration. Le code réseaux Soundtube (<http://www.cerfacs.fr/quiet/SOUNDTUBE>) permet de calculer très rapidement des configurations monodimensionnelles avec flamme mince. Le code AVSP (<http://www.cerfacs.fr/quiet/AVSP>), basé sur une méthode de discrétisation sur maillage non structuré et utilisant le calcul parallèle, permet d'étudier les chambres de combustion industrielles de géométrie complexe. Il tient compte de la structure multidimensionnelle de la flamme [54]. Les principaux axes de travail abordés durant ces trois années sont les suivants :

- Développement de l'outil AVSP :

La discrétisation de l'équation de Helmholtz en milieu réactif conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres non linéaire dont la taille est égale au nombre de noeuds dans le maillage. Ce type de problème est un challenge mathématique et numérique. Il n'existe pas de méthode universellement

reconnue comme étant la plus efficace pour la résolution de ce type de problème. La structure de donnée du code AVSP est héritée de celle du code AVBP qui offre d'excellentes performances pour le calcul parallèle [68, 72, 67]. De plus l'essentiel du temps CPU est passé à faire des calculs algébriques utilisant les bibliothèques BLAS et LAPACK disponibles sur les machines de calcul et optimisées par les constructeurs. Malgré ces très bonnes caractéristiques, le choix de la méthode utilisée pour la résolution du problème aux valeurs propres reste la question importante pour minimiser le temps de calcul. La méthode d'Arnoldi [1, 3, 2], intégrée dans le logiciel ARPACK [45, 48], a été étudiée en détails. La méthode de Jacobi-Davidson [79, 78, 80, 86, 84] a également été intégrée dans le code AVSP pendant cette thèse. Ce travail, effectué en collaboration avec M. Van Gijzen a abouti à une publication dans *International Journal of Numerical Methods in Fluids* [77].

Les chambres de combustion industrielles présentent généralement une géométrie annulaire, et de ce fait sont sujettes aux instabilités azimutales. Le modèle thermoacoustique disponible dans AVSP a été étendu pour la simulation des instabilités azimutales dans les chambres annulaires. Sous l'hypothèse d'indépendance de chaque secteur, la fonction de transfert de flamme est multiréférencée, et les configurations annulaires testées montrent des modes propres azimutaux qui peuvent être amplifiés ou amortis, stationnaires ou tournants selon les valeurs des paramètres  $n$  et  $\tau$  de cette fonction de transfert. Ces développements ont été appliqués sur une chambre de turbomoteur d'hélicoptère en collaboration avec les ingénieurs Turbomeca. Ces travaux ont également mené à la rédaction de deux articles suite à des communications dans des conférences internationales [76, 75].

– Mise en place d'une chaîne de calcul pour la prévision des instabilités thermoacoustiques :

Outre la réalisation d'une géométrie avec un logiciel de CAO (conception assistée par ordinateur) et la génération d'un maillage, le code AVSP nécessite un certain nombre de grandeurs physiques en entrée, pour pouvoir résoudre l'équation de Helmholtz en milieu réactif :

- La répartition du champ de température modifie les propriétés de compressibilité du gaz et donc influe directement sur les modes propres. Cette répartition de température (ou de vitesse du son) doit donc être connue a priori par le code AVSP. Elle est obtenue par une simulation RANS, ou LES moyennée, effectuée au préalable.
- La détermination des impédances en entrée et en sortie de la chambre de combustion est une des difficultés principales de la modélisation des instabilités thermoacoustiques. En effet il est très difficile de mesurer ces impédances dans une configuration réelle munie du compresseur et de la turbine haute pression. Et les bancs d'essai sont généralement des configurations simplifiées, les impédances en entrée et en sortie du foyer sont donc différentes. On utilise des méthodes analytiques [47] et numériques [41] pour évaluer les conditions limites.
- Le couplage acoustique combustion est pris en compte dans le code AVSP par un modèle à deux paramètres,  $n$  et  $\tau$ , respectivement l'amplitude et le délai entre la fluctuation de vitesse au point de référence et le dégagement de chaleur dans la zone de combustion. Ces paramètres sont calculés à l'aide de simulations aux grandes échelles. Ils permettent ainsi de caractériser la réponse de flamme soumise à différentes fréquences d'excitation acoustique.

La chaîne de calcul, baptisée QUIET (QUantification of Instabilities and noise in Turbine), est représentée dans Fig. 1. Dans le cas d'une chambre annulaire les champs de température, d'amplitude et de délai de la réponse de flamme peuvent être calculés sur un seul secteur qui est ensuite dupliqué. Les  $N$  secteurs sont ensuite attachés et on obtient les répartitions pour la configuration annulaire complète.

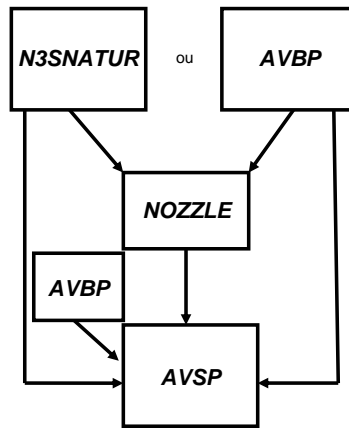


FIG. 1 - Chaîne de calcul QUIET

- Travail en collaboration avec les ingénieurs du groupe Snecma et Turbomeca :

Les outils et les méthodes développés dans cette thèse ont également servi pour faire des calculs menés en collaboration avec les ingénieurs Turbomeca. Des oscillations de pression anormalement élevées dans la chambre ayant été relevées lors des essais sur un moteur, la chaîne de calcul QUIET a été utilisée pour faire une étude de l'influence de la géométrie sur les modes propres acoustiques de la configuration. Cette étude, couplée à des simulations aux grandes échelles effectuées avec le code AVBP, a permis de montrer qu'il s'agissait d'instabilités thermoacoustiques azimuthales. Les résultats seront présentés dans le dernier chapitre de cette thèse. Finalement, la solution préconisée par les ingénieurs Turbomeca a été de changer le design du tourbillonneur, ce qui a permis d'annihiler les instabilités thermoacoustiques. Cette solution technologique est également étudiée numériquement. Les simulations aux grandes échelles effectuées sur les différents tourbillonneurs montrent que ce changement de géométrie modifie la fonction de transfert de flamme et en particulier le délai  $\tau$ . Une étude paramétrique des instabilités thermoacoustiques azimuthales de la chambre de combustion en fonction du délai  $\tau$  a donc été réalisée avec l'outil AVSP. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les observations expérimentales. Cette étude mène finalement à des conclusions simples, qui permettent aux ingénieurs d'obtenir très rapidement un critère de stabilité pour leur chambre de combustion, et donne une première idée des mesures à prendre en cas d'apparition de ce type d'instabilité.

## Plan du manuscrit :

- **Le premier chapitre** récapitule l'ensemble des définitions et hypothèses adoptées qui définissent le cadre dans lequel est réalisée l'étude présentée dans cette thèse. L'équation de l'énergie acoustique est introduite pour caractériser d'un point de vue théorique la notion d'instabilité thermoacoustique sous les hypothèses de l'étude. Les notions importantes d'impédance, de coefficient de réflexion, et de flux acoustique sont rappelées. Enfin on établit l'équation des ondes en milieu réactif qui, sous l'hypothèse d'onde harmonique, devient l'équation de Helmholtz dont la résolution numérique par une méthode de

discrétisation fait l'objet du code AVSP.

- **Le deuxième chapitre** détaille la méthode des volumes finis utilisée pour discrétiser l'équation de Helmholtz. On montre que dans le cas des maillages triangulaires 2D ou tétraédriques 3D, on peut en déduire une écriture matricielle correspondant à une formulation éléments finis avec matrice de masse condensée. Cette écriture compacte est utilisée dans le chapitre III qui traite des problèmes aux valeurs propres.

- **Le troisième chapitre** explicite les diverses stratégies, disponibles dans le code AVSP, pour résoudre le problème aux valeurs propres non linéaire obtenu par discrétisation de l'équation de Helmholtz. On détaille les différentes variantes possibles de la méthode de point fixe. On rappelle les spécificités des méthodes d'Arnoldi et de Jacobi-Davidson qui sont largement utilisées dans la communauté scientifique pour la résolution de ce type de problème. On explicite les algorithmes intégrés dans le code AVSP. Et on présente également une étude comparative de ces deux méthodes pour différents types de problèmes.

- Dans **le quatrième chapitre** on aborde la problématique de la fonction de transfert de flamme. Le modèle  $n - \tau$  initialement introduit par Crocco [19] est décliné sous différentes formes selon les auteurs et les besoins de la modélisation. On rappelle ces différentes approches et on introduit la fonction de transfert utilisée dans ce travail pour les chambres de combustion annulaires multi-injecteurs. Cette approche est validée sur un cas test annulaire de géométrie simple permettant des développements analytiques. On aborde également le calcul des paramètres  $n$  et  $\tau$  de la fonction de transfert de flamme à partir d'une *simulation aux grandes échelles* soumis à un forçage acoustique mono-fréquentiel et multi-fréquentiel.

- **Le cinquième et dernier chapitre** présente l'étude thermoacoustique de la chambre de combustion Turbomeca. Tout d'abord l'influence de la géométrie de la chambre sur les modes propres longitudinaux et azimutaux est regardée en détail. Dans un second temps une étude de stabilité du mode azimutal en fonction du délai  $\tau$  est présentée. Les résultats de cette étude sont discutés et comparés aux simulations grandes échelles de la configuration complète réalisée aux CERFACS [81].

- En annexe sont données les publications effectuées pendant la thèse.

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Chapitre 1

## Modélisation des instabilités thermoacoustiques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Equations fondamentales . . . . .</b>	<b>16</b>
1.1.1	Les équations thermodynamiques . . . . .	16
1.1.2	Les équations de conservation . . . . .	17
1.1.3	L'équation de conservation de l'entropie . . . . .	18
1.1.4	Le système fondamental . . . . .	18
1.1.5	Linéarisation du système fondamental . . . . .	19
<b>1.2</b>	<b>Energie acoustique . . . . .</b>	<b>20</b>
1.2.1	Impédance . . . . .	21
1.2.2	Impédance et flux acoustique . . . . .	22
1.2.3	Coefficient de réflexion et flux acoustique . . . . .	24
<b>1.3</b>	<b>Equation des ondes . . . . .</b>	<b>26</b>

---

Dans ce chapitre sont détaillées les hypothèses admises ainsi que les modèles théoriques adoptés dans cette thèse pour la modélisation des instabilités thermoacoustiques. Dans ce cadre, on montre l'existence d'une énergie acoustique dont l'évolution temporelle est régie par une équation de conservation. Cette équation permet d'introduire les concepts utiles à la compréhension du phénomène d'instabilité. La notion de flux acoustique est introduite ainsi que le concept d'impédance acoustique. Le critère de Rayleigh [65] est présenté comme une conséquence directe de cette équation. Sous ces mêmes hypothèses, une équation d'onde en milieu réactif peut être établie. La résolution de cette équation dans un domaine confiné, tel qu'une chambre de combustion, permet d'en déterminer les modes propres acoustiques ainsi que leur taux d'amplification. On peut alors étudier la sensibilité d'une configuration au phénomène d'instabilité thermoacoustique par la résolution numérique de cette équation, c'est l'objet du code AVSP.

## 1.1 Equations fondamentales

Les phénomènes d'instabilités thermoacoustiques mettent en jeu des interactions physiques très complexes entre les phénomènes stationnaires de la combustion, la dynamique de l'écoulement, et l'acoustique du milieu. Le couplage entre la turbulence, la chimie du milieu réactif et les réflexions complexes des ondes acoustiques, font des instabilités thermoacoustiques un phénomène très difficile à modéliser. Les équations introduites dans ce chapitre ne rendent pas compte de tous ces phénomènes. L'objectif est ici d'établir un modèle simple qui permet de capturer uniquement les principaux mécanismes qui régissent ces instabilités. Les phénomènes de turbulence ne sont pas considérés dans les équations de conservation de la mécanique des fluides utilisées dans cette thèse. Les effets de la combustion sont pris en compte via le terme de taux de dégagement de chaleur qui apparaît dans l'équation d'évolution de l'énergie sensible de la particule fluide. Le milieu est mono-espèce, l'acoustique est linéaire et met en jeu des grandes longueurs d'onde. Toutefois, l'équation des ondes obtenue dans ce cadre d'hypothèse est couramment utilisée pour appréhender ce type de phénomène [23, 51, 25, 58].

### 1.1.1 Les équations thermodynamiques

Le mélange dans la chambre de combustion est assimilé à un gaz mono-espèce régi par l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\boxed{p = \rho r T.} \quad (1.1)$$

Le premier principe de la thermodynamique pour une transformation réversible s'écrit :

$$\begin{aligned} de_s &= \delta Q - \delta W, \\ &= T ds - p dv, \end{aligned}$$

$$\boxed{de_s = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho.} \quad (1.2)$$

Le premier principe écrit différemment :

$$de_s = C_v dT = C_v \left( \frac{T}{p} dp - \frac{T}{\rho} d\rho \right),$$



ce qui implique en utilisant Eq. (1.2) :

$$ds = \frac{Cv}{p} dp - \frac{\rho Cv + p/T}{\rho^2} d\rho = \frac{Cv}{p} dp - \frac{Cv + r}{\rho} d\rho = \frac{Cv}{p} dp - \frac{Cp}{\rho} d\rho. \quad (1.3)$$

### 1.1.2 Les équations de conservation

Dans le cas des réactions de combustion qui mettent en jeu plusieurs espèces, on peut écrire des équations de conservation qui font apparaître des phénomènes de diffusion entre ces espèces [62]. Dans le formalisme introduit ici, le milieu fluide est considéré comme mono-espèce, et les effets de la combustion sont pris en compte via le terme de taux de dégagement de chaleur dans l'équation d'évolution de l'énergie. On écrit donc les équations classiques de la mécanique des fluides pour un gaz mono-espèce :

– L'équation de conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0.} \quad (1.4)$$

– L'équation conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u}.$$

D'après les observations expérimentales on sait que les instabilités thermoacoustiques mettent en jeu les modes acoustiques basse fréquence de la chambre de combustion, avec des longueurs d'onde de taille comparable à celle de la chambre elle-même [89]. Si les phénomènes de frottement par viscosité moléculaire peuvent dissiper l'énergie des oscillations très haute fréquence, il est couramment usité de négliger leurs effets sur les modes acoustiques basse fréquence. On gardera par la suite l'équation de conservation de la quantité de mouvement en écoulement non visqueux :

$$\boxed{\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p.} \quad (1.5)$$

– Pour tenir compte des effets de combustion dans notre modèle, il faut introduire une équation pour l'énergie de la particule fluide. Le taux de dégagement de chaleur due à la réaction de combustion, les transferts de chaleur et les effets visqueux induisent des variations d'énergie sensible de la particule fluide au cours de son déplacement :

$$\rho \frac{De_s}{Dt} = q + \nabla \cdot \lambda \vec{\nabla} T + \bar{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{u}.$$

Dans cette équation  $\sigma$  représente le tenseur des contraintes, il contient les contraintes visqueuses et les contraintes de pression. Le terme  $\lambda \vec{\nabla} T$  exprime le flux de chaleur par diffusion moléculaire due aux gradient de température. Le terme  $q$  correspond au taux de dégagement de chaleur dû à la réaction de combustion. Comme dans l'équation de la quantité de mouvement on néglige les effets des contraintes

visqueuses, on néglige également les effets de diffusion de la chaleur. Sous ces hypothèses l'équation de conservation de l'énergie sensible devient alors :

$$\boxed{\rho \frac{De_s}{Dt} = q - p \nabla \cdot \vec{u}.} \quad (1.6)$$

### 1.1.3 L'équation de conservation de l'entropie

Il est nécessaire d'introduire pour la suite une équation de conservation de l'entropie. Cette équation se déduit du premier principe (Eq. (1.2)) :

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \left( \rho \frac{De_s}{Dt} \right) - \frac{p}{\rho T} \frac{D\rho}{Dt}.$$

En injectant l'équation de conservation de l'énergie sensible (Eq. (1.6)), il vient :

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{\rho T} \left( q - p \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{r}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{r}{p} \left( q - p \nabla \cdot \vec{u} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right).$$

En injectant l'équation de conservation de la masse (Eq. (1.4)) on peut alors écrire une équation de conservation de l'entropie :

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{r}{p} q. \quad (1.7)$$

Ayant négligé les effets visqueux et les transferts de chaleur, seul le taux de dégagement de chaleur instationnaire induit des variations d'entropie au sein de la particule fluide.

### 1.1.4 Le système fondamental

On peut réduire les équations fondamentales en un système de deux équations couplées, dit système fondamental, sur les vitesses et sur la pression. En linéarisant ce système, on peut alors en déduire l'équation de l'énergie acoustique ou encore l'équation des ondes en milieu réactif par des combinaisons simples sur les équations de ce système [23, 54]. Cette façon d'obtenir l'équation des ondes est habituellement utilisée en acoustique classique [9, 16, 60, 52]. Dans le cas des milieux réactifs une autre dérivation est proposée dans [62, 25].

En utilisant le premier principe de la thermodynamique (Eq. (1.3)), il vient :

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{C_v}{p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{C_p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

En injectant l'équation de conservation de la masse (Eq. (1.4)), on peut écrire :

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{C_v}{p} \frac{Dp}{Dt} - C_p \nabla \cdot \vec{u}.$$

L'équation de conservation de l'entropie (Eq. (1.7)) nous conduit à l'égalité suivante :

$$\frac{C_v}{\gamma p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{C_p}{\gamma} \nabla \cdot \vec{u} = \frac{rq}{\gamma p},$$

qui s'écrit encore :

$$\frac{1}{\gamma p} \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{q}{p}.$$

On obtient finalement un système d'équations qui condense les équations fondamentales de départ :

$$\frac{1}{\gamma p} \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{q}{p}, \quad (1.8)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0. \quad (1.9)$$

### 1.1.5 Linéarisation du système fondamental

Une instabilité thermoacoustique se caractérise par des oscillations de pression et de vitesse dans la chambre de combustion autour d'une valeur moyenne. On peut donc décomposer les champs de pression, de vitesse, et de masse volumique en une grandeur moyenne stationnaire et une grandeur oscillante autour de cette valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= \rho_0(\vec{x}) + \rho_1(\vec{x}, t), \\ p(\vec{x}, t) &= p_0(\vec{x}) + p_1(\vec{x}, t), \\ \vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{u}_0(\vec{x}) + \vec{u}_1(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

On fait l'hypothèse que la vitesse de l'écoulement moyen est nulle ou suffisamment faible pour pouvoir négliger son influence sur l'acoustique dans le domaine considéré. Cette hypothèse est forte, elle restreint l'utilisation de l'outil numérique (AVSP) développé dans ce cadre d'hypothèses, au cas des chambres de combustion de turboréacteur pour lesquelles le nombre de Mach est suffisamment faible pour négliger son influence sur l'acoustique [54]. L'application au cas des moteurs fusée est exclue, mais des recherches sont actuellement en cours au CERFACS pour étendre le travail présenté dans cette thèse au cas des écoulements à Mach non nul. En considérant la pression homogène dans le domaine, la décomposition entre grandeurs moyennes et grandeurs fluctuantes prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= \rho_0(\vec{x}) + \rho_1(\vec{x}, t), \\ p(\vec{x}, t) &= p_0 + p_1(\vec{x}, t), \\ \vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{u}_1(\vec{x}, t), \\ q(\vec{x}, t) &= q_1(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

On se place dans le cas de l'acoustique linéaire où l'amplitude des grandeurs fluctuantes est inférieure d'un ordre de grandeur à celle des grandeurs moyennes :

$$\frac{p_1}{p_0} \sim \frac{\rho_1}{\rho_0} \sim \epsilon \ll 1.$$

On injecte cette décomposition dans le système des équations fondamentales (Eq. (1.8) et Eq. (1.9)), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma p_0} \left( 1 - \frac{p_1}{p_0} + o\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} p_1 + \nabla \cdot \vec{u}_1 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \left( 1 - \frac{p_1}{p_0} + o\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 \right) q_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \frac{1}{\rho_0} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} + o\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2 \right) \vec{\nabla} p_1 &= 0. \end{aligned}$$

En ne conservant que les termes d'ordre  $\epsilon$ , on obtient finalement le système linéarisé :

$$\frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial}{\partial t} p_1 + \nabla \cdot \vec{u}_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} q_1, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1 = 0. \quad (1.11)$$

Ce système d'équation est analogue au système des équations d'Euler linéarisées couramment utilisées pour obtenir l'équation des ondes de l'acoustique linéaire en écoulement non réactif. Le terme de taux de dégagement de chaleur instationnaire au second membre de Eq.(1.10) est spécifique aux écoulements réactifs. Il traduit l'influence de la combustion sur l'acoustique.

## 1.2 Energie acoustique

Sous les hypothèses admises dans la section précédente on peut établir l'existence d'une énergie acoustique qui, sous sa forme locale, s'écrit :

$$e_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \rho_0 u_1^2(\vec{x}, t) + \frac{p_1^2(\vec{x}, t)}{\gamma(\vec{x}) p_0} \right). \quad (1.12)$$

L'évolution temporelle de cette énergie est régie par une équation de conservation qui s'obtient à partir du système linéarisé vu au paragraphe précédent. En faisant  $p_1 \times$  ( Eq. (1.10) ) +  $\rho_0 \vec{u}_1 \cdot$  ( Eq. (1.11) ) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \left( \rho_0 u_1^2(\vec{x}, t) + \frac{p_1^2(\vec{x}, t)}{\gamma(\vec{x}) p_0} \right) \right] + \nabla \cdot p_1(\vec{x}, t) \vec{u}_1(\vec{x}, t) = \frac{\gamma(\vec{x}) - 1}{\gamma(\vec{x}) p_0} p_1(\vec{x}, t) q_1(\vec{x}, t).$$

En intégrant sur le domaine de calcul il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \rho_0 u_1^2(\vec{x}, t) + \frac{p_1^2(\vec{x}, t)}{\gamma(\vec{x}) p_0} \right) d\Omega \right] + \int_{\Omega} \nabla \cdot p_1(\vec{x}, t) \vec{u}_1(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\gamma(\vec{x}) - 1}{\gamma(\vec{x}) p_0} p_1(\vec{x}, t) q_1(\vec{x}, t) d\Omega.$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, l'équation de conservation de l'énergie acoustique prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} e_1(\vec{x}, t) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \vec{f}_1(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\partial\Omega = \int_{\Omega} r_1(\vec{x}, t) d\Omega. \quad (1.13)$$

On fait ainsi apparaître le flux acoustique sur les bords du domaine :

$$\vec{f}_1(\vec{x}, t) = p_1(\vec{x}, t) \vec{u}_1(\vec{x}, t).$$

On remarque également au second membre de l'équation un terme volumique :

$$r_1(\vec{x}, t) = \frac{\gamma(\vec{x}) - 1}{\gamma(\vec{x})p_0} p_1(\vec{x}, t) q_1(\vec{x}, t).$$

Ce terme est spécifique aux écoulements réactifs, en effet il fait intervenir les fluctuations du taux de dégagement de chaleur créées par la réaction de combustion. Cette équation de conservation de l'énergie acoustique nous permet de définir, dans ce cadre d'hypothèses, l'instabilité thermoacoustique comme la croissance de l'énergie acoustique, définie par Eq. (1.12), dans le domaine étudié. Cette augmentation d'énergie résulte d'une compétition entre les termes de flux acoustique sur les bords du domaine, qui en général correspondent à des pertes acoustiques, et le terme volumique qui met en jeu les fluctuations de pression et fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Ce terme peut selon les cas jouer le rôle d'un puits ou d'une source d'énergie acoustique. C'est en substance ce qui est dit dans le critère de Rayleigh énoncé en 1878 [65] : "At the phase of greatest condensation heat is received by the air, and at the phase of greatest rarefaction heat is given up from it, and thus there is a tendency to maintain the vibrations." Le critère de Rayleigh, observé sur différentes configurations [65, 29], semble confirmer que les principaux mécanismes régissant les phénomènes d'instabilité de combustion sont pris en compte dans les modèles utilisés pour obtenir cette équation d'énergie acoustique.

### 1.2.1 Impédance

Il existe plusieurs définitions d'impédances distinctes. Nous en présentons ici deux, *l'impédance caractéristique*, et *l'impédance réduite*.

– *L'impédance caractéristique :*

Cette grandeur caractérise la résistance qu'un milieu oppose à sa mise en mouvement lorsqu'il est traversé par une onde acoustique. Elle est spécifique au milieu qu'il soit solide, liquide ou gazeux, et elle est définie comme le rapport pression acoustique sur vitesse de déplacement en milieu ouvert (c'est-à-dire en l'absence d'ondes réfléchies). *L'impédance caractéristique* est une propriété du matériau considéré et est égale au produit de la masse volumique du matériau  $\rho$  par la vitesse du son  $c$  dans ce même matériau :

$$Z_{\text{caractéristique}} = \rho c.$$

Cette grandeur est l'analogue de la résistance en courant continu en électricité.

– *L'impédance réduite :*

Initialement introduite en électricité, l'impédance,  $Z$ , permet de généraliser la loi d'Ohm,  $U=RI$ , en courant alternatif sinusoïdal :  $U=ZI$ . Par analogie on peut définir une impédance acoustique en régime harmonique où la pression acoustique est l'analogue du voltage électrique, la vitesse acoustique est l'analogue du courant électrique. En régime harmonique, on introduit les grandeurs acoustiques :

$$\begin{aligned} p_1(\vec{x}, t) &= \Re(\hat{p}(\vec{x})e^{-i\omega t}), \\ \vec{u}_1(\vec{x}, t) &= \Re(\vec{\hat{u}}(\vec{x})e^{-i\omega t}). \end{aligned}$$

L'impédance réduite acoustique est alors une fonction complexe définie de la façon suivante :

$$Z(\vec{x}) = \frac{\hat{p}(\vec{x})}{\rho c \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}}.$$

L'argument de ce nombre complexe représente le déphasage entre la pression et la vitesse dans la direction  $\vec{n}$  au point  $\vec{x}$ .

Par analogie à la notion de dipôle en électricité, l'impédance acoustique peut être considérée comme une fonction de transfert entre les signaux de vitesse et de pression acoustique. Cette approche sous-tend les codes réseaux dans lesquels les éléments de géométrie complexe rencontrés dans une chambre de combustion, tels le tourbillonneur, sont remplacés par leur impédance équivalente. Cette impédance équivalente pouvant être déterminée théoriquement ou expérimentalement [58, 64, 74, 85]. Un exemple célèbre en acoustique est l'impédance équivalente du résonateur de Helmholtz [9] :

$$Z = \frac{\rho c k^2}{2\pi} + j \left( \omega \frac{\rho l}{S} - \frac{\rho c^2}{\omega V} \right), \quad (1.14)$$

avec  $l$  et  $S$ , la longueur et la section du petit tube,  $V$  le volume de la grande cavité et  $k$  le nombre d'onde. Cette impédance présente une analogie très forte avec l'impédance équivalente du circuit RLC en électricité :

$$Z = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \quad (1.15)$$

avec  $R$  la résistance du circuit,  $L$  l'inductance et  $C$  la capacitance. Utilisée comme condition aux limites, l'impédance permet de rendre compte des effets acoustiques d'éléments qui ne sont pas dans le domaine de calcul. Dans le cas du régime permanent harmonique, il existe une relation de proportionnalité entre le flux acoustique et la partie réelle de l'impédance. Cette relation fait l'objet du paragraphe suivant.

## 1.2.2 Impédance et flux acoustique

Les développements et les résultats présentés dans les sections 1.2.2 et 1.2.3 sont obtenus dans le cas particulier du régime permanent harmonique (par analogie au régime sinusoïdal permanent en électricité) ou, par passage à la limite, en régime harmonique quasi-permanent ( $\Im(\omega) \ll \Re(\omega)$ ). Dans ce cas le terme source d'énergie acoustique compense les pertes par flux acoustique sur les bords du domaine au cours de chaque période, Eq. (1.13) devient :

$$\oint_{\partial\Omega} \left[ \frac{1}{T} \int_T \vec{f}_1(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dT \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{T} \int_T r_1(\vec{x}, t) dT \right] d\Omega,$$

ou encore :

$$\oint_{\partial\Omega} \mathcal{F} d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{R} d\Omega,$$

avec  $\mathcal{F}(\vec{x})$  le flux acoustique moyen sur la période :

$$\mathcal{F}(\vec{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{f}_1(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dt,$$

et  $\mathcal{R}$  le terme source acoustique moyen sur la période :

$$\mathcal{R}(\vec{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T r_1(\vec{x}, t) dt.$$

Cette situation se produit dans le cycle limite d'une instabilité thermoacoustique. Dans ce cas la pulsation  $\omega$  du phénomène est un nombre réel. On écrit les fluctuations acoustiques au point  $\vec{x}_p$  comme suit :

$$\begin{aligned} p_1(\vec{x}_p, t) &= \Re\{\hat{p}(\vec{x}_p)e^{-i\omega t}\}, \omega \in \mathbb{R}, \\ \vec{u}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} &= \Re\{\hat{u}(\vec{x}_p)e^{-i(\omega t + \phi)}\}, \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On montre que le flux acoustique au point  $\vec{x}_p$ , dans la direction  $\vec{n}$ , moyenné sur la période est contrôlé par le déphasage  $\phi$  entre la vitesse normale  $\vec{u}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n}$  et la pression acoustique  $p_1(\vec{x}_p, t)$ . Ce flux est proportionnel à la partie réelle de l'impédance, ce qui rappelle les concepts de puissance active et puissance réactive connus en électricité.

L'impédance au point  $\vec{x}_p$  prend la forme suivante :

$$Z(\vec{x}_p) = \frac{\hat{p}(\vec{x}_p)e^{-i\omega t}}{\rho c \hat{u}(\vec{x}_p)e^{-i(\omega t + \phi)}} = \frac{\hat{p}(\vec{x}_p)}{\rho c \hat{u}(\vec{x}_p)} e^{i\phi} = \frac{\hat{p}(\vec{x}_p)}{\rho c \hat{u}(\vec{x}_p)} \cos(\phi) + i \frac{\hat{p}(\vec{x}_p)}{\rho c \hat{u}(\vec{x}_p)} \sin(\phi).$$

Le flux acoustique instantané, au point  $\vec{x}_p$ , dans la direction  $\vec{n}$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} &= p_1(\vec{x}_p, t) \vec{u}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} \\ &= \Re\{\hat{p}(\vec{x}_p)e^{-i\omega t}\} \Re\{\hat{u}(\vec{x}_p)e^{-i(\omega t + \phi)}\} \\ &= \Re\{|\hat{p}(\vec{x}_p)|e^{i(\theta(\vec{x}_p) - \omega t)}\} \Re\{|\hat{u}(\vec{x}_p)|e^{i(\theta(\vec{x}_p) - \omega t - \phi)}\} \\ &= |\hat{p}(\vec{x}_p)| \cos(\theta(\vec{x}_p) - \omega t) |\hat{u}(\vec{x}_p)| \left[ \cos(\theta(\vec{x}_p) - \omega t) \cos(\phi) + \sin(\theta(\vec{x}_p) - \omega t) \sin(\phi) \right] \\ &= |\hat{p}(\vec{x}_p)| |\hat{u}(\vec{x}_p)| \cos(\phi) \cos^2(\theta(\vec{x}_p) - \omega t) + \\ &\quad |\hat{p}(\vec{x}_p)| |\hat{u}(\vec{x}_p)| \sin(\phi) \cos(\theta(\vec{x}_p) - \omega t) \sin(\theta(\vec{x}_p) - \omega t). \end{aligned}$$

En moyennant sur la période, la partie du flux acoustique instantané proportionnelle à  $\sin(\phi)$  s'annule, et le flux acoustique moyen sur la période  $\mathcal{F}(\vec{x}_p)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\vec{x}_p) &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{f}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} dt \\ &= |\hat{p}(\vec{x}_p)| |\hat{u}(\vec{x}_p)| \cos(\phi) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\theta(\vec{x}_p) - \omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} \rho c |\hat{u}(\vec{x}_p)|^2 \Re(Z(\vec{x}_p)) \end{aligned} \tag{1.16}$$

En régime permanent harmonique, le flux acoustique instantané se décompose en deux parties :

- Une partie du flux acoustique est non nulle instantanément mais s'annule lorsque l'on intègre sur la période. Cette partie du flux est proportionnelle à la partie imaginaire de l'impédance, aussi appelée réactance.
- L'autre partie du flux acoustique instantané, proportionnelle à la partie réelle de l'impédance aussi appelée partie résistive de l'impédance, ne s'annule pas lorsqu'on l'intègre sur la période. Ce flux correspond aux pertes effectives d'énergie acoustique du système (ou énergie acoustique rayonnée). Ce flux acoustique est maximal lorsque le déphasage entre la pression acoustique et la vitesse normale sur le bord est faible. Dans le cas du circuit RLC (Eq. (1.15)), les pertes d'énergie électrique sont dues à l'effet Joule inhérent à la résistance. Dans le cas du résonateur de Helmholtz, les pertes acoustiques sont dues aux frottements qui dissipent l'énergie acoustique (Eq. (1.14)).

### 1.2.3 Coefficient de réflexion et flux acoustique

Le coefficient de réflexion permet d'exprimer de façon très intuitive une condition limite acoustique, il est défini ici comme le rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie et l'amplitude de l'onde incidente selon la direction normale à la paroi (Fig. 1.1).

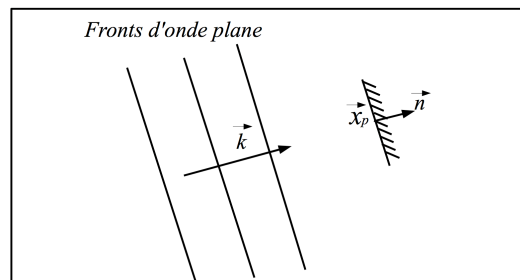


FIG. 1.1 - Onde incidente et onde réfléchie dans la direction normale à la paroi.

Si on décompose les signaux de vitesse et de pression comme superposition de deux ondes planes se propageant dans la direction  $\pm \vec{n}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \hat{p}(\vec{x}_p) &= A^+ e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_p} + A^- e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_p}, \\ \vec{u}(\vec{x}_p) \cdot \vec{n} &= \frac{A^+}{\rho c} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_p} - \frac{A^-}{\rho c} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_p}, \end{aligned}$$

avec  $\vec{k}$  le vecteur d'onde dans la direction  $\vec{n}$ .

Le coefficient de réflexion au point  $\vec{x}_p$ , prend alors la forme suivante :

$$R_p = \frac{A^- e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_p}}{A^+ e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}_p}}.$$



De façon intuitive, si le module du coefficient de réflexion est inférieur à 1,  $|R| < 1$ , signifiant un amortissement des fluctuations alors on conçoit qu'il traduit un flux acoustique sortant du domaine.

De même,  $|R| > 1$ , traduit un flux acoustique entrant dans le domaine. Cette hypothèse peut se vérifier en écrivant :

$$\begin{aligned}\hat{p}(\vec{x}_p) &= A^+ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_p} (1 + R_p), \\ \vec{u}(\vec{x}_p) \cdot \vec{n} &= \frac{A^+}{\rho c} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_p} (1 - R_p).\end{aligned}$$

Les fluctuations temporelles s'écrivent (en choisissant  $A^+ \in \mathbb{R}$ ) :

$$\begin{aligned}p_1(\vec{x}_p, t) &= A^+ \Re[(1 + R_p) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t)}] = A^+ [(1 + \Re(R_p)) \cos(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t) - \Im(R_p) \sin(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t)], \\ \vec{u}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} &= \frac{A^+}{\rho c} \Re[(1 - R_p) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t)}] = \frac{A^+}{\rho c} [(1 - \Re(R_p)) \cos(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t) + \Im(R_p) \sin(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t)].\end{aligned}$$

Le flux acoustique instantané  $\vec{f}_1(\vec{x}_p, t)$  dans la direction  $\vec{n}$  prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\vec{f}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} &= p_1(\vec{x}_p, t) \vec{u}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} \\ &= \frac{(A^+)^2}{\rho c} [(1 - \Re^2(R_p)) \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t) - \Im^2(R_p) \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t) \\ &\quad + \Re(R_p) \Im(R_p) \cos(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t) \sin(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t)].\end{aligned}$$

Le flux acoustique moyen sur la période  $T$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\vec{x}_p) &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{f}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} dt = \frac{1}{T} \int_0^T p_1(\vec{x}_p, t) \vec{u}_1(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} dt \\ &= \frac{(A^+)^2}{\rho c} \left[ (1 - \Re^2(R_p)) \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t) dt - \Im^2(R_p) \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{x}_p - \omega t) dt \right] \\ &= \frac{(A^+)^2}{2\rho c} [1 - \Re^2(R_p) - \Im^2(R_p)] \\ &= \frac{(A^+)^2}{2\rho c} [1 - |R_p|^2].\end{aligned}$$

Ces développements confirment que  $|R_p| < 1$  signifie que le flux moyen sur la période dans la direction  $\vec{n}$ , est positif  $\mathcal{F}(\vec{x}_p) > 0$ , ce qui correspond à un flux acoustique sortant. Si  $|R_p| > 1$ , le flux moyen sur la période est négatif, c'est un flux acoustique entrant dans le domaine. Finalement le coefficient de réflexion et l'impédance on la même signification physique, on peut établir un lien direct entre ces deux grandeurs. En utilisant la définition de l'impédance on peut écrire :

$$\begin{aligned}Z_p &= \frac{\hat{p}(\vec{x}_p)}{\rho c \vec{u}(\vec{x}_p) \cdot \vec{n}}, \\ &= \frac{A^+ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_p} + A^- e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_p}}{A^- e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_p} - A^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_p}}.\end{aligned}$$

On en déduit directement la relation entre impédance et coefficient de réflexion en sortie :

$$Z_p = \frac{1 + R_p}{1 - R_p} \Leftrightarrow R_p = \frac{Z_p - 1}{Z_p + 1}.$$

On a vu que le flux acoustique s'exprime en fonction du module du coefficient de réflexion ou le la partie réelle de l'impédance, on peut donc déduire une relation entre ces deux grandeurs :

$$\begin{aligned} |R_p| &= \frac{|Z_p - 1|}{|Z_p + 1|} = \frac{|\Re(Z_p) + i\Im(Z_p) - 1|}{|\Re(Z_p) + i\Im(Z_p) + 1|} \\ &= \frac{\sqrt{(\Re(Z_p) - 1)^2 + \Im(Z_p)^2}}{\sqrt{(\Re(Z_p) + 1)^2 + \Im(Z_p)^2}}, \end{aligned}$$

et donc :

$$|R_p| > 1 \Leftrightarrow (\Re(Z_p) - 1)^2 > (\Re(Z_p) + 1)^2 \Leftrightarrow \Re(Z_p) < 0.$$

Finalement en régime permanent harmonique :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_p) < 0 &\Leftrightarrow |R_p| > 1 \Leftrightarrow \Re(Z_p) < 0, \\ \mathcal{F}(x_p) > 0 &\Leftrightarrow |R_p| < 1 \Leftrightarrow \Re(Z_p) > 0. \end{aligned}$$

### 1.3 Equation des ondes

Sous les hypothèses admises au paragraphe 1.1 on peut obtenir une équation d'onde en milieu réactif. Comme pour l'équation de l'énergie on part du système fondamental linéarisé (Eq. (1.10)) et (Eq. (1.11)) et en faisant  $\frac{\partial}{\partial t}$  (Eq. (1.10)) -  $\nabla \cdot$  (Eq. (1.11)) il vient :

$$\frac{1}{\gamma(\vec{x})p_0} \frac{\partial^2 p_1(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot \frac{1}{\rho_0(\vec{x})} \vec{\nabla} p_1(\vec{x}, t) = \frac{(\gamma(\vec{x}) - 1)}{\gamma(\vec{x})p_0} \frac{\partial}{\partial t} q_1(\vec{x}, t). \quad (1.17)$$

Avec  $q_1(x, t)$  la partie instationnaire du taux de dégagement de chaleur. On reconnaît la partie classique de l'équation à droite de l'égalité. Remarquons quand même que la masse volumique du milieu considéré  $\rho_0(\vec{x})$  reste dans la divergence, ceci du fait des fortes variations de température que l'on observe dans une chambre de combustion. Au second membre se trouve le terme de taux de dégagement de chaleur instationnaire inhérent à la combustion. Comme on l'a vu dans l'équation de conservation de l'énergie, ce terme est responsable de l'apparition des instabilités thermoacoustiques. Si on considère que  $\gamma(\vec{x}) = \gamma$  est constant l'équation des ondes se met sous la forme :

$$\frac{\partial^2 p_1(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot c_0^2(\vec{x}) \vec{\nabla} p_1(\vec{x}, t) = (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial t} q_1(\vec{x}, t),$$

avec  $c_0^2(\vec{x}) = \gamma p_0 / \rho_0(\vec{x})$ . L'objectif du code AVSP est la résolution de cette équation d'onde dans le domaine fréquentiel et sous l'hypothèse des oscillations harmoniques :

$$p_1(\vec{x}, t) = \hat{p}(\vec{x}) e^{-i\omega t}.$$

Si  $\omega$  est complexe et si  $\Im(\omega) > 0$  alors l'amplitude de la fluctuation de pression croît exponentiellement avec le temps :

$$\begin{aligned} p_1(\vec{x}, t) &= \hat{p}(\vec{x})e^{-i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{C}, \\ &= \hat{p}(\vec{x})e^{\omega_i t}e^{-i\omega_r t}, \end{aligned}$$

ce qui traduit la présence d'une instabilité thermoacoustique dans la configuration.

Remarque : Des recherches récentes ont montrées que la combinaison de mode stable ( $\omega_i < 0$ ) et non-normaux pouvait conduire à l'apparition d'instabilités [5, 4, 6, 36, 53]. Ces aspects ne seront pas abordés dans cette thèse.

Les fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont considérées harmoniques :

$$q_1(\vec{x}, t) = \hat{q}(\vec{x})e^{-i\omega t},$$

et en suivant les idées introduites par Crocco [19], le taux de dégagement de chaleur instationnaire s'exprime en fonction des fluctuations de vitesse acoustiques normales en un point de référence :

$$\hat{q}(\vec{x}) = \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega\tau_u(\vec{x}, \omega_r)} \vec{u}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}. \quad (1.18)$$

Ce point de référence doit être judicieusement placé. En effet la validité de ce modèle tient au fait que les fluctuations de vitesse au point de référence pilotent les fluctuations du taux de dégagement de chaleur. En général ce point de référence est choisit dans l'injecteur où les fluctuations de vitesse et de débit impactent directement le mélange donc la combustion dans la zone primaire.

Remarque : L'équation d'Euler linéarisé (Eq. (1.11)) établit un lien entre vitesse et gradient de pression acoustique :

$$i\omega \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n} = \frac{1}{\rho_0(\vec{x})} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) \cdot \vec{n}.$$

– On peut alors définir la condition limite de Robin utilisée pour imposer une impédance complexe sur le bord du domaine de calcul :

$$Z(\vec{x}) = \frac{\hat{p}(\vec{x})}{\rho_0(\vec{x})c_0(\vec{x})\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}} \Rightarrow \vec{\nabla} \hat{p} \cdot \vec{n} - i \frac{k}{Z(\omega_r)} \hat{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R.$$

– Cette relation permet également d'écrire le taux de dégagement de chaleur en fonction du gradient de pression acoustique :

$$\hat{q}(\vec{x}) = \frac{q_0}{i\omega\rho_0(\vec{x})\bar{U}_{bulk}} n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega\tau_u(\vec{x}, \omega_r)} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}.$$

Cette dernière relation permet d'écrire l'équation de Helmholtz en milieu réactif :

$$\boxed{\nabla \cdot c_0^2(\vec{x}) \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) + \omega^2 \hat{p}(\vec{x}) = \frac{(\gamma - 1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega\tau_u(\vec{x}, \omega_r)} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}} \quad (1.19)$$

avec, sur le bord du domaine, trois types de conditions aux limites :

- La condition limite à pression imposée qui prend la forme d'une condition de Dirichlet :

$$\hat{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D. \quad (1.20)$$

- La condition limite de vitesse acoustique nulle sur les bords du domaine, ce qui correspond à un mur rigide, elle prend la forme d'une condition de Neumann :

$$\vec{\nabla}\hat{p} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_N. \quad (1.21)$$

- On peut également imposer une impédance complexe lorsque le bord du domaine introduit un déphasage sur les ondes acoustiques ou un flux rayonné vers l'extérieur ou l'intérieur du domaine. Cette condition aux limites prend la forme d'une condition de Robin :

$$\vec{\nabla}\hat{p} \cdot \vec{n} - i \frac{\omega}{c_0(\vec{x})Z(\omega_r)} \hat{p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R. \quad (1.22)$$

Le couplage acoustique combustion est donc pris en compte dans l'équation de Helmholtz en milieu réactif par le modèle  $n - \tau$ . La résolution numérique de cette équation par une méthode de discrétisation, qui sera décrite en détail dans le chapitre suivant, fait l'objet du code AVSP.

# Chapitre 2

## Discrétisation de l'équation des ondes

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Fonctions de forme</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Gradient de pression</b> . . . . .	<b>32</b>
2.2.1	Formulation <i>volumes finis</i> . . . . .	32
2.2.2	Formulation <i>éléments finis</i> . . . . .	33
<b>2.3</b>	<b>Vitesse du son</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>2.4</b>	<b>Calcul de <math>\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p _j</math></b> . . . . .	<b>34</b>
2.4.1	Cas du nœud intérieur . . . . .	34
2.4.2	Calcul de $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p _j$ sur le bord . . . . .	37
<b>2.5</b>	<b>Le second membre</b> . . . . .	<b>40</b>
2.5.1	Formulation <i>volumes finis</i> . . . . .	41
2.5.2	Formulation <i>éléments finis</i> . . . . .	41

---

L'objectif de ce chapitre est d'expliciter la méthode utilisée dans le code AVSP, pour discrétiser l'équation de Helmholtz en milieu réactif, établie au chapitre précédent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot c_0^2(\vec{x}) \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) + \omega^2 \hat{p}(\vec{x}) = \frac{(\gamma-1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega\tau_u(\vec{x}, \omega_r)} \vec{\nabla} \hat{p}(x_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \text{ sur } \Omega, \\ \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) - i \frac{\omega}{c_0(\vec{x}) Z(\omega_r)} \hat{p}(\vec{x}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R. \end{cases} \quad (2.1)$$

Les méthodes numériques utilisées dans le code AVSP sont héritées du code AVBP et ont été développées pour offrir de très bonnes performances en parallèle [69, 72]. L'équation des ondes est discrétisée par une méthode de *volumes finis* sur maillages tétraédriques (non structurés) afin de mailler facilement des géométries complexes que l'on rencontre dans les chambres de combustions industrielles (tourbillonneur, trous de dilution, primaires ou autres ...). Les matrices de discrétisation ne sont jamais stockées (intégration dite "*matrix free*") pour limiter au maximum l'occupation de l'espace mémoire, qui peut s'avérer rédhibitoire si le maillage est extrêmement lourd et les matrices pleines. Dans le cas AVSP, on va voir dans ce chapitre que les matrices de discrétisation sont creuses, et l'implémentation "*matrix free*" est finalement un héritage du code AVBP.

On montre également dans ce chapitre que la formulation *éléments finis* (*éléments P1*) de Eq. (2.1) se déduit de celle obtenue par la méthode des *volumes finis* sur les éléments triangulaires ou tétraédriques. Elle prend la forme suivante :

$$\bar{M}^{-1} \bar{A} \bar{p} + \omega \bar{M}^{-1} \bar{B} \bar{p} + \omega^2 \bar{p} = \bar{n} \bar{r}^T \bar{p},$$

où la matrice  $\bar{M}$  est diagonale et contient les volumes d'une cellule fictive entourant les noeuds du maillage. On parle dans ce cas de méthode des *éléments finis* avec *matrice de masse condensée* [88]. Le vecteur  $\bar{p}$  contient les valeurs discrètes du champ de pression  $\hat{p}(\vec{x})$  aux noeuds du maillage. Plus classiquement cette équation s'écrit :

$$\bar{A} \bar{p} + \omega \bar{B} \bar{p} + \omega^2 \bar{M} \bar{p} = \bar{M} \bar{n} \bar{r}^T \bar{p}. \quad (2.2)$$

La forme des matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{M}$  et  $\bar{n} \bar{r}^T$  sera explicitée sur trois types de maillages : 2D structuré, 2D non-structuré, 3D non-structuré (Fig. 2.1).

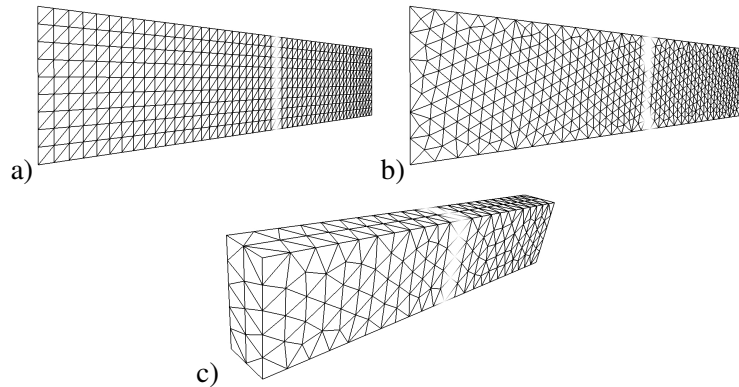


FIG. 2.1 - a) maillage 2D structuré, 500 nœuds. b) maillage 2D non-structuré, 530 nœuds. c) maillage 3D non-structuré, 501 nœuds.

## 2.1 Fonctions de forme

Dans le formalisme de la méthode des *volumes finis* utilisée dans AVSP, les valeurs discrètes du champ de pression sont stockées aux nœuds du maillage. Les gradients de pression sont évalués au centre des éléments (Fig. 2.2) et sont considérés constants sur chaque élément. Les flux à travers les surfaces de contrôle s'expriment à l'aide des normales aux faces de l'élément. En explicitant la relation entre ces normales et les fonctions de forme linéaires, on peut déduire de la formulation *volumes finis* la formulation *éléments finis*. Pour des raisons de simplicité d'écriture et de représentation, les développements sont présentés sur des cas bidimensionnels, mais les résultats se généralisent directement au cas tridimensionnels.

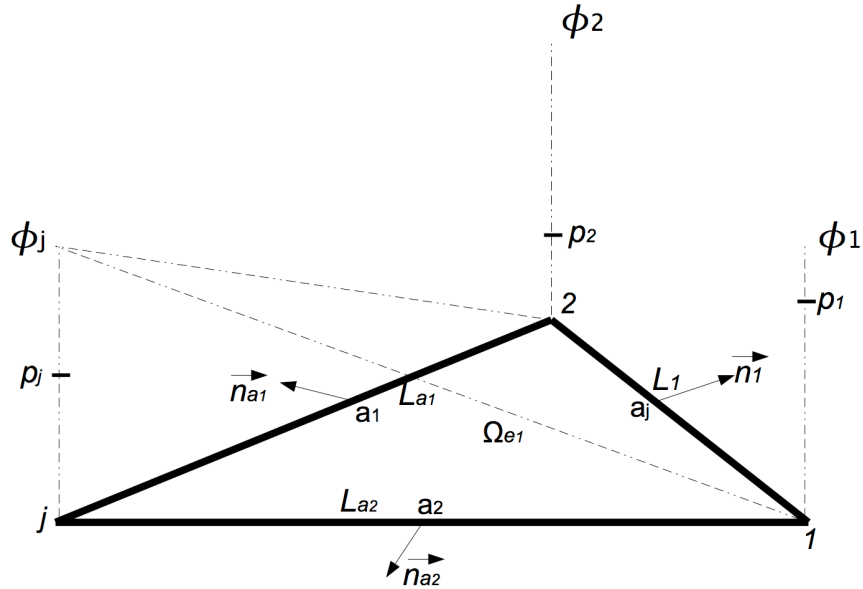


FIG. 2.2 -  $\Omega_{e_1}$  représente un élément bidimensionnel soit une des mailles de maillage 2D (Fig. 2.1). Les valeurs de pression,  $\hat{p}(x)$ , et de vitesse du son,  $c_0(x)$  sont stockées aux nœuds notés 1, 2 et  $j$  (aussi appelés sommets ou encore vertex). Les arêtes de l'élément  $\Omega_{e_1}$  sont notées  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_j$ , les normales aux arêtes sont notées  $\vec{n}_{a_1}$ ,  $\vec{n}_{a_2}$ ,  $\vec{n}_1$ , la longueur des arêtes est notée  $L_{a_1}$ ,  $L_{a_2}$  et  $L_1$ . La fonction de forme linéaire par morceaux, noté  $\phi_j$  est égale à 1 au nœud  $j$  et 0 aux nœuds  $i \neq j$ .

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky sur un élément  $\Omega_{e_1}$  (Fig. 2.2), il vient :

$$\iint_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} \phi_j dS = \oint_{\partial\Omega_{e_1}} \phi_j \vec{n} dL = \int_{a_1} \phi_j \vec{n}_{a_1} dL + \int_{a_2} \phi_j \vec{n}_{a_2} dL + \int_{a_j} \phi_j \vec{n}_1 dL.$$

Par définition de la fonction de forme,  $\phi_j = 0$  sur l'arête  $a_j$  :

$$\iint_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} \phi_j dS = \int_{a_1} \phi_j dL \vec{n}_{a_1} + \int_{a_2} \phi_j dL \vec{n}_{a_2}.$$

$\phi_j$  évolue linéairement sur les arêtes  $a_1$  et  $a_2$ , ce qui implique  $\int_{a_1} \phi_j dL = \frac{1}{2}L_{a_1}$ , on en déduit :

$$\iint_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} \phi_j dS = \frac{L_{a_1}}{2} \vec{n}_{a_1} + \frac{L_{a_2}}{2} \vec{n}_{a_2}.$$

La somme des normales pondérée par la longueur des cotés d'un triangle est nulle :  $L_{a_1} \vec{n}_{a_1} + L_{a_2} \vec{n}_{a_2} + L_1 \vec{n}_1 = 0$ , ce qui entraîne :

$$\iint_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} \phi_j dS = -\frac{L_1}{2} \vec{n}_1.$$

En remarquant que le gradient des fonctions de forme est constant sur chaque élément, on obtient finalement la relation :

$$\boxed{\vec{\nabla} \phi_j \Big|_{\Omega_{e_1}} S_{\Omega_{e_1}} = -\frac{L_1}{2} \vec{n}_1.} \quad (2.3)$$

Cette relation établit un lien entre le gradient de la fonction de forme  $\phi_j$  sur l'élément  $\Omega_{e_1}$  et la normale à l'arête opposée. Cette expression permettra de déduire la formulation *éléments finis* de l'expression des flux utilisée dans la méthode *volumes finis* utilisée dans AVSP.

## 2.2 Gradient de pression

Comme on le verra au paragraphe 2.4, le calcul de  $\nabla \cdot c_0 \vec{\nabla} p$  au nœud  $j$  nécessite la connaissance du gradient de pression dans les éléments voisins. Dans ce paragraphe, on explicite le calcul du gradient de pression dans l'élément  $\Omega_{e_1}$  (Fig. 2.2), noté  $\vec{\nabla} p \Big|_{\Omega_{e_1}}$ , par la méthode des *volumes finis* utilisée dans AVSP.

De cette formulation *volumes finis* on déduit le calcul du gradient dans le formalisme des *éléments finis* à l'aide de Eq. (2.3).

### 2.2.1 Formulation *volumes finis*

Le gradient de pression est considéré constant sur l'élément  $\Omega_{e_1}$ , il est évalué par une moyenne sur l'élément :

$$\vec{\nabla} p \Big|_{\Omega_{e_1}} = \frac{1}{S_{\Omega_{e_1}}} \iint_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} p dS.$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient :

$$\vec{\nabla} p \Big|_{\Omega_{e_1}} = \frac{1}{S_{\Omega_{e_1}}} \oint_{\Omega_{e_1}} p \vec{n} dL = \frac{1}{S_{\Omega_{e_1}}} \left[ \int_{a_1} p dL \vec{n}_{a_1} + \int_{a_2} p dL \vec{n}_{a_2} + \int_{a_j} p dL \vec{n}_1 \right].$$

Conformément à la structure de données utilisée dans AVSP, les valeurs du champ de pression sont stockées aux nœuds (Fig. 2.2). Si on considère que la pression évolue linéairement sur le long des arêtes de chaque élément, il vient :

$$\vec{\nabla} p \Big|_{\Omega_{e_1}} = \frac{1}{S_{\Omega_{e_1}}} \left[ \frac{(p_2 + p_j)L_{a_1}}{2} \vec{n}_{a_1} + \frac{(p_1 + p_j)L_{a_2}}{2} \vec{n}_{a_2} + \frac{(p_2 + p_1)L_1}{2} \vec{n}_1 \right],$$



ce qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\vec{\nabla}p\Big|_{\Omega_{e_1}} = \frac{1}{S_{\Omega_{e_1}}} \left[ p_1 \left( \frac{L_{a_2}}{2} \vec{n}_{a_2} + \frac{L_1}{2} \vec{n}_1 \right) + p_2 \left( \frac{L_{a_1}}{2} \vec{n}_{a_1} + \frac{L_1}{2} \vec{n}_1 \right) + p_j \left( \frac{L_{a_1}}{2} \vec{n}_{a_1} + \frac{L_{a_2}}{2} \vec{n}_{a_2} \right) \right].$$

Cette formulation permet d'obtenir l'équation qui est intégrée dans le code AVSP pour le calcul du gradient de pression :

$$\boxed{\vec{\nabla}p\Big|_{\Omega_{e_1}} = -\frac{1}{2S_{\Omega_{e_1}}} \left[ p_1 L_{a_1} \vec{n}_{a_1} + p_2 L_{a_2} \vec{n}_{a_2} + p_j L_1 \vec{n}_1 \right].} \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Formulation éléments finis

En utilisant Eq. (2.3), on déduit de Eq. (2.4) la relation suivante :

$$\vec{\nabla}p\Big|_{\Omega_{e_1}} = \frac{1}{S_{\Omega_{e_1}}} \left[ p_1 S_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla}\phi_1\Big|_{\Omega_{e_1}} + p_2 S_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla}\phi_2\Big|_{\Omega_{e_1}} + p_j S_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla}\phi_j\Big|_{\Omega_{e_j}} \right].$$

On obtient le calcul du gradient de pression sur l'élément  $\Omega_{e_1}$  dans le formalisme des *éléments finis* :

$$\boxed{\vec{\nabla}p\Big|_{\Omega_{e_1}} = p_1 \vec{\nabla}\phi_1\Big|_{\Omega_{e_1}} + p_2 \vec{\nabla}\phi_2\Big|_{\Omega_{e_1}} + p_j \vec{\nabla}\phi_j\Big|_{\Omega_{e_1}}.} \quad (2.5)$$

## 2.3 Vitesse du son

Le calcul de  $\nabla \cdot c_0^2 \nabla p$  au nœud  $j$  nécessite également la connaissance de la vitesse du son dans les éléments voisins. Dans ce paragraphe, on explicite le calcul de la vitesse du son dans l'élément  $\Omega_{e_1}$  (Fig. 2.2), noté  $c_0\Big|_{\Omega_{e_1}}$ . Conformément à la structure de données utilisée dans AVSP, les valeurs discrètes du champ de vitesse du son, notées  $c_i$ , sont stockées aux nœuds du maillage. Elles sont connues à partir d'une simulation RANS ou LES moyennée, effectuée au préalable. La valeur de la vitesse du son dans l'élément  $\Omega_{e_1}$  est calculée en faisant la moyenne des valeurs aux nœuds de cet élément :

$$c_0\Big|_{\Omega_{e_1}} = \frac{1}{3} (c_1 + c_2 + c_j). \quad (2.6)$$

Remarque : On a vu, au chapitre 1, que dans le cas où  $\gamma(\vec{x})$  n'est pas considéré constant, l'opérateur  $\bar{A}$  de l'équation de Helmholtz reste sous la forme  $\frac{1}{\gamma(\vec{x})\rho_0} \nabla \cdot \frac{1}{\rho_0(\vec{x})} \nabla$ . Les développements présentés dans ce chapitre sont similaires en remplaçant le champ de vitesse du son  $c_0(\vec{x})$  par la quantité  $1/\rho_0(\vec{x})$ . La distribution de masse volumique  $\rho_0(\vec{x})$  étant aussi connue par AVSP à partir d'un calcul RANS ou LES.

## 2.4 Calcul de $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big|_j$

Dans ce paragraphe est présentée en détail la discrétisation de l'opérateur  $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla}$  appliqué au nœud  $j$ . On distingue le cas où le nœud  $j$  est à l'intérieur du maillage (Fig. 2.3), du cas où le nœud  $j$  est situé sur le bord du domaine (Fig. 2.5). Un traitement particulier est alors imposé pour tenir compte des conditions limites acoustiques. Dans chaque cas, l'opérateur est discrétisé selon la méthode *volumes finis* utilisée dans AVSP, puis on en déduit l'expression des matrices  $\bar{A}$  et  $\bar{M}$  de Eq. (2.2) dans le formalisme des *éléments finis*.

### 2.4.1 Cas du nœud intérieur

On rappelle que dans un triangle la somme des normales pondérée par la longueur des côtés est nulle. D'après Fig. 2.3 on a la relation suivante :

$$l_{11}\vec{n}_{11} + l_{12}\vec{n}_{12} = l_1\vec{n}_1.$$

Le segment de longueur  $l_1$  joint le milieu des arêtes de l'élément  $\Omega_{e_1}$ . D'après le théorème de Thalès, il vient :

$$l_1 = \frac{L_1}{2},$$

ce qui conduit à la relation :

$$l_{11}\vec{n}_{11} + l_{12}\vec{n}_{12} = \frac{L_1}{2}\vec{n}_1. \quad (2.7)$$

### Formulation *volumes finis*

La valeur discrète de  $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p$  au nœud  $j$ , notée  $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big|_j$ , est estimée en faisant la moyenne de  $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p$  sur la cellule duale entourant le nœud  $j$ , notée  $\Omega_{N_j}$  :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \iint_{\Omega_{N_j}} \nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \, dS.$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \oint_{\partial\Omega_{N_j}} c_0^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} \, dL.$$

Dans le cas de Fig. 2.3, le nœud  $j$  est entouré de six éléments  $\Omega_{e_i}$ ,  $i = 1, 6$  :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \left[ c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} p \Big|_{\Omega_{e_1}} \cdot (l_{11}\vec{n}_{11} + l_{12}\vec{n}_{12}) + \dots + c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_6}} \vec{\nabla} p \Big|_{\Omega_{e_6}} \cdot (l_{61}\vec{n}_{61} + l_{62}\vec{n}_{62}) \right].$$

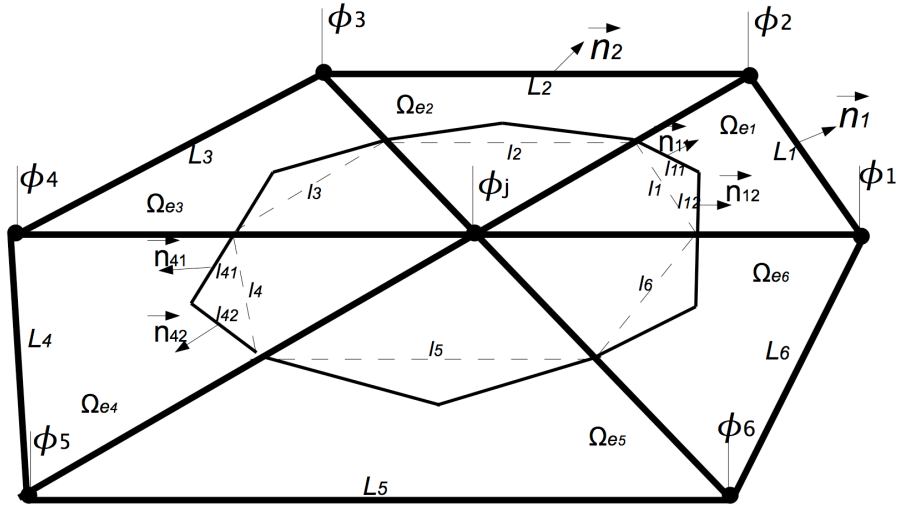


FIG. 2.3 - Le nœud  $j$  est intérieur au domaine, il appartient aux éléments  $\Omega_{e_i}$  pour  $i = 1, 6$ . La cellule duale est représentée en trait noir fin autour du nœud  $j$ . Elle relie le "centre des cellules" (intersection des médianes) au milieu de chaque arête. Dans l'élément  $\Omega_{e_i}$ , les normales  $\vec{n}_{i2}$  et  $\vec{n}_{i1}$  pointent vers l'extérieur de la cellule duale notée  $\Omega_{N_j}$ .  $l_{i1}$  et  $l_{i2}$  sont les longueurs des segments joignant le centre de l'élément et l'arête correspondante.

En utilisant Eq. (2.7), on obtient :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \left[ c_0^2|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} p|_{\Omega_{e_1}} \cdot \frac{L_1}{2} \vec{n}_1 + \dots + c_0^2|_{\Omega_{e_6}} \vec{\nabla} p|_{\Omega_{e_6}} \cdot \frac{L_6}{2} \vec{n}_6 \right]. \quad (2.8)$$

C'est cette formulation qui est intégrée dans AVSP, où  $c_0|_{\Omega_{e_i}}$  et  $\vec{\nabla} p|_{\Omega_{e_i}}$ ,  $i=1,6$ , sont calculés avec Eq. (5.4) et Eq. (2.4).

### Formulation éléments finis

En injectant Eq. (2.3) et Eq. (2.5) dans Eq. (2.8), il vient :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \left[ c_0^2|_{\Omega_{e_1}} \left( p_1 \vec{\nabla} \phi_1|_{\Omega_{e_1}} + p_2 \vec{\nabla} \phi_2|_{\Omega_{e_1}} + p_j \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_1}} \right) \cdot \left( -\vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_1}} S_{\Omega_{e_1}} \right) + \dots + c_0^2|_{\Omega_{e_6}} \left( p_6 \vec{\nabla} \phi_6|_{\Omega_{e_6}} + p_1 \vec{\nabla} \phi_1|_{\Omega_{e_6}} + p_j \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_6}} \right) \cdot \left( -\vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_6}} S_{\Omega_{e_6}} \right) \right].$$

Ou encore, en réorganisant les termes :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big|_j = -\frac{1}{S_{N_j}} \left[ \begin{aligned} & p_1 \left( c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} \phi_1 \Big|_{\Omega_{e_1}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j \Big|_{\Omega_{e_1}} S_{\Omega_{e_1}} + c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_6}} \vec{\nabla} \phi_1 \Big|_{\Omega_{e_6}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j \Big|_{\Omega_{e_6}} S_{\Omega_{e_6}} \right) + \\ & \dots \\ & p_6 \left( c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_6}} \vec{\nabla} \phi_6 \Big|_{\Omega_{e_6}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j \Big|_{\Omega_{e_6}} S_{\Omega_{e_6}} + c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_5}} \vec{\nabla} \phi_6 \Big|_{\Omega_{e_5}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j \Big|_{\Omega_{e_5}} S_{\Omega_{e_5}} \right) \end{aligned} \right].$$

On rappelle que le gradient de la fonction de forme est constant sur chaque élément, on obtient finalement l'expression de  $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p$ , au nœud  $j$ , dans le formalisme des *éléments finis* :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big|_j = -\frac{1}{S_{N_j}} \left[ \begin{aligned} & p_1 \iint_{\Omega_{e_1} \cup \Omega_{e_6}} c_0^2 \vec{\nabla} \phi_1 \vec{\nabla} \phi_j \, dS \quad + \dots + \\ & p_j \iint_{\Omega_{e_1} \cup \dots \cup \Omega_{e_6}} c_0^2 \vec{\nabla} \phi_j \vec{\nabla} \phi_j \, dS \quad + \dots + \\ & p_6 \iint_{\Omega_{e_5} \cup \Omega_{e_6}} c_0^2 \vec{\nabla} \phi_6 \vec{\nabla} \phi_j \, dS \end{aligned} \right].$$

L'élément  $a_{ij}$  de la matrice  $\bar{\bar{A}}$  est de la forme :

$$a_{ij} = - \iint_{Supp \phi_i \cap Supp \phi_j} c_0^2 \vec{\nabla} \phi_i \vec{\nabla} \phi_j \, dS. \quad (2.9)$$

La matrice  $\bar{\bar{A}}$  est creuse et symétrique. La position des éléments non nuls de cette matrice dépend de la numérotation des sommets du maillage et le nombre d'éléments non nuls dépend du type de maillage. Ils sont placés en  $(i, j)$  tels que  $Supp \phi_i \cap Supp \phi_j \neq \emptyset$  (Fig. 2.4).

L'élément  $m_{ij}$  de la matrice de masse  $\bar{\bar{M}}$  est de la forme :

$$m_{ij} = S_{N_j} \delta_{ij}. \quad (2.10)$$

La matrice de masse est donc diagonale et contient les "volumes des nœuds" (ou volume de la cellule duale autour du nœud). On parle dans ce cas de méthode des éléments finis avec *matrice de masse condensée*, ou "*lumped mass matrix*" en anglais.

Dans le cas du maillage 2D structuré (Fig. 2.4.a), la matrice  $\bar{\bar{A}}$  est penta-diagonale. Cette forme est similaire à la matrice de discrétisation de l'opérateur Laplacien en différences finies [88]. Dans le cas du maillage 2D non structuré, il y a, en général, sept éléments non nuls par ligne et par colonne, c'est le cas général décrit par Eq. (2.9). Dans le cas du maillage 3D non-structuré le nombre d'éléments entourant un nœud donné est supérieur au cas 2D. Pour cette raison, le nombre d'éléments  $a_{ij}$  non nuls est plus important.

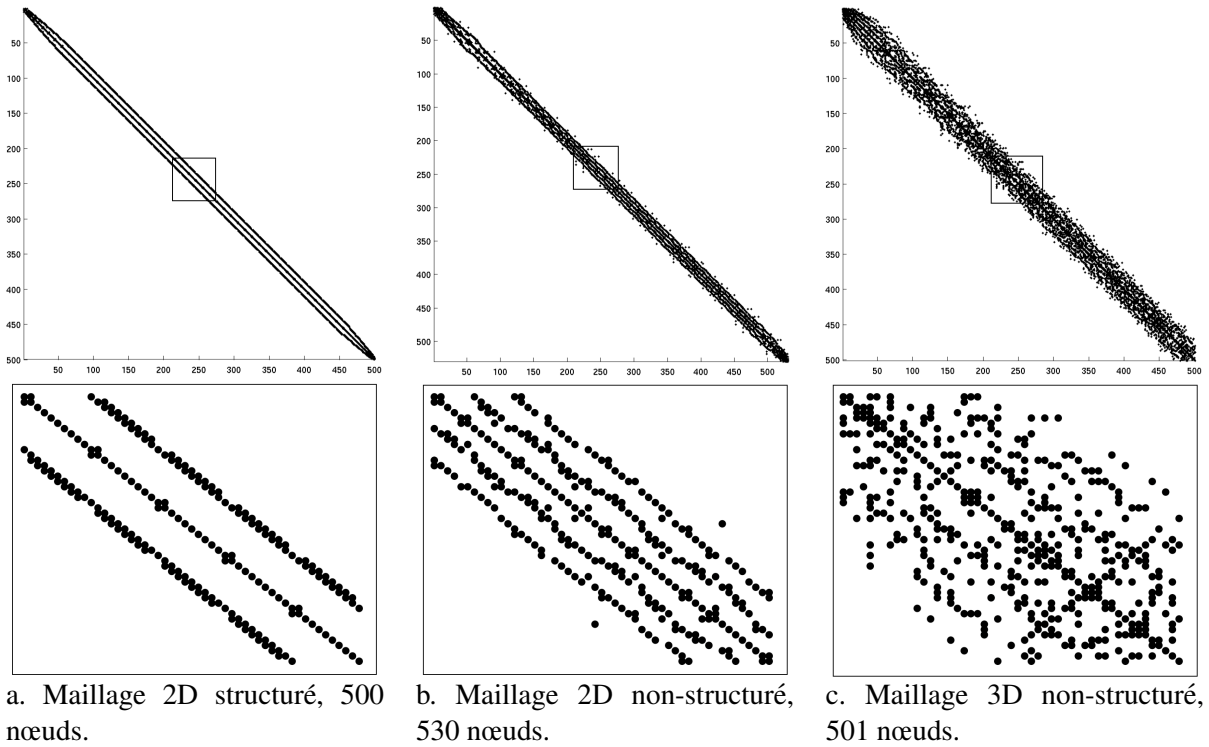


FIG. 2.4 - Eléments non nuls de la matrice  $\bar{A}$

### 2.4.2 Calcul de $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p \Big|_j$ sur le bord

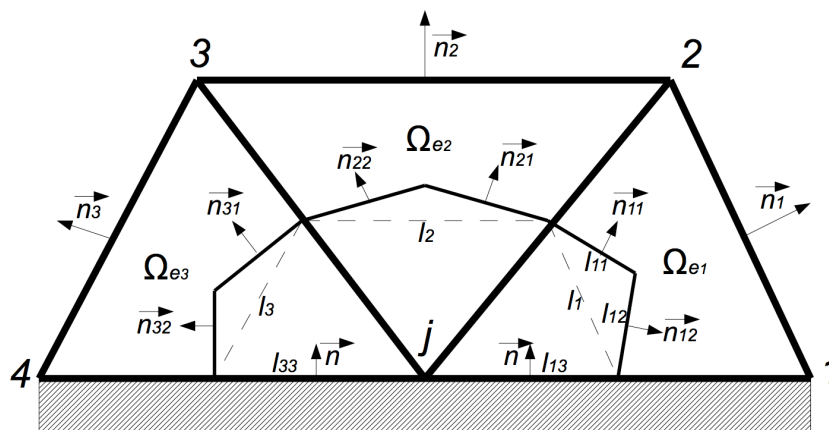


FIG. 2.5 - Le nœud  $j$  est sur le bord du domaine de calcul.

### Formulation volumes finis

Dans le cas du nœud situé sur le bord du domaine de calcul, la cellule duale  $\Omega_{N_j}$  est tronquée Fig. 2.5. Le gradient de pression normal aux bords du domaine s'exprime alors selon la condition limite de Robin :

$$\vec{\nabla}p \cdot \vec{n} \Big|_j = \mathbf{i} \frac{\omega}{c_j Z_j} p_j,$$

avec  $Z_j$  l'impédance acoustique complexe, fixée par l'utilisateur et  $\mathbf{i}$  la racine carrée de -1. La condition limite de mur rigide, s'exprime à l'aide d'une condition de Neumann :

$$\vec{\nabla}p \cdot \vec{n} \Big|_j = 0.$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, il vient :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla}p \Big|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \iint_{\Omega_{N_j}} \nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla}p dS = \frac{1}{S_{N_j}} \oint_{\partial\Omega_{N_j}} c_0^2 \vec{\nabla}p \cdot \vec{n} dL.$$

Dans ce cas, le nœud  $j$  n'est entouré que par trois éléments,  $\Omega_{e_i}$ ,  $i = 1, 3$ . La cellule duale présente trois faces dans l'élément  $\Omega_{e_1}$ , ainsi que dans l'élément  $\Omega_{e_3}$  :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla}p \Big|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \Big[ & c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_1}} \cdot (l_{11}\vec{n}_{11} + l_{12}\vec{n}_{12} - l_{13}\vec{n}) + \\ & c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_2}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_2}} \cdot (l_{21}\vec{n}_{21} + l_{22}\vec{n}_{22}) + \\ & c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_3}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_3}} \cdot (l_{31}\vec{n}_{31} + l_{32}\vec{n}_{32} - l_{33}\vec{n}) \Big]. \end{aligned}$$

En utilisant Eq. (2.7), il vient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla}p \Big|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \Big[ & c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_1}} \cdot \frac{L_1}{2} \vec{n}_1 + c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_2}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_2}} \cdot \frac{L_2}{2} \vec{n}_2 + c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_3}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_3}} \cdot \frac{L_3}{2} \vec{n}_3 \\ & - c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_1}} \cdot l_{13} \vec{n} - c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_3}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_3}} \cdot l_{33} \vec{n} \Big]. \end{aligned}$$

Les gradients de pression normaux à la paroi s'expriment en fonction de l'impédance au nœud  $j$ , notée  $Z_j$ , selon la relation de Robin utilisée sous la forme :

$$\left( c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_1}} l_{13} + c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_3}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_3}} l_{33} \right) \cdot \vec{n} = \mathbf{i} \frac{c_j \omega}{Z_j} (l_{13} + l_{33}) p_j.$$

*Remarque* : Il est très important de noter que l'impédance au nœud  $j$ , notée  $Z_j$ , est, dans le formalisme AVSP, définie avec la convention de normale intérieure  $\vec{n}$ . L'utilisateur doit donc fournir en entrée du code une impédance calculée avec cette convention.

La condition de Neumann est utilisée sous la forme :

$$\left( c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_1}} l_{13} + c_0^2 \Big|_{\Omega_{e_3}} \vec{\nabla}p \Big|_{\Omega_{e_3}} l_{33} \right) \cdot \vec{n} = 0.$$

On obtient alors la formulation *volumes finis* intégrée dans AVSP. Le cas du nœud placé sur le bord diffère du cas où le nœud est intérieur au domaine, par l'existence du terme de bord, dans lequel intervient la condition limite d'impédance  $Z_j$  :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \left[ c_0^2|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} p|_{\Omega_{e_1}} \frac{L_1}{2} \vec{n}_1 + c_0^2|_{\Omega_{e_2}} \vec{\nabla} p|_{\Omega_{e_2}} \frac{L_2}{2} \vec{n}_2 + c_0^2|_{\Omega_{e_3}} \vec{\nabla} p|_{\Omega_{e_3}} \frac{L_3}{2} \vec{n}_3 - \boxed{\frac{i c_j \omega}{Z_j} (l_{13} + l_{33}) p_j} \right]. \quad (2.11)$$

### Formulation éléments finis

En injectant Eq. (2.5) dans Eq. (2.11), il vient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p|_j = & \frac{1}{S_{N_j}} \left[ c_0^2|_{\Omega_{e_1}} \left( p_1 \vec{\nabla} \phi_1|_{\Omega_{e_1}} + p_2 \vec{\nabla} \phi_2|_{\Omega_{e_1}} + p_j \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_1}} \right) \cdot \left( -\vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_1}} S_{\Omega_{e_1}} \right) + \right. \\ & c_0^2|_{\Omega_{e_2}} \left( p_2 \vec{\nabla} \phi_2|_{\Omega_{e_2}} + p_3 \vec{\nabla} \phi_3|_{\Omega_{e_2}} + p_j \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_2}} \right) \cdot \left( -\vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_2}} S_{\Omega_{e_2}} \right) + \\ & c_0^2|_{\Omega_{e_3}} \left( p_3 \vec{\nabla} \phi_3|_{\Omega_{e_3}} + p_4 \vec{\nabla} \phi_4|_{\Omega_{e_3}} + p_j \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_3}} \right) \cdot \left( -\vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_3}} S_{\Omega_{e_3}} \right) - \\ & \left. \boxed{p_j \frac{i c_j \omega}{Z_j} (l_{13} + l_{33})} \right]. \end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire, en réorganisant les termes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p|_j = & -\frac{1}{S_{N_j}} \left[ p_1 \left( c_0^2|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} \phi_1|_{\Omega_{e_1}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_1}} S_{\Omega_{e_1}} \right) + \right. \\ & p_2 \left( c_0^2|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} \phi_2|_{\Omega_{e_1}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_1}} S_{\Omega_{e_1}} + c_0^2|_{\Omega_{e_2}} \vec{\nabla} \phi_2|_{\Omega_{e_2}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_2}} S_{\Omega_{e_2}} \right) + \\ & p_j \left( c_0^2|_{\Omega_{e_1}} \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_1}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_1}} S_{\Omega_{e_1}} + \dots + c_0^2|_{\Omega_{e_3}} \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_3}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_3}} S_{\Omega_{e_3}} + \boxed{\frac{i c_j \omega}{Z_j} (l_{13} + l_{33})} \right) + \\ & p_3 \left( c_0^2|_{\Omega_{e_2}} \vec{\nabla} \phi_3|_{\Omega_{e_2}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_2}} S_{\Omega_{e_2}} + c_0^2|_{\Omega_{e_3}} \vec{\nabla} \phi_3|_{\Omega_{e_3}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_3}} S_{\Omega_{e_3}} \right) + \\ & \left. p_4 \left( c_0^2|_{\Omega_{e_4}} \vec{\nabla} \phi_4|_{\Omega_{e_4}} \cdot \vec{\nabla} \phi_j|_{\Omega_{e_4}} S_{\Omega_{e_4}} \right) \right]. \end{aligned}$$

On obtient l'expression de  $\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p$ , au nœud de bord  $j$ , dans le formalisme des éléments finis :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} p|_j = & -\frac{1}{S_{N_j}} \left[ p_1 \iint_{\Omega_{e_1}} c_0^2 \vec{\nabla} \cdot \phi_1 \vec{\nabla} \phi_j dS + p_2 \iint_{\Omega_{e_1} \cup \Omega_{e_2}} c_0^2 \vec{\nabla} \phi_2 \cdot \vec{\nabla} \phi_j dS + \right. \\ & p_j \iint_{\Omega_{e_1} \cup \Omega_{e_2} \cup \Omega_{e_3}} c_0^2 \vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{\nabla} \phi_j dS + \boxed{p_j \frac{i c_j \omega}{Z_j} (l_{13} + l_{33})} + \\ & \left. p_3 \iint_{\Omega_{e_2} \cup \Omega_{e_3}} c_0^2 \vec{\nabla} \phi_3 \cdot \vec{\nabla} \phi_j dS + p_4 \iint_{\Omega_{e_4} \cup \Omega_{e_4}} c_0^2 \vec{\nabla} \phi_4 \cdot \vec{\nabla} \phi_j dS \right]. \end{aligned}$$

Le cas du nœud appartenant au bord diffère du cas où le nœud est intérieur au domaine de calcul, par la présence du terme de bord encadré, dans lequel intervient la valeur de l'impédance  $Z_j$ . Ces termes sont rangés dans la matrice  $\bar{\bar{B}}$ , dont l'élément  $b_{kj}$  s'écrit :

$$b_{kj} = \mathbf{i} \frac{c_j \omega}{Z_j} (l_{13} + l_{33}) \delta_{kj}.$$

Cette matrice est donc diagonale, comme l'atteste Fig. 2.6. Il est important de remarquer que la valeur de l'impédance  $Z_j$  au nœud  $j$ , et, par conséquent, les éléments de  $\bar{\bar{B}}$ , dépendent de  $\omega$ , la pulsation du mode. Par souci de simplicité d'écriture, cette dépendance n'est pas explicitée dans la symbolique choisie pour écrire cette matrice. Ces aspects seront traités en détail dans le chapitre suivant sur les problèmes aux valeurs propres.

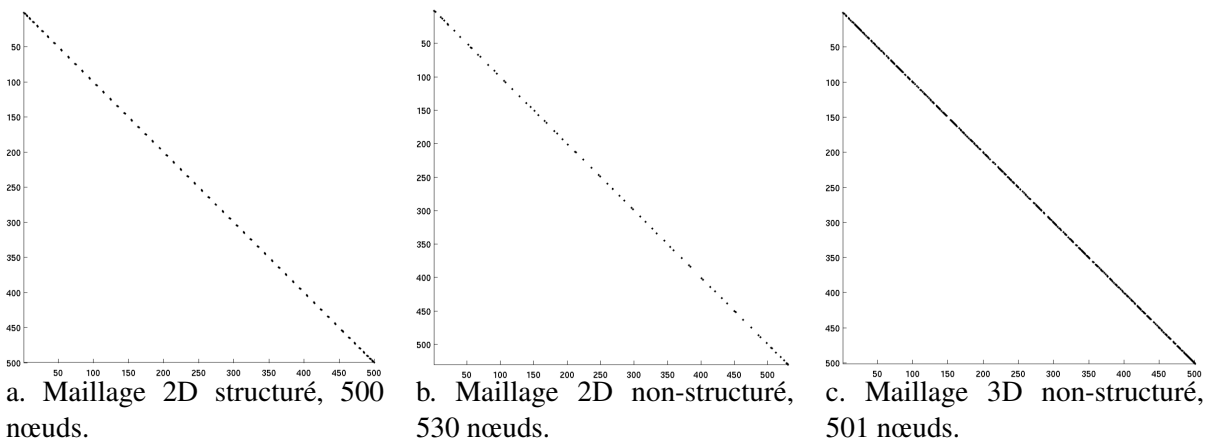


FIG. 2.6 - Les éléments non nuls de la matrice  $\bar{\bar{B}}$

Quelque soit le type de maillage : 2D, 3D, structuré ou non, la matrice  $\bar{\bar{B}}$  reste diagonale, et le nombre d'éléments non nuls croît avec le nombre de nœuds situés sur le bord du domaine.

## 2.5 Le second membre

D'après le modèle  $n - \tau$ , les fluctuations du taux de dégagement de chaleur, dans la chambre de combustion, résultent de fluctuations de vitesse en un point de référence. Celui-ci est généralement placé dans le système d'injection. L'utilisation de ce modèle impose la connaissance du gradient de pression au nœud  $j$  (et non dans un élément  $\Omega_{e_1}$  comme c'était le cas dans les paragraphes précédents).



### 2.5.1 Formulation volumes finis

Le gradient de pression, au nœud  $j$ , noté  $\vec{\nabla}p|_j$ , est évalué comme étant la moyenne du gradient de pression sur la cellule duale  $\Omega_{N_j}$  :

$$\vec{\nabla}p|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \iint_{\Omega_{N_j}} \vec{\nabla}p dS.$$

Le gradient de pression, sur la cellule duale  $\Omega_{N_j}$ , est calculé en fonction des gradients dans chaque élément entourant le nœud  $j$  :

$$\iint_{\Omega_{N_j}} \vec{\nabla}p dS = \frac{S_{\Omega_{e_1}}}{3} \vec{\nabla}p|_{\Omega_{e_1}} + \dots + \frac{S_{\Omega_{e_6}}}{3} \vec{\nabla}p|_{\Omega_{e_6}}.$$

Le calcul du gradient de pression, au nœud  $j$ , dans le code AVSP est codé de la façon suivante :

$$\boxed{\vec{\nabla}p|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \left[ \frac{S_{\Omega_{e_1}}}{3} \vec{\nabla}p|_{\Omega_{e_1}} + \dots + \frac{S_{\Omega_{e_6}}}{3} \vec{\nabla}p|_{\Omega_{e_6}} \right]}. \quad (2.12)$$

### 2.5.2 Formulation éléments finis

En injectant Eq. (2.5) dans Eq. (2.12), il vient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}p|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \left[ \frac{S_{\Omega_{e_1}}}{3} \left( p_1 \vec{\nabla}\phi_1|_{\Omega_{e_1}} + p_2 \vec{\nabla}\phi_2|_{\Omega_{e_1}} + p_j \vec{\nabla}\phi_j|_{\Omega_{e_1}} \right) + \right. \\ \frac{S_{\Omega_{e_2}}}{3} \left( p_2 \vec{\nabla}\phi_1|_{\Omega_{e_2}} + p_3 \vec{\nabla}\phi_3|_{\Omega_{e_2}} + p_j \vec{\nabla}\phi_j|_{\Omega_{e_2}} \right) + \\ \dots \\ \left. \frac{S_{\Omega_{e_6}}}{3} \left( p_2 \vec{\nabla}\phi_1|_{\Omega_{e_6}} + p_3 \vec{\nabla}\phi_3|_{\Omega_{e_6}} + p_j \vec{\nabla}\phi_j|_{\Omega_{e_6}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Il existe un lien entre  $S_{\Omega_{e_i}}$  et la fonction de forme  $\phi_j$  :

$$\iint_{\Omega_{e_i}} \phi_j dS = \frac{S_{\Omega_{e_i}}}{3},$$

on peut alors exprimer le gradient de pression, au nœud  $j$ , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}p|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \left[ p_1 \iint_{\Omega_{e_1}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_1 dS + p_2 \iint_{\Omega_{e_1}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_2 dS + p_j \iint_{\Omega_{e_1}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_j dS + \right. \\ p_2 \iint_{\Omega_{e_2}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_2 dS + p_3 \iint_{\Omega_{e_2}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_3 dS + p_j \iint_{\Omega_{e_2}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_j dS + \\ \dots \\ \left. p_6 \iint_{\Omega_{e_6}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_6 dS + p_1 \iint_{\Omega_{e_6}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_1 dS + p_j \iint_{\Omega_{e_6}} \phi_j \vec{\nabla}\phi_j dS \right]. \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit, dans le formalisme des *éléments finis* :

$$\vec{\nabla} p \Big|_j = \frac{1}{S_{N_j}} \left[ \begin{array}{l} p_1 \iint_{\Omega_{e_1} \cup \Omega_{e_6}} \phi_j \vec{\nabla} \phi_1 dS + \\ p_2 \iint_{\Omega_{e_1} \cup \Omega_{e_2}} \phi_j \vec{\nabla} \phi_2 dS + \\ \dots \\ p_j \iint_{\Omega_{e_1} \cup \Omega_{e_2} \cup \dots \cup \Omega_{e_6}} \phi_j \vec{\nabla} \phi_j dS + \\ \dots \\ p_6 \iint_{\Omega_{e_5} \cup \Omega_{e_6}} \phi_j \vec{\nabla} \phi_6 dS \end{array} \right].$$

Finalement le terme  $\vec{\nabla} p \Big|_{\vec{x}_{ref}} \cdot \vec{n}_{ref}$  s'écrit comme le produit scalaire  $\vec{r}^T \vec{p}$ , avec :

$$\vec{r}_i = \iint_{Supp \phi_i \cap Supp \phi_{ref}} \phi_{ref} \vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{n}_{ref} dS, \quad (2.13)$$

soit

$$\vec{r}^T \vec{p} = \sum_{i=1}^N p_i \iint_{Supp \phi_i \cap Supp \phi_{ref}} \phi_{ref} \vec{\nabla} \phi_i \cdot \vec{n}_{ref} dS. \quad (2.14)$$

Si on note  $\vec{n}$ , le vecteur contenant les valeurs discrètes du champ  $n(\vec{x})$ , défini par :

$$n(\vec{x}) = \frac{\gamma - 1}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{U_{bulk}} n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega\tau(\vec{x}, \omega_r)}, \quad (2.15)$$

Alors le second membre de Eq. (2.1) s'écrit  $\vec{n} \vec{r}^T \vec{p}$ . Dans Fig. 2.7 sont représentés les éléments non nuls de la matrice  $\vec{n} \vec{r}^T$ . Les composantes du vecteur  $\vec{n}$  étant non nulles uniquement dans la zone de flamme, l'indice des lignes contenant les éléments non nuls indique les nœuds situés dans la zone de flamme. Ce sont les éléments non nuls du vecteur  $\vec{n}$ . L'indice des colonnes d'éléments non nuls indique les numéros des nœuds voisins au point de référence. Ce sont les éléments non nuls du vecteur ligne  $\vec{r}^T$ .

D'après Fig. 2.7, on peut conclure qu'il y a 10 (respectivement 14 et 19) nœuds dans la zone de flamme dans le cas du maillage 2D structuré (respectivement 2D non-structuré et 3D non-structuré).

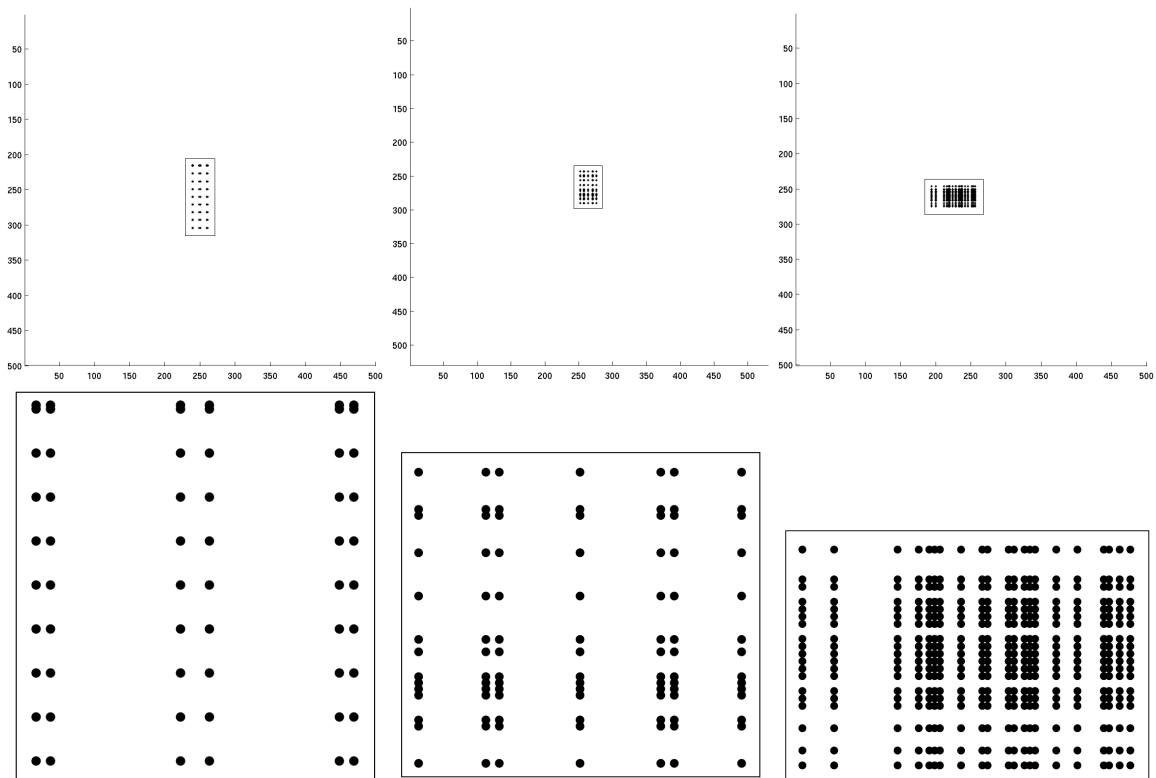


FIG. 2.7 - Éléments non nuls de ma matrice  $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{n}}\bar{\bar{r}}^T$ .



# Chapitre 3

## Problèmes aux valeurs propres

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Les méthodes de projection</b> . . . . .	<b>50</b>
3.1.1	Problèmes linéaires . . . . .	50
3.1.2	Problèmes quadratiques . . . . .	51
<b>3.2</b>	<b>La méthode d'Arnoldi</b> . . . . .	<b>52</b>
3.2.1	<i>Espaces de Krylov</i> . . . . .	52
3.2.2	<i>Algorithme d'Arnoldi</i> . . . . .	54
3.2.3	Intégration dans AVSP . . . . .	57
<b>3.3</b>	<b>La méthode de Jacobi-Davidson</b> . . . . .	<b>59</b>
3.3.1	Problèmes linéaires . . . . .	59
3.3.2	Problèmes quadratiques . . . . .	62
<b>3.4</b>	<b>Comparaisons</b> . . . . .	<b>64</b>
3.4.1	Résultats . . . . .	64
3.4.2	Conclusions . . . . .	67

---

Comme on l'a vu au chapitre I, les instabilités thermoacoustiques sont modélisées par une équation de Helmholtz avec un terme au second membre qui rend compte du couplage entre l'acoustique et la combustion :

$$\begin{cases} \nabla \cdot c_0^2(\vec{x}) \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) + \omega^2 \hat{p}(\vec{x}) = \frac{(\gamma-1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega\tau_u(\vec{x}, \omega_r)} \vec{\nabla} \hat{p}(x_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \text{ sur } \Omega, \\ \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) \cdot \vec{n} - i \frac{\omega}{c_0(\vec{x}) Z(\omega_r)} \hat{p}(\vec{x}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R. \end{cases} \quad (3.1)$$

On a montré au chapitre II que le problème, discrétisé par la méthode des *volumes finis* utilisée dans le code AVSP, prend la forme matricielle suivante :

$$\bar{M}^{-1} \bar{A} \bar{p} + \omega \bar{M}^{-1} \bar{B}(\omega_r) \bar{p} + \omega^2 \bar{p} = \bar{n}(\omega) \bar{r}^T \bar{p}. \quad (3.2)$$

La dépendance de la matrice  $\bar{B}$  à la pulsation  $\omega_r$  découle de la condition limite d'impédance,  $Z(\omega_r)$ , qui est une fonction de la fréquence (ou pulsation) de l'instabilité. Le vecteur  $\bar{n}(\omega)$  représente les valeurs discrètes du champ :

$$n(\vec{x}, \omega) = \frac{\gamma - 1}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega\tau_u(\vec{x}, \omega_r)}.$$

La dépendance à la pulsation complexe  $\omega$  provient de l'utilisation d'un signal retardé sous l'hypothèse d'onde harmonique ce qui fait apparaître le groupement  $e^{i\omega\tau_u}$ . De plus, les champs  $n_u(\vec{x}, \omega_r)$  et  $\tau_u(\vec{x}, \omega_r)$  caractérisent la réponse de la flamme à une excitation acoustique. Cette réponse dépend de la fréquence de l'excitation  $\omega_r$  et elle n'est pas homogène dans la zone de combustion, ce qui explique la dépendance spatiale  $\vec{x}$ . On pourrait améliorer la modélisation de la réponse de flamme en remarquant qu'elle est également fonction de l'amplitude de l'excitation acoustique, comme le montre Noiray dans [57, 55], mais cet aspect n'est pas pris en compte dans ce travail. La problématique de la fonction de transfert de flamme sera traitée en détail dans le chapitre IV.

L'objectif du code AVSP est de déterminer les éléments propres  $(\omega, \bar{p}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ , de Eq. (3.2), avec  $N$  le nombre de nœuds du maillage. La connaissance de ces éléments propres permet de caractériser la stabilité de la chambre de combustion. En effet, la répartition discrète du champ de pression  $\bar{p}_1$  dans le domaine de calcul se déduit des éléments propres  $(\omega, \bar{p})$  à l'aide de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \Re(\bar{p} e^{-i\omega t}) \\ &= \Re(|\bar{p}| e^{i\bar{\phi}} e^{\omega_i t} e^{-i\omega_r t}) \\ &= |\bar{p}| e^{\omega_i t} \cos(\bar{\phi} - \omega_r t). \end{aligned}$$

Le vecteur propre  $\bar{p} = |\bar{p}| e^{i\bar{\phi}}$  renseigne sur la répartition du champ de pression dans la chambre, et permet d'identifier les zones où la structure subit les plus fortes contraintes mécaniques lors d'une instabilité thermoacoustique. On remarque que les maximums de pression se déplacent au cours du temps si la répartition de la phase  $\bar{\phi}$  n'est pas constante dans le domaine.

La valeur propre  $\omega$  concentre deux informations. Sa partie réelle,  $\omega_r$ , correspond à la pulsation de l'instabilité. La fréquence typique d'une instabilité thermoacoustique rencontrée dans une chambre de combustion aéronautique est comprise entre 300 et 1000 Hz. La partie imaginaire,  $\omega_i$ , correspond au

taux d'amplification du mode. En respectant la convention d'onde harmonique adoptée dans cette thèse, une pulsation avec une partie imaginaire positive traduit une croissance exponentielle de la fluctuation de pression, caractéristique de la naissance d'une instabilité. Le mode est dit amplifié ou instable. Si la partie imaginaire de la pulsation est négative, le mode est amorti ou stable et il ne pourra pas être observé dans un contexte expérimental. Si la partie imaginaire de la pulsation est nulle, alors le mode est dit marginalement stable.

Dans le cas général, l'impédance  $Z(\omega_r)$  et la réponse de flamme  $(n_u(\vec{x}, \omega_r), \tau_u(\vec{x}, \omega_r))$ , sont des fonctions non linéaires en  $\omega_r$ . Il n'existe pas de méthodes systématiques pour la résolution des problèmes aux valeurs propres non linéaires du type Eq. (3.2). La solution retenue dans le code AVSP est d'utiliser une approche *point fixe* pour se ramener à la résolution successive de problèmes aux valeurs propres linéaires ou quadratiques, pour lesquels il existe des méthodes itératives de résolution.

– **Méthode de *point fixe* impliquant la résolution d'un problème quadratique :**

A chaque itération  $k$  de la méthode de *point fixe*, on choisit de fixer  $\omega_{r,k} = \Re(\omega_k)$  dans la matrice  $\bar{\bar{B}}(\omega_{r,k})$  et  $\omega_k$  dans le vecteur  $\bar{n}(\omega_k)$ . Dans ce cas Eq. (3.2) se réduit à un problème quadratique en  $\omega_{k+1}$ . L'algorithme de *point fixe* prend la forme suivante :

---

**Algorithm 1** Algorithme de *point fixe* avec problème quadratique

---

- 1: Initialisation :  $k = 0$ , choix de  $\omega_0$  et  $\omega_{r,0} := \Re(\omega_0)$
  - 2: Déterminer  $\omega_{k+1}$  tel que  $\left[ \bar{M}^{-1} \bar{A} - \bar{n}(\omega_k) \bar{r}^T \right] \bar{p} + \omega_{k+1} \bar{M}^{-1} \bar{\bar{B}}(\omega_{r,k}) \bar{p} + \omega_{k+1}^2 \bar{p} = 0$
  - 3: **if**  $\|\omega_{k+1} - \omega_k\| \leq \epsilon$  **then**
  - 4:   stop
  - 5: **else**
  - 6:    $\omega_k := \omega_{k+1}$
  - 7:    $\omega_{r,k} := \Re(\omega_{k+1})$
  - 8:   retour au 2
  - 9: **end if**
- 

A chaque pas de la méthode de *point fixe* il faut résoudre un problème aux valeurs propres quadratique, de la forme :

$$\bar{M}^{-1} \bar{C} \bar{p} + \omega \bar{M}^{-1} \bar{\bar{B}} \bar{p} + \omega^2 \bar{p} = 0,$$

avec  $\bar{C} = \bar{A} - \bar{M} \bar{n} \bar{r}^T$ .

– Méthode de *point fixe* impliquant la résolution d'un problème linéaire :

- De la même façon, on peut à chaque pas de l'itération de point fixe se ramener à un problème linéaire.

---

**Algorithm 2** Algorithme de *point fixe* avec problème linéaire

---

- 1: Initialisation :  $k = 0$ , choix de  $\omega_0$  et  $\omega_{r,0} := \Re(\omega_0)$
  - 2: Déterminer  $\omega_{k+1}$  tel que  $\left[ \bar{M}^{-1} \bar{A} - \bar{n}(\omega_k) \bar{r}^T + \omega_k \bar{M}^{-1} \bar{B}(\omega_{r,k}) \right] \bar{p} + \omega_{k+1}^2 \bar{p} = 0$
  - 3: **if**  $\|\omega_{k+1} - \omega_k\| \leq \epsilon$  **then**
  - 4:   stop
  - 5: **else**
  - 6:    $\omega_k := \omega_{k+1}$
  - 7:    $\omega_{r,k} := \Re(\omega_{k+1})$
  - 8:   retour au 2.
  - 9: **end if**
- 

A chaque pas de la méthode de *point fixe* il faut résoudre un problème aux valeurs propres linéaire, de la forme :

$$\begin{aligned} \bar{M}^{-1} \bar{D} \bar{p} &= \lambda \bar{p}, \\ \text{avec } \lambda &= -\omega^2, \\ \text{et } \bar{D} &= \bar{A} - \bar{M} \bar{n} \bar{r}^T + \omega_k \bar{B}. \end{aligned}$$

- Une autre solution consiste à transformer le problème quadratique obtenu à chaque pas de l'algorithme 1 :

$$\bar{M}^{-1} \bar{C} \bar{p} + \omega \bar{M}^{-1} \bar{B} \bar{p} + \omega^2 \bar{p} = 0,$$

en un problème linéaire [84]. Cette transformation s'effectue grâce au changement de variable suivant :

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} \omega \bar{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$\begin{pmatrix} -\bar{M}^{-1} \bar{B} & -\bar{M}^{-1} \bar{C} \\ \bar{I} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \bar{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \omega \bar{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix}.$$

Le passage du problème quadratique au problème linéaire se fait au prix d'un doublement de la taille du problème matriciel. On utilise dans ce cas l'algorithme 3. Cependant, ce changement de variable augmente beaucoup le temps de calcul. On verra dans la dernière section de ce chapitre que la résolution d'un problème quadratique semble être une meilleure option.

A chaque pas de la méthode de *point fixe* décrite par l'algorithme 3 il faut donc résoudre un problème aux valeurs propres linéaire de la forme :

$$\bar{F} \bar{P} = \omega \bar{G} \bar{P},$$

$$\text{avec } \bar{F} = \begin{pmatrix} -\bar{M}^{-1} \bar{B} & -\bar{M}^{-1} \bar{A} + \bar{n} \bar{r}^T \\ \bar{I} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$



---

**Algorithm 3** Algorithme de *point fixe* avec problème linéaire de taille double

---

1: Initialisation :  $k = 0$ , choix de  $\omega_0$  et  $\omega_{r,0} := \Re(\omega_0)$

2: Déterminer  $\omega_{k+1}$  tel que

$$\begin{pmatrix} -\bar{M}^{-1}\bar{B}(\omega_{r,k}) & -\bar{M}^{-1}\bar{A} + \bar{n}(\omega_k)\bar{r}^T \\ \bar{I} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{k+1}\bar{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \omega_{k+1} \begin{pmatrix} \omega_{k+1}\bar{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$$

3: **if**  $\|\omega_{k+1} - \omega_k\| \leq \epsilon$  **then**

4:   stop

5: **else**

6:    $\omega_k := \omega_{k+1}$

7:    $\omega_{r,k} := \Re(\omega_{k+1})$

8:   retour au 2.

9: **end if**

---

Finalement, les algorithmes 1, 2 et 3 conduisent à la résolution successive de problèmes aux valeurs propres quadratiques ou linéaires de taille  $N$  ou  $2N$ , avec  $N$  le nombre de nœuds du maillage. Dans le cas d'une géométrie industrielle,  $N$  vaut plusieurs centaines de milliers, voire quelques millions de nœuds. Or, d'après les observations expérimentales, on sait que les instabilités thermoacoustiques résultent du couplage entre la combustion et les modes basse fréquence de la configuration. Seuls les éléments propres correspondant aux modes basse fréquence sont utiles pour la modélisation du phénomène, il n'est donc pas nécessaire de calculer tout le spectre. On utilise de ce fait des méthodes de projection, sur un sous-espace de dimension très inférieure qui approchent, de façon itérative, le sous-espace propre contenant les vecteurs propres associés aux valeurs propres de plus petite partie réelle.

L'objectif de ce chapitre est de donner au lecteur les principales idées et méthodes utilisées dans le code AVSP pour la résolution de Eq. (3.2). Dans le premier paragraphe, on introduit les méthodes de projections qui permettent de réduire la taille du problème aux valeurs propres en le projetant sur un sous-espace vectoriel donné. Dans la suite du chapitre sont exposées deux méthodes (*Arnoldi* et *Jacobi-Davidson*) utilisées pour construire le sous-espace vectoriel associé à la partie du spectre des valeurs propres cherchées, dans notre cas celles de plus petite partie réelle. Leur implémentation dans AVSP est détaillée. L'efficacité des deux approches est testée sur les problèmes linéaires et quadratiques rencontrés dans le cas des algorithmes de *point fixe* 1, 2 et 3.

### 3.1 Les méthodes de projection

#### 3.1.1 Problèmes linéaires

Si on considère le cas de l'Algorithme 2, il faut à chaque pas de l'itération de point fixe résoudre le problème linéaire :

$$\bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{p} = \lambda\bar{p},$$

où les matrices  $\bar{D}$  et  $\bar{M}$  sont de taille  $N \times N$ . L'objectif des méthodes de projection ou *méthode de Galerkin* est de réduire la taille du problème matriciel, en le projetant et en le résolvant, dans un sous-espace vectoriel. On choisit d'utiliser le produit scalaire défini par :

$$\langle \bar{x} | \bar{y} \rangle = \bar{y}^* \bar{M} \bar{x},$$

avec  $\bar{y}^*$  la forme transposée conjuguée du vecteur  $\bar{y}$ . Ce produit scalaire est couramment utilisé pour la résolution des problèmes aux valeurs propres généralisés [45].

Soit  $\mathcal{V}_m$  un sous-espace de dimension  $m \ll N$ , engendré par une base M-orthonormée  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$  :  $\langle \bar{v}_i | \bar{v}_j \rangle = \bar{v}_j^* \bar{M} \bar{v}_i = \delta_{ij}$ , la *méthode de Galerkin*, consiste à trouver  $(\tilde{\lambda}, \tilde{p}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{V}_m$  appelés *éléments de Ritz* tels que :

$$P_{\mathcal{V}_m}(\bar{M}^{-1}\bar{D}\tilde{p} - \lambda\tilde{p} = \bar{0}),$$

où  $P_{\mathcal{V}_m}$  représente la projection M-orthogonale sur le sous-espace  $\mathcal{V}_m$ , ce qui s'écrit aussi :

$$\langle \bar{M}^{-1}\bar{D}\tilde{p} - \tilde{\lambda}\tilde{p} | \bar{v} \rangle = 0, \forall \bar{v} \in \mathcal{V}_m.$$

Par définition  $\bar{v}$  et  $\tilde{p}$  sont dans l'espace  $\mathcal{V}_m$ , on peut donc écrire  $\bar{v} = \bar{V}_m \bar{y}$ ,  $\bar{y} \in \mathbb{C}^m$ ,  $\bar{V}_m$  est la matrice de taille  $N \times m$  dont la  $j^{eme}$  colonne est le vecteur  $\bar{v}_j$ . De même  $\tilde{p} = \bar{V}_m \bar{x}$ ,  $\bar{x} \in \mathbb{C}^m$ . Il vient :

$$\langle \bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{V}_m \bar{x} - \lambda \bar{V}_m \bar{x} | \bar{V}_m \bar{y} \rangle = 0, \forall \bar{y} \in \mathbb{C}^m,$$

ou encore :

$$\langle \bar{V}_m^* \bar{D} \bar{V}_m \bar{x} - \lambda \bar{V}_m^* \bar{M} \bar{V}_m \bar{x} | \bar{y} \rangle = 0, \forall \bar{y} \in \mathbb{C}^m.$$

Les vecteurs  $\bar{v}_{i,i=1,\dots,m}$  qui engendrent  $\mathcal{V}_m$  sont M-orthogonaux, donc  $\bar{V}_m^* \bar{M} \bar{V}_m = \mathbb{I}$ , alors la recherche des *éléments de Ritz*  $(\tilde{\lambda}, \tilde{p} = \bar{V}_m \bar{x}) \in \mathbb{C} \times \mathcal{V}_m$  revient à trouver  $(\tilde{\lambda}, \bar{x}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$  tels que :

$$\bar{V}_m^* \bar{D} \bar{V}_m \bar{x} - \tilde{\lambda} \bar{x} = \bar{0}. \quad (3.3)$$

La *matrice de Rayleigh*  $\bar{H}_m = \bar{V}_m^* \bar{D} \bar{V}_m$  est de taille  $m \ll N$  (typiquement quelques dizaines), on peut alors utiliser une méthode directe de type *QR* pour déterminer ses éléments propres  $(\tilde{\lambda}, \bar{x})$ . Connaissant la base de  $\mathcal{V} = \text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$  on en déduit les *éléments de Ritz*  $(\tilde{\lambda}, \tilde{p} = \bar{V}_m \bar{x})$ .

### 3.1.2 Problèmes quadratiques

Dans le cas de l'algorithme 2, il faut à chaque itération de *point fixe* résoudre le problème aux valeurs propres quadratique suivant :

$$\bar{M}^{-1}\bar{C}\bar{p} + \omega\bar{M}^{-1}\bar{B}\bar{p} + \omega^2\bar{p} = \bar{0}.$$

La *méthode de Galerkin* se généralise directement aux cas quadratiques. Les *éléments de Ritz*  $(\tilde{\omega}, \tilde{p})$  sont solutions du problème projeté sur le sous-espace  $\mathcal{V}_m$  :

$$P_{\mathcal{V}_m}(\bar{M}^{-1}\bar{C}\tilde{p} + \tilde{\omega}\bar{M}^{-1}\bar{B}\tilde{p} + \tilde{\omega}^2\tilde{p} = \bar{0}),$$

ou encore :

$$\langle \bar{M}^{-1}\bar{C}\bar{V}_m\bar{x} + \tilde{\omega}\bar{M}^{-1}\bar{B}\bar{V}_m\bar{x} + \tilde{\omega}^2\bar{V}_m\bar{x} | \bar{V}_m\bar{y} \rangle = 0, \forall \bar{y} \in \mathbb{C}^m.$$

Il faut donc déterminer les éléments propres  $(\tilde{\omega}, \tilde{x}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$  du problème quadratique projeté de taille  $m \times m$  :

$$\bar{V}_m^*\bar{C}\bar{V}_m\bar{x} + \tilde{\omega}\bar{V}_m^*\bar{B}\bar{V}_m\bar{x} + \tilde{\omega}^2\bar{x} = \bar{0}.$$

Contrairement au cas précédent, on ne peut pas utiliser directement la méthode *QR* pour calculer les éléments propres du problème projeté. La solution choisie dans l'algorithme de *Jacobi-Davidson* utilisé dans le code AVSP est de transformer le problème projeté en un problème linéaire :

$$\begin{pmatrix} -\bar{V}_m^*\bar{B}\bar{V}_m & -\bar{V}_m^*\bar{C}\bar{V}_m \\ \bar{I} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}\tilde{x} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \tilde{\omega} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}\tilde{x} \\ \tilde{x} \end{pmatrix},$$

de taille  $2m \times 2m$  qui, cette fois-ci, peut être résolu à l'aide d'une *méthode QR*.

La question qui subsiste est "comment trouver le sous-espace  $\mathcal{V}_m = \text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$  associé aux valeurs propres de plus petit module impliquées dans les instabilités de combustion?". Pour ce faire, deux méthodes sont disponibles dans AVSP : la *méthode d'Arnoldi* et la *méthode de Jacobi-Davidson*. Ces deux approches construisent différemment le sous-espace  $\mathcal{V}$ . La première construit l'*espace de Krylov* associé à la matrice dont on cherche les éléments propres [1, 45, 48, 3, 2]. La seconde agrandit à chaque itération le sous-espace de recherche par un vecteur solution de l'*équation de correction* [79, 78, 80, 86, 77, 84]. Ces deux approches sont présentées en détail dans les paragraphes suivants.

## 3.2 La méthode d'Arnoldi

La *méthode d'Arnoldi* [1], qui est utilisée dans cette thèse, est intégrée dans le logiciel ARPACK [45, 48]. Elle est prévue pour la résolution des problèmes aux valeurs propres linéaires et problèmes aux valeurs propres linéaires généralisés. Des recherches récentes ont permis d'adapter cette méthode pour les problèmes aux valeurs propres quadratiques [3] mais ces développements ne sont pas encore intégrés dans le code AVSP. On considère dans cette section le problème aux valeurs propres linéaire générique suivant :

$$\bar{O}P\bar{x} = \lambda\bar{x},$$

avec, dans le cas de l'algorithme 2,  $\bar{O}P = \bar{M}^{-1}\bar{D}$  et dans le cas de l'algorithme 3,  $\bar{O}P = \bar{F}$ . Aussi appelée *méthode de Lanczos* lorsque  $\bar{O}P$  est *Hermitienne* ( $\bar{O}P^* = \bar{O}P$ ), la *méthode d'Arnoldi* permet de construire simultanément le sous-espace  $\mathcal{V}_m = \text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$  et la *matrice de Rayleigh*  $H_m$  correspondante dont l'ordre augmente à chaque itération. Dans le cas général, cette matrice est de type *Hessenberg*, dans le cas particulier de la *méthode Lanczos*, elle est *tridiagonale* et *Hermitienne* [42]. On montre dans la section (3.2.2), que le sous-espace généré par l'*algorithme d'Arnoldi*, n'est autre que l'*espace de Krylov*, noté  $\mathcal{K}_m(\bar{v}_1, \bar{O}P) = \text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{O}P^{m-1}\bar{v}_1\}$ . Cet espace possède des propriétés intéressantes introduites dans le paragraphe suivant.

### 3.2.1 Espaces de Krylov

Soit  $\mathcal{U}_m = \text{vect}\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$  un sous-espace invariant de  $\bar{O}P$  associé aux valeurs propres  $\lambda_{i,i=1,\dots,m}$  avec  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_m|$ . On se donne un vecteur initial  $\bar{v}_1$  dans ce sous-espace :

$$\bar{v}_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{u}_i.$$

La séquence des vecteurs de l'*espace de Krylov*  $\mathcal{K}_m(\bar{v}_1, \bar{O}P)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{O}P \bar{v}_1 &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{O}P \bar{u}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \bar{u}_i = \alpha_1 \lambda_1 \left[ \bar{u}_1 + \sum_{i=2}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \bar{u}_i \right], \\ \bar{O}P (\bar{O}P \bar{v}_1) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \bar{O}P \bar{u}_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^2 \bar{u}_i = \alpha_1 \lambda_1^2 \left[ \bar{u}_1 + \sum_{i=2}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^2 \bar{u}_i \right], \\ \bar{O}P^{m-1} \bar{v}_1 &= \alpha_1 \lambda_1^{m-1} \left[ \bar{u}_1 + \sum_{i=2}^m \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{m-1} \bar{u}_i \right]. \end{aligned}$$

**Remarque 1 :**  $\bar{v}_1 \in \mathcal{U}_m \Rightarrow \mathcal{K}_m(\bar{v}_1, \bar{O}P) \subset \mathcal{U}_m$ . Ou encore, si le vecteur initial  $\bar{v}_1$  est orthogonal à une direction propre de la matrice  $\bar{O}P$ , alors l'*espace de Krylov* généré sera lui aussi orthogonal à cette direction. Cette propriété sous-tend la *méthode du restart* intégrée dans le logiciel ARPACK.

Remarque 2 : La direction du vecteur  $\bar{v}_m = \bar{O}\bar{P}^{m-1} \bar{v}_1$  tend vers la direction du vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module car  $(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{m-1}$  tend vers 0. Naturellement, l'espace  $\mathcal{K}_m(\bar{v}_1, \bar{O}\bar{P})$  tend vers l'espace engendré par les  $m$  vecteurs propres dominants non orthogonaux à  $\bar{v}_1$  [42]. La convergence sera plus lente si les valeurs propres sont proches les unes des autres, c'est à dire si  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$  est proche de 1.

Les instabilités thermoacoustiques sont caractérisées par des oscillations basse fréquence de la chambre de combustion. Il faut donc modifier la construction de l'espace de Krylov pour capturer les directions associées aux valeurs propres de plus petite partie réelle. Si on admet que  $\omega_i \ll \omega_r$ , c'est à dire que l'amplitude du signal de pression ne croît que de quelques pourcent à chaque oscillation, alors les valeurs propres de plus petite partie réelle sont aussi celles de plus petit module. Deux méthodes permettent d'orienter la construction de cet espace dans la direction des vecteurs propres de plus petit module.

– Méthode Invert :

Soit  $\lambda$  la valeur propre de plus petit module, du problème :

$$\bar{O}\bar{P} \bar{p} = \lambda \bar{p},$$

et  $\bar{p}$  son vecteur propre correspondant. Alors  $(\lambda, \bar{p})$  est aussi solution du problème :

$$\bar{O}\bar{P}^{-1} \bar{p} = \sigma \bar{p} \text{ avec } \sigma = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.4)$$

Ce changement de variable permet de déduire  $(\lambda, \bar{p})$  des éléments propres  $(\sigma, \bar{p})$  associés aux plus grandes valeurs propres de la matrice  $\bar{O}\bar{P}^{-1}$ . On peut, dans ce cas, utiliser l'espace  $\mathcal{K}_m(v_1, \bar{O}\bar{P}^{-1})$  qui s'étend naturellement dans les directions associées aux valeurs propres dominantes de la matrice  $\bar{O}\bar{P}^{-1}$ .

On verra dans la section suivante que l'algorithme d'Arnoldi permet de déterminer les éléments propres de  $\bar{O}\bar{P}^{-1}$  en faisant des produits matrices vecteurs successifs du type  $\bar{O}\bar{P}^{-1} \bar{v}_k = \bar{v}$ ,  $\bar{v}_k$  étant calculé par l'algorithme. Ne connaissant pas  $\bar{O}\bar{P}^{-1}$  (en effet il est trop coûteux d'inverser  $\bar{O}\bar{P}$  de taille  $N \times N$ ), on utilise une méthode qui permet d'approcher  $v$  solution de  $\bar{O}\bar{P} \bar{v} = \bar{v}_k$  en utilisant uniquement des produits matrice vecteur impliquant  $\bar{O}\bar{P}$ . Ainsi, l'utilisation de combinée des algorithmes d'Arnoldi et de GMRES [71] permet de déterminer les éléments  $(\lambda, \bar{p})$  à l'aide de produits matrice vecteur impliquant uniquement l'opérateur  $\bar{O}\bar{P}$ .

– Méthode du restart :

L'idée originelle de la méthode du restart proposée par Saad [70] est de recommencer (d'où le nom *restart*) la génération de l'espace de Krylov à partir d'un vecteur  $\bar{v}_1$  qui a été préconditionné pour être plus proche du sous-espace invariant recherché. De cette façon, on peut accélérer la convergence de  $\mathcal{K}_m(v_1, \bar{O}\bar{P})$  vers les directions recherchées.

La méthode de restart, intégrée dans ARPACK, permet d'extraire l'information sur les directions cherchées, de la base  $\text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$  de l'espace  $\mathcal{K}_m(v_1, \bar{O}\bar{P})$ , construite avec l'algorithme d'Arnoldi. A chaque restart, cette information est compressée et stockée dans le sous-espace de dimension  $k$ ,  $\mathcal{V}_k = \text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$  [45]. Plus de détails sur l'intégration de cette méthode dans le code AVSP sont donnés dans la section suivante.

### 3.2.2 Algorithme d'Arnoldi

Dans sa version la plus simple, l'*algorithme d'Arnoldi* construit simultanément le sous-espace  $\mathcal{V}_m = \text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$  et la *matrice de Rayleigh*  $H_m$  en utilisant la *méthode de Gram-Schmidt*.

• *Itération 1* : (Fig. 3.1)

Connaissant le vecteur  $\bar{v}_1$ , qui peut être choisi par l'utilisateur, imposé aléatoirement par le code, ou calculé par une *méthode de restart*, le vecteur  $\bar{v}_2$  est généré de la façon suivante :

$$\alpha_1 \bar{v}_2 = \bar{O}\bar{P} \bar{v}_1 - \langle \bar{O}\bar{P} \bar{v}_1 | \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 \text{ avec } \|\bar{v}_1\| = 1,$$

le premier élément de la *matrice de Rayleigh*  $H_m$  est défini par :

$$h_{11} = \langle \bar{O}\bar{P} \bar{v}_1 | \bar{v}_1 \rangle.$$

Le calcul du vecteur  $\bar{v}_2$ , nécessite le produit matrice vecteur  $\bar{O}\bar{P} \bar{v}_1$  et le produit scalaire  $\langle \bar{O}\bar{P} \bar{v}_1 | \bar{v}_1 \rangle$ . On remarque que si  $\bar{v}_1$  est un vecteur propre, alors  $\alpha_1 = 0$ .

• *Itération 2* : (Fig. 3.1)

Ayant déterminé le vecteur  $\bar{v}_2$ , le calcul du vecteur  $\bar{v}_3$  se fait comme suit :

$$\alpha_2 \bar{v}_3 = \bar{O}\bar{P} \bar{v}_2 - \langle \bar{O}\bar{P} \bar{v}_2 | \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2 - \langle \bar{O}\bar{P} \bar{v}_2 | \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1, \text{ avec } \|\bar{v}_1\| = 1.$$

Le calcul de  $\bar{v}_3$  nécessite le produit matrice vecteur  $\bar{O}\bar{P} \bar{v}_2$ . Les produits scalaires sont stockés dans la partie triangulaire supérieure de la *matrice de Rayleigh* :

$$\begin{aligned} h_{12} &= \langle \bar{O}\bar{P} \bar{v}_2 | \bar{v}_1 \rangle, \\ h_{22} &= \langle \bar{O}\bar{P} \bar{v}_2 | \bar{v}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Si  $\text{vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$  est un sous-espace invariant, alors  $\bar{O}\bar{P} \bar{v}_2 \in \text{vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$  et dans ce cas  $\alpha_2 = 0$ . Finalement  $\alpha_2$  mesure la distance de  $\text{vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$  à un sous-espace invariant, c'est le résidu à la deuxième itération. La sous diagonale inférieure de la *matrice de Rayleigh* (dont on rappelle qu'elle est de forme *Hessenberg*) contient l'historique des résidus. A la deuxième itération, on a :

$$h_{21} = \alpha_1.$$

• *Itération m :* (Fig. 3.2)

Après  $m$  itérations, la *factorisation d'Arnoldi* prend la forme matricielle suivante :

$$\bar{O}P \bar{V}_m = \bar{V}_m \bar{H}_m + \alpha_m \bar{v}_{m+1} \bar{e}_m^T, \quad (3.5)$$

avec  $H_m$  la *matrice de Rayleigh* de forme *Hessenberg* :

$$h_{ij} = \begin{cases} \langle \bar{O}P \bar{v}_j | \bar{v}_i \rangle & \text{si } j > i \\ \alpha_j & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\bar{V}_m$  la matrice des vecteurs  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$  qui engendrent  $\mathcal{V}_m$ . Le module du résidu à l'itération  $m$ ,  $\alpha_m$  mesure la distance entre  $\bar{O}P v_m$  et le sous-espace  $\mathcal{V}_m$ . Lorsque le résidu tend vers 0, l'espace  $\mathcal{V}_m$  tend vers un sous-espace invariant par  $\bar{O}P$ .

Remarque : On montre par récurrence que les vecteurs générés par l'*algorithme d'Arnoldi* forment une base orthonormée de  $K_m(\bar{v}, \bar{O}P) = \text{vect}\{\bar{v}_1, \bar{O}P\bar{v}_1, \dots, \bar{O}P^{m-1}\bar{v}_1\}$  :

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &\subset K_1(\bar{v}_1, \bar{O}P) = \text{vect}\{\bar{v}_1\}, \\ \bar{v}_2 &\subset K_2(\bar{v}_1, \bar{O}P) = \text{vect}\{\bar{v}_1, \bar{O}P\bar{v}_1\}, \\ \text{Supposons } \bar{v}_m &\subset K_m(\bar{v}_1, \bar{O}P) = \text{vect}\{\bar{v}_1, \bar{O}P\bar{v}_1, \dots, \bar{O}P^{m-1}\bar{v}_1\}, \\ \text{alors } \bar{v}_{m+1} &\subset \text{vect}\{\bar{O}P \bar{v}_m\} \cup \text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\} = K_{m+1}(\bar{v}_1, \bar{O}P) \end{aligned}$$

Par construction,  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$  forme une famille de  $m$  vecteurs orthonormés inclus dans  $K_m(\bar{v}_1, \bar{O}P)$ , cette famille de vecteurs constitue donc une base de cet espace.

itération 1 :	itération 2 :
$\ \bar{v}_1\  = 1,$ $h_{11} = \langle \bar{O}P \bar{v}_1   \bar{v}_1 \rangle,$ $\bar{r}_1 = \bar{O}P \bar{v}_1 - h_{11} \bar{v}_1,$ $h_{12} = \ \bar{r}_1\ ,$ $\bar{v}_2 = \frac{\bar{r}_1}{\ \bar{r}_1\ } \Rightarrow \bar{O}P \bar{v}_1 = h_{11} \bar{v}_1 + h_{12} \bar{v}_2.$	$\ \bar{v}_1\  = 1,$ $\ \bar{v}_2\  = 1,$ $h_{12} = \langle \bar{O}P \bar{v}_2   \bar{v}_1 \rangle,$ $h_{22} = \langle \bar{O}P \bar{v}_2   \bar{v}_2 \rangle,$ $\bar{r}_2 = \bar{O}P \bar{v}_2 - (h_{12} \bar{v}_1 + h_{22} \bar{v}_2),$ $h_{32} = \ \bar{r}_2\ ,$ $\bar{v}_3 = \frac{\bar{r}_2}{\ \bar{r}_2\ } \Rightarrow \bar{O}P \bar{v}_2 = h_{12} \bar{v}_1 + h_{22} \bar{v}_2 + h_{32} \bar{v}_3.$

FIG. 3.1 - Interprétation graphique de la méthode d'Arnoldi, dans sa version simplifiée.

itération j :
$\ \bar{v}_1\  = 1,$ $\ \bar{v}_2\  = 1,$ $\dots$ $\ \bar{v}_j\  = 1,$ $h_{1j} = \langle \bar{O}P \bar{v}_j   \bar{v}_1 \rangle,$ $h_{2j} = \langle \bar{O}P \bar{v}_j   \bar{v}_2 \rangle,$ $\dots$ $h_{jj} = \langle \bar{O}P \bar{v}_j   \bar{v}_j \rangle,$ $\bar{r}_j = \bar{O}P \bar{v}_j - (h_{1j} \bar{v}_1 + h_{2j} \bar{v}_2 + \dots + h_{jj} \bar{v}_j).$
$\bar{O}P \quad \bar{V}_m = \bar{V}_m \bar{H}_m + \bar{R}$

FIG. 3.2 - La factorisation d'Arnoldi de rang m.



### 3.2.3 Intégration dans AVSP

#### Le logiciel ARPACK

La *méthode d'Arnoldi* est intégrée dans le code AVSP via le logiciel ARPACK qui a prouvé son efficacité par sa très large utilisation dans la communauté scientifique. La spécificité et l'efficacité de ce logiciel réside dans la *méthode du restart* qui est employée pour pallier les principales difficultés qui sont habituellement rencontrées par la méthode classique d'Arnoldi, à savoir :

- Lorsque la convergence est lente (cas où les valeurs propres sont proches les unes des autres) le nombre de vecteurs  $\bar{v}_i$ , qui engendrent l'espace de Krylov  $\mathcal{K}_i(\bar{v}_1, \bar{O}\bar{P})$ , croît. L'espace mémoire occupé par le stockage de ces vecteurs est de plus en plus important et le processus d'orthogonalisation pour déterminer le vecteur suivant  $\bar{v}_{i+1}$  prend de plus en plus de temps. La *méthode du restart* impose une taille  $m$  maximale pour la taille de l'espace  $\mathcal{K}_{i \leq m}(\bar{v}_1, \bar{O}\bar{P})$ . Une fois que cette taille est atteinte on arrête d'étendre l'espace de Krylov. La méthode "Shifted QR", décrite dans les lignes 4 à 8 de l'algorithme 5, permet d'extraire, de la séquence des vecteurs  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ , les  $k$  directions les plus proches de celles recherchées (en filtrant les  $p$  autres directions) et construit une base  $\text{vect}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$  de ce sous-espace de dimension  $k$ , noté  $\mathcal{V}_k$ .  
On applique ensuite  $p = m - k$  pas additionnels de la *méthode d'Arnoldi* pour finir de construire la base de l'espace de Krylov  $\mathcal{K}_m(\bar{v}_1, \bar{O}\bar{P})$  qui s'oriente vers les directions recherchées.  
On itère ce processus, et les  $k$  directions conservées dans  $\mathcal{V}_k$  sont de plus en plus proches des directions propres recherchées au fur et à mesure des *restarts* successifs.
- Cette méthode permet d'accélérer la convergence de l'algorithme, et même d'accéder aux plus petites valeurs propres sans utiliser la *méthode "invert"* vue dans la section 3.2.1.

Les algorithmes 4 et 5, tirés de [45], détaillent la méthode telle qu'elle est intégrée dans le code AVSP. On distingue deux étapes essentielles :

- étape 1 : Factorisation d'Arnoldi de rang  $m$  (algorithme 4)

---

**Algorithm 4** Factorisation d'Arnoldi de rang  $m$

---

```

1: Entrée : Choisir  $\bar{v}_1$  le vecteur initial de norme 1.
2: for  $j = 1, 2, \dots, m$  do
3:    $h_{ij} = (\bar{O}\bar{P} \bar{v}_j, \bar{v}_i), i = 1, 2, \dots, j, \{1\}$ 
4:    $\bar{w}_j = \bar{O}\bar{P} \bar{v}_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} \bar{v}_i, \{2\}$ 
5:    $h_{j+1,j} = \|\bar{w}_j\|_2,$ 
6:   if  $h_{j+1,j} = 0$  then
7:     stop
8:   end if
9:    $\bar{v}_{j+1} = \bar{w}_j / h_{j+1,j}.$ 
10: end for

```

---

- 1 : Le vecteur initial peut être spécifié par l'utilisateur, ou imposé aléatoirement par le code.  
3-5 : Orthogonalisation de *Gram-Schmidt* et construction de la *matrice de Rayleigh*  $H_m$ .  
6 : Test de convergence.  
9 : Normalisation du vecteur suivant  $\bar{v}_{k+1}$ .

- étape 2 : "Restart" de la méthode jusqu'à convergence (algorithme 5)

---

**Algorithm 5** méthode de restart

---

```

1: Entrée : factorisation d'Arnoldi de taille  $m$  :  $\bar{O}\bar{P} \bar{V}_m = \bar{V}_m \bar{H}_m + \bar{f}_m \bar{e}_m^T$ 
2: for  $l = 1, 2, \dots$  jusqu'à convergence do
3:   Calcul de  $\sigma(\bar{H}_m)$  et sélection des  $p$  shifts  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ 
4:   for  $j = 1, 2, \dots, p$  do
5:     Factorisation  $[\bar{Q} \bar{R}] = qr(\bar{H}_m - \mu_j I)$ 
6:      $\bar{H}_m \leftarrow \bar{Q}^* \bar{H}_m \bar{Q}; \bar{V}_m \leftarrow \bar{V}_m \bar{Q}$ 
7:      $\bar{q} \leftarrow \bar{q}^* \bar{Q}$ 
8:   end for
9:    $\bar{f}_k \leftarrow \bar{v}_{k+1} \beta_k + \bar{f}_m \sigma_k$ 
10:   $\bar{V}_k \leftarrow \bar{V}_m(1:n, 1:k); \bar{H}_k \leftarrow \bar{H}_m(1:k, 1:k)$ 
11:  on a  $\bar{O}\bar{P} \bar{V}_k = \bar{V}_k \bar{H}_k + \bar{f}_k \bar{e}_k^T$ , on applique  $p$  pas additionnels de Algo1 pour compléter la factorisation d'Arnoldi de taille  $m$  :  $\bar{O}\bar{P} \bar{V}_m = \bar{V}_m \bar{H}_m + \bar{f}_m \bar{e}_m^T$ 
12: end for

```

---

- 2 :  $l$  représente le nombre de *restart* effectués jusqu'à convergence.  
3 :  $\mu_1, \dots, \mu_p$  sont les valeurs propres non intéressantes.  
4-8 : Filtrage des vecteurs  $\bar{v}_{i,i=1,\dots,k}$  avec  $k$  le nombre de valeurs propres demandées par l'utilisateur.  
9-10 : Mises à jour 11 :  $m - k = p$  pas additionnels de la *méthode d'Arnoldi*.

### 3.3 La méthode de Jacobi-Davidson

#### 3.3.1 Problèmes linéaires

Soit le problème aux valeurs propres linéaire :

$$\bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{p} - \lambda\bar{p} = \bar{0}.$$

Comme la *méthode d'Arnoldi*, la *méthode de Jacobi-Davidson* est une méthode de projection sur un sous-espace vectoriel. Les éléments propres du problème initial de taille  $N$ , notés  $(\lambda, \bar{p})$ , sont approchés par les *éléments de Ritz*, qui à l'itération  $k$  sont notés  $(\lambda_k, \bar{p}_k = \bar{U}_k\bar{x})$ . Ils se déduisent des éléments propres  $(\lambda_k, \bar{x})$  du problème projeté de taille  $k \ll N$  :

$$\bar{U}_k^*\bar{D}\bar{U}_k\bar{x} - \lambda_k\bar{x} = \bar{0}. \quad (3.6)$$

La principale différence entre ces deux méthodes est la construction du sous-espace associé aux valeurs propres recherchées. La *méthode d'Arnoldi* construit une base  $\mathcal{V}_m = \text{vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$  de l'espace de l'espace de Krylov  $\mathcal{K}_m(\bar{v}_1, D)$ . A l'itération  $k + 1$ , le sous-espace  $\mathcal{V}_k$ , est étendu dans la direction du vecteur  $\bar{v}_{k+1}$ , tel que :

$$\alpha_k\bar{v}_{k+1} = \bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{v}_k - \sum_{i=1}^k \langle \bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{v}_k | \bar{v}_i \rangle \bar{v}_i.$$

La *méthode de Jacobi-Davidson* construit le sous-espace, noté  $\mathcal{U}_m = \text{vect}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$  qui à l'itération  $k + 1$  est étendu dans la direction  $\bar{u}_{k+1} = \tilde{u} - \sum_{i=1}^k \langle \tilde{u} | \bar{u}_i \rangle \bar{u}_i$ , avec  $\tilde{u}$  solution de l'équation de correction :

$$(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})(\bar{M}^{-1}\bar{D} - \lambda_k\bar{I})(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})\tilde{u} = -\bar{r}_k,$$

avec  $\bar{r}_k = \bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{p}_k - \lambda_k\bar{p}_k$ , le résidu à l'itération  $k$ .

#### L'équation de correction :

L'équation de correction s'obtient en combinant des idées attribuées aux mathématiciens Jacobi et Davidson. Conformément à la méthode de projection, la valeur propre de Ritz à l'itération  $k$ ,  $\lambda_k$ , est aussi valeur propre du problème projeté de taille  $k$  :

$$\bar{U}_k^*\bar{D}\bar{U}_k\bar{x} - \lambda_k\bar{x} = \bar{0}.$$

On peut en déduire le vecteur propre de Ritz à l'itération  $k$ ,  $\bar{p}_k = \bar{U}_k\bar{x}$ . Le résidu à l'itération  $k$ , noté  $\bar{r}_k$ , est défini de la façon suivante :

$$\bar{r}_k = \bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{p}_k - \lambda_k\bar{p}_k = \bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{U}_k\bar{x} - \lambda_k\bar{U}_k\bar{x}.$$

On remarque que ce résidu  $\bar{r}_k$  est M-orthogonal à au vecteur de Ritz à l'itération  $k$  :

$$\begin{aligned} \langle \bar{r}_k | \bar{p}_k \rangle &= \bar{p}_k^*\bar{M}\bar{r}_k \\ &= \bar{x}^*\bar{U}_k^*\bar{M}(\bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{U}_k\bar{x} - \lambda_k\bar{U}_k\bar{x}) \\ &= \bar{x}^*(\bar{U}_k^*\bar{D}\bar{U}_k\bar{x} - \lambda_k\bar{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'objectif de l'équation de correction est d'approximer le vecteur  $\bar{v}$ , M-orthogonal à  $\bar{p}_k$  tel que :

$$\bar{M}^{-1}\bar{D}(\bar{p}_k + \bar{v}) - \lambda(\bar{p}_k + \bar{v}) = \bar{0}, \quad (3.7)$$

avec  $\lambda$  la valeur propre de plus petit module de  $\bar{M}^{-1}\bar{D}$ . Dans le cas où il existe  $\lambda, \bar{v}$  solution de Eq. (3.7) alors  $(\lambda, \bar{p} = \bar{p}_k + \bar{v})$  sont les éléments propres recherchés. Eq. (3.7) peut aussi s'écrire :

$$(\bar{M}^{-1}\bar{D} - \lambda\bar{I})\bar{v} + (\bar{M}^{-1}\bar{D} - \lambda\bar{I})\bar{p}_k = \bar{0}. \quad (3.8)$$

Seules les composantes du vecteur  $\bar{v}$  qui sont M-orthogonales au vecteur  $\bar{p}_k$  sont recherchées, donc on choisit  $\bar{v}$  tel que :  $\bar{v} = (\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})\bar{v}$ . Dans ce cas on restreint Eq. (3.8) au sous-espace M-orthogonal à  $\bar{p}_k$ . Pour ce faire on multiplie à gauche par le projecteur  $(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})$ , il vient :

$$(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})(\bar{M}^{-1}\bar{D} - \lambda\bar{I})(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})\bar{v} + (\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})(\bar{M}^{-1}\bar{D} + \lambda\bar{I})\bar{p}_k = \bar{0}.$$

Ne connaissant pas  $\lambda$  on utilise son approximation à l'itération  $k$ ,  $\lambda_k$ , pour déterminer une approximation de  $\bar{v}$ , notée  $\tilde{u}$  :

$$(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})(\bar{M}^{-1}\bar{D} - \lambda_k\bar{I})(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})\tilde{u} = -(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})\bar{r}_k = -\bar{r}_k,$$

L'espace  $\mathcal{U}$  est étendu dans la direction "optimale" pour approcher la valeur propre  $\lambda$ . Comme on le verra dans la section (5.4.2) cette recherche valeur propre après valeur propre induit une convergence linéaire du temps de calcul en fonction du nombre d'éléments propres demandés. La *méthode d'Arnoldi*, dont l'objectif est d'approcher le sous-espace invariant de taille égale au nombre de valeurs propres demandées, présente une convergence en plateau.

### Intégration dans AVSP :

La *méthode de Jacobi-Davidson* utilisée dans le code AVSP pour la résolution des problèmes linéaires est détaillée dans l'algorithme (6).

- lignes 1-3 : Initialisations
- ligne 4 : *Iter* représente le nombre de *restart*.
- ligne 5 : *Conv* représente le nombre de valeurs propres convergées, *MaxSpace* la taille du *restart*.
- ligne 6 : Produit matrice vecteur demandé à l'utilisateur.
- lignes 7-10 : La *matrice de Rayleigh* stocke les produits scalaires.
- ligne 13 : Calcul du résidu à l'itération  $k$ .
- ligne 14 : On stocke les *éléments de Ritz*.
- lignes 23-28 : *Restart*
- lignes 29-34 : Extension du sous-espace par résolution de l'*équation de correction*.

**Algorithm 6** Jacobi Davidson pour problèmes Linéaires

---

```

1: Choisir un vecteur initial  $\tilde{u} = \bar{u}_0$ 
2:  $Conv = 0$ , le nombre de valeurs propres convergées
3:  $\bar{u}_1 = \tilde{u}/\|\tilde{u}\|$ 
4: while  $Iter = 1, \dots, MaxIter$  do
5:   for  $k = Conv + 1, \dots, MaxSpace$  do
6:      $\bar{u}_k^D = \bar{M}^{-1}D\bar{u}_k$ 
7:     for  $i = 1, \dots, k$  do
8:        $h_{i,k}^D = \bar{u}_i^* \bar{M} \bar{u}_k^D$ 
9:        $h_{k,i}^D = \bar{u}_k^* \bar{M} \bar{u}_i^D$ 
10:    end for
11:    Calcul des éléments propres de  $\bar{H}$  par une méthode  $QR$  :  $\bar{H}\bar{x}_k = \lambda_k\bar{x}_k$  avec  $\omega_k$  la valeur propre de plus petite partie réelle.
12:     $\bar{p}_k = \bar{U}_k\bar{x}$ 
13:     $\bar{r}_k = \bar{M}^{-1}\bar{D}\bar{p}_k - \lambda_k\bar{p}_k$ 
14:    if  $\|\bar{r}_k\|_2 \leq \text{tolérance}$  then
15:       $Conv = Conv + 1$ 
16:       $Eival(Conv) = \lambda_k$ 
17:       $Eivec(:, Conv) = \bar{p}_k$ 
18:      if  $Conv = \text{nombre de valeurs propres demandées}$  then
19:        STOP
20:      end if
21:      Selection de la valeur propres suivante  $\lambda_k$  avec la plus petite partie réelle, et  $\bar{x}$  le vecteur propres correspondant. Calcul du nouveau résidu  $\bar{r}_k$  et du vecteur  $\bar{p}_k$  comme ligne 12-13.
22:    end if
23:    if  $k = MaxSpace$  then
24:       $\bar{U}_k(:, 1 : Conv) = Eivec(:, 1 : Conv)$ 
25:       $\bar{U}_k(:, 1 : Conv + 1) = \bar{p}_k$ 
26:      Orthogonalisation de  $\bar{U}_k(:, 1 : Conv + 1)$ 
27:      Calcul de  $H = \bar{U}_k^*(:, 1 : Conv)\bar{D}\bar{U}_k(:, 1 : Conv)$ 
28:    else
29:      Trouver  $\tilde{u}$  solution de l'équation de correction :
30:       $(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})(\bar{M}^{-1}\bar{D} - \lambda_k\bar{I})(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})\tilde{u} = -\bar{r}_k$ 
31:      for  $i = 1, \dots, k$  do
32:         $\tilde{u} = \tilde{u} - (\bar{u}_i^* \bar{M} \tilde{u})\bar{u}_i$ 
33:      end for
34:       $\bar{u}_k = \tilde{u}/\|\tilde{u}\|$ 
35:    end if
36:  end for
37: end while

```

---

### 3.3.2 Problèmes quadratiques

La méthode de Jacobi Davidson présente l'avantage de s'adapter directement aux problèmes quadratiques et plus généralement aux problèmes aux valeurs propres polynomiaux. On peut alors utiliser l'algorithme (1) où, à chaque pas de la méthode de point fixe, il faut résoudre le problème :

$$\bar{M}^{-1}\bar{C}\bar{p} + \omega\bar{M}^{-1}\bar{B}\bar{p} + \omega^2\bar{p} = \bar{0}.$$

Les *éléments de Ritz* à l'itération  $k$  :  $(\omega_k, \bar{p}_k = \bar{U}_k\bar{x})$ , se déduisent des éléments propres  $(\omega_k, \bar{x})$  du problème projeté :

$$\bar{U}_k^*\bar{C}\bar{U}_k\bar{x} + \omega_k\bar{U}_k^*\bar{B}\bar{U}_k\bar{x} + \omega_k^2\bar{x} = \bar{0} \text{ avec } \bar{U}_k^*\bar{M}\bar{U}_k = \bar{I}. \quad (3.9)$$

Pour déterminer les éléments propres  $(\omega_k, \bar{x})$  du problème aux valeurs propres quadratique de taille  $m$ , on fait le changement de variable :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \omega_k\bar{x} \\ \bar{x} \end{pmatrix},$$

Eq. (3.9) se réduit au problème linéaire de taille  $2m$  :

$$\begin{pmatrix} -\bar{U}_k^*\bar{C}\bar{U}_k & -\bar{U}_k^*\bar{B}\bar{U}_k \\ \bar{I} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_k\bar{x} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \omega_k \begin{pmatrix} \omega_k\bar{x} \\ \bar{x} \end{pmatrix}.$$

On peut alors utiliser une méthode de  $QR$  pour déterminer  $(\omega_k, \bar{X})$  et en déduire  $(\omega_k, \bar{p}_k)$ .

Le résidu à l'itération  $k$  prend la forme :

$$\bar{r}_k = \bar{M}^{-1}\bar{C}\bar{p}_k + \omega_k\bar{M}^{-1}\bar{B}\bar{p}_k + \omega_k^2\bar{p}_k, \quad (3.10)$$

et le vecteur suivant  $\bar{u}_{k+1} = \tilde{u} - \sum_{i=1}^k \langle \tilde{u} | \bar{u}_i \rangle \bar{u}_i$  avec  $\tilde{u}$  solution de l'équation de correction :

$$(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})(\bar{M}^{-1}\bar{C} + \omega_k\bar{M}^{-1}\bar{B} + \omega_k^2\bar{I})(\bar{I} - \bar{p}_k\bar{p}_k^*\bar{M})\tilde{u} = -\bar{r}_k,$$

#### Intégration dans AVSP :

La méthode de Jacobi-Davidson utilisée dans le code AVSP pour la résolution des problèmes linéaires est détaillée dans l'algorithme (7).

**Algorithm 7** Jacobi Davidson pour problèmes Quadratiques

---

```

1: Choisir un vecteur initial  $\tilde{u} = \bar{u}_0$ 
2:  $Conv = 0$ , le nombre de valeurs propres convergées
3:  $\bar{u}_1 = \tilde{u}/\|\tilde{u}\|$ 
4: for  $Iter = 1, \dots, MaxIter$  do
5:   for  $k = Conv + 1, \dots, MaxSpace$  do
6:      $\bar{u}_k^C = \bar{M}^{-1}C\bar{u}_k$ 
7:      $\bar{u}_k^B = \bar{M}^{-1}B\bar{u}_k$ 
8:     for  $i = 1, \dots, k$  do
9:        $h_{i,k}^C = \bar{u}_i^* \bar{M} \bar{u}_k^C$ 
10:       $h_{k,i}^C = \bar{u}_k^* \bar{M} \bar{u}_i^C$ 
11:       $h_{i,k}^B = \bar{u}_i^* \bar{M} \bar{u}_k^B$ 
12:       $h_{k,i}^B = \bar{u}_k^* \bar{M} \bar{u}_i^B$ 
13:    end for
14:     $\bar{H} = \begin{pmatrix} -\bar{H}_k^B & -\bar{H}_k^C \\ \bar{I} & \bar{0} \end{pmatrix}$ 
15:    Calcul des éléments propres de  $\bar{H}$  par une méthode QR.
16:    Choix de  $\omega_k$  : la valeur propre de plus petite partie réelle,  $\bar{x}_k$  la moitié inférieure du vecteur propre.
17:     $\bar{p}_k = \bar{U}_k \bar{x}$ 
18:     $\bar{r}_k = \bar{M}^{-1} \bar{C} \bar{p}_k + \omega_k \bar{M}^{-1} \bar{B} \bar{p}_k + \omega_k^2 \bar{p}_k$ 
19:    if  $\|\bar{r}\|_2 \leq \text{tolérance}$  then
20:       $Conv = Conv + 1$ 
21:       $Eival(Conv) = \omega_k$ 
22:       $Eivec(:, Conv) = \bar{p}_k$ 
23:      if  $Conv = \text{nombre de valeurs propres demandées}$  then
24:        STOP
25:      end if
26:      Sélection de la valeur propre suivante  $\omega_k$  avec la plus petite partie réelle, et  $\bar{x}$  le vecteur propre correspondant. Calcul du nouveau résidu  $\bar{r}_k$  et du vecteur  $\bar{p}_k$  comme ligne 18-21.
27:    end if
28:    if  $k = MaxSpace$  then
29:       $\bar{U}_k(:, 1 : Conv) = Eivec(:, 1 : Conv)$ 
30:       $\bar{U}_k(:, 1 : Conv + 1) = \bar{p}_k$ 
31:      Orthogonalisation de  $\bar{U}_k(:, 1 : Conv + 1)$ 
32:      Calcul de  $H^C = \bar{U}_k^*(:, 1 : Conv) \bar{C} \bar{U}_k(:, 1 : Conv)$ 
33:      Calcul de  $H^B = \bar{U}_k^*(:, 1 : Conv) \bar{B} \bar{U}_k(:, 1 : Conv)$ 
34:    else
35:      Trouver  $\tilde{u}$  solution de l'équation de correction :
36:       $(\bar{I} - \bar{p}_k \bar{p}_k^* \bar{M})(\bar{M}^{-1} \bar{C} + \omega_k \bar{M}^{-1} \bar{B} + \omega_k^2 \bar{I})(\bar{I} - \bar{p}_k \bar{p}_k^* \bar{M}) \tilde{u} = -\bar{r}_k$ 
37:      for  $i = 1, \dots, k$  do
38:         $\tilde{u} = \tilde{u} - (\bar{u}_i^* \bar{M} \tilde{u}) \bar{u}_i$ 
39:      end for
40:       $\bar{u}_k = \tilde{u}/\|\tilde{u}\|$ 
41:    end if
42:  end for
43: end for

```

---

### 3.4 Comparaisons

L'objectif de cette section est de comparer les performances des deux méthodes : *Arnoldi* intégrée dans ARPACK et *Jacobi-Davidson*. On a vu au début du chapitre que l'utilisation de la méthode de point fixe permet de réduire la résolution du problème aux valeurs propres non linéaire à la résolution successive de problèmes aux valeurs propres linéaires ou quadratiques. C'est pourquoi on s'intéresse, dans cette section, à l'efficacité des deux méthodes sur ces deux types de problèmes aux valeurs propres. La rapidité de convergence de la *méthode de point fixe* étant dépendante de la fonction de transfert de flamme imposée et de l'impédance du problème considéré.

Les tests ont été réalisés sur des maillages bidimensionnels et tridimensionnels. Les tendances observées sur ces deux types de maillages sont identiques, les résultats sont donc présentés dans le cas tridimensionnel uniquement. Le comportement des deux méthodes en fonction de la taille du maillage est analysé. On s'intéresse aussi à l'évolution du temps CPU en fonction du nombre de valeurs propres demandées par l'utilisateur. Enfin, dans chacune des deux méthodes, l'utilisateur doit imposer, au début du calcul, la taille du sous-espace de projection, notée  $m$  dans les sections précédentes. Il est difficile d'avoir une idée a priori de la valeur optimale du paramètre  $m$ . Il se pose alors la question suivante : "A-t-on intérêt à faire des "restarts" fréquemment et donc à fixer  $m$  petit ( $m = 2 \times k$ ,  $k$  le nombre de valeurs propres demandées) ou doit-on laisser à l'algorithme, qui cherche les directions propres, le maximum de liberté et donc fixer  $m$  grand ( $m = 10 \times k$ )?"

Dans tous les calculs présentés dans cette partie, le vecteur d'initialisation des algorithmes de *Jacobi-Davidson* et d'*Arnoldi* est le même. Ceci afin d'éviter tout biais inhérent à l'influence du vecteur initial sur la convergence de la méthode. De même, le critère de convergence est imposé de façon à assurer la même précision sur les résultats fournis par les deux méthodes. Les résultats présentés dans cette section ont été publiés dans *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, l'article est joint en annexe.

#### 3.4.1 Résultats

Dans les résultats ci-dessous,  $T_{CPU}$  représente le temps de calcul par simulation AVSP adimensionné par un temps de référence. Le temps de référence est le temps mis par l'algorithme d'*Arnoldi* pour déterminer 4 valeurs propres du problème linéaire sur un maillage de 8000 nœuds, avec un sous-espace de projection de taille 60 (Fig. 3.4).

Avant d'analyser plus en détail l'influence des divers paramètres (taille  $m$  du sous-espace de projection, nombre  $k$  de valeurs propres demandées et taille du maillage) sur les performances des deux méthodes, on remarque au premier abord (Fig. 3.3, 3.4, 3.5) que la *méthode d'Arnoldi* intégrée dans ARPACK est plus rapide que la *méthode de Jacobi-Davidson* pour la résolution des problèmes linéaires. Elle semble en revanche inadaptée pour les problèmes quadratiques. En effet le changement de variable que nécessite la *méthode d'Arnoldi* pour traiter ce type de problème pénalise très fortement le temps de calcul (d'un facteur 5 jusqu'à 8 environ par rapport à la résolution d'un problème linéaire !). Dans le cas quadratique la *méthode de Jacobi-Davidson* est, de ce fait, plus rapide. En effet si cette dernière méthode est moins performante que la *méthode d'Arnoldi* sur les problèmes linéaires, la résolution des problèmes quadratiques n'engendre pas d'augmentation notable de temps de calcul.



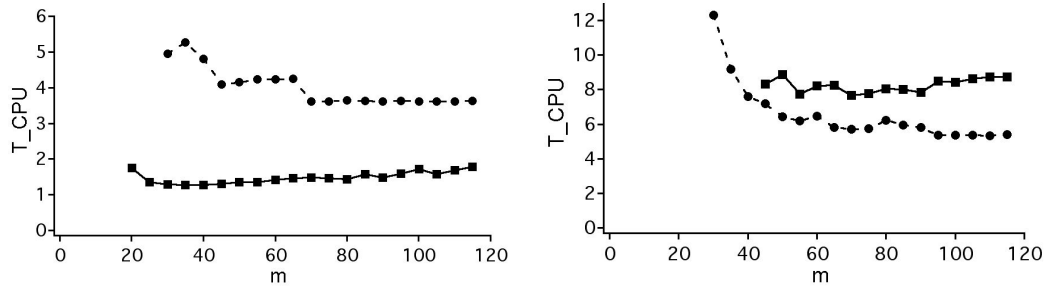


FIG. 3.3 - Temps CPU (adimensionné) en fonction de la taille  $m$  du sous-espace pour un problème linéaire (à gauche) et pour un problème quadratique (à droite). Trait plein : Arnoldi. Trait discontinu : Jacobi-Davidson.

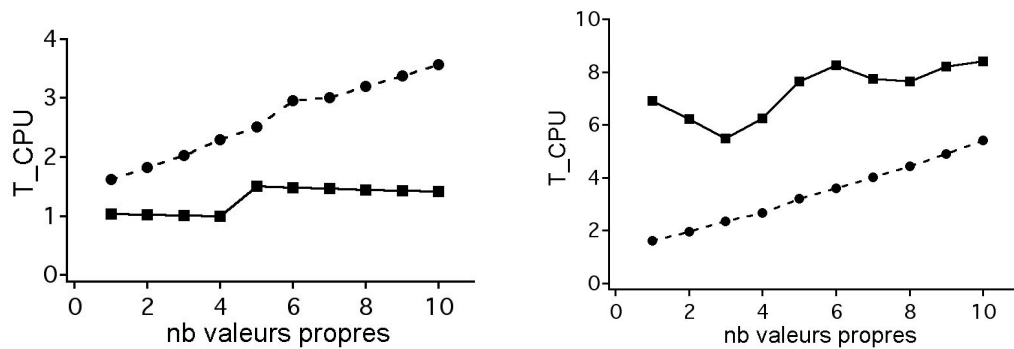


FIG. 3.4 - Temps CPU (adimensionné) en fonction du nombre de valeurs propres demandées pour un problème linéaire (à gauche) et pour un problème quadratique (à droite). Trait plein : Arnoldi. Trait discontinu : Jacobi-Davidson.

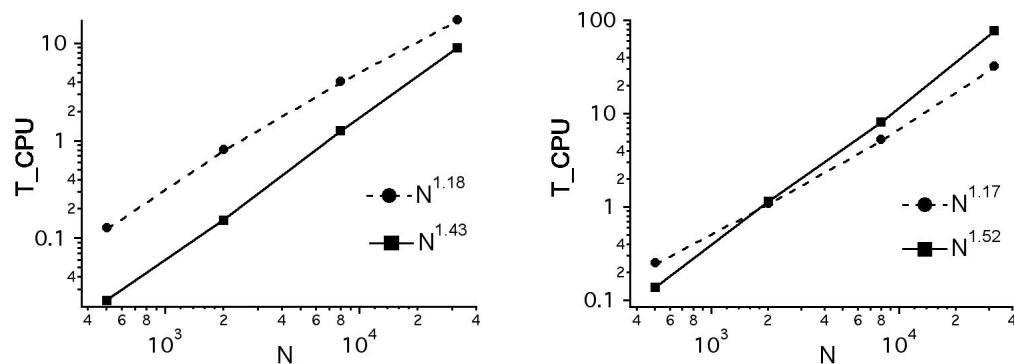


FIG. 3.5 - Temps CPU (adimensionné) en fonction du nombre de nœuds du maillage pour un problème linéaire (à gauche) et pour un problème quadratique (à droite). Trait plein : Arnoldi. Trait discontinu : Jacobi-Davidson.

**a- Influence de la taille  $m$  du sous espace de recherche**

La Fig. 3.3 compare l'évolution du temps CPU (adimensionné) mis par les *méthodes d'Arnoldi* et de *Jacobi-Davidson* pour déterminer 10 valeurs propres sur un maillage de 8000 nœuds lorsque l'on fait varier la taille  $m$  du sous-espace de projection. Dans le cas linéaire comme dans le cas quadratique, on remarque que la *méthode d'Arnoldi* est assez peu sensible au nombre  $m$  de vecteurs qui engendrent le sous-espace de projection. En regardant précisément, on voit que le temps minimal de calcul est obtenu pour un  $m$  faible ( $m = 3 \times k$ ). Cette remarque peut s'expliquer par le fait que la méthode de "restart" intégrée dans le logiciel ARPACK est très performante. L'information sur les directions recherchées est correctement traitée à chaque *restart*, ce qui permet d'orienter l'*espace de Krylov*, généré par les  $p = m - k$  pas additionnels de l'*algorithme d'Arnoldi*, dans les bonnes directions (algorithme 5). La *méthode de Jacobi Davidson* intégrée dans AVSP ne bénéficie pas d'une méthode aussi performante de restart et montre une dépendance plus importante à la taille du sous-espace de recherche. Il vaut mieux, dans ce cas, laisser de la liberté à l'algorithme de recherche des directions propres et donc choisir  $m$  grand ( $m = 10 \times k$ ).

**b- Influence du nombre de valeur propres calculées**

La Fig. 3.4 compare l'évolution du temps CPU (adimensionné) mis par les *méthodes d'Arnoldi* et de *Jacobi-Davidson* pour déterminer  $k$  valeurs propres ( $k$  variant entre 1 et 10) sur un maillage de 8000 nœuds. En utilisant les résultats de la Fig. 3.3 on choisit  $m$  optimal selon la méthode et le type du problème aux valeurs propres (par exemple : pour le problème linéaire, on prend  $m = 30$  pour la *méthode d'Arnoldi* et  $m = 100$  pour la *méthode de Jacobi-Davidson*). Les résultats présentés dans Fig. 3.4 montrent que l'évolution du temps CPU en fonction du nombre de valeurs propres demandées est très différente pour les deux algorithmes. Les méthodes employées pour la recherche des directions propres expliquent ces différences.

L'*espace de Krylov* généré par la *méthode d'Arnoldi* s'aligne vers les  $k$  directions propres dominantes (celles non filtrées par le *restart*). Cette stratégie vise à approcher le sous-espace invariant associé aux  $k$  valeurs propres spécifiées et induit une convergence vers plusieurs directions propres simultanément. On observe donc une "croissance en plateau" du temps CPU en fonction du nombre de valeurs propres demandées. Cette remarque est particulièrement visible pour le problème linéaire de Fig. 3.4. On observe également, dans le cas quadratique que l'*algorithme d'Arnoldi* met moins de temps pour trouver 3 valeurs propres plutôt qu'une seule. Cette observation peut s'expliquer si on remarque qu'en augmentant le nombre  $k$  de valeurs propres demandées, on augmente aussi le nombre de directions conservées à chaque *restart*. Dans certains cas ces directions supplémentaires permettent d'accélérer la convergence.

L'*équation de correction* utilisée dans la *méthode de Jacobi-Davidson* pour étendre le sous-espace de recherche permet d'approcher UNE seule direction propre à la fois. Cette recherche direction propre après direction propre se caractérise par une croissance linéaire du temps de calcul avec le nombre de valeurs propres demandées. Cette méthode reste cependant bien plus efficace que la *méthode d'Arnoldi* sur les problèmes quadratiques, même si on demande 10 valeurs propres. De plus, dans le cas d'un algorithme de *point fixe*, où une seule valeur propres est utile, elle devient même compétitive pour les problèmes linéaires.

### c- Influence de la taille du maillage

La Fig. 3.4 compare l'évolution du temps CPU (adimensionné) mis par les *méthodes d'Arnoldi et de Jacobi-Davidson* pour déterminer 10 valeurs propres quand la taille du maillage augmente. Quatre maillages sont testés : 500 nœuds, 2000 nœuds, 8000 nœuds et 30000 nœuds. Comme dans le cas précédent, on choisit  $m$  optimal en fonction du type de problème et de la méthode utilisée. Le temps de calcul augmente en puissance avec le nombre de nœuds dans le maillage. Dans le cas du problème linéaire, l'*algorithme d'Arnoldi* reste plus rapide que celui de *Jacobi-Davidson* sur les quatre maillages testés. Cependant, l'accroissement du temps CPU est moindre dans le cas *Jacobi-Davidson*. Cette tendance laisse penser que pour des maillages de taille plus importante, l'*algorithme de Jacobi-Davidson* sera plus rapide que celui d'*Arnoldi*. On remarque également que l'évolution du temps de calcul est la même que le problème soit linéaire ou quadratique pour *Jacobi-Davidson*. Ce n'est pas le cas pour *Arnoldi*, la pente est supérieure dans le cas quadratique. Il apparaît clairement que la *méthode de Jacobi-Davidson* est plus rapide que celle d'*Arnoldi* pour les problèmes quadratiques (dès que le maillage fait plus de 2000 points). L'écart entre les deux algorithmes augmente avec le nombre de points.

### 3.4.2 Conclusions

Ces résultats suggèrent qu'il faut choisir la méthode en fonction du problème étudié.

– Cas du problème aux valeurs propres purement linéaire :

Lorsque le taux de dégagement de chaleur est nul ( $\bar{n} = 0$ ) et les conditions aux limites sont de type Dirichlet ou Neumann, le problème aux valeurs propres non linéaire Eq. (3.2) se réduit au problème linéaire suivant :

$$\bar{O}\bar{P}\bar{p} = \lambda\bar{p} \text{ avec } \lambda = -\omega^2.$$

Les observations faites dans cette section, pour ce type de problème, encouragent l'utilisation de la *méthode d'Arnoldi*.

– Cas du problème aux valeurs propres purement quadratique :

Lorsque le taux de dégagement de chaleur est nul ( $\bar{n} = 0$ ) avec une condition limite de Robin qui ne dépend pas de la valeur propre du problème (soit une impédance supposée constante sur les bords du domaine), le problème aux valeurs propres non linéaire Eq. (3.2) se réduit au problème quadratique suivant :

$$\bar{M}^{-1}\bar{A}\bar{p} + \omega\bar{M}^{-1}\bar{B}\bar{p} + \omega^2\bar{p} = 0.$$

On a vu que l'utilisation de la *méthode d'Arnoldi* requiert un changement de variable qui double la taille du problème à résoudre, de plus il détruit la structure de la matrice d'opérateur :

$$\begin{pmatrix} -\bar{M}^{-1}\bar{B} & -\bar{M}^{-1}\bar{C} \\ \bar{I} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\bar{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \omega\bar{p} \\ \bar{p} \end{pmatrix}.$$

La *méthode de Jacobi-Davidson*, plus adaptée pour la résolution des problèmes aux valeurs propres quadratiques, est préconisée.

– Dans le cas général :

Si on considère les fluctuations du dégagement de chaleur non nulles et qui dépendent de la pulsation du forçage acoustiques :  $n_u(\vec{x}, \omega_r)$ ,  $\tau(\vec{x}, \omega_r)$  et des impédances complexes,  $Z(\omega_r)$ , sur les bords du domaine, alors il faut résoudre le problème aux valeurs propres non linéaire (Eq. (3.2)). Dans ce cas les résultats indiquent qu'il faut utiliser :

- soit la méthode de point fixe décrite dans l'algorithme 1 en choisissant la *méthode de Jacobi-Davidson* pour résoudre les problèmes aux valeurs propres quadratiques :

$$\left[ \bar{M}^{-1} \bar{A} - \bar{n}(\omega_k) \bar{c}^T \right] \bar{p} + \omega_{k+1} \bar{M}^{-1} \bar{B}(\omega_{r,k}) \bar{p} + \omega_{k+1}^2 \bar{p} = 0, \text{ avec } \omega_{r,k} = \Re(\omega_k).$$

- soit la méthode de point fixe décrite dans l'algorithme 2 en choisissant la *méthode d'Arnoldi* pour résoudre les problèmes aux valeurs propres linéaires :

$$\left[ \bar{M}^{-1} \bar{A} - \bar{n}(\omega_k) \bar{c}^T + \omega_k \bar{M}^{-1} \bar{B}(\omega_{r,k}) \right] \bar{p} + \omega_{k+1}^2 \bar{p} = 0, \text{ avec } \omega_{r,k} = \Re(\omega_k).$$

## Chapitre 4

# Modélisation du couplage acoustique-combustion

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Cas test : géométrie annulaire académique avec flamme mince</b>	<b>75</b>
4.1.1	Présentation de la configuration	75
4.1.2	Le cas sans flamme	76
4.1.3	Le cas avec flamme : étude de stabilité	80
4.1.4	Modes stationnaires et modes tournants	85
<b>4.2</b>	<b>Mesure de la fonction de transfert de flamme</b>	<b>91</b>
4.2.1	Forçage monofréquentiel	92
4.2.2	Forçage multifréquentiel	95

---

Les instabilités thermoacoustiques résultent d'un couplage entre les phénomènes instationnaires inhérents aux écoulements réactifs et les modes propres acoustiques qui se développent dans la chambre de combustion. Les ondes de pression générées par l'expansion des gaz du fait des fluctuations locales du taux de dégagement de chaleur, se propagent dans la chambre de combustion. Elles se réfléchissent sur les bords de ce domaine confiné et peuvent revenir perturber l'écoulement dans la zone d'injection et donc impacter sur les fluctuations du taux de dégagement de chaleur. Ce mécanisme constitue une boucle fermée potentiellement instable. Cette boucle d'instabilité thermoacoustique est représentée de façon schématique par Fig. 4.1.

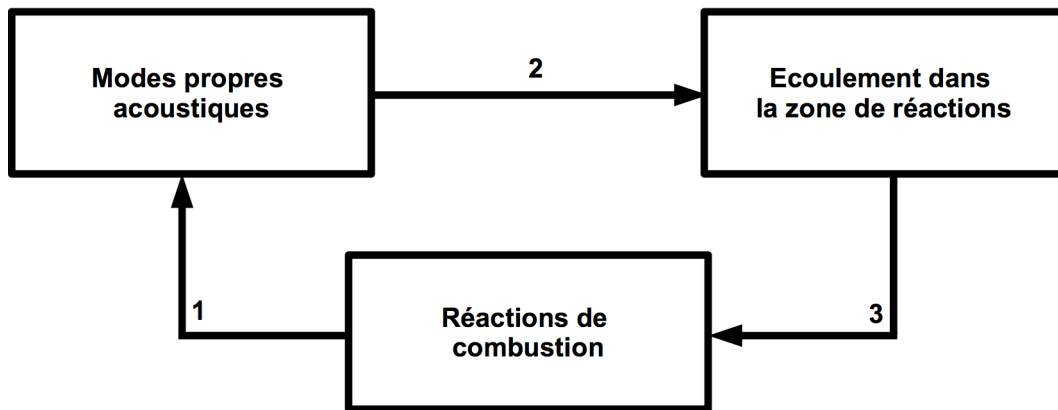


FIG. 4.1 - Représentation schématique de la boucle d'instabilité thermoacoustique.

Branche 1 : l'équation de Helmholtz en milieu réactif montre clairement l'influence de la combustion sur le champ de pression dans la chambre de combustion via deux effets :

- Les variations de vitesse du son dans le domaine de calcul, dues aux inhomogénéités de température, changent la forme du mode dans la chambre.
- La combustion se manifeste également par la présence du terme de taux de dégagement de chaleur au second membre de l'équation des ondes. Ce terme influera sur la stabilité du mode propre.

Branche 2 : elle signifie que le forçage acoustique peut induire des instabilités hydrodynamiques. Un exemple bien connu est le cas des jets libres soumis à des perturbations de pression amonts qui exhibent des instabilités de Kelvin-Helmholtz [8].

Branche 3 : Les instationnarités de l'écoulement induisent des fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans la zone de réaction. On peut citer comme exemple le cas d'un tourbillon qui emprisonne une poche de gaz frais, convectée par l'écoulement. Cette poche de gaz frais est réchauffée par les gaz brûlés et s'enflamme à son tour, créant ainsi des fluctuations du taux de dégagement de chaleur.

La Fig. 4.1 n'est pas exhaustive, on peut remarquer par exemple que l'écoulement influence le mode acoustique via les effets de Mach. Des études sont en cours au CERFACS pour quantifier l'importance

de la vitesse de l'écoulement sur les modes propres acoustiques dans une chambre de combustion. Cette influence est négligée dans ce travail.

La capture des mécanismes 2. et 3. nécessite la résolution des équations de Navier-Stokes en milieu réactif compressible. Dans le code AVSP ces deux mécanismes sont modélisés par une fonction de transfert de flamme à deux paramètres,  $n$  et  $\tau$ . L'objectif de cette fonction de transfert est donc de rendre compte des effets des fluctuations acoustiques sur le taux de dégagement de chaleur instationnaire sans résoudre l'écoulement.

### **Le modèle $n - \tau$ :**

Initialement introduit par Crocco en 1951 [19], ce modèle exprime une relation de cause à effet entre les fluctuations de vitesse acoustique en un point de référence, et le taux de dégagement de chaleur instationnaire dans la zone de combustion. Cette relation est caractérisée par deux paramètres : le facteur de proportionnalité  $n$  et le délai  $\tau$ . Lorsque le modèle est indexé sur la vitesse au point de référence, les coefficients sont notés  $n_u^g$  et  $\tau_u^g$ . Avec ces notations, le modèle de Crocco, écrit sous forme adimensionnelle, prend la forme suivante :

$$\frac{Q(t)}{q_0} = n_u^g \frac{\vec{u}_1(\vec{x}_{ref}, t - \tau_u^g) \cdot \vec{n}_{ref}}{\bar{U}_{bulk}},$$

avec  $\vec{u}_1(\vec{x}_{ref}, t - \tau_u^g)$  la fluctuation de vitesse acoustique au point de référence à l'instant  $t - \tau_u^g$ ,  $\vec{n}_{ref}$  la normale à la section de référence  $S_{ref}$ ,  $\bar{U}_{bulk}$  la vitesse moyenne à travers  $S_{ref}$ ,

$$q_0 = \frac{1}{T} \int_T \int_V q(\vec{x}, t) dV dt,$$

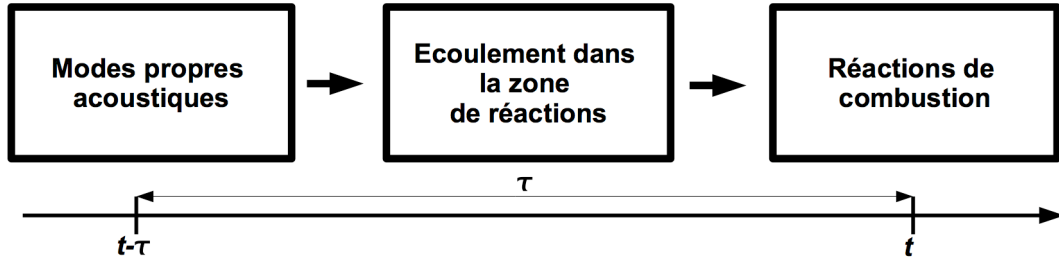
le taux de dégagement de chaleur global moyenné sur la période  $T$  d'oscillation, et

$$Q(t) = \int_V q(\vec{x}, t) dV - q_0,$$

la partie fluctuante du taux de dégagement de chaleur. En considérant  $\hat{Q}$  et  $\hat{u}(\vec{x}_{ref})$  les coefficients de Fourier à la fréquence  $f = \omega_r/(2\pi)$ , le modèle prend la forme :

$$\frac{\hat{Q}}{q_0} = n_u^g(\omega_r) e^{i\omega_r \tau_u^g(\omega_r)} \frac{\hat{u}(\vec{x}_{ref})}{\bar{U}_{bulk}}.$$

Les paramètres de la fonction de transfert de flamme,  $n_u^g(\omega_r)$  et  $\tau_u^g(\omega_r)$ , dépendent de la pulsation  $\omega_r$  considérée. Ce modèle peut être représenté, de façon schématique, par la Fig. 4.2.


 FIG. 4.2 - Représentation schématique du modèle  $n - \tau$ .

Il est important de faire quelques remarques sur ce modèle :

- Le couplage acoustique/combustion résulte de mécanismes physiques complexes : interactions du dégagement de chaleur avec les structures de l'écoulement, inhomogénéités de richesse en zone primaire, interactions flamme/parois, flamme/flamme... Le modèle  $n - \tau$  permet une représentation simplifiée à 2 paramètres de tous ces mécanismes physiques. Toute la complexité de l'écoulement et des différents types d'interactions étant encapsulée dans les paramètres  $n$  et  $\tau$ , ce dernier pouvant être interprété comme la somme d'un temps de convection et d'un temps chimique [25].
- Le point qui sert de référence, noté  $\vec{x}_{ref}$ , doit être judicieusement placé. La validité du modèle tient à cette relation de causalité entre les fluctuations acoustiques en ce point et le taux de dégagement de chaleur dans la zone de combustion. En pratique ce point est généralement placé dans la zone d'injection ou dans la section de sortie du tourbillonneur. Si la longueur d'onde acoustique est grande devant la section de sortie du tourbillonneur, notée  $S_{ref}$ , on peut aussi définir  $u_1(\vec{x}_{ref}, t)$  comme la vitesse normale fluctuante moyennée sur cette section :

$$u_1(\vec{x}_{ref}, t) = \int_{S_{ref}} \vec{u}(x, t) \cdot \vec{n} dS - \frac{1}{T} \int_T \int_{S_{ref}} \vec{u}(x, t) \cdot \vec{n} dS dT,$$

avec  $\vec{n}$  la normale à la section. On verra dans le chapitre suivant que cette définition permet d'obtenir un meilleur indice de corrélation avec la fluctuation du taux de dégagement de chaleur.

#### **La mesure des paramètres $n$ et $\tau$ :**

Les paramètres  $n_u^g$  et  $\tau_u^g$  peuvent être mesurés expérimentalement ou numériquement. Dans le cas de la combustion pré-mélangée, il a été montré que le taux de dégagement de chaleur est proportionnel à la surface de flamme et à l'émission lumineuse émanant de la formation de radicaux  $CH^*$  ou  $OH^*$  [37, 55, 31]. Les mesures optiques corrélées aux mesures acoustiques au point de référence, permettent donc de déduire expérimentalement les paramètres de la fonction de transfert de flamme. Pour la mesurer numériquement il faut un code Navier-Stokes 3D réactif, instationnaire et compressible. On peut alors utiliser une simulation URANS, cependant l'influence des grosses structures de l'écoulement sur les réactions de combustion sera entièrement résolue dans une simulation aux grandes échelles qui est, de ce fait, plus indiquée pour la mesure des paramètres du modèle  $n - \tau$  [28]. Truffin montre dans [85] que cette mesure requiert toutefois une hypothèse de compacité. Le point de référence, noté  $\vec{x}_{ref}$ , et la zone



de flamme, repérée par  $\vec{x}_f$  doivent satisfaire :

$$\|\vec{x}_{ref} - \vec{x}_{flamme}\| \ll \lambda,$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde du forçage acoustique. Dans le cas où cette condition n'est pas respectée, les paramètres de la fonction de transfert de flamme mesurés à l'aide de simulations aux grandes échelles, dépendent de la position du point de référence et des conditions limites de la simulation. Pour s'affranchir de cette dépendance, il faut introduire les fluctuations de pression dans la fonction de transfert de flamme, qui prend alors la forme suivante :

$$\frac{\hat{Q}}{q_0} = n_u^g(\omega_r) e^{i\omega_r \tau_u^g(\omega_r)} \frac{\hat{u}(\vec{x}_{ref})}{\bar{U}_{bulk}} + n_p^g(\omega_r) e^{i\omega_r \tau_p^g(\omega_r)} \frac{\hat{p}(\vec{x}_{ref})}{p_0}.$$

### **Extensions du modèle :**

Le modèle introduit par Crocco et étendu par Truffin relie les fluctuations acoustiques, de vitesse et de pression au point de référence, aux fluctuations globales (intégrée sur toute la zone de combustion) du taux de dégagement de chaleur. Nicoud et al. introduit dans [54] la formulation locale qui est celle utilisée dans AVSP, elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{\hat{q}(\vec{x})}{q_0} = n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega_r \tau_u(\vec{x}, \omega_r)} \frac{\vec{\hat{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}}{\bar{U}_{bulk}} + n_p(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega_r \tau_p(\vec{x}, \omega_r)} \frac{\hat{p}(\vec{x}_{ref})}{p_0}.$$

avec  $\vec{\hat{u}}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}$  la fluctuation de vitesse au point de référence  $\vec{x}_{ref}$  normale à la section de sortie du tourbillonneur. Dans cette formulation :

$$q(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{q}(\vec{x}) e^{i\omega t} d\omega,$$

représente la fluctuation locale du taux de dégagement de chaleur. Elle est reliée aux fluctuations acoustiques de vitesse et de pression au point de référence par des paramètres locaux de proportionnalités,  $n_u(\vec{x}, \omega_r)$  et  $n_p(\vec{x}, \omega_r)$ , et de délai,  $\tau_u(\vec{x}, \omega_r)$  et  $\tau_p(\vec{x}, \omega_r)$ .

Dans [55], Noiray prend en compte les non linéarités de la réponse de flamme. Il introduit la *Fonction de Description de Flamme*, qu'il définit de la façon suivante :

$$\frac{\hat{q}(\vec{x}, |\hat{u}_{ref}|)}{q_0} = n_u(\vec{x}, \omega_r, |\hat{u}_{ref}|) e^{i\omega_r \tau_u(\vec{x}, \omega_r, |\hat{u}_{ref}|)} \frac{\hat{u}_{ref}}{\bar{U}_{bulk}}.$$

Dans cette modélisation, la réponse de flamme dépend de l'amplitude du forçage acoustique  $|\hat{u}_{ref}|$ . Ce modèle permet d'expliquer les transitions brusques entre différents modes observés expérimentalement.

Les applications cibles du code AVSP sont les chambres de combustions aéronautiques qui présentent des géométries annulaires avec N injecteurs, N variant typiquement de 10 à 20. Dans ce type d'applications il est clair que les fluctuations du taux de dégagement de chaleur, qui se développent sur toute la circonférence de la chambre, ne peuvent être corrélées à un unique point de référence. Dans cette thèse

on propose d'utiliser une adaptation des modèles précédents pour le cas des chambres annulaires. Le modèle intégré dans le code AVSP prend la forme suivante :

$$\frac{\hat{q}(\vec{x})}{q_0} = \begin{cases} n_u(\vec{x})e^{i\omega\tau_u(\vec{x})}\frac{\tilde{u}(\vec{x}_{ref1})\cdot\vec{n}_{ref1}}{U_{bulk}} + n_p(\vec{x})e^{i\omega\tau_p(\vec{x})}\frac{\hat{p}(\vec{x}_{ref1})}{p_0}, & \text{pour } \vec{x} \in \text{secteur 1,} \\ n_u(\vec{x})e^{i\omega\tau_u(\vec{x})}\frac{\tilde{u}(\vec{x}_{ref2})\cdot\vec{n}_{ref2}}{U_{bulk}} + n_p(\vec{x})e^{i\omega\tau_p(\vec{x})}\frac{\hat{p}(\vec{x}_{ref2})}{p_0}, & \text{pour } \vec{x} \in \text{secteur 2,} \\ \dots \\ n_u(\vec{x})e^{i\omega\tau_u(\vec{x})}\frac{\tilde{u}(\vec{x}_{refN})\cdot\vec{n}_{refN}}{U_{bulk}} + n_p(\vec{x})e^{i\omega\tau_p(\vec{x})}\frac{\hat{p}(\vec{x}_{refN})}{p_0}, & \text{pour } \vec{x} \in \text{secteur N.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce modèle consiste à découper la chambre annulaire en N secteurs et à faire l'hypothèse suivante : *les fluctuations du taux de dégagement de chaleur dans chaque secteur sont provoquées par les fluctuations acoustiques au sein de son injecteur propre*. Dénommée par son acronyme anglo-saxon ISAAC (Independance Sector Assumption in Annular Combustor) dans [76, 75], cette hypothèse est aussi admise de façon implicite dans les travaux de Morgans, Stow, Dowling et Krebs [51, 38, 40, 39].

Pour des raisons de symétrie, les paramètres qui caractérisent la fonction de transfert de flamme,  $n_u(\vec{x})$ ,  $\tau_u(\vec{x})$ ,  $n_p(\vec{x})$ ,  $\tau_p(\vec{x})$ , sont identiques dans chaque secteur. Cependant, dans le cas d'un mode azimutal, les fluctuations acoustiques au sein de chaque injecteur seront différentes et donc les fluctuations du taux de dégagement de chaleur seront elles aussi différentes d'un secteur à l'autre.

Il est clair que cette hypothèse ne pourra être vérifiée dans tous les cas de multi-injection, en particulier lorsque les flammes interagissent fortement entre elles [61]. Cependant, dans le cas particulier de la chambre de combustion annulaire qui sera étudiée en détail dans le chapitre suivant, cette hypothèse est validé par les simulations aux grandes échelles de Staffelbach [81].

Dans la première partie de ce chapitre est présentée l'étude d'une géométrie annulaire académique. Les dimensions de cette géométrie sont choisies de telle sorte que, comme c'est le cas dans les chambres de combustion aéronautiques, les modes basses fréquences soient le premier mode longitudinal et le premier mode azimutal. La simplicité de cette configuration permet des solutions analytiques pour ces modes et ainsi une validation et une meilleure compréhension des résultats obtenus par les calculs AVSP. Dans ce cas test la *fonction de transfert de flamme* utilisée est de la même forme que celle présentée dans Eq. (4.1). On rappelle dans cette section que dans le cas  $|n_c e^{i\omega\tau}| \ll 1$  il existe un critère de stabilité pour le mode longitudinal en fonction de la valeur du paramètre  $\tau$  [62]. On montre dans ce chapitre que ce critère se généralise au cas du mode azimutal. S'il s'obtient dans un cadre d'hypothèse restrictif, ce critère semble robuste puisqu'il est observé dans les résultats obtenus sur la chambre d'hélicoptère présentée au chapitre suivant.

Dans le cas de la configuration académique, les paramètres  $n_u(\vec{x})$  et  $\tau_u(\vec{x})$  sont fixés arbitrairement, et le front de flamme est mince pour permettre les développements analytiques. Dans le cas d'une chambre de combustion réelle, la flamme s'étend dans toute la zone primaire et ces paramètres sont calculés par un traitement à posteriori d'une simulation aux grandes échelles réactive. La deuxième partie de ce chapitre s'intéresse aux méthodes employées pour le calcul des paramètres  $n_u(\vec{x})$  et  $\tau_u(\vec{x})$ .

## 4.1 Cas test : géométrie annulaire académique avec flamme mince

L'étude de ce cas test présente donc deux intérêts majeurs :

- La simplicité de la configuration permet d'obtenir des solutions analytiques et ainsi de valider le code AVSP sur des géométries annulaires en prenant en compte les effets de flamme.
- Il permet également de mieux comprendre les phénomènes acoustiques observés expérimentalement, ou par calculs numériques, tels les modes tournants, sur des configurations industrielles complexes.

Cette configuration est donc choisie pour exhiber, aux basses fréquences, les deux types de modes propres habituellement impliqués dans les instabilités thermoacoustiques, à savoir le premier mode longitudinal et le premier mode azimutal. Ce dernier type de mode, spécifique aux configurations annulaires, peut aussi être appelé mode orthoradial ou encore mode circonférentiel.

### 4.1.1 Présentation de la configuration

On étudie dans cette section un anneau tridimensionnel (60 000 nœuds) de longueur  $L = 0.5$  m, de rayon extérieur de  $r_{ext} = 0.5$  m et de rayon intérieur  $r_{int} = 0.4$  m (Fig. 4.3).

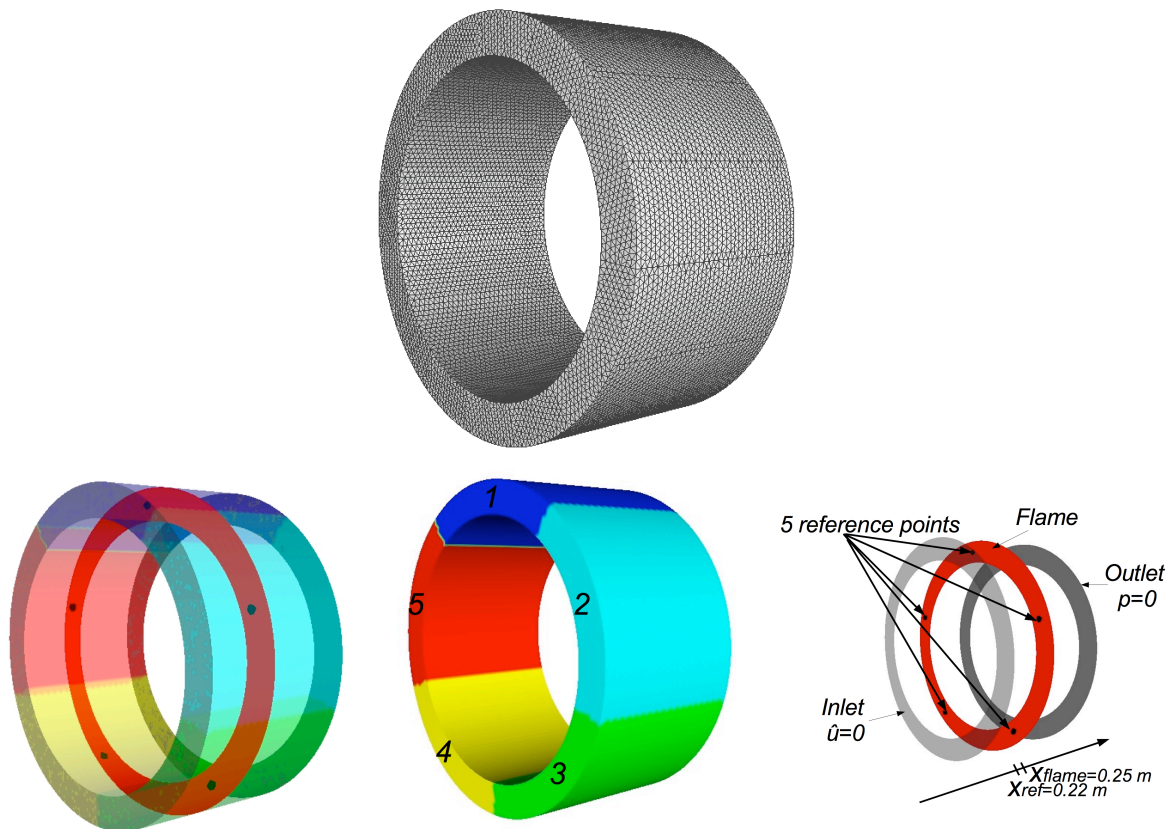


FIG. 4.3 - Géométrie 3D annulaire.

Une flamme compacte est placée en  $x = L/2$ , la vitesse du son est choisie constante  $c = 347$  m/s dans tout le domaine de calcul. On impose des conditions limites acoustiques correspondant à des murs rigides sur les parois intérieure et extérieure :  $\hat{u}(r = 0.4) = \hat{u}(r = 0.5) = 0$ . En entrée et en sortie du domaine on impose respectivement  $\hat{u}(x = 0) = 0$  et  $\hat{p}(x = L) = 0$ . Ces conditions limites simples allègent les développements analytiques. On note également qu'elles sont choisies de façon à ce que le premier mode azimutal ait une composante longitudinale au point de référence  $\vec{u}(x_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \neq 0$ , pour activer le modèle  $n - \tau$ . Dans un calcul de chambre industrielle, les rétrécissements de section dans le tourbillonneur, et le gradient de température imposent  $\vec{u}(x_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \neq 0$ . L'anneau est découpé en 5 secteurs identiques. Pour le choix de la fonction de transfert de flamme on utilise un modèle de Crocco local, étendu pour les chambres annulaires de la forme suivante :

$$\frac{\hat{q}(\vec{x})}{q_0} = \begin{cases} n_1 e^{i\omega\tau_1} \frac{\hat{u}_x(x_{ref1})}{U_{bulk}}, & \text{pour } \vec{x} \in \text{secteur 1,} \\ n_2 e^{i\omega\tau_2} \frac{\hat{u}_x(x_{ref2})}{U_{bulk}}, & \text{pour } \vec{x} \in \text{secteur 2,} \\ \dots & \\ n_5 e^{i\omega\tau_5} \frac{\hat{u}_x(x_{ref5})}{U_{bulk}}, & \text{pour } \vec{x} \in \text{secteur 5.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Les points de référence, notés  $x_{ref_i, i=1,5}$  sont placés au milieu de chaque secteur. On respecte dans ce cas l'hypothèse de compacité de la flamme. En effet les fluctuations du taux de dégagement de chaleur sont non nulles dans la zone délimitée par  $x = 0.25$  m et  $0.27$  m. La composante de vitesse acoustique longitudinale aux points de référence, situés en  $x_{ref} = 0.22$  m, est notée  $\hat{u}_x(x_{ref_i})$ . Les paramètres  $n_i$  et  $\tau_i$ , constants par secteurs, caractérisent la réponse de flamme dans chaque secteur de la configuration.

#### 4.1.2 Le cas sans flamme

On s'intéresse dans un premier temps aux modes longitudinaux et azimutaux qui se développent dans la configuration sans tenir compte des effets du taux de dégagement de chaleur sur les modes propres. Dans ce cas on impose donc :

$$n_1 = n_2 = \dots = n_5 = 0 \text{ et } \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_5 = 0.$$

La stabilité de ces modes soumis aux effets de flamme sera regardée dans la section suivante.

La dimension radiale de la configuration ( $0.4 < r < 0.5$ ) est choisie suffisamment faible pour ne pas avoir d'impact significatif sur les premiers modes azimutaux. Sous cette hypothèse le champ de pression, utilisé pour les calculs analytiques, dépend uniquement de la coordonnée longitudinale  $x$ , et de l'abscisse curviligne  $s = r_{moy}\theta$  :  $\hat{p}(\vec{x}) = \hat{p}(x, s)$  (Fig. 4.4). Cette hypothèse simplifie les développements analytiques et permet toutefois un très bon accord avec les résultats obtenus avec le code AVSP.

L'équation de Helmholtz prend la forme suivante :

$$\Delta \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0. \quad (4.3)$$

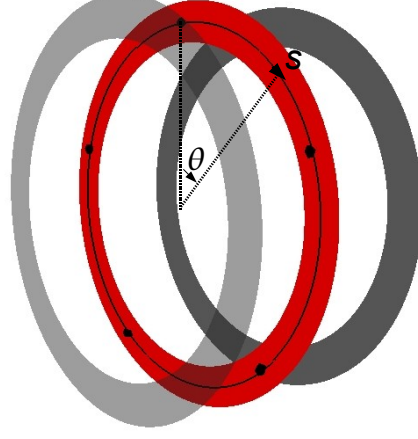


FIG. 4.4 - L'abscisse curviligne  $s = r_{moy}\theta$ .

On utilise la méthode de séparation des variables :

$$\begin{aligned}\hat{p}(x, s) &= \hat{p}_x(x)\hat{p}_s(s), \\ k^2 &= k_x^2 + k_s^2.\end{aligned}\quad (4.4)$$

La résolution de l'équation aux dérivées partielles (Eq. (4.3)) se ramène à la résolution de deux équations différentielles ordinaires. On découple ainsi la recherche des composantes longitudinales et azimutales des modes propres de la configuration. La composante longitudinale se déduit du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\hat{p}_x(x) + k_x^2\hat{p}_x(x) = 0, \\ \frac{d}{dx}\hat{p}_x|_{x=0} = 0, \\ \hat{p}_x(L) = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\hat{p}_x^n(x) = Cst. \cos\left((2n + 1)\frac{\pi}{2L}x\right) \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$

On rappelle que cette étude se place dans le cadre de l'acoustique linéaire : la constante, notée  $Cst$ , peut prendre n'importe quelle valeur tant que  $p_1(\vec{x}, t) = \Re(\hat{p}(\vec{x})e^{-i\omega t}) \ll p_0$ . Cette constante peut être fixée par étalonnage à partir de mesures expérimentales.

La composante azimutale  $\hat{p}_s(s)$  est telle que :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{ds^2}\hat{p}_s(s) + k_s^2\hat{p}_s(s) = 0, \\ \hat{p}_s(0) = \hat{p}_s(2\pi r_{moy}). \end{cases}$$

Ce problème admet deux familles orthogonales de modes propres :

$$p_s^m(s) = Cst. \cos\left(\frac{m}{r}s\right) \text{ avec } m \in \mathbb{Z},$$

$$p_{s\perp}^m(s) = Cst. \sin\left(\frac{m}{r}s\right) \text{ avec } m \in \mathbb{Z}.$$

Finalement les modes propres de la configuration annulaire sans flamme s'écrivent comme la superposition de modes longitudinaux et de modes azimutaux :

$$\hat{p}_{nm}(x, s) = \hat{p}_x^n(x) \cdot \hat{p}_s^m(s) = Cst. \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{m}{r}s\right) \text{ avec } n, m \in \mathbb{Z},$$

$$\hat{p}_{nm}^\perp(x, s) = \hat{p}_x^n(x) \cdot \hat{p}_{s\perp}^m(s) = Cst. \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2L}x\right) \sin\left(\frac{m}{r}s\right) \text{ avec } n, m \in \mathbb{Z}.$$

### Le premier mode longitudinal

Le premier mode longitudinal (n=0,m=0) de fréquence

$$f = \frac{c}{4L} = \frac{347}{4 \times 0.5} = 173.5 \text{ Hz},$$

est un mode dit "quart d'onde", car  $\lambda = 4L$ . Il se développe uniquement dans la direction longitudinale et s'écrit :

$$\hat{p}_{00}(x, s) = \hat{p}_x^0(x) \hat{p}_s^0(s) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right).$$

Ce mode, obtenu par un calcul AVSP, est illustré par Fig. 4.5.

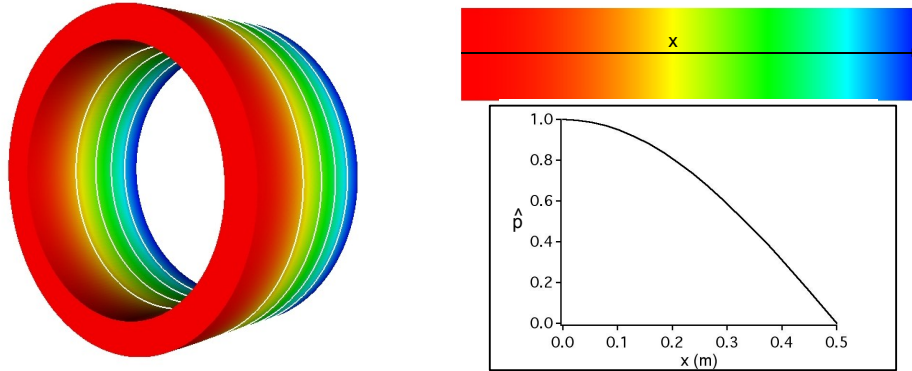


FIG. 4.5 - Le premier mode propre longitudinal (Le code AVSP donne  $f = 173.58$  Hz).

On peut alors reconstruire la fluctuation temporelle à partir de ce mode propre. Dans ce cas l'onde acoustique longitudinale est stationnaire :

$$p_{1L}(\vec{x}, t) = \Re(\hat{p}_{00}(x, s)e^{-i\omega t}) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \cos(\omega t).$$

### Les premiers modes azimutaux

Les premiers modes azimutaux ( $n=0, m=1$ ) sont couplés : ils partagent la même fréquence, et ils sont orthogonaux :

$$\hat{p}_{01}(x, s) = \hat{p}_x^0(x) \hat{p}_s^1(s) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{1}{r}s\right),$$

$$\hat{p}_{01}^\perp(x, s) = \hat{p}_x^0(x) \hat{p}_{s^\perp}^1(s) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \sin\left(\frac{1}{r}s\right).$$

Il est important de remarquer que ces modes ne sont pas purement azimutaux. Ils ont une composante longitudinale "quart d'onde", imposées par le choix des conditions limites. Ceci afin d'activer le modèle  $n - \tau$  pour l'étude de stabilité qui sera présentée dans la section suivante. Les résultats obtenus avec AVSP sont représentés dans Fig. 4.6.

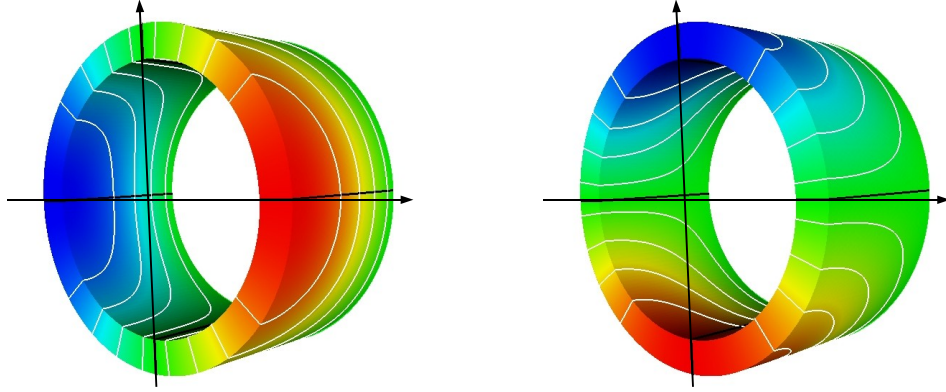


FIG. 4.6 - Les deux modes azimutaux couplés et orthogonaux (Le code AVSP donne  $f = 212.77$  Hz).

Conformément à la méthode de séparation des variables, la fréquence est commune aux deux modes couplés et se déduit de Eq. (4.4) :

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{f_x^2 + f_s^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{4L}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\pi r_{moy}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{347}{4 \times 0.5}\right)^2 + \left(\frac{347}{2\pi \times 0.45}\right)^2} \\ &= 212.5 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

On reconstruit dans un premier temps la fluctuation temporelle de chacun des modes couplés pris indépendamment. On obtient dans ce cas deux modes stationnaires :

$$p_{1A}(\vec{x}, t) = \Re(\hat{p}_{01}(x, s)e^{-i\omega t}) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{1}{r}s\right) \cos(\omega t),$$

$$p_{1A^\perp}(\vec{x}, t) = \Re(\hat{p}_{01}^\perp(x, s)e^{-i\omega t}) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \sin\left(\frac{1}{r}s\right) \cos(\omega t).$$

On peut remarquer qu'une combinaison linéaire adéquate des deux modes propres couplés permet de construire un mode tournant :

$$\hat{p}(x, s) = \hat{p}_{11}(x, s) + e^{\pm i\frac{\pi}{2}} \hat{p}_{11}^\perp(x, s).$$

La fluctuation temporelle reconstruite dans ce cas prend la forme d'une onde propagative selon l'abscisse curviligne  $s$ , dans le sens horaire ou anti-horaire :

$$\begin{aligned} p_{1A}(\vec{x}, t) &= \Re \left[ \left( \hat{p}_{11}(x, s) + e^{\pm i\frac{\pi}{2}} \hat{p}_{11}^\perp(x, s) \right) e^{i\omega t} \right] \\ &= \Re \left[ \hat{p}_{11}(x, s) e^{i\omega t} + \hat{p}_{11}^\perp(x, s) e^{i(\omega t \pm \frac{\pi}{2})} \right] \\ &= Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \left[ \cos\left(\frac{1}{r}s\right) \cos(\omega t) \pm \sin\left(\frac{1}{r}s\right) \sin(\omega t) \right] \\ &= Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{1}{r}s \pm \omega t\right). \end{aligned}$$

Ce phénomène de rotation des modes azimutaux est couramment observé dans les chambres de combustion annulaires. Dans ce cas particulier où la configuration est parfaitement symétrique selon  $\theta$ , les modes propres azimutaux sont couplés et l'analyse mathématique montre que les modes propres stationnaires comme les modes tournants sont solutions du problème (deux représentations d'un même sous espace de dimension deux). On verra, à la fin de ce chapitre, que si on introduit des dissymétries dans la fonction de transfert de flamme alors, seuls les modes tournants sont solutions du problème.

### 4.1.3 Le cas avec flamme : étude de stabilité

On présente tout d'abord l'étude de stabilité du premier mode longitudinal  $p_{1L}(\vec{x}, t)$ . Sous l'hypothèse  $|n_c e^{i\omega\tau}| \ll 1$ , il existe un critère de stabilité sur le paramètre  $\tau$  [62]. Après avoir établi ce critère pour le mode longitudinal de la configuration annulaire, on montre qu'il peut être étendu au cas du mode azimutal.

#### Les modes longitudinaux

Le premier mode longitudinal ne dépend pas de l'abscisse curviligne  $s$  :

$$p_{1L}(\vec{x}, t) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}\right) \cos(\omega t) \quad \forall s.$$

On peut donc traiter le problème selon une coupe à  $s_0$  fixé, comme illustré dans Fig. 4.7.

Dans ce cas le système des équations linéarisées, Eq.(1.10) et Eq.(1.11), introduites au chapitre I, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial}{\partial t} p_1 + \frac{\partial}{\partial x} u_1 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} q_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} p_1 &= 0. \end{aligned}$$



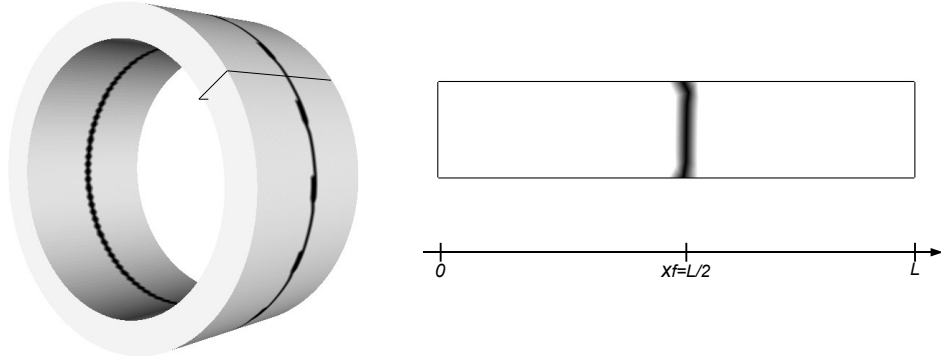


FIG. 4.7 - La zone grisée correspond aux fluctuations de taux de dégagement de chaleur non nul  $q_1(\vec{x}, t) \neq 0$ . On traite le problème sur une section à  $s_0$  fixé.

Sous l'hypothèse de fluctuations harmoniques, il vient :

$$\begin{aligned} -i\omega \frac{1}{\gamma p_0} \hat{p}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \hat{u}(x) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \hat{q}(x), \\ -i\omega \rho_0 \hat{u}(x) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \hat{p}(x) &= 0. \end{aligned}$$

On intègre sur la zone de flamme délimitée par  $x_1$  et  $x_2$ . La flamme est mince donc  $x_1 \rightarrow x_f$  et  $x_2 \rightarrow x_f$ , il vient :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{II}(x_f) - \hat{u}_I(x_f) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \int_{x_1}^{x_2} \hat{q}(x) dx, \\ \hat{p}_{II}(x_f) - \hat{p}_I(x_f) &= 0. \end{aligned}$$

On a donc continuité de la fluctuation de pression de part et d'autre du front de flamme, par contre les fluctuations du taux de dégagement de chaleur induisent une discontinuité de vitesse au passage de la flamme (Fig. 4.8). Le modèle de Crocco écrit sous sa forme adimensionnée prend dans ce cas la forme suivante :

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} \hat{q}(x) dx}{q_0} = n_u^g e^{i\omega\tau} \frac{\hat{u}_I(x_f)}{\bar{U}_{bulk}}.$$

Le système devient :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{II}(x_f) &= \hat{u}_I(x_f) + \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u^g e^{i\omega\tau} \hat{u}_I(x_f), \\ \hat{p}_{II}(x_f) &= \hat{p}_I(x_f). \end{aligned}$$

On introduit le coefficient de proportionnalité  $n_c$  défini de la façon suivante :

$$n_c = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u^g,$$

Le système devient :

$$\begin{aligned}\hat{u}_{II}(x_f) &= \hat{u}_I(x_f) + n_c e^{i\omega\tau} \hat{u}_I(x_f), \\ \hat{p}_{II}(x_f) &= \hat{p}_I(x_f).\end{aligned}\quad (4.5)$$

On décompose les signaux de vitesse et de pression acoustique comme la superposition de deux ondes propagatives :

$$\begin{aligned}p_I(x, t) &= \Re(\hat{p}(x)e^{-i\omega t}) = \Re\left[(A^+ e^{ikx} + A^- e^{-ikx})e^{-i\omega t}\right], \\ u_I(x, t) &= \Re(\hat{u}(x)e^{-i\omega t}) = \Re\left[\left(\frac{A^+}{\rho c} e^{ikx} - \frac{A^-}{\rho c} e^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}\right],\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\hat{p}_I(x) &= A_1^+ e^{ikx} + A_1^- e^{-ikx} \text{ et } \hat{p}_{II}(x) = A_2^+ e^{ik(x-x_f)} + A_2^- e^{-ik(x-x_f)} \\ \hat{u}_I(x) &= \frac{A_1^+}{\rho c} e^{ikx} - \frac{A_1^-}{\rho c} e^{-ikx} \text{ et } \hat{u}_{II}(x) = \frac{A_2^+}{\rho c} e^{ik(x-x_f)} - \frac{A_2^-}{\rho c} e^{-ik(x-x_f)}\end{aligned}$$

Le système (4.5) devient :

$$\begin{aligned}2A_2^+ &= (2 + n_c e^{i\omega\tau})A_1^+ e^{ikx_f} - n_c e^{i\omega\tau} A_1^- e^{-ikx_f}, \\ 2A_2^- &= -n_c e^{i\omega\tau} A_1^+ e^{ikx_f} + (2 + n_c e^{i\omega\tau})A_1^- e^{-ikx_f}.\end{aligned}$$

La condition limite d'entrée  $\hat{u}(x=0) = 0$  implique  $A_1^+ = A_1^-$ , la condition limite de sortie  $\hat{p}(x=L) = 0$  implique  $A_2^+ e^{ikL} = -A_2^-$ . On considère  $L = 2x_f$ , il vient :

$$\cos(kL) = \frac{n_c e^{i\omega\tau}}{2 + n_c e^{i\omega\tau}},$$

ou encore en considérant  $|n_c e^{i\omega\tau}| \ll 1$  :

$$\cos(kL) = 0.5n_c e^{i\omega\tau}.$$

Sous cette hypothèse le nombre d'onde du mode soumis aux effets de flamme est proche de celui du cas sans flamme :  $k = k_0 + k'$ , avec  $k_0 = n\frac{\pi}{2L}$ ,  $k' \in \mathbb{C}$  et  $|k'| \ll 1$ . Il vient :

$$\cos((k_0 + k')L) = \cos(k_0L)\cos(k'L) - \sin(k_0L)\sin(k'L) = -\sin(k'L) \sim -k'L.$$

On obtient finalement :

$$-k'L = 0.5n_c e^{i\omega\tau},$$

soit :

$$\Re(k') = -\frac{1}{2L}\cos(\omega\tau), \quad (4.6)$$

$$\Im(k') = -\frac{1}{2L}\sin(\omega\tau). \quad (4.7)$$

Ces développements montrent que le mode longitudinal marginalement stable soumis à des petites perturbations, provoquées par des fluctuations du taux de dégagement de chaleur, sera :

- stabilisé si  $\sin(\omega\tau) > 0 \Rightarrow 2n\pi < \omega\tau < 2(n+1)\pi \Rightarrow nT < \tau < ((2n+1)/2)T$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,
- déstabilisé si  $\sin(\omega\tau) < 0 \Rightarrow 2(n+1)\pi < \omega\tau < (2n+2)\pi \Rightarrow ((2n+1)/2)T < \tau < (n+1)T$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ce cas test est réalisé avec le code AVSP, on impose dans ce cas  $n_c = 0.1 \ll 1$ . Le champ de pression  $\hat{p}(x)$  et la vitesse  $\hat{u}(x)$  sont tracés dans Fig. 4.8. On remarque la discontinuité de vitesse au passage du front de flamme.

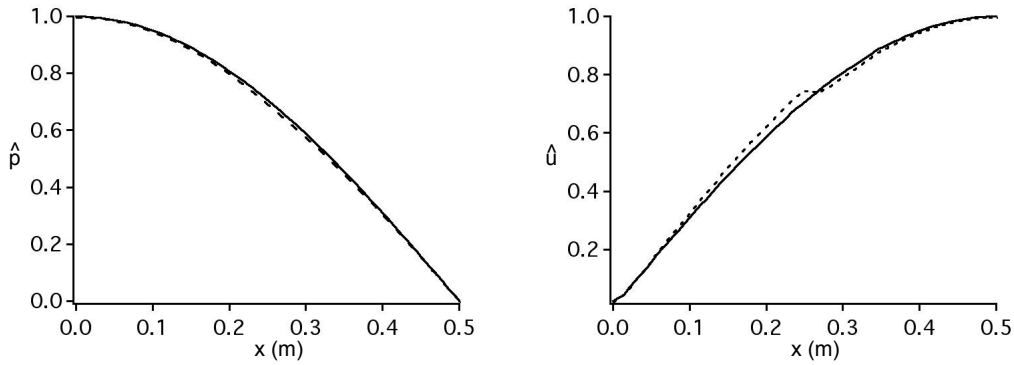


FIG. 4.8 - Fluctuations de pression et de vitesse longitudinale sans flamme (-) et avec flamme (- -) pour  $\tau = 3$  ms.

On fait varier le délai  $\tau$  entre 0 et 6 ms, les résultats obtenus par les calculs AVSP sont répertoriés dans Fig. 4.9.

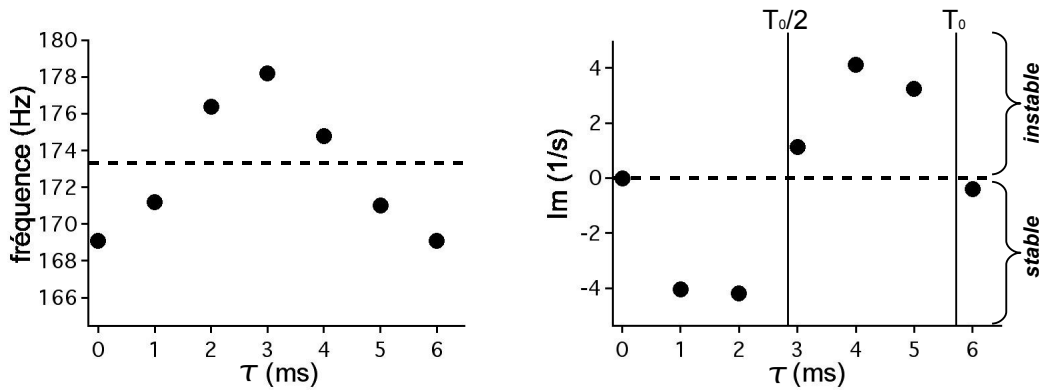


FIG. 4.9 - Evolution de la fréquence (à gauche) et du taux d'amplification (à droite) du premier mode longitudinal lorsque le délai  $\tau$  varie de 0 à 6 ms. - -  $n=0$ , •  $n=0.1$ .  $T_0$  : période du mode longitudinal.

Les plages de stabilité obtenues sont en accord avec les prévisions analytiques de Eq. (4.7). Il apparaît très clairement que le délai  $\tau$  est le paramètre qui conditionne la stabilité du système. Conformément au critère de Rayleigh, le mode passe d'un état stable à un état instable quand  $\tau = T/2$ . Il a également été vérifié que ni le nombre de secteurs ni la valeur du coefficient de proportionnalité  $n_c$  ne modifiait la

valeur critique du paramètre  $\tau$ . En revanche, la prise en compte de pertes acoustiques sur les bords du domaine, par une condition limite d'impédance, introduira un amortissement et donc changera la plage de stabilité du mode.

### Les modes azimutaux

On conserve les paramètres ( $n_c = 0.1$  et  $\tau \in [0, 6]$  ms). La fonction de transfert de flamme est mince et homogène selon  $\theta$  (Fig. 4.7), on conserve également les mêmes conditions aux limites. Dans ce cas le critère de stabilité  $nT < \tau < ((2n + 1)/2)T$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  établi précédemment pour le mode longitudinal s'applique aussi au cas du mode azimutal, en considérant  $T$  la période azimutale. Les calculs AVSP sur la configuration test annulaire confirment cette hypothèse. Les résultats pour le premier mode longitudinal sont présentés dans Fig. 4.10.

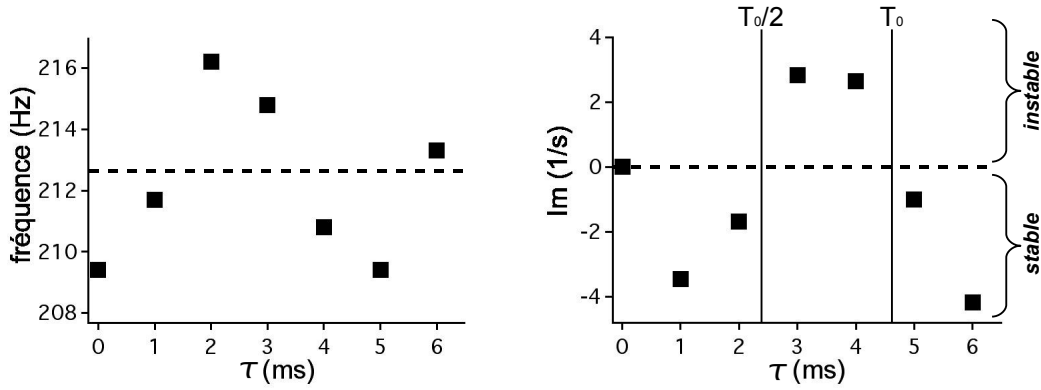


FIG. 4.10 - Evolution de la fréquence (à gauche) et du taux d'amplification (à droite) du premier mode azimutal lorsque le délai  $\tau$  varie de 0 à 6 ms. - -  $n=0$ , ■  $n=0.1$ .  $T_0$  : la période du mode azimutal.

Ce résultat s'explique facilement en considérant que le critère  $T/2$  établi dans la section précédente s'applique sur chacun des cinq secteurs. On rappelle l'expression de la répartition spatiale de la fluctuation de pression établie dans le cas sans flamme :

$$\hat{p}_{01}(x, s) = \hat{p}_x^0(x) \hat{p}_s^1(s) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{1}{r}s\right),$$

$$\hat{p}_{01}^\perp(x, s) = \hat{p}_x^0(x) \hat{p}_{s\perp}^1(s) = Cst. \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \sin\left(\frac{1}{r}s\right).$$

Dans chaque coupe à  $s$  fixé de la configuration, la composante longitudinale du mode azimutal est un quart d'onde :  $k_x = \pi/(2L)$  et donc  $\lambda_x = 4L$ . De ce fait, les développements analytiques présentés dans la section précédente pour le cas du mode longitudinal se généralisent au cas azimutal. En effet, dans le modèle  $n - \tau$  c'est la vitesse longitudinale au point de référence,  $\hat{u}(x_f)$ , qui induira les fluctuations du taux de dégagement de chaleur. La différence réside dans le temps mis par le mode pour faire un cycle d'oscillation :

$$f_{1A} = \sqrt{f_x^2 + f_s^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{4L}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\pi r_{moy}}\right)^2}.$$

Finalement le mode longitudinal, soumis à des petites perturbations dues aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur, sera :

- stabilisé si  $nT < \tau < ((2n + 1)/2)T$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  ;
- déstabilisé si  $((2n + 1)/2)T < \tau < (n + 1)T$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### 4.1.4 Modes stationnaires et modes tournants

On s'intéresse dans cette section aux fluctuations de pression  $p_1(\vec{x}, t)$  reconstruites à partir des modes  $\hat{p}(\vec{x})$  obtenus avec AVSP. On peut tout de suite remarquer que lorsque le mode est amplifié ou amorti par un terme source de taux de dégagement de chaleur ou une condition limite exprimant un flux acoustique, la pulsation  $\omega$ , et les fluctuations de pression  $\hat{p}(x, s)$ , sont représentées par des nombres complexes :

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_r + i\omega_i, \\ \hat{p}(x, s) &= |\hat{p}(x, s)|e^{i\phi(x, s)} \text{ avec } \phi(x, s) \neq \{0, \pi\}.\end{aligned}$$

La fluctuation de pression  $p_1(\vec{x}, t)$  reconstruite sera de la forme suivante :

$$\begin{aligned}p_1(\vec{x}, t) &= \Re \left[ |\hat{p}(x, s)|e^{i\phi(x, s)}e^{-i\omega t} \right], \\ &= \Re \left[ |\hat{p}(x, s)|e^{i\phi(x, s)}e^{\omega_i t}e^{-i\omega_r t} \right], \\ &= |\hat{p}(x, s)|e^{\omega_i t} \left( \cos(\phi(x, s))\cos(\omega_r t) + \sin(\phi(x, s))\sin(\omega_r t) \right), \\ &= |\hat{p}(x, s)|e^{\omega_i t} \cos(\phi(x, s) - \omega_r t).\end{aligned}$$

L'amplification de la fluctuation de pression est exprimée par  $\omega_i$ , et le caractère stationnaire ou instationnaire du mode est piloté par sa phase  $\phi(x, s)$ . Si  $\phi(x, s) = \phi_0$  alors le mode est stationnaire, et si  $\phi(x, s) = ks$  alors le mode est tournant. Les calculs AVSP présentés dans cette section montrent que l'homogénéité selon  $\theta$  de la fonction de transfert de flamme influe sur le comportement stationnaire ou propagatif des fluctuations de pression.

#### Configuration symétrique

On se place dans les mêmes conditions que celles utilisées pour l'étude de stabilité précédente. Le front de flamme est en  $x_f = L/2$ , et les paramètres  $n_c = 0.1$  et  $\tau = 4$  ms sont constants. Dans ce cas les calculs AVSP montrent que les premiers modes azimutaux sont couplés. Ils partagent la même fréquence complexe, c'est à dire le même nombre de cycles par seconde ( $f = 211$  Hz) et le même taux d'amplification (facteur d'amplification de 8.7% à chaque oscillation). Fig. 4.11 montre le module  $|\hat{p}(x, s)|$  et l'argument  $\phi(x, s)$  des premiers modes azimutaux couplés calculés par AVSP.

Ils sont de la forme suivante :

$$|\hat{p}(x, s)| = \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right),$$

$$\phi(x, s) = \pm \frac{1}{r}s.$$

En toute rigueur, l'expression de  $|\hat{p}(x, s)|$  n'est pas aussi simple. La flamme induit une discontinuité de gradient de pression de part et d'autre du front non pris en compte dans cette expression. Cependant, cette étude se situe dans le cas où  $|n_c| \ll 1$  et sous cette hypothèse, les modules  $|\hat{p}(x, s)|$  obtenus avec et sans flamme sont très peu différents comme le montre la Fig. 4.8.

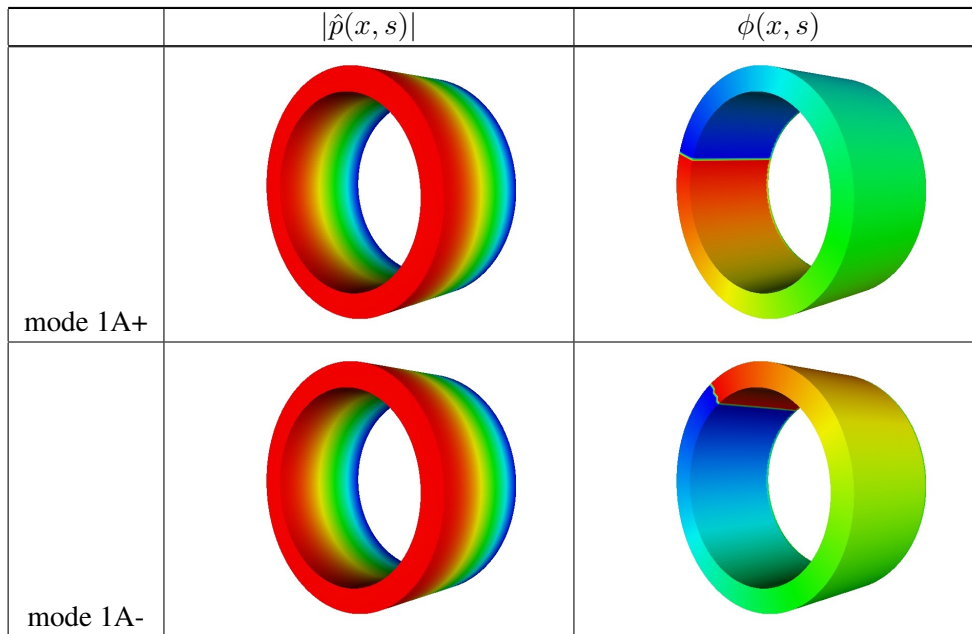


FIG. 4.11 - Module  $|\hat{p}(x, s)|$  et phase  $\phi(x, s)$  de la fluctuation de pression  $\hat{p}(x, s)$  dans le cas avec flamme compacte homogène en  $\theta$ .

La fluctuation de pression  $p_1(\vec{x}, t)$  associée à chacun de ces modes prend dans ce cas la forme suivante :

$$p_1^\pm(\vec{x}, t) = \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)e^{\omega_i t} \cos\left(\pm \frac{1}{r}s - \omega_r t\right).$$

Chacun des modes couplés pris séparément est donc un mode qui se propage selon l'abscisse curviligne  $s$  (un mode tournant). Ces deux modes ont le même taux d'amplification, en effet il n'existe pas de direction azimutale privilégiée dans cette configuration. Les deux modes tournent dans des sens opposés, ils ont le même taux d'amplification, et la même fréquence. Comme dans le cas sans flamme, on peut faire une combinaison linéaire des deux modes couplés et cette fois ci obtenir un mode stationnaire :

$$p_1(\vec{x}, t) = p_1^+(\vec{x}, t) + p_1^-(\vec{x}, t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)e^{\omega_i t} \cos\left(\frac{1}{r}s\right)\cos(\omega_r t).$$

Dans le cas où la flamme est homogène en  $\theta$  (le cas sans flamme en est un cas particulier), la configuration ne possède pas de direction azimutale privilégiée. Dans ce cas particulier, les modes propres peuvent être stationnaires ou tournants. L'effet du couplage entre l'acoustique et la combustion réside dans le taux d'amplification ou d'amortissement du mode. Fig. 4.12 illustre la fluctuation de pression  $p_1(\vec{x}, t)$  à l'instant initial  $t = 0$ .

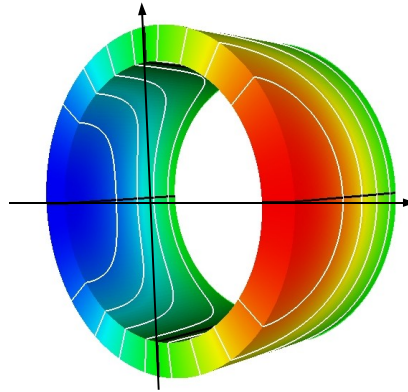


FIG. 4.12 - La fluctuation de pression, stationnaire et amplifiée, à l'instant initial :  $p_1(\vec{x}, t = 0)$ .

### Configuration non symétrique

Si on introduit une dissymétrie dans le taux de dégagement de chaleur, les calculs AVSP montrent que les modes couplés se dissocient. On choisit dans cet exemple d'imposer un délai différent dans chaque secteur comme le montre Fig. 4.13.

secteur 1 :  $n_c^1=0.1$ ,  $\tau_1=2$  ms,  
 secteur 2 :  $n_c^2=0.1$ ,  $\tau_2=4$  ms,  
 ...  
 secteur 5 :  $n_c^5=0.1$ ,  $\tau_5=10$  ms.

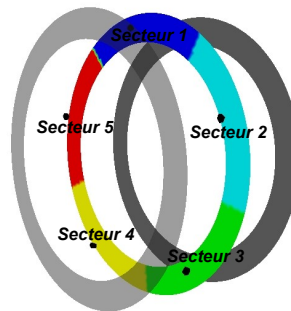


FIG. 4.13 - Le délai est différent dans chaque secteur de la configuration.

On trouve que le mode + à une fréquence de 212.5 Hz et un facteur d'amplification de 3% à chaque oscillation, tandis que le mode - à une fréquence de 212.9 Hz et un facteur d'amortissement de 5% à

chaque oscillation. Les fluctuations de pression prennent dans ce cas la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 p_1^+(\vec{x}, t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)e^{\omega_i t} \cos\left(\frac{1}{r}s - \omega_r t\right), \\
 \text{avec } \omega_r &= 1335.2 \text{ rad/s}, \\
 \omega_i &= 6.28 \text{ rad/s}.
 \end{aligned}$$

Pour le mode  $-$  :

$$\begin{aligned}
 p_1^-(\vec{x}, t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)e^{\omega_i t} \cos\left(\frac{1}{r}s + \omega_r t\right), \\
 \omega_r &= 1337.7 \text{ rad/s}, \\
 \omega_i &= -11.3 \text{ rad/s}.
 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que le mode  $-$  va s'amortir au bout d'un temps suffisamment long et dans ce cas on observera le mode  $+$  représenté à différents instants dans la Fig. 4.14.

On remarque que la rotation du mode n'est pas régulière au cours de la période. Les inhomogénéités introduites dans la répartition du champ  $n - \tau$  modifie la phase  $\phi(x, s)$  du mode  $+$ , elle n'est pas tout à fait linéaire comme le montre la Fig. 4.15. Si on accroît les inhomogénéités dans la configuration la rotation du mode est de plus en plus irrégulière. La phase tend vers une répartition constante par morceaux caractéristique des modes stationnaires.



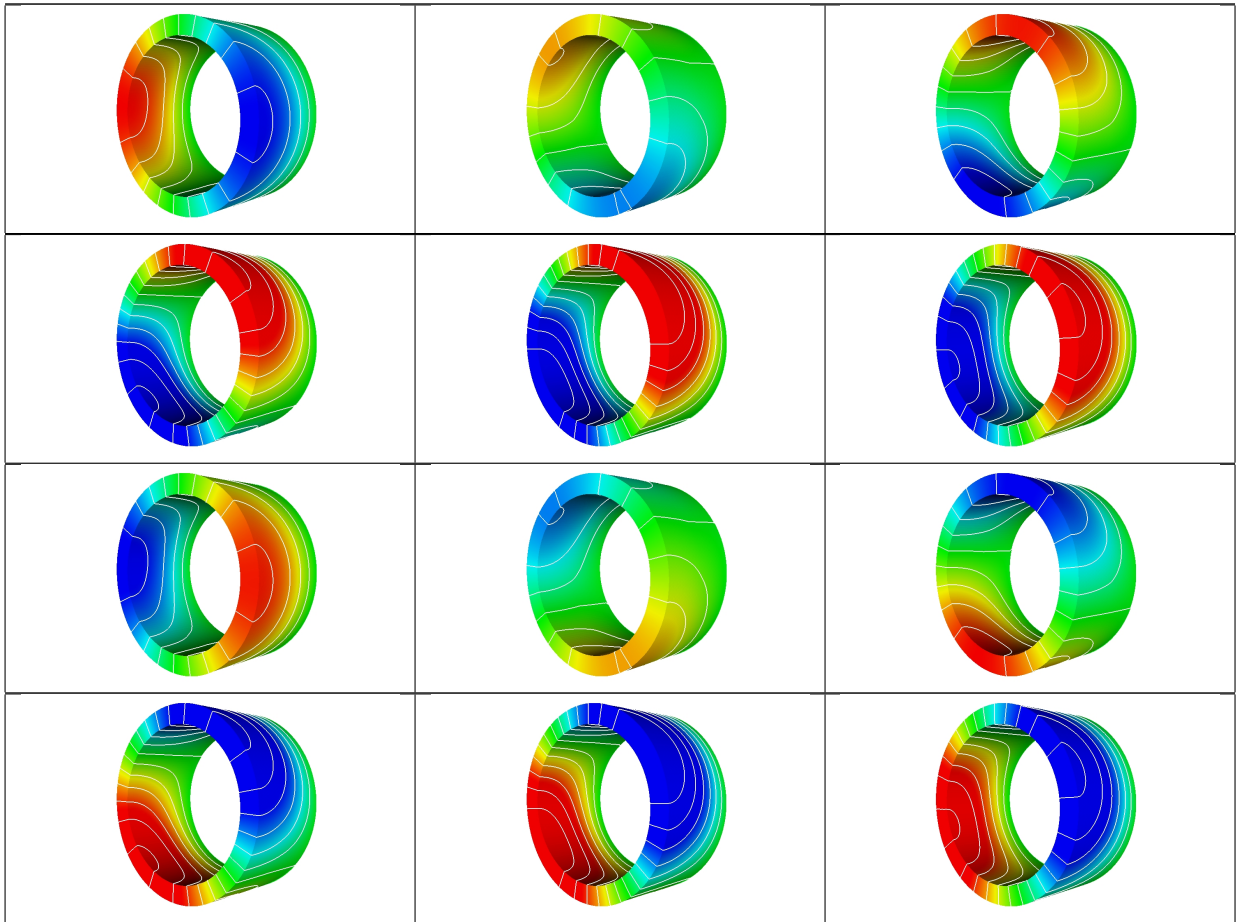


FIG. 4.14 - La fluctuation de pression instationnaire :  $p_1^+(\vec{x}, t)$  pour la configuration inhomogène en  $\theta$ .

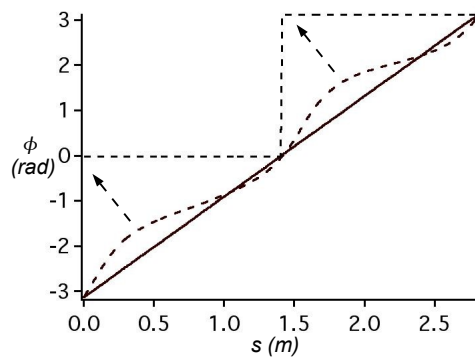


FIG. 4.15 - - : configuration symétrique en  $\theta$ , - - : configuration dissymétrique en  $\theta$ .

## Conclusions

Finalement les résultats présentés dans cette section permettent de proposer le scénario suivant :

- Lorsque la configuration est parfaitement symétrique selon  $\theta$ , les modes propres sont couplés, ils partagent la même fréquence :
  - Ils seront amortis si  $\tau \in ]0, T/2[$ , amplifiés si  $\tau \in ]T/2, T[$  et marginalement stables si  $T = nT/2$  ou s'il n'y a pas de fluctuations de taux de dégagement de chaleur.
  - Les modes peuvent être tournants ou stationnaires : ces deux types de modes sont solutions du problème.
  
- Si on introduit une légère dissymétrie, les modes couplés se dissocient. Ils n'oscillent plus à la même fréquence et n'ont pas le même taux d'amplification. On a alors apparition de modes instationnaires tournants qui peuvent être amplifiés ou amortis.
  
- Si on accentue les dissymétries, la phase des modes tend vers une répartition continue par morceaux caractéristique des modes stationnaires.

Une chambre de combustion en fonctionnement ne constitue pas une configuration parfaitement symétrique pour les modes azimutaux et ce pour différentes raisons. L'inclinaison de la multiperforation induit un écoulement giratoire moyen dans le foyer. On peut aussi remarquer que les tourbillonneurs ont tous le même sens de rotation ce qui induit une différence dans l'écoulement vu par les ondes azimutales + et -. La turbulence de l'écoulement dans la zone de flamme induit des inhomogénéités locales différentes dans chaque secteur. Ces différentes raisons peuvent expliquer pourquoi, ce phénomène de rotation des modes azimutaux est observé dans les mesures expérimentales d'instabilités [46] et dans les simulations aux grandes échelles de ce type de modes [81].

## 4.2 Mesure de la fonction de transfert de flamme

Pour pouvoir faire des développements analytiques, on a considéré, dans la section précédente, la flamme comme infiniment mince. Dans le cas de la chambre de combustion qui sera étudiée au chapitre suivant, la flamme est stabilisée par la zone de recirculation créée par l'écoulement tourbillonnant. Les fluctuations du taux de dégagement de chaleur inhérentes à la réaction de combustion s'étalent dans toute la zone primaire : de la section de sortie du tourbillonneur jusqu'aux trous primaires. L'écoulement est fortement turbulent dans cette zone et la réponse de flamme à une excitation acoustique donnée est caractérisée par des coefficients locaux :  $n_u(\vec{x}, \omega_r)$  et  $\tau_u(\vec{x}, \omega_r)$ , qui rendent compte des inhomogénéités de la combustion dans cette zone mais aussi de la dépendance de la fonction de transfert de flamme à la fréquence du forçage acoustique. La mesure des coefficients  $n_u(\vec{x}, \omega_r)$  et  $\tau_u(\vec{x}, \omega_r)$  peut se faire expérimentalement ou numériquement.

Pour mesurer la fonction de transfert de flamme expérimentalement on utilise la *Fluorescence Induite par Laser (LIF)* du radical CH [34]. Cette méthode permet de détecter la présence de certaines espèces (comme CH ou OH par exemple) en leur faisant émettre un rayonnement caractéristique sous l'effet de l'excitation provoquée par le laser.

On peut aussi mesurer la fonction de transfert de flamme par des simulations numériques. Il faut pour cela utiliser un code qui résout les équations de Navier-Stokes instationnaires, compressibles, en milieu réactif. Un code URANS permettra de capturer l'influence des grosses structures qui apparaissent en moyenne à la fréquence du forçage acoustique, sur le taux de dégagement de chaleur. Au CERFACS, on utilise la simulation aux grandes échelles (AVBP) qui permet une résolution plus fine de l'écoulement. Les instationnarités du dégagement de chaleur sont explicitement résolues et le contenu fréquentiel (résolu) de l'écoulement est beaucoup plus riche que dans une simulation de type URANS. Ce qui permet une description plus détaillée des inhomogénéités du taux de dégagement de chaleur dans la zone réaction. La simulation numérique directe étant, bien sûr, inenvisageable à l'heure actuelle pour ce type d'application.

Pour obtenir la fonction de transfert de flamme on mesure le taux de dégagement de chaleur local dans toute la zone de réaction, l'écoulement étant soumis à des excitations acoustiques généralement imposées en entrée du domaine. On présente dans cette section deux méthodes de forçage acoustique :

– Le forçage monofréquentiel :

Cette méthode permet de calculer les champs  $n_{u,\omega_f}(\vec{x})$  et  $\tau_{u,\omega_f}(\vec{x})$  qui caractérisent la réponse de flamme à la fréquence du forçage monofréquentiel :  $f = 2\pi/\omega_f$ . Si on veut la fonction de transfert de flamme pour différentes fréquences, il faut faire plusieurs simulations grandes échelles, ce qui peut devenir très coûteux.

– Le forçage multi-fréquentiel ou forçage par bande de fréquences :

Cette méthode permet de calculer les champs  $n_u(\vec{x}, \omega_r)$  et  $\tau_u(\vec{x}, \omega_r)$  pour  $f = 2\pi/\omega_r$  dans une large bande de fréquences à partir d'une seule simulation aux grandes échelles.

### 4.2.1 Forçage monofréquentiel

Cette méthode consiste à moduler l'amplitude de l'onde entrante tout en laissant sortir les ondes du domaine de calcul sans réflexion. Cette méthode est présentée en détail dans [35]. On mesure les signaux  $q(\vec{x}, t)$ ,  $u(\vec{x}, t)$  et  $p(\vec{x}, t)$  soumis au forçage acoustique de pulsation  $\omega_f$ , au cours d'un temps noté  $T_{simu}$ . Les signaux sont bruités par la turbulence et contiennent beaucoup de fréquences. On extrait les coefficients de Fourier correspondant à la fréquence de forçage de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\hat{q}(\vec{x}) &= \int_{T_{simu}} q(\vec{x}, t) e^{-i\omega_f t} dt, \\ \hat{u}(\vec{x}_{ref}) &= \int_{T_{simu}} \vec{u}(\vec{x}_{ref}, t) \cdot \vec{n}_{ref} e^{-i\omega_f t} dt, \\ \hat{p}(\vec{x}_{ref}) &= \int_{T_{simu}} p(\vec{x}_{ref}, t) e^{-i\omega_f t} dt.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Le temps de mesure des signaux  $T_{simu}$  doit être suffisamment long pour capturer plusieurs périodes d'oscillation, typiquement  $T_{simu} = 5$  à  $10 T_f$ , avec  $T_f$  la période du forçage. Le temps d'échantillonnage du signal doit assurer une résolution fréquentielle suffisante pour capturer correctement les fluctuations à la fréquence de forçage. Pour donner un ordre de grandeur, dans les calculs qui seront présentés dans le paragraphe suivant,  $T_{simu} = 8 T_f$  et le temps d'échantillonnage  $\Delta t_{echant} = T_f/25$ .

#### Cas de la flamme compacte

En suivant les résultats obtenus par Truffin dans [85], lorsque la condition de compacité est satisfaite :

$$\|\vec{x}_{ref} - \vec{x}_{flamme}\| \ll \lambda_f,$$

avec  $\lambda_f$  la longueur d'onde associée à la fréquence de forçage et  $x_{flamme}$  la position du centre de la flamme ; alors on utilise la fonction de transfert sous la forme :

$$\frac{\hat{q}(\vec{x})}{q_0} = n_{u,\omega_f}(\vec{x}) e^{i\omega_f \tau_{u,\omega_f}(\vec{x})} \frac{\hat{u}(\vec{x}_{ref})}{\bar{U}_{bulk}}. \quad (4.9)$$

Dans ce cas l'amplitude de la réponse de flamme se déduit de la mesure du dégagement de chaleur dans la zone de flamme et de la vitesse au point de référence par la formule suivante :

$$n_{u,\omega_f}(\vec{x}) = \frac{\bar{U}_{bulk}}{q_0} \cdot \left| \frac{\hat{q}(\vec{x})}{\hat{u}(\vec{x}_{ref})} \right|.$$

Fig. 4.16 et Fig. 4.17 présentent le champ  $n_{u,\omega_f}(\vec{x})$  obtenu par cette méthode dans le foyer qui sera étudié en détails au chapitre suivant. Dans ce cas la fréquence de forçage est de 600 Hz,  $\lambda_f \sim 1$  m. On prend  $x_{flamme}$  au milieu de la zone primaire alors  $\|\vec{x}_{ref} - \vec{x}_{flamme}\| \sim 5$  cm, la condition de compacité est bien satisfaite dans ce cas.

On déduit le délai  $\tau_{u,\omega_f}(\vec{x})$  de Eq. (4.9) :

$$\tau_{u,\omega_f}(\vec{x}) = \frac{1}{\omega_f} \arg\left(\frac{\hat{q}(\vec{x})}{\hat{u}(\vec{x}_{ref})}\right) = \frac{1}{\omega_f} \left[ \arg(\hat{q}(\vec{x})) - \arg(\hat{u}(\vec{x}_{ref})) \right].$$

Sous l'hypothèse des fluctuations harmoniques, le délai s'exprime comme la différence entre les arguments des coefficients de Fourier complexes  $\hat{q}(\vec{x})$  et  $\hat{u}(\vec{x}_{ref})$ . Or l'argument d'un nombre complexe est compris entre  $-\pi$  et  $\pi$  :

$$\begin{aligned} -\pi &< \arg(\hat{q}(\vec{x})) < \pi, \\ -\pi &< \arg(\hat{u}(\vec{x}_{ref})) < \pi, \end{aligned}$$

et donc

$$-T_f < \tau_{u,\omega_f}(\vec{x}) < T_f.$$

Cette convention induit donc une répartition du délai  $\tau_{u,\omega_f}(\vec{x})$  qui présente des discontinuités dès que  $\tau_{u,\omega_f}(\vec{x}) = kT_f$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , comme le montre Fig. 4.16 et Fig. 4.17.

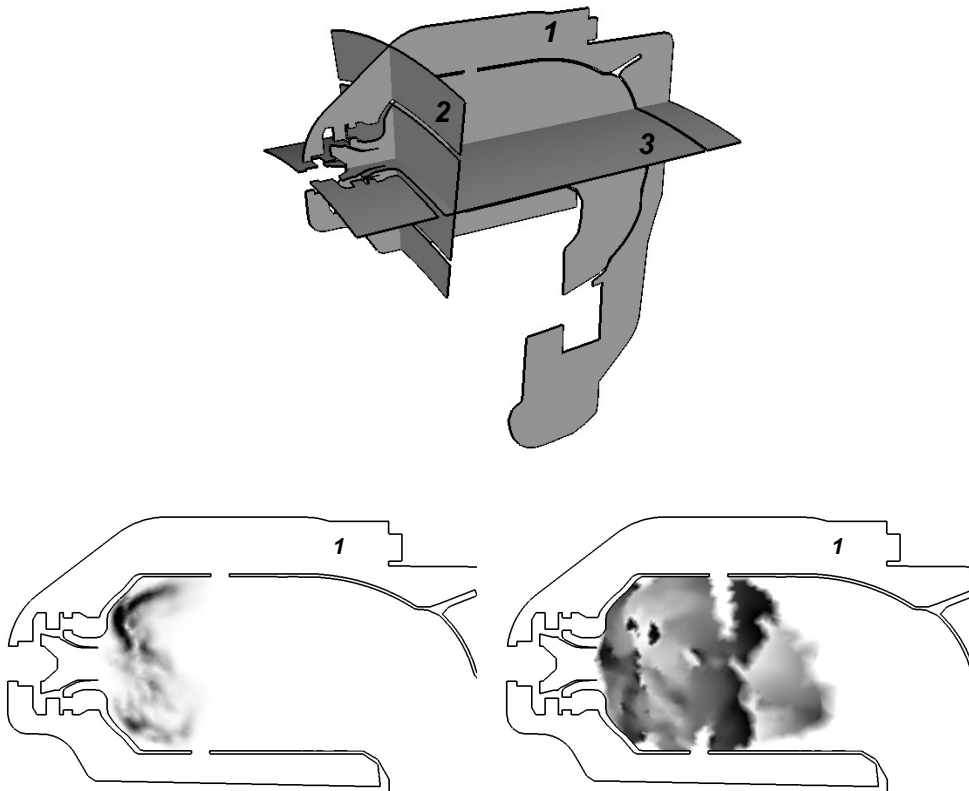


FIG. 4.16 - Réponse de flamme (dans le plan de coupe 1) à la fréquence de forçage  $f=600$  Hz. A gauche l'amplitude  $n_u(\vec{x})$  et à droite le délai  $\tau_u(\vec{x})$ .

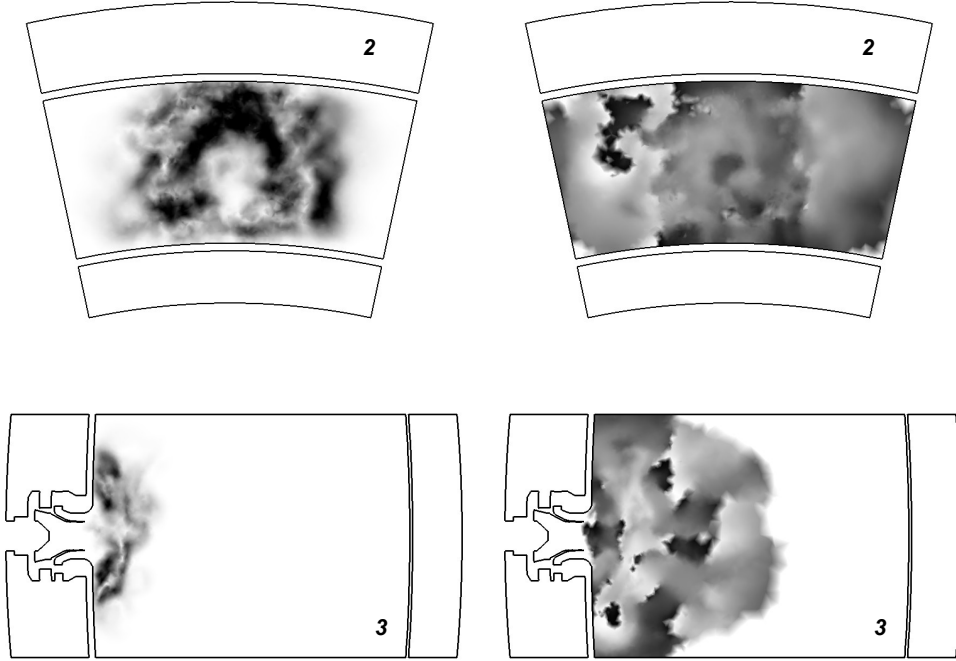


FIG. 4.17 - Réponse de flamme (dans les plans de coupe 2 et 3) à la fréquence de forçage  $f=600$  Hz. A gauche l'amplitude  $n_u(\vec{x})$  et à droite le délai  $\tau_u(\vec{x})$ .

### Cas de la flamme non compacte

Si l'hypothèse de compacité n'est pas respectée, il faut utiliser une fonction de transfert à quatre paramètres :

$$\frac{\hat{q}(\vec{x})}{q_0} = n_{u,\omega_f}(\vec{x})e^{i\omega_f\tau_{u,\omega_f}(\vec{x})}\frac{\hat{u}(\vec{x}_{ref})}{\bar{U}_{bulk}} + n_{p,\omega_f}(\vec{x})e^{i\omega_f\tau_{p,\omega_f}(\vec{x})}\frac{\hat{p}(\vec{x}_{ref})}{p_0}.$$

Dans ce cas la détermination des champs  $n_{u,\omega_f}(\vec{x})$ ,  $n_{p,\omega_f}(\vec{x})$ ,  $\tau_{u,\omega_f}(\vec{x})$ , et  $\tau_{p,\omega_f}(\vec{x})$  nécessite la résolution, en chaque nœud  $\vec{x}_i$  dans la zone de réaction, des deux équations complexes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{q}_I(\vec{x}_i)}{q_0} &= n_{u,\omega_f}(\vec{x}_i)e^{i\omega_f\tau_{u,\omega_f}(\vec{x}_i)}\frac{\hat{u}_I(\vec{x}_{ref})}{\bar{U}_{bulk}} + n_{p,\omega_f}(\vec{x}_i)e^{i\omega_f\tau_{p,\omega_f}(\vec{x}_i)}\frac{\hat{p}_I(\vec{x}_{ref})}{p_0}, \\ \frac{\hat{q}_{II}(\vec{x}_i)}{q_0} &= n_{u,\omega_f}(\vec{x}_i)e^{i\omega_f\tau_{u,\omega_f}(\vec{x}_i)}\frac{\hat{u}_{II}(\vec{x}_{ref})}{\bar{U}_{bulk}} + n_{p,\omega_f}(\vec{x}_i)e^{i\omega_f\tau_{p,\omega_f}(\vec{x}_i)}\frac{\hat{p}_{II}(\vec{x}_{ref})}{p_0}. \end{aligned}$$

En écrivant le système sous forme matricielle, on cherche le vecteur :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{u,\omega_f}(\vec{x}_i) e^{i\omega_f \tau_{u,\omega_f}(\vec{x}_i)} \\ n_{p,\omega_f}(\vec{x}_i) e^{i\omega_f \tau_{p,\omega_f}(\vec{x}_i)} \end{pmatrix},$$

solution du problème :

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{u}_I(x_{ref})}{\bar{U}_{bulk}} & \frac{\hat{p}_I(x_{ref})}{p_0} \\ \frac{\hat{u}_{II}(x_{ref})}{\bar{U}_{bulk}} & \frac{\hat{p}_{II}(x_{ref})}{p_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{q}_I(\vec{x}_i)}{q_0} \\ \frac{\hat{q}_{II}(\vec{x}_i)}{q_0} \end{pmatrix}.$$

Ce système admet une solution unique si et seulement si les vecteurs

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{u}_I(x_{ref})}{\bar{U}_{bulk}} \\ \frac{\hat{p}_I(x_{ref})}{p_0} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{\hat{u}_{II}(x_{ref})}{\bar{U}_{bulk}} \\ \frac{\hat{p}_{II}(x_{ref})}{p_0} \end{pmatrix},$$

sont linéairement indépendants. Le calcul de ce type de fonction de transfert nécessite deux simulations aux grandes échelles indépendantes satisfaisant la condition d'indépendance linéaire des vecteurs ci-dessus. Deux méthodes sont proposées dans [85] :

- La première consiste à forcer acoustiquement les deux simulations par l'entrée et en changeant la condition limite de sortie pour obtenir deux états indépendants  $I$  et  $II$ .
- La deuxième méthode consiste à obtenir l'état  $I$  en forçant par l'entrée et l'état  $II$  en forçant par la sortie.

#### 4.2.2 Forçage multifréquentiel

Cette méthode consiste à moduler l'onde entrante par un bruit blanc filtré. Le contenu fréquentiel est choisi en fonction de la plage de fréquence qui intéresse l'utilisateur. La flamme est considérée comme un système linéaire et sa fonction de transfert se déduit de la *réponse impulsionnelle* qui est notée  $h$ . L'équation de Wiener-Hopf permet de calculer cette *réponse impulsionnelle* du système, à partir des signaux échantillonnés de dégagement de chaleur  $q_i = q(\vec{x}_1, i\Delta t)_{i=0,\dots,N}$  (signal de sortie du système) et de la vitesse au point de référence  $u_i = u(\vec{x}_1, i\Delta t)_{i=0,\dots,N}$  (signal d'entrée du système) :

$$\bar{h} = \bar{\Gamma}^{-1} \bar{c},$$

avec  $\bar{\Gamma}$  la matrice d'autocorrélation :

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{N-L+1} \sum_{l=L}^N u_{l-i} u_{l-j} \text{ pour } i, j = 0, \dots, L$$

et  $\bar{c}$  le vecteur des corrélations croisées :

$$c_i = \frac{1}{N-L+1} \sum_{l=L}^N u_{l-i} q_l, \text{ pour } i = 0, \dots, L$$

$L\Delta t$  représente la mémoire du système ( $q_i = \sum_{k=0}^L h_k u_{i-k}$ ,  $i = L, \dots, N$ ). Ce paramètre  $L$  contrôle la précision de la *méthode de Wiener-Hopf* pour caractériser la fonction de transfert aux basses fréquences. Pour les hautes fréquences, c'est le temps d'échantillonnage  $\Delta t$  qui est important. On peut alors calculer les paramètres locaux  $n_u(x_1, \omega_r)$  et  $\tau_u(x_1, \omega_r)$  au point  $x_1$ , avec la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^L h_k e^{-i\omega_r k \Delta t} = 1 + n_u(\vec{x}_1, \omega_r) e^{i\omega_r \tau_u(\vec{x}_1, \omega_r)}. \quad (4.10)$$

Finalement la méthodologie de calcul se résume en 5 étapes :

1. Forçage de la simulation aux grandes échelles par un bruit blanc filtré.
2. Echantillonnage des signaux de dégagement de chaleur en chaque point de la zone de réaction, et de la vitesse au point de référence.
3. Calcul de la matrice d'autocorrélation  $\bar{\Gamma}$  et du vecteur d'intercorrélacion  $\bar{c}$ .
4. Résolution de l'équation de *Wiener-Hopf*.
5. Reconstruction de la fonction de transfert de flamme avec la réponse impulsionnelle.

La Fig. 4.18 extraite de [26] compare les paramètres globaux  $n_u^g(\omega_r)$  et  $\tau_u^g(\omega_r)$  obtenus par la méthode de forçage mono-fréquentielle et multi-fréquentielle dans le cas d'un secteur de turbine à gaz industrielle. L'accord entre les deux méthodes est satisfaisant et confirme que la méthodologie Wiener-Hopf permet de déterminer la fonction de transfert de flamme pour une large bande de fréquence avec une seule simulation. Différentes valeurs pour le paramètre  $L$  ont été testées, les résultats sont représentés par les courbes en pointillés. Dans ce cas, l'écart est de l'ordre de 10% et il s'accroît à l'approche de la fréquence de coupure du bruit blanc filtré (600 Hz). L'amplitude de la fonction de transfert globale ne dépasse pas 1, ce qui veut dire que pour une fluctuation de vitesse de 10% de la vitesse moyenne dans le tourbillonneur (point de référence), le taux de dégagement de chaleur global ne dépassera pas 10% de sa valeur moyenne. Plus de détails sur ces aspects sont disponibles dans [26].

Dans le cas d'une flamme tridimensionnelle, les étapes 3, 4 et 5 sont appliquées pour chaque nœud situé dans la zone de combustion. On obtient dans ce cas des vecteurs  $n_u(\vec{x}, \omega_r)$  et  $\tau_u(\vec{x}, \omega_r)$  à quatre dimension :

- 3 dimensions spatiales, qui représentent les inhomogénéités du taux de dégagement de chaleur dans la zone de réaction (Fig. 4.16 et Fig. 4.17),
- 1 dimension fréquentielle, qui rend compte du comportement différent de la flamme selon le forçage acoustique.

Cette méthode se généralise également au cas de la fonction de transfert de flamme non compacte indexée sur les fluctuations de vitesse et de pression au point de référence. L'indépendance linéaire des deux états de forçage est assurée en imposant des conditions limites différentes dans chacune des deux simulations [64].



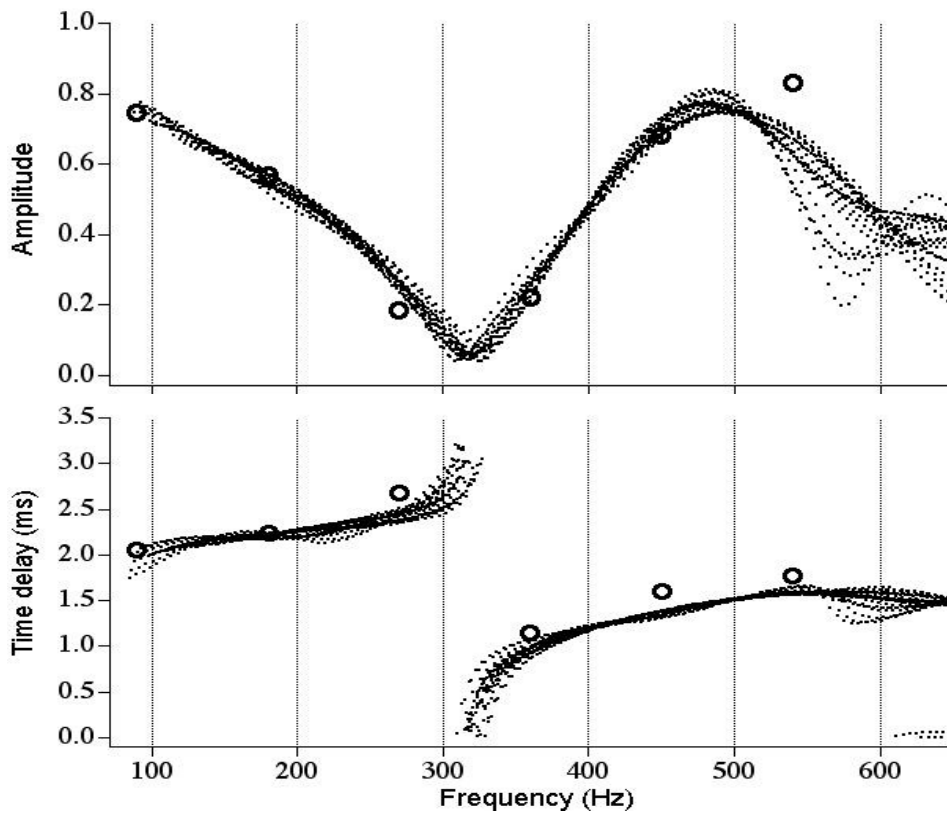


FIG. 4.18 - Paramètres globaux  $n_u^g(\omega_r)$  et  $\tau_u^g(\omega_r)$  de la fonction de transfert de flamme obtenu avec :  $\circ$  un forçage monofréquentiel et - - - un forçage avec bruit blanc filtré (fréquence de coupure : 600 Hz).



# Chapitre 5

## Etude d'une chambre industrielle

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>La chaîne QUIET</b>	<b>100</b>
<b>5.2</b>	<b>La chambre de combustion</b>	<b>102</b>
<b>5.3</b>	<b>Etude d'un secteur de la chambre</b>	<b>103</b>
5.3.1	La Simulation Grandes Echelles	103
5.3.2	Les calculs thermoacoustiques	105
<b>5.4</b>	<b>Etude de la configuration annulaire</b>	<b>110</b>
5.4.1	La Simulation Grandes Echelles	110
5.4.2	Les calculs thermoacoustiques	112

---

## 5.1 La chaîne QUIET

Le code AVSP résout l'équation de Helmholtz en milieu réactif munie des conditions limites d'impédance sur les bords du domaine de calcul :

$$\begin{cases} \nabla \cdot c_0^2(\vec{x}) \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) + \omega^2 \hat{p}(\vec{x}) = \frac{(\gamma-1) q_0}{\rho_0(\vec{x}) \bar{U}_{bulk}} n_u(\vec{x}, \omega_r) e^{i\omega \tau_u(\vec{x}, \omega_r)} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \text{ sur } \Omega \\ \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) \cdot \vec{n} - i \frac{\omega}{c_0(\vec{x}) Z(\omega_r)} \hat{p}(\vec{x}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega_R. \end{cases} \quad (5.1)$$

La détermination des éléments propres  $(\omega, \hat{p}(\vec{x}))$  de ce problème nécessite la connaissance au préalable d'un certain nombre de grandeurs physiques : la vitesse du son  $c_0(\vec{x})$ , la masse volumique  $\rho_0(\vec{x})$ , le coefficient de compressibilité  $\gamma$ , le taux de dégagement de chaleur moyen  $q_0$ , la vitesse moyenne au point de référence  $\bar{U}_{bulk}$ , la fonction de transfert de flamme  $(n_u(\vec{x}, \omega_r), \tau_u(\vec{x}, \omega_r))$  et l'impédance  $Z(\omega_r)$  sur le bord du domaine de calcul. Le code AVSP est donc placé au bout d'une chaîne de calcul dont l'objectif est de calculer numériquement toutes ces grandeurs. Cette chaîne est baptisée QUIET (QUantification of Instabilities and noise in Turbine) et peut être représentée de façon schématique par Fig. 5.1.

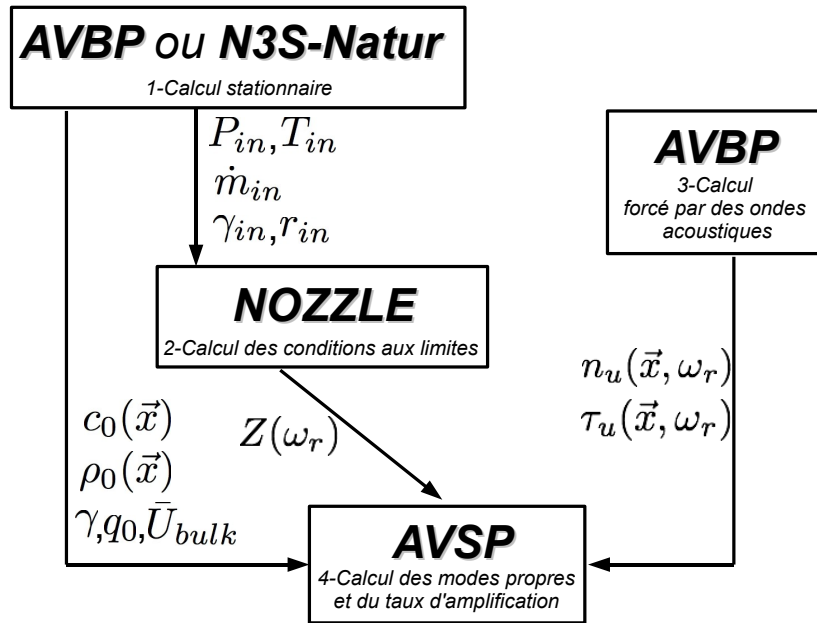


FIG. 5.1 - Chaîne de calcul QUIET.

- La première étape de l'étude thermoacoustique consiste à faire une simulation réactive stationnaire de l'écoulement dans la chambre de combustion. Cette simulation peut donc être réalisée soit avec un code RANS (N3S-Natur) soit avec un code de simulations aux grandes échelles (AVBP) en moyennant les champs instantanés obtenus. De cette façon, on obtient les grandeurs physiques nécessaires à l'étude thermoacoustique de la chambre de combustion :

- Les températures sont très différentes dans le contournement ( $\sim 500\text{K}$ ), dans la zone primaire ( $\sim 1500\text{K}$ ) et dans la zone de dilution ( $\sim 1000\text{K}$ ). Ces très forts gradients de température influencent directement la vitesse de propagation des ondes dans le milieu ( $c = \sqrt{\gamma r T}$ ) et donc les modes acoustiques qui s’y développent. Ces effets sont pris en compte dans l’opérateur principal de l’équation de Helmholtz (Eq. (5.1)) où apparaît explicitement le champ de vitesse du son  $c_0(\vec{x})$ .
  - La masse volumique  $\rho_0(\vec{x})$ , le taux de dégagement de chaleur moyen  $q_0$ , la vitesse moyenne au point de référence et le coefficient de compressibilité du gaz  $\gamma$  apparaissent au second membre de l’équation. Ces grandeurs sont impliquées dans le couplage acoustique/combustion.
- La détermination des impédances acoustiques en entrée et en sortie de la chambre de combustion est une difficulté principale pour la prévision des instabilités thermoacoustiques. La mesure de l’impédance dans une chambre de combustion munie de son compresseur et de la turbine haute pression est très compliquée du fait des conditions extrêmes de température, de pression et du peu d’accessibilité qu’offre une telle configuration. La chaîne de calcul QUIET est munie du code NOZZLE qui permet de déterminer l’impédance en sortie de la chambre de combustion lorsque le DHP (Distributeur Haute Pression) est amorcé [41]. Les travaux de Marble et Candel [47] fournissent l’expression analytique de l’impédance au col d’une tuyère amorcée. Ainsi, en assimilant les sections de passage entre les pales du DHP à des tuyères amorcées, le code NOZZLE calcule l’impédance dans la section de sortie de chambre. L’idée est de transférer la connaissance de l’impédance au col dans une section amont où le Mach est suffisamment faible pour raccorder les hypothèses AVSP. Pour faire ces calculs, le code NOZZLE nécessite les grandeurs  $P_{in}$ ,  $T_{in}$ ,  $\dot{m}_{in}$ ,  $\gamma_{in}$  et  $r_{in}$  respectivement la pression, la température, le débit, le coefficient de compressibilité moyenné sur la section d’entrée du DHP (ou de sortie de la chambre).
  - Dans un troisième temps, il faut déterminer la fonction de transfert de flamme. Les paramètres locaux de cette fonction de transfert,  $n_u(\vec{x}, \omega_r)$  et  $\tau_u(\vec{x}, \omega_r)$ , sont extraits d’une simulation aux grandes échelles dans laquelle l’écoulement est traversé par des ondes acoustiques. L’aspect instationnaire de la simulation est, pour cette application, inévitable : on utilise le code AVBP. Un forçage monofréquentiel donnera la réponse de flamme à la fréquence de forçage uniquement, tandis qu’un forçage par bruit blanc filtré permet d’obtenir la fonction de transfert de flamme sur une large bande de fréquence.
  - Puis il faut résoudre le problème aux valeurs propres (Eq. (5.1)) avec le code AVSP en utilisant un des algorithmes de *point fixe* proposés dans le chapitre III.

Dans la suite de ce chapitre, la chaîne de calcul QUIET est utilisée pour étudier la chambre de combustion d’un turbomoteur d’hélicoptère développé par Turbomeca. Les essais effectués par les ingénieurs ont révélé la présence d’oscillations de pression anormalement élevées. Une étude approfondie de cette chambre de combustion a été menée en collaboration avec Turbomeca. Les simulations aux grandes échelles effectuées avec le code AVBP ainsi que les calculs AVSP ont permis de montrer qu’il s’agissait d’instabilités thermoacoustiques :

- La fréquence propre du mode azimutal calculée correspond à la fréquence mesurée lors des tests par les ingénieurs.
- De plus, les simulations aux grandes échelles effectuées sur un secteur [11, 13, 14, 12], puis sur la

configuration annulaire complète [81], exhibent des fluctuations de pression et de taux de dégagement de chaleur aux fréquences propres prévues par AVSP.

Parmi les différentes solutions envisagées pour amortir ces instabilités, celle préconisée par les ingénieurs Turbomeca a été de changer les tourbillonneurs. L'écoulement dans la zone primaire est alors moins sensible au couplage avec les modes acoustiques. Les principaux résultats concernant l'étude thermoacoustique de cette chambre sont présentés dans ce chapitre.

## 5.2 La chambre de combustion

La chambre de combustion étudiée dans ce chapitre équipe un turbomoteur, destiné aux hélicoptères de 5 à 6.5 tonnes. Il développe une puissance au décollage de 900 kW, son architecture s'articule autour d'un générateur de gaz comportant deux étages de compresseur centrifuge accouplés à une turbine haute pression simple étage. La turbine de puissance est composée de deux étages Fig. (5.2).

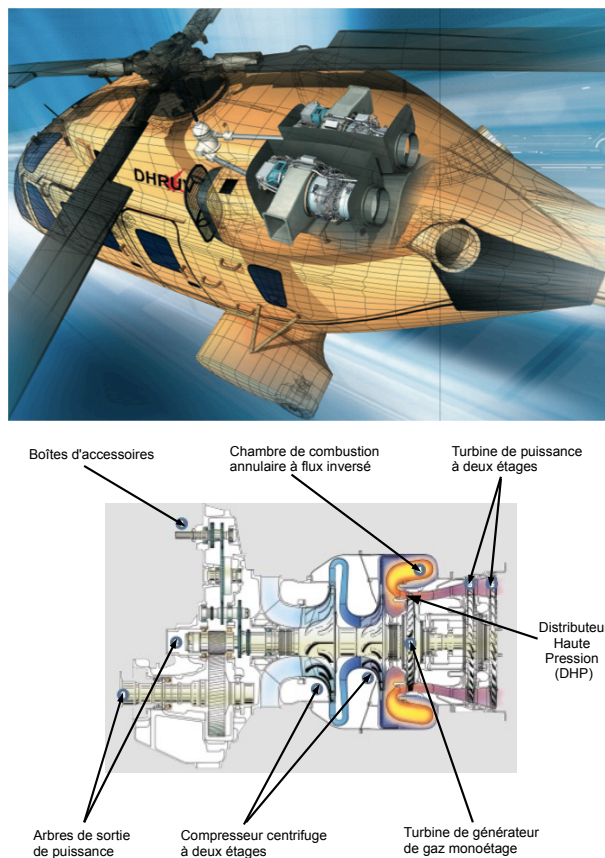


FIG. 5.2 - Le turbomoteur.

La chambre de combustion est annulaire et présente 15 tourbillonneurs. Les gaz frais comprimés par les

deux étages du compresseur entrent dans le contournement par ce qui sera la condition limite d'entrée pour les calculs numériques de la chambre de combustion (Fig. 5.3). Une partie des gaz frais du contournement passe par les multiperforations, ou les films de refroidissement, pour protéger la structure des très hautes températures qui règnent dans le foyer. L'autre partie passent dans le tourbillonneur et est mélangée au fuel pour la combustion. La zone de recirculation créée par l'écoulement tourbillonnant permet de stabiliser la flamme. La zone de combustion s'étend jusqu'aux trous primaires qui relient le contournement au foyer. Les gaz brûlés détendus sont ensuite éjectés par la sortie de la chambre de combustion. Une partie de l'énergie cinétique qui provient de l'expansion des gaz est récupérée par la turbine haute pression pour entraîner le compresseur. L'autre partie de l'énergie est récupérée par la turbine de puissance à deux étages pour entraîner le rotor de l'hélicoptère.

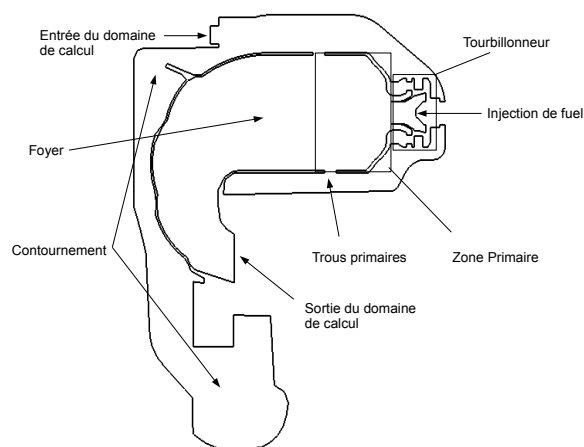


FIG. 5.3 - Coupe longitudinale d'un secteur de la chambre de combustion.

## 5.3 Etude d'un secteur de la chambre

Avant de faire l'étude de la chambre annulaire complète on s'intéresse à la configuration monosecteur :

- Pour des raisons de symétrie, le champ de vitesse du son ainsi que la fonction de transfert de flamme obtenue dans une configuration monosecteur seront ensuite recopiés dans chaque secteur de la chambre annulaire.
- De plus cette configuration est suffisante pour faire l'analyse thermoacoustique longitudinale.

### 5.3.1 La Simulation Grandes Echelles

La SGE de la configuration monosecteur a été réalisée par Boudier [12] avec le code AVBP. Les grandes échelles de la turbulence sont résolues tandis que les effets de sous mailles sont modélisés par une approche de type Smagorinsky. Le carburant utilisé est du JP10 : le schéma cinétique pour les flammes JP10/air est réduit à une étape, mais la vitesse de flamme est recalée sur les résultats d'une chimie complète pour des richesses comprises entre 0.4 et 1.5. Cinq espèces sont explicitement résolues : JP10,

$O$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$  et  $N_2$ . L'interaction turbulence/flamme est modélisée par le modèle de flamme épaisse [18], et les schémas numériques utilisés sont d'ordre 3 en temps (Runge-Kutta) et d'ordre 3 en espace (TTGC). En sortie de chambre de combustion est placé un convergent dont la section est représentative de celle vue par l'écoulement au passage des pales du Distributeur Haute Pression (DHP). Le col du DHP étant amorcé, l'écoulement impose naturellement la condition limite acoustique en sortie de chambre.

De cette simulation on extrait le champ de vitesse du son (Fig. 5.4) qui sera utilisé pour le calcul des fréquences propres de la chambre de combustion.

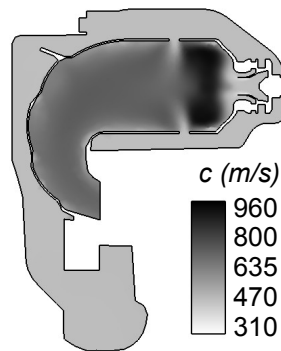


FIG. 5.4 - Le champ de vitesse du son.

Remarque : L'analyse de cette SGE révèle la présence d'un mode acoustique auto-entretenu oscillant à la fréquence de 490 Hz. Le champ de pression de ce mode est illustré par Fig. 5.5.

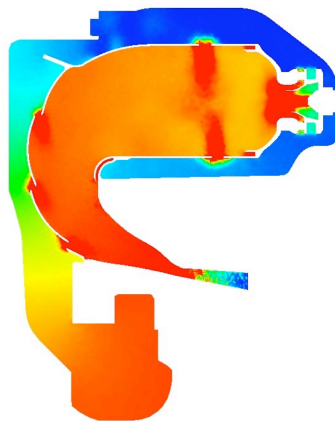


FIG. 5.5 - Module (bleu=0, rouge=1) des fluctuations de pression observées dans la SGE monosecteur.



### 5.3.2 Les calculs thermoacoustiques

Dans cette section est présentée l'analyse thermoacoustique AVSP de la configuration monosecteur :

- On étudie en détail le premier mode propre longitudinal du tube à flamme et de son contournement,
- on fait ensuite l'analyse de stabilité du mode longitudinal en considérant l'influence du dégagement de chaleur.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la SGE monosecteur.

#### Le mode propre longitudinal de la chambre

Fig. 5.6 montre le premier mode propre longitudinal :

- du tube à flamme (TF),
- du contournement (C),
- du tube à flamme connecté au contournement par le tourbillonneur (TF+C+T),
- du tube à flamme connecté au contournement par le tourbillonneur et par les trous primaires (TF+C+T+TP).

Ces calculs préliminaires sont réalisés en imposant des conditions limites de murs rigides partout, même en sortie de chambre de combustion.

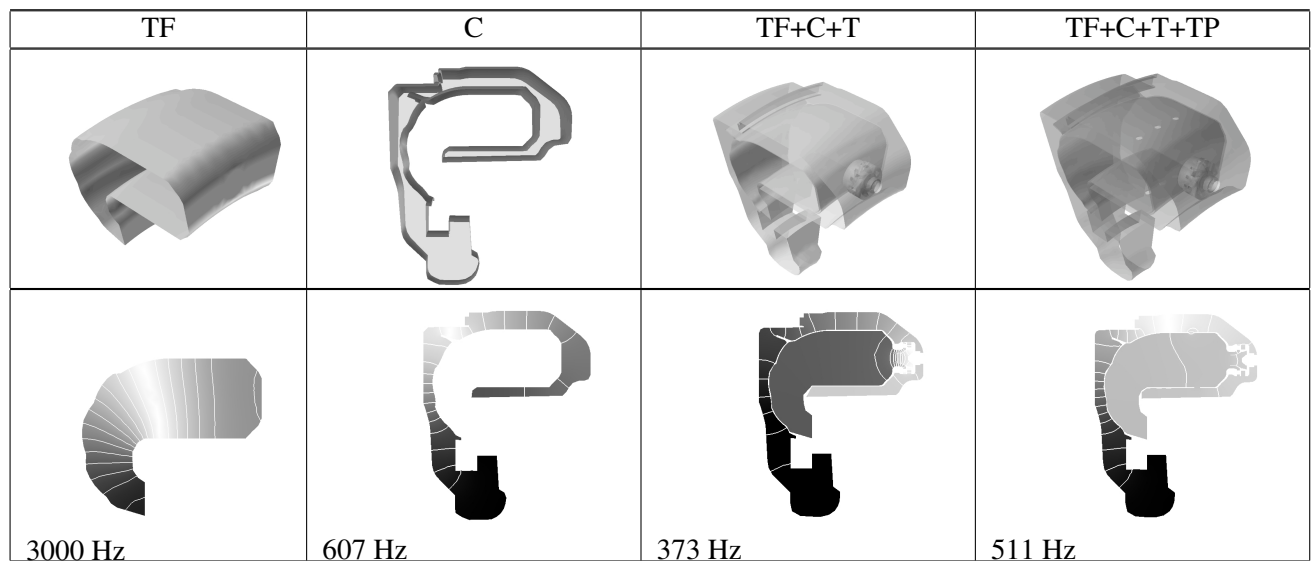


FIG. 5.6 - Module (blanc=0 et noir=1), isocontours de pression et fréquence du premier mode longitudinal pour différentes configurations.

La structure et la fréquence du mode propre de la configuration TF+C+T+TP sont en bon accord avec le mode observé dans la SGE. Ces résultats soulignent l'importance de considérer le tube à flamme ainsi que son contournement pour le calcul des modes acoustiques. On remarque également que les trous primaires ont une grande influence sur la structure de ce mode. Dans la suite de ce travail on utilisera donc la configuration TF+C+T+TP. Connaissant la section de passage entre les pales du DHP ainsi

que les caractéristiques de l'écoulement en sortie de chambre ( $P_{in}$ ,  $T_{in}$ ,  $\dot{m}_{in}$ ,  $\gamma_{in}$ ,  $r_{in}$ ) on peut, avec NOZZLE, calculer l'impédance acoustique mimant la présence du DHP en sortie de chambre. Le mode propre obtenu est consigné dans Fig. 5.7. On retrouve bien le mode auto-entretenu observé dans la SGE.

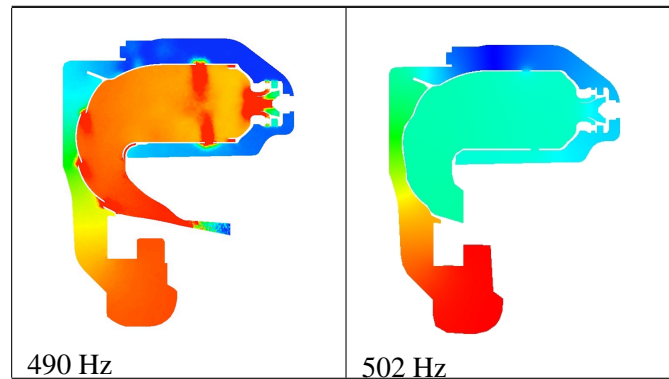


FIG. 5.7 - Module (bleu=0 et rouge=1) et fréquence des fluctuations de pression calculées par simulation aux grandes échelles (à gauche) et premier mode longitudinal calculé avec AVSP (à droite).

Remarque : Dans le cas de la simulation aux grandes échelles on remarque des niveaux élevés de pression fluctuante dans le tourbillonneur, dans les trous primaires et dans la partie arrière du foyer correspondant aux films de refroidissement. Il s'agit de signaux de pression large bande qui proviennent de la turbulence de l'écoulement dans les zones de fort cisaillement. Il ne s'agit pas de phénomènes acoustiques et ce type de fluctuations de pression pourrait être observé en écoulement incompressible.

### Etude de stabilité et comparaison avec la SGE

On s'intéresse dans cette section à la stabilité du mode longitudinal, obtenu dans la configuration TF+C+T+TP, lorsqu'il interagit avec le dégagement de chaleur.

- Le calcul de la FTF :

Pour déterminer la réponse de flamme, la SGE est soumise à un forçage acoustique de fréquence 600 Hz par l'entrée du domaine. La Fig. 5.8 représente la transformée de Fourier du signal de dégagement de chaleur global (*i.e.* intégré sur toute la zone primaire).

Le pic à la fréquence de forçage confirme la relation de cause à effet entre les ondes acoustiques et le dégagement de chaleur. Le modèle  $n - \tau$  permet de quantifier en terme de délai et d'amplitude cette relation. Cependant, le choix de la vitesse de référence utilisée dans ce modèle est laissé à l'utilisateur. La question qui se pose alors de savoir où placer ce point de référence, ou comment définir la vitesse de référence, pour caractériser au mieux la relation entre l'acoustique dans le tourbillonneur et le dégagement de chaleur dans la chambre de combustion. On peut alors se baser sur l'indice de corrélation entre vitesse de référence et dégagement de chaleur.

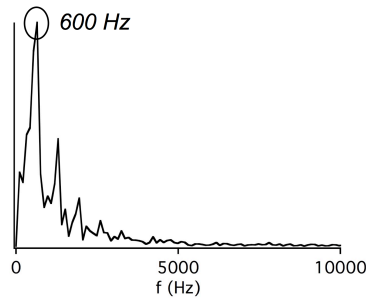


FIG. 5.8 - Transformée de Fourier du signal de dégagement de chaleur global.

Dans Fig. 5.9 sont représentées les fonctions de corrélation entre :

- le dégagement de chaleur global et la vitesse  $u_{ref}$  prise en un point dans le tourbillonneur (trait discontinu) :

$$u_{ref}(t) = \vec{u}(\vec{x}_{ref}, t) \cdot \vec{n},$$

- le dégagement de chaleur global et la vitesse  $U_{ref}$  moyennée sur la section de sortie du tourbillonneur, notée  $S_{ref}$  (trait plein) :

$$U_{ref}(t) = \int_{S_{ref}} \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS - \frac{1}{T} \int_T \int_{S_{ref}} \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS dT, \quad (5.2)$$

avec  $\vec{n}$  la normale à la section  $S_{ref}$ .

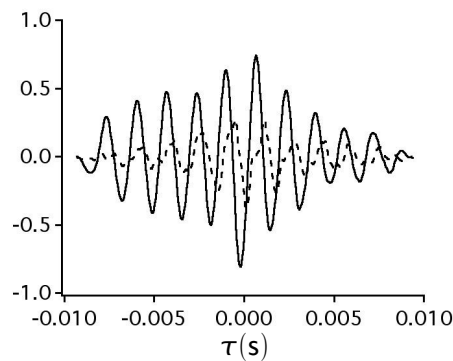


FIG. 5.9 - Corrélation entre le dégagement de chaleur et la vitesse en un point du tourbillonneur (trait discontinu) et la vitesse moyennée sur la section de sortie du tourbillonneur (trait plein).

Le fait de considérer la vitesse moyennée sur une section permet d'atténuer le bruit de turbulence qui est important dans cette zone de l'écoulement. On obtient ainsi un meilleur indice de corrélation entre le taux de dégagement de chaleur et la vitesse de référence et donc une meilleure précision pour le calcul de la fonction de transfert de flamme.

On utilisera donc la FTF suivante :

$$\frac{q_1(\vec{x}, t)}{q_0} = n_u^{600}(\vec{x}) \frac{U_{ref}(t - \tau_u^{600}(\vec{x}))}{\bar{U}_{bulk}},$$

avec  $U_{ref}$  défini par Eq. 5.2. Les coefficients  $n_u^{600}(\vec{x})$  et  $\tau_u^{600}(\vec{x})$ , calculés par post-traitement de la SGE, sont illustrés par Fig. 5.10.

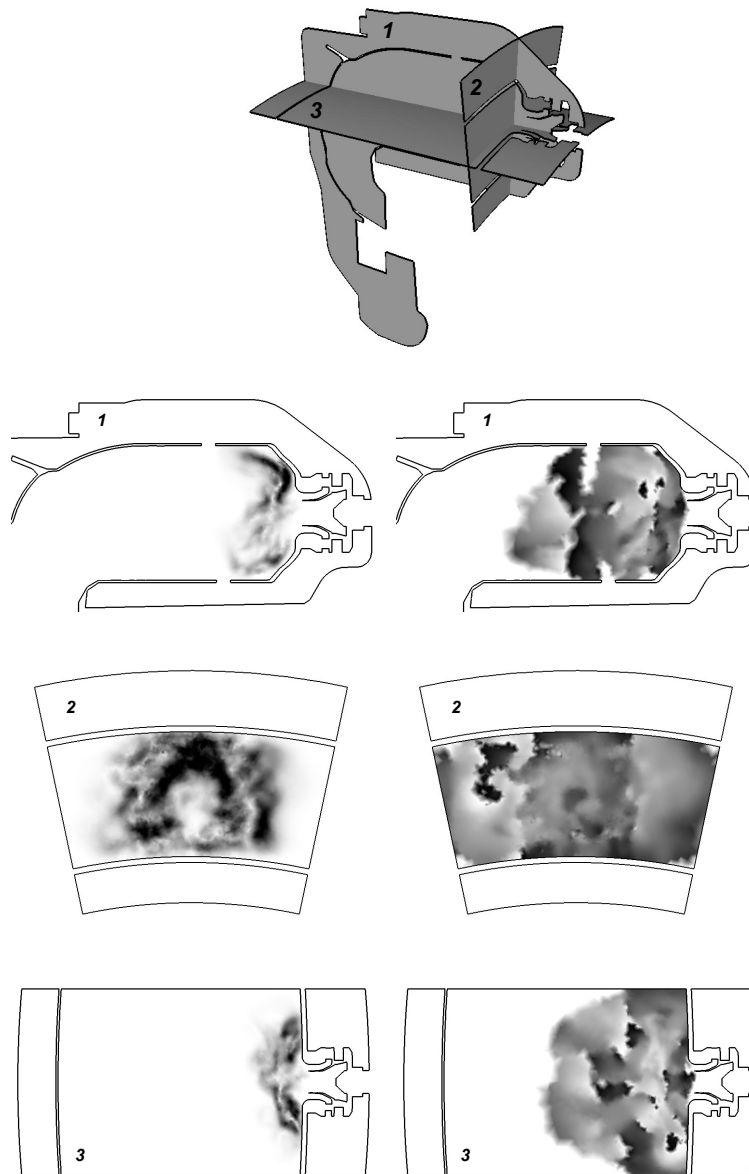


FIG. 5.10 - Réponse de flamme (dans le plan de coupe 1, 2 et 3) à la fréquence de forçage  $f=600$  Hz. A gauche l'amplitude  $n_u^{600}(\vec{x})$  et à droite le délai  $\tau_u^{600}(\vec{x})$ .

• Le calcul de stabilité :

Dans ce calcul de stabilité on admet que la réponse de flamme est constante :

$$(n_u(\vec{x}, \omega), \tau_u(\vec{x}, \omega)) = (n_u^{600}(\vec{x}), \tau_u^{600}(\vec{x})),$$

pour toute fréquence de forçage entre 500 Hz et 600 Hz. Pour s'affranchir de cette hypothèse il faut faire un forçage par bruit blanc filtré (cf section 4.2). En considérant l'impédance complexe  $Z(\omega_r)$  donnée par NOZZLE en sortie de chambre, il faut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot c_0^2(\vec{x}) \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) + \omega^2 \hat{p}(\vec{x}) = \frac{(\gamma-1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u^{600}(\vec{x}) e^{i\omega \tau_u^{600}(\vec{x})} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \text{ sur } \Omega \\ \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) \cdot \vec{n} - i \frac{\omega}{c_0(\vec{x}) Z(\omega_r)} \hat{p}(\vec{x}) = 0 \text{ en sortie,} \\ \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur les parois.} \end{cases}$$

On utilise l'algorithme 2 de point fixe introduit au chapitre III.

---

**Algorithm 8** Algorithme de *point fixe* avec problème linéaire

---

- 1: Initialisation :  $k = 0, \omega_0 = \omega_{r,0} = 2\pi \times 502$
  - 2: Déterminer  $\omega_{k+1}$  tel que  $\left[ \bar{M}^{-1} \bar{A} - \bar{n}(\omega_k) \bar{r}^T + \omega_k \bar{M}^{-1} \bar{B}(\omega_{r,k}) \right] \bar{p} + \omega_{k+1}^2 \bar{p} = 0$
  - 3: **if**  $\|\omega_{k+1} - \omega_k\| \leq \epsilon$  **then**
  - 4:   stop
  - 5: **else**
  - 6:    $\omega_k := \omega_{k+1}$
  - 7:    $\omega_{r,k} := \Re(\omega_{k+1})$
  - 8:   retour au 2.
  - 9: **end if**
- 

Dans ce cas le vecteur  $\bar{n}(\omega_k)$  contient les valeurs discrètes du champ :

$$n(\vec{x}, \omega) = \frac{(\gamma - 1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u^{600}(\vec{x}) e^{i\omega \tau_u^{600}(\vec{x})}.$$

Le calcul AVSP prévoit le mode longitudinal amplifié (avec un facteur d'amplification de 1,85 à chaque oscillation) ce qui est cohérent avec le caractère auto-entretenu des fluctuations de pression observées dans la SGE [11, 12]. La structure du mode propre (Fig. 5.11) est très proche de celle extraite de la SGE (en se rappelant que les fluctuations de pression observées au passage des trous primaires et du tourbillonneur sont d'origine hydrodynamique), la fréquence est également en bon accord.

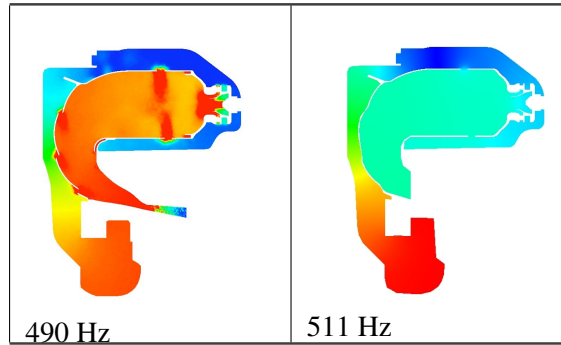


FIG. 5.11 - Module (bleu=0 et rouge=1) des fluctuations de pression calculées par simulation aux grandes échelles (à gauche) et premier mode longitudinal calculé avec AVSP (à droite).

## 5.4 Etude de la configuration annulaire

### 5.4.1 La Simulation Grandes Echelles

La SGE de la chambre annulaire (Fig. 5.12) a été réalisée par Staffelbach [81] avec le code AVBP. Les modèles utilisés sont ceux introduits pour le calcul de la configuration monosecteur. Le maillage utilisé pour ce calcul contient 9 009 065 noeuds et 42 287 640 éléments. Le coût CPU d'une telle simulation est de 4h sur 700 processeurs AMD Opteron (2,4 GHz) du CRAY XT3 par période du mode azimuthal.

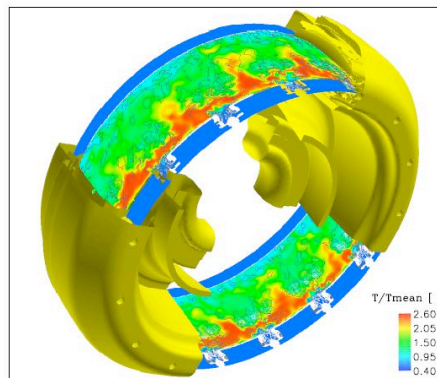


FIG. 5.12 - SGE de la chambre annulaire.

Cette simulation exhibe un mode azimuthal auto-entretenu qui se développe naturellement à une fréquence de 740 Hz (Fig. 5.13). L'analyse des signaux montre que le mode tournant module le débit à travers les 15 brûleurs (Fig. 5.14). Au passage du ventre de pression, les maxima de pression sont différents de part et d'autre du toubillonneur, ce qui crée une variation du débit dans la direction azimuthale. La conséquence directe est une oscillation de la flamme selon l'axe de la chambre entraînant des fluctuations locales de taux de dégagement de chaleur. Les coefficients globaux d'amplitude  $n_u^g$  et de délai  $\tau_u^g$ , caractérisant la réponse de flamme au forçage acoustique imposé par le mode azimuthal, ont été calculés pour chaque secteur. Ils sont répertoriés dans Fig. 5.15. De cette simulation, il ressort que la réponse de la flamme est

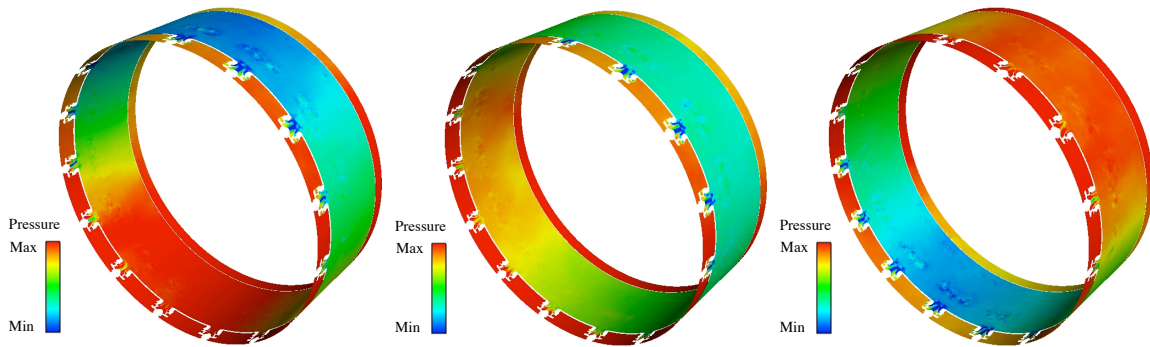


FIG. 5.13 - Champ de pression instantanée à différents instants :  $t=0, T/4, T/2$ .

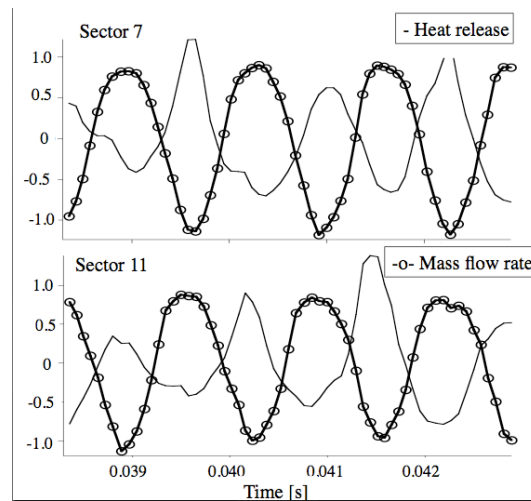


FIG. 5.14 - Le mode tournant module le débit à travers les 15 brûleurs et donc le dégagement de chaleur. Dégagement de chaleur et vitesse dans le tourbillonneur sont en opposition de phase.

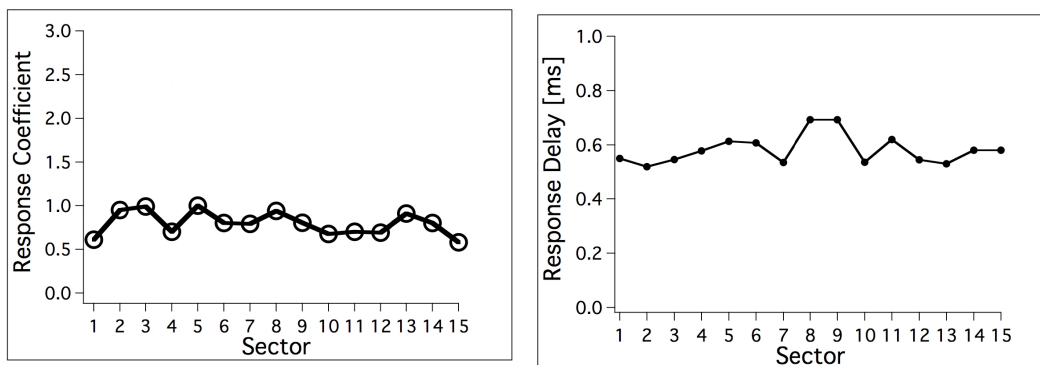


FIG. 5.15 - Les paramètres  $n_u^g$  et  $\tau_u^g$  de la fonction de transfert de flamme pour chaque secteur.

quasiment la même dans chaque secteur. En effet, la variabilité du paramètre  $\tau_u^g$  est de 0.2 ms, ce qui reste faible devant la période  $T=1,35$  ms du mode azimutal. De plus, il est probable que les différences entre chaque secteur diminuent si on augmente le temps de simulation (soit le nombre de périodes utilisées pour évaluer les paramètres  $n_u^g$  et  $\tau_u^g$ ).

### 5.4.2 Les calculs thermoacoustiques

On présente dans cette section l'analyse thermoacoustique AVSP de la configuration annulaire :

- On étudie en détail le premier mode propre azimutal du tube à flamme et de son contournement,
- On fait ensuite l'analyse de stabilité du mode azimutal en considérant les fluctuations du dégagement de chaleur.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la SGE de la chambre annulaire.

#### Le mode propre azimutal

Fig. 5.16 montre le premier mode propre longitudinal :

- du tube à flamme (TF),
- du contournement (C),
- du tube à flamme connecté au contournement par le tourbillonneur (TF+C+T),
- du tube à flamme connecté au contournement par le tourbillonneur et par les trous primaires (TF+C+T+TP).

Ces calculs sont réalisés en imposant des conditions limites de murs rigides partout, même en sortie de chambre de combustion.

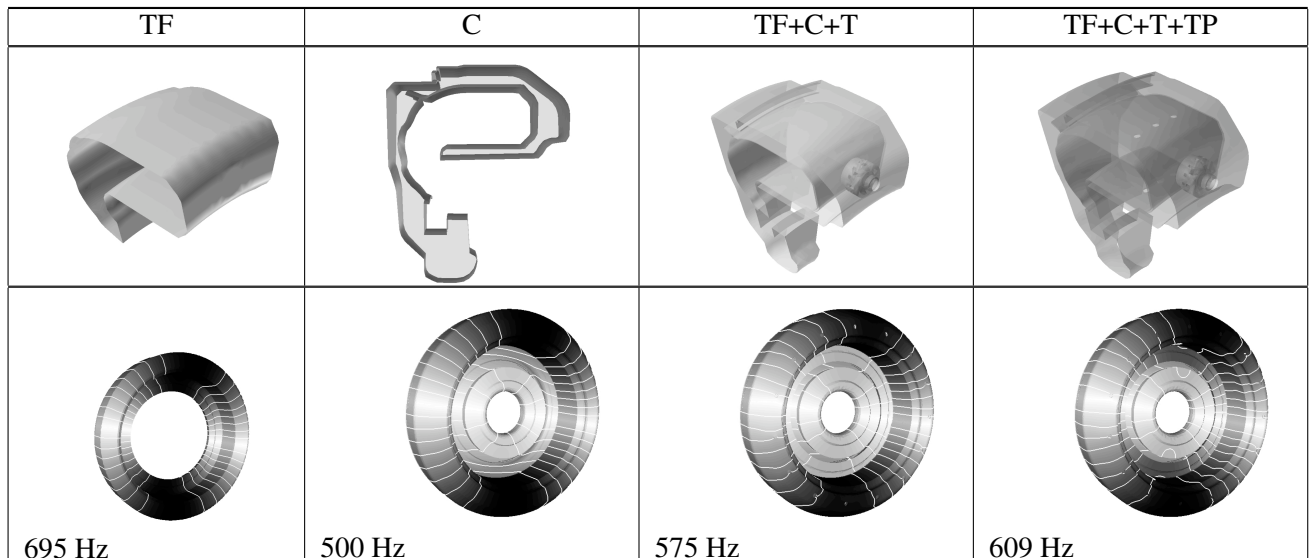


FIG. 5.16 - Module (blanc=0 et noir=1), isocontours et fréquence du premier mode azimutal pour différentes configurations.



La structure azimutale du mode est identique sur les quatre configurations testées. Si on considère le tube à flamme et le contournement séparément, on peut obtenir une bonne approximation de la fréquence propre azimutale simplement avec la formule :

$$f = \frac{c_{moy}}{\lambda} = \frac{c_{moy}}{2\pi \times R_{moy}},$$

avec  $\lambda$  la longueur du mode azimutal,  $c_{moy}$  la vitesse du son moyenne dans la configuration et  $R_{moy}$  le rayon moyen de la chambre de combustion. Avec la répartition de vitesse du son extraite de la SGE (Fig. 5.4) on en déduit :

- $c_{moy} \sim 500$  m/s dans le contournement, en prenant  $R_{moy} \sim 0.16$  m, on obtient une fréquence propre du premier mode azimutal de 497 Hz.
- $c_{moy} \sim 750$  m/s et avec  $R_{moy} \sim 0.175$  m, on obtient 682 Hz pour le mode azimutal du tube à flamme. Ces calculs très simples sont en bon accord avec les résultats AVSP (Fig. 5.16).

Les résultats obtenus pour les géométries TF+C+T et TF+C+T+TP montrent que les trous primaires ont également une influence sur le mode azimutal. Plus précisément, ces trous modifient la composante longitudinale du mode azimutal comme le montre Fig. 5.17. Ces résultats soulignent qu'il est important de considérer les communications acoustiques entre le contournement et le tube à flamme. Des études sont actuellement en cours pour prendre en compte les effets de la multiperforation sur les modes acoustiques [30].

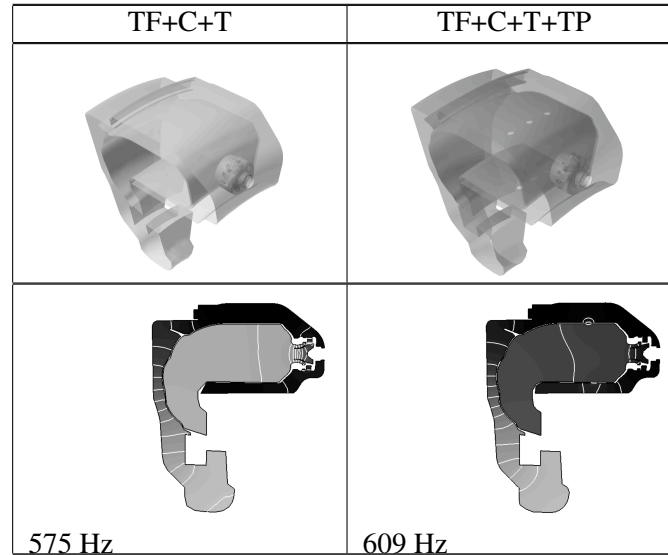


FIG. 5.17 - Coupe longitudinale du module du premier mode azimutal (blanc=0 et noir=1).

### Etude de stabilité et comparaison avec la SGE

Dans cette section, on s'intéresse à la stabilité du mode azimutal, obtenu dans la configuration TF+C+T+TP, lorsqu'il interagit avec le dégagement de chaleur due à la réaction de combustion. Les calculs sont fait en imposant  $\vec{\nabla} p \cdot \vec{n} = 0$  sur les bords du domaine de calcul.

• La fonction de transfert de flamme multi-référencée :

Les mécanismes de couplage entre l'acoustique, l'écoulement dans le tourbillonneur et la fluctuation de dégagement de chaleur mis en exergue, au sein de chaque secteur, par la SGE sont représentés, dans le modèle thermoacoustique AVSP, par les paramètres  $n_u$  et  $\tau_u$  imposés pour chacun des secteurs. L'aspect multi-injecteur de la configuration annulaire est donc pris en compte par une fonction de transfert de flamme multi-référencée : la fluctuation de taux de dégagement de chaleur dans chaque secteur est indexée sur la fluctuation de vitesse acoustique dans son propre tourbillonneur (ISAAC : Independance Sector Assumption in Annular Combustor). Pour l'étude de stabilité du mode azimutal, on utilise donc une fonction de transfert de flamme de forme similaire à celle déjà introduite dans le chapitre IV :

$$\frac{\hat{q}(\vec{x}, \omega)}{q_0} = \begin{cases} n(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau(\vec{x}, \omega)} \frac{\hat{u}_{ref,1}}{U_{bulk}} & \text{pour } \vec{x} \in \text{Secteur 1,} \\ n(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau(\vec{x}, \omega)} \frac{\hat{u}_{ref,2}}{U_{bulk}} & \text{pour } \vec{x} \in \text{Secteur 2,} \\ \dots & \\ n(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau(\vec{x}, \omega)} \frac{\hat{u}_{ref,15}}{U_{bulk}} & \text{pour } \vec{x} \in \text{Secteur 15.} \end{cases}$$

Il est important de remarquer les points suivants :

- Cette fonction de transfert de flamme ne pourra pas être utilisée dans les configurations multi-injecteurs où les flammes interagissent fortement entre elles [61]. Dans le cas particulier de la chambre étudiée dans ce travail, l'approche est validée par la SGE de la configuration annulaire [81]. De plus, ce type de fonction de transfert a déjà été utilisé dans d'autres études [51, 73, 82].
- Même si la réponse de flamme, caractérisée par les coefficients  $n_u(\vec{x}, \omega)$  et  $\tau_u(\vec{x}, \omega)$ , est identique pour chaque secteur, le taux de dégagement de chaleur peut être différent d'un secteur à l'autre. En particulier, si on considère un mode azimutal, l'amplitude de la fluctuation de vitesse axiale au point de référence dépend de la phase du mode. Au passage du ventre de pression, les différences de températures dans le contournement et dans le foyer induisent un gradient de pression de part et d'autre du tourbillonneur et donc des fluctuations de vitesse. Ces fluctuations de vitesse seront donc différentes d'un tourbillonneur à l'autre et, par conséquent, les fluctuations de dégagement de chaleur seront également différentes d'un secteur à l'autre.
- De plus ce type de fonction de transfert peut aussi modéliser le cas où les réponses de flamme seraient différentes d'un secteur à l'autre. Cette situation pouvant se produire si certains des tourbillonneurs sont, par exemple, équipés d'un CBO (Cylindrical Burner Outlet) [38]. Dans le cas étudié ici, les 15 secteurs sont identiques, et donc, il en va de même pour les coefficients  $n_u(\vec{x}, \omega)$  et  $\tau_u(\vec{x}, \omega)$ .

Cette dernière remarque justifie l'approche retenue dans cette thèse, à savoir le calcul de la fonction de transfert de flamme sur une configuration monosecteur qui est ensuite recopiée dans chacun des quinze secteurs, comme le montre Fig.5.18.



FIG. 5.18 - Le champ de vitesse du son (à gauche), et les coefficients  $n_u^{600}(\vec{x})$  (au milieu) et  $\tau_u^{600}(\vec{x})$  (à droite) sont copiés dans tous les secteurs.

Le mode propre azimuthal calculé avec AVSP en utilisant cette FTF présente une structure azimuthale similaire à celle obtenue dans la SGE comme le montre Fig. 5.19.

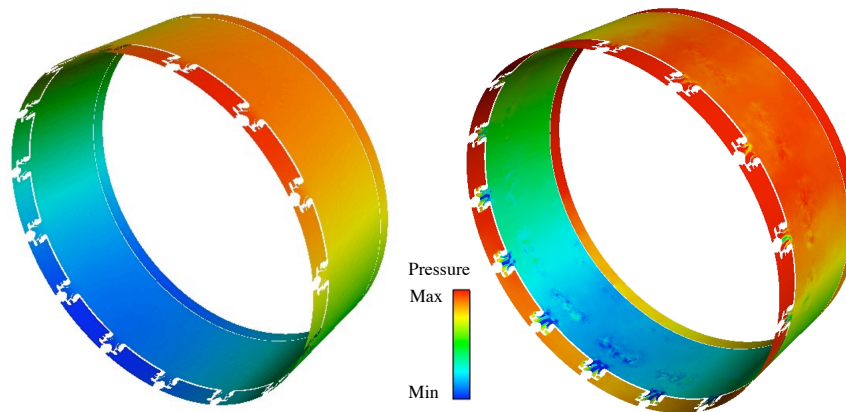


FIG. 5.19 - Le mode azimuthal issu du calcul AVSP (à gauche) et le champ de pression (pression moyenne + pression fluctuante) issu de la simulation aux grandes échelles (à droite).

Cependant ce mode est prévu amorti dans le calcul AVSP, ce qui est en désaccord avec le fait que ce mode est observé dans la SGE. La FTF précédemment introduite ne permettant pas de prévoir l'instabilité du mode azimuthal, on choisit de modifier les paramètres de la réponse de flamme :

- On conservera le champ  $n_u^{600}(\vec{x})$  qui permet de situer la flamme dans la zone primaire,
- mais on impose le paramètre de délai constant dans la zone primaire :  $\tau_u^{600}(\vec{x}) = \tau \forall \vec{x}$ . Cette hypothèse permet de faire une étude paramétrique en fonction de  $\tau$  de la stabilité du mode comme celle présentée au Chapitre IV.

On fait varier le paramètre de délai  $\tau$  de 0 à  $T$  la période du mode azimutal, et on obtient les résultats présentés dans Fig. 5.20.

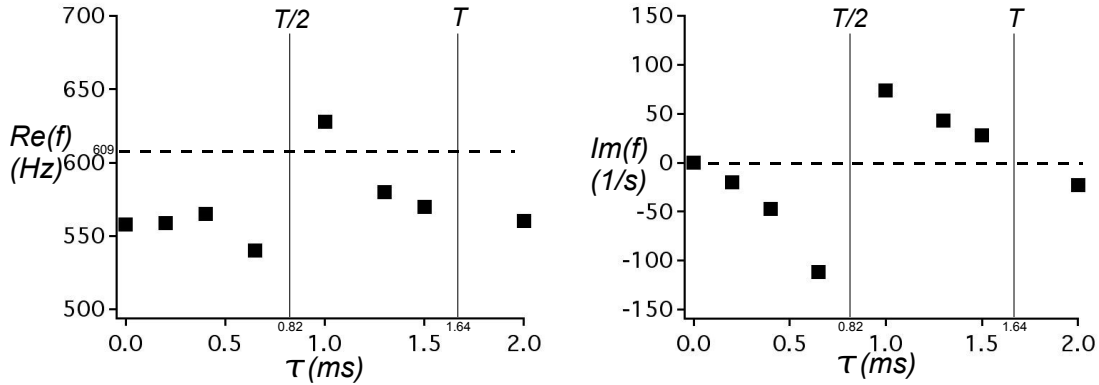


FIG. 5.20 - Influence du paramètre  $\tau_u^g$  sur la fréquence (à gauche) et sur la stabilité (à droite) du mode azimutal.  $T$  la période du mode azimutal.

Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve, sur ce cas de chambre de combustion industrielle, les mêmes plages de stabilité que celle obtenues au chapitre précédent pour le cas de la géométrie académique :

- si  $\tau < T/2$  alors le mode 1A est stable,
- si  $\tau > T/2$  alors le mode 1A est instable.

Les hypothèses admises pour montrer analytiquement ce résultat ne sont plus satisfaites dans cet exemple, mais le critère établi est suffisamment robuste pour être encore observé. On remarquera tout de même que la longueur de flamme ( $\sim$  qq cm) reste très petite devant la longueur d'onde ( $\sim$  1m).

On se place dans un cas où le mode est amplifié ( $\tau = 3T/4$  par exemple) et on compare la structure du mode obtenu à celui observé dans la SGE :

- La structure azimutale est identique dans les deux calculs comme le montre Fig. 5.19,
- mais on constate une différence majeure sur la composante longitudinale du premier mode azimutal. Dans Fig. 5.21 est représentée la fluctuation de pression, à un instant  $t$  fixé, de part et d'autre des tourbillonneurs. On s'aperçoit que dans la SGE les maximums sont situés dans le foyer (ou tube à flamme), alors qu'ils sont dans le contournement dans le calcul AVSP.

Il est important de remarquer que le mode observé dans la SGE est obtenu dans le cycle limite de l'instabilité qui ne satisfait pas les hypothèses de linéarité admises pour obtenir l'équation de Helmholtz. Cependant on peut quand même se demander quelle serait la structure du mode calculée par AVSP en imposant l'opposition de phase entre le dégagement de chaleur et la vitesse dans le tourbillonneur comme c'est le cas dans le cycle limite de la SGE (Fig. 5.14). Dans la suite on choisit donc d'imposer le délai  $\tau = T/2$ .

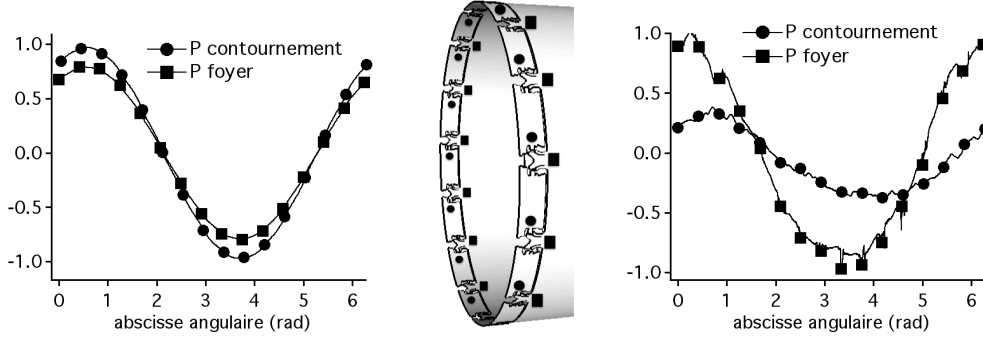


FIG. 5.21 - Répartition de pression fluctuante selon l'abscisse curviligne de la chambre annulaire, en entrée (●) et en sortie (■) du tourbillonneur. AVSP à gauche, AVBP à droite. La position des tourbillonneurs est repérée par les symboles.

Dans ce cas le problème à résoudre prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot c_0^2(\vec{x}) \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) + \omega^2 \hat{p}(\vec{x}) = \frac{(\gamma-1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u^{600}(\vec{x}) e^{i\omega\tau} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \text{ dans le domaine,} \\ \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur le bord,} \end{cases} \quad (5.3)$$

avec  $\tau = T/2 \sim 0.82$  ms dans ce cas (Fig. 5.20). Ce problème, mis sous forme matricielle, doit être résolu à l'aide d'un algorithme de point fixe introduit au chapitre III :

$$\left[ \bar{M}^{-1} \bar{A} - \bar{n}(\omega_k) \bar{r}^T \right] \bar{p} + \omega_{k+1}^2 \bar{p} = 0, \quad (5.4)$$

avec  $\bar{n}(\omega_k)$  les valeurs discrètes du champ  $n(\vec{x}, \omega_k) = \frac{(\gamma-1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u^{600}(\vec{x}) e^{i\omega_k \tau} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}$ . Or l'algorithme de point fixe présente des difficultés de convergence lorsque  $\tau \rightarrow T/2$ . Cette difficulté peut être évitée en imposant directement la phase  $\phi$  (en l'occurrence l'opposition de phase  $\phi = \pi$ ) entre vitesse dans le tourbillonneur et dégagement de chaleur dans la chambre. Dans ce cas Eq. (5.3) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \nabla \cdot c_0^2(\vec{x}) \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) + \omega^2 \hat{p}(\vec{x}) = \frac{(\gamma-1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u^{600}(\vec{x}) e^{i\pi} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref} \text{ dans le domaine,} \\ \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}) \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur le bord.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Cette fois-ci le second membre ne dépend pas de la valeur propre  $\omega$  et le problème prend alors la forme d'un problème au valeur propre linéaire :

$$\left[ \bar{M}^{-1} \bar{A} - \bar{n} \bar{r}^T \right] \bar{p} + \lambda \bar{p} = 0, \quad (5.6)$$

avec  $\lambda = \omega^2$  et  $\bar{n}$  les valeurs discrètes du champ  $n(\vec{x}) = \frac{(\gamma-1)}{\rho_0(\vec{x})} \frac{q_0}{\bar{U}_{bulk}} n_u^{600}(\vec{x}) e^{i\pi} \vec{\nabla} \hat{p}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}$ .

Finalement en imposant l'opposition de phase  $\phi = \pi$  entre vitesse dans le tourbillonneur et dégagement de chaleur dans la chambre ont obtenu la même répartition de pression fluctuante que celle observé dans la SGE. La structure azimutale est identique (Fig.5.22) et cette fois-ci, les maximums de pression fluctuante sont situés dans le foyer conformément à ce qui est observé dans la SGE (Fig.5.23). On capture

même un léger déphasage entre la structure azimuthale dans le foyer et dans le contournement qui est également présent dans la SGE. Si les niveaux sont un peu différents c'est qu'ils fluctuent au cours de la période dans la SGE. En effet, ce mode est perturbé par son mode couplé [81]. La fréquence obtenue par le calcul AVSP est de 695 Hz et 740 Hz pour la SGE soit un écart de 6 %.

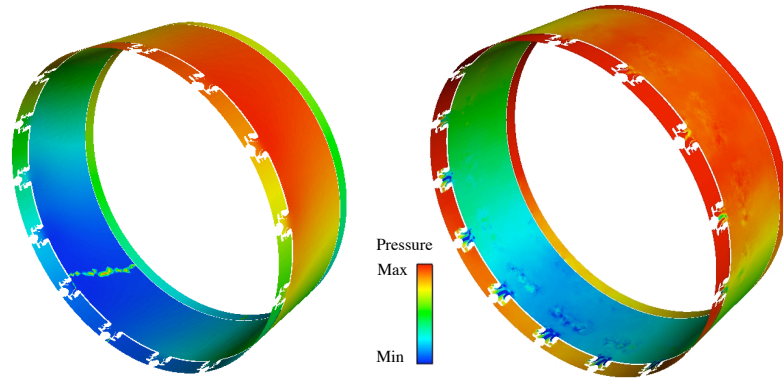


FIG. 5.22 - Le mode azimuthal issue du calcul AVSP (à gauche) et le champs de pression (pression moyenne + pression fluctuante) issue de la simulation aux grandes échelles (à droite).

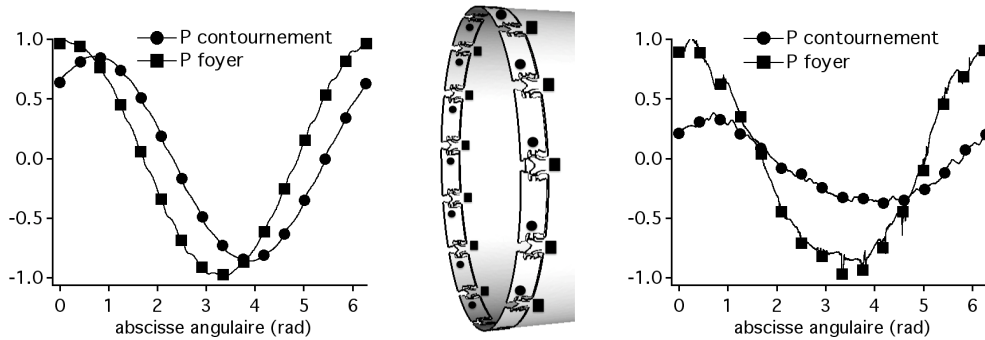


FIG. 5.23 - Répartition de pression fluctuante selon l'abscisse curviligne de la chambre annulaire, en entrée (●) et en sortie (■) du tourbillonneur. AVSP à gauche, AVBP à droite.

Ces résultats laissent penser que la résolution de l'équation de Helmholtz, obtenu dans un contexte linéaire permet de capturer correctement le mode propre présent dans le cycle limite de l'instabilité. C'est finalement la réponse de flamme qui sature dans le cycle limite imposant l'opposition de phase entre le signal de vitesse dans le tourbillonneur et le dégagement de chaleur dans la chambre.

# Conclusions

## La position du sujet

L'équipe combustion du CERFACS développe des outils numériques dont l'objectif est la modélisation de la combustion. Le code AVBP résout les équations de Navier-Stokes compressibles en écoulement réactif par des simulations grandes échelles. En complément de cet outil, le CERFACS développe en collaboration avec le groupe SAFRAN un outil dédié au calcul des instabilités thermoacoustiques : le code AVSP. Le positionnement stratégique du code AVSP est le suivant :

- L'utilisation d'une méthode de discrétisation de type élément finis (décrite au chapitre II) permet une description fine du domaine de calcul et de la zone de flamme, à la différence des codes réseaux habituellement utilisés. L'objectif est de traiter des géométries industrielles complexes sans faire de simplifications.
- La résolution de l'équation de Helmholtz (équation d'onde sous l'hypothèse d'onde harmonique) en milieu réactif permet d'identifier tous les modes propres de la configuration et pas seulement le plus amplifié. Cette approche permet également de prendre en compte de façon naturelle les impédances acoustiques complexes.
- L'utilisation du calcul parallèle, de méthodes d'algèbre linéaire optimisées et la taille de maillage relativement faible nécessaire pour capturer les grandes longueurs d'ondes induisent des temps de calcul allant de quelques minutes à quelques heures pour les configurations les plus complexes.

Cette thèse, qui fait suite aux travaux de Laurent Benoît [7], est centrée sur les axes suivants :

- poursuivre le développement de l'outil AVSP,
- l'intégrer dans une chaîne de calcul des instabilités thermoacoustiques,
- utiliser ces outils sur un cas industriel.

L'objectif à plus long terme est de fournir une méthodologie de calcul utilisée par les ingénieurs pour diagnostiquer l'apparition d'instabilités thermoacoustiques.

## Les développements

Les principaux développements informatiques effectués pendant cette thèse s'articulent autour de deux axes principaux :

– La résolution des problèmes aux valeurs propres non linéaire de grande taille :

Lors d'un calcul AVSP, la résolution du problème aux valeurs propres représente la quasi totalité du temps CPU. Ainsi, pour assurer l'efficacité de l'approche QUIET, il est important d'utiliser des algorithmes optimisés. On utilise des méthodes de projection sur un sous-espace vectoriel pour réduire la taille du problème. Deux algorithmes sont disponibles dans le logiciel AVSP :

- Arnoldi avec "restart" intégré dans le logiciel ARPACK,
- Jacobi-Davidson développé et intégré dans AVSP en collaboration avec M. Van Gijzen de l'université de Delft.

Les deux méthodes ont fait l'objet d'une étude comparative pour la résolution des problèmes aux valeurs propres linéaires et quadratiques. Les résultats ont été publiés dans *International Journal of Numerical Methods in Fluids* [77]. La non linéarité du problème aux valeurs propres est traitée par un algorithme de point fixe ou directement par la méthode de Jacobi-Davidson dans le cas quadratique. L'étude comparative, présentée au chapitre III, permet de renseigner l'utilisateur sur le choix de la méthode la plus efficace pour traiter un problème donné. De plus, la résolution des problèmes aux valeurs propres de grande taille par méthode de projection est un sujet de recherche actuel, cette étude est également motivée par la volonté de suivre les développements récents effectués dans ce domaine et de les intégrer dans le code AVSP.

– Le modèle  $n - \tau$  pour les chambres annulaires :

Dans cette thèse est introduite la méthodologie QUIET pour le calcul des instabilités thermoacoustiques azimutales dans les chambres annulaires. Le code AVSP a été modifié pour prendre en compte la fonction de transfert de flamme ( $n - \tau$ ) multi-référencée introduite sous l'hypothèse ISAAC : "*Les fluctuations du dégagement de chaleur dans un secteur sont pilotées par les fluctuations de vitesse dans son injecteur propre*". Une validation de ces développements est proposée dans le chapitre IV. Les calculs AVSP sur un cas test académique sont comparés aux solutions analytiques disponibles. Outre la validation des développements informatiques ce cas test montre que le délai  $\tau$  contrôle la stabilité du mode azimutal de la même façon qu'il contrôle celle du mode longitudinal. Ainsi l'utilisation du modèle  $n - \tau$  multi-référencé indexé sur la vitesse axiale au point de référence conduit à un critère de stabilité de Rayleigh pour les chambre annulaires : *L'instabilité naît de la compétition entre les secteurs qui amplifient les fluctuations de pression (ceux pour lesquels dégagement de chaleur et pression sont en phase) et ceux qui amortissent les fluctuations de pression (lorsque dégagement de chaleur et pression sont en opposition de phase)*. Ce cas test a également permis d'aborder la question des modes tournants souvent observés expérimentalement [46, 51, 73]. La résolution analytique comme les calculs avec AVSP montrent que si la configuration est parfaitement symétrique, le mode propre azimutal pourra être observé stationnaire ou tournant. Si on introduit une perturbation dans la répartition du dégagement de chaleur alors la reconstruction du signal temporel montre que le mode propre sera tournant. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans *International Journal of Aeroacoustics* [76].



– Les perspectives de développement :

Le temps imparti, de trois ans seulement, pour faire une thèse impose des choix dans les développements. Différents axes de recherches tout aussi importants qu'intéressants n'ont pas pu être approfondis. Il le seront (et le sont déjà pour certains) dans les thèses suivantes.

- Des études sont actuellement en cours pour évaluer l'influence du Mach sur les modes propres acoustiques dans une chambre de combustion aéronautique.
- La question des impédances en entrée et en sortie de la chambre de combustion doit être approfondie. Lorsque le distributeur haute pression et amorcé, la théorie de Marble et Candel fournit une valeur pour l'impédance [47]. Mais pour les bas régimes, on ne dispose pas, dans la chaîne QUIET, de modèle pour fixer l'impédance en sortie du foyer. La question se pose également au niveau du diffuseur en entrée du contournement.
- Les calculs d'instabilités présentés dans ce travail ne prennent pas en compte les effets de multiperforation qui dissipent l'énergie acoustique. Des études sont actuellement en cours au CERFACS sur ce sujet.
- La résolution des problèmes aux valeurs propres offrent de nombreuses pistes de recherche et de développement possible. La méthode dite "invert" est connue pour augmenter sensiblement l'efficacité des algorithmes pour la recherche des petites valeurs propres. Or ce sont précisément ces petites valeurs propres (en partie réelle) qui sont recherchées lors d'un calcul d'instabilité thermoacoustiques. Cette méthode devra être intégrée aux algorithmes d'Arnoldi et de Jacobi-Davidson utilisés dans AVSP. On notera également que des recherches récentes ont permis d'adapter l'algorithme d'Arnoldi pour la résolution des problèmes aux valeurs propres quadratiques [3].

## Etude de cas

La méthodologie QUIET, développée pendant cette thèse, a été utilisée pour faire l'étude d'une chambre de combustion industrielle. Les calculs de modes propres, présentés au chapitre V, ont montré l'importance de considérer toute la complexité géométrique de la configuration. Les résultats obtenus avec la chaîne QUIET, sont en bon accord avec les simulations grandes échelles et demandent beaucoup moins de ressources informatiques. Ces résultats ont fait l'objet de communications orales lors des conférences internationales : *11th CEAS-ASC/AIAA-TAC Workshop on "Combustion Noise"* et *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference* [75].

La "prédictivité" de la chaîne QUIET doit encore être testée ce qui nécessite de faire d'autres validations sur différentes configurations. Le problème est qu'à l'heure actuelle il existe très peu de bancs d'essais de chambre annulaire instrumentés permettant une étude détaillée des instabilités azimutales. Paradoxalement, la quasi totalité des chambres de combustion aéronautiques présentent une géométrie annulaire et sont donc sujettes à ce type d'instabilité. De plus, la recherche d'une combustion propre à faible richesse mais aussi plus sensible aux instabilités thermoacoustiques, place cette étude au centre des problématiques qui seront abordées dans les prochaines années dans ce domaine.



# Bibliographie

- [1] ARNOLDI, W. The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenproblem. *Quart. Appl. Math.* 9 (1951), 17–29. 11, 51, 52
- [2] BAI, Z., DEMMEL, J., DONGARRA, J., RUHE, A., AND VAN DER VORST, H. *Templates for the solution of Algebraic Eigenvalue Problems : A Practical Guide*. SIAM, 2000. 11, 51
- [3] BAI, Z., AND SU, Y. SOAR : A Second-Order ARnoldi method for the solution of the quadratic eigenvalue problem. *SIAM J. Appl. Math.* 26 (2005), 640–659. 11, 51, 52, 121
- [4] BALASUBRAMANIAN, K., AND SUJITH, R. Non-normality and nonlinearity in combustion–acoustic interaction in diffusion flames. *Journal of Fluid Mechanics* 594 (2008), 29–57. 27
- [5] BALASUBRAMANIAN, K., AND SUJITH, R. Nonlinear Response of Diffusion Flames to Uniform Velocity Disturbances. *Combustion Science and Technology* 180, 3 (2008), 418–436. 27
- [6] BALASUBRAMANIAN, K., AND SUJITH, R. Thermoacoustic instability in a rijke tube : Non-normality and nonlinearity. *Journal of Fluid Mechanics, Phys. Fluids* (20) (2008). 27
- [7] BENOIT, L. *Prédiction des instabilités thermo-acoustiques dans les turbines à gaz*. Phd thesis, University Montpellier II, 2005. 119
- [8] BIRBAUD, A. L., DUROX, D., DUCRUIX, S., AND CANDEL, S. Dynamics of free jets submitted to upstream acoustic modulations. *Phys. Fluids* 19 (2007), 013602. 9, 70
- [9] BLACKSTOCK, D. T. *Fundamentals of Physical Acoustics*. John Wiley & Sons, 2000. 18, 22
- [10] BOILEAU, M., STAFFELBACH, G., CUENOT, B., POINSOT, T., AND BÉRAT, C. LES of an ignition sequence in a gas turbine engine. *Combust. Flame in press* (2008). 9
- [11] BOUDIER, G., LAMARQUE, N., SENSAIU, C., GICQUEL, L., AND POINSOT, T. Simulation LES 3D à chaud du contournement et de la chambre ARDIDEN - géométrie 1, pt 115 - deliverable 2 : Lot 2 - tâche 2. Contract report CR/CFD/07/74, CERFACS, July 2 2007. 101, 109
- [12] BOUDIER, G., LAMARQUE, N., SENSAIU, C., ROUX, A., GICQUEL, L., AND POINSOT, T. Simulation LES de la nouvelle chambre de combustion ARDIDEN : point 49 - cas forcé et non-forcé - lot 2. Contract report CR/CFD/08/50, CERFACS, January 2008. 101, 103, 109
- [13] BOUDIER, G., LAMARQUE, N., SENSAIU, C., STAFFELBACH, G., GICQUEL, L., POINSOT, T., AND MOUREAU, V. Investigating thermo-acoustic stability of a real gas turbine combustion chamber using large-eddy simulations. In *11th CEAS-ASC Workshop of X3-Noise* (Lisbon, Portugal, 2007). 101

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [14] BOUDIER, G., LAMARQUE, N., AND STAFFELBACH, G. Thermo-acoustic stability of a helicopter gas turbine combustor using large-eddy simulations. *Preliminary version submitted to International Journal of Aeroacoustics* (2008). 101
- [15] CANDEL, S., DUROX, D., AND SCHULLER, T. Flame interactions as a source of noise and combustion instabilities. In *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference - AIAA 2004-2928* (2004). 9
- [16] CANDEL, S., AND POINSOT, T. A tutorial on acoustics. Tech. Rep. Cours de l'Ecole Centrale Paris, 1988. 18
- [17] CANDEL, S. M., MAISTRET, E., DARABIHA, N., POINSOT, T., VEYNANTE, D., AND LACAS, F. Experimental and numerical studies of turbulent ducted flames. In *Marble Symposium* (Caltech, 1988), pp. 209–236. 9
- [18] COLIN, O., DUCROS, F., VEYNANTE, D., AND POINSOT, T. A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion. *Phys. Fluids* 12, 7 (2000), 1843–1863. 104
- [19] CROCCO, L. Aspects of combustion instability in liquid propellant rocket motors. part I. *J. American Rocket Society* 21 (1951), 163–178. 10, 13, 27, 71
- [20] CULICK, F. E. C. Non linear behavior of acoustic waves in combustion chambers. *Astronautica Acta* 3 (1976), 714–757. 9
- [21] CULICK, F. E. C. Combustion instabilities in liquid-fueled propulsion systems- an overview. In *AGARD 72B PEP meeting* (1987). 9
- [22] CULICK, F. E. C. Some recent results for nonlinear acoustic in combustion chambers. *AIAA Journal* 32, 1 (1994), 146–169. 9
- [23] DOWLING, A., AND STOW, S. Acoustic analysis of gaz-turbine combustor. In *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms and Modeling*, T. Lieuwen and V. Yang, Eds. AIAA, University of Cambridge, Cambridge, England, United Kingdom, 2005, ch. 13, pp. 369–414. 9, 16, 18
- [24] DOWLING, A. P. The calculation of thermoacoustic oscillations. *J. Sound Vib.* 180, 4 (1995), 557–581. 9
- [25] DUCRUIX, S., SCHULLER, T., DUROX, D., AND CANDEL, S. Combustion instability mechanisms in premixed combustors. In *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms and Modeling*, T. Lieuwen and V. Yang, Eds. AIAA, Ecole Centrale Paris, Châtenay-Malabry, France, 2005, ch. 9, pp. 179–212. 9, 16, 18, 72
- [26] GIAUQUE, A. *System identification and disturbance energies in reacting flows -TH/CFD/07/15*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2007. 96
- [27] GIAUQUE, A., POINSOT, T., BREAR, M., AND NICLOUD, F. Budget of disturbance energy in gaseous reacting flows. In *Proc. of the Summer Program* (2006), Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., pp. 285–297. 9
- [28] GIAUQUE, A., SELLE, L., POINSOT, T., BUECHNER, H., KAUFMANN, P., AND KREBS, W. System identification of a large-scale swirled partially premixed combustor using LES and measurements. *J. Turb.* 6, 21 (2005), 1–20. 72
- [29] GREENWOOD, S. Combustion driven pressure oscillations (humming)... a low emission design problem. *ASME Trans.* 41 (2001), 12–15. 21

- 
- [30] GULLAUD, E., MENDEZ, S., SENSAU, C., NICLOUD, F., AND POINSOT, T. Effect of multiperforated plates on the acoustic modes in combustors. In *2nd Workshop INCA* (SNECMA Villaroche, France, 2008). 113
- [31] HURLE, I. R., PRICE, R. B., SUGDEN, T. M., AND THOMAS, A. Sound emission from open turbulent premixed flames. *Proc. R. Soc. Lond. A303*, 409 (1968). 72
- [32] IBRAHIM, Z., WILLIAMS, F., BUCKLEY, S., AND LEE, J. An acoustic energy approach to modeling combustion oscillations. In *ASME Turbo Expo, Barcelona, Spain* (2006). 9
- [33] IBRAHIM, Z., WILLIAMS, F., BUCKLEY, S., AND TWARDCHLEB, C. A method for estimating the onset of acoustic instabilities in premixed gas-turbine combustors. In *ASME Turbo Expo, Montreal, Canada* (2007). 9
- [34] KANG, D., CULICK, F., AND RATNER, A. Combustion dynamics of a low-swirl combustor. *Combust. Flame*151 (2007), 412–425. 91
- [35] KAUFMANN, A., NICLOUD, F., AND POINSOT, T. Flow forcing techniques for numerical simulation of combustion instabilities. *Combust. Flame*131 (2002), 371–385. 92
- [36] KEDIA, K. S., NAGARAJA, S. B., AND SUJITH, R. I. Impact of linear coupling on thermoacoustic instabilities. *Combust. Sci. Tech.* 180 (2008). 27
- [37] KELLER, J., AND SAITO, K. Measurements of the combustion flow in a pulse combustor. *Combust. Sci. Tech.*53 (1987), 137–163. 72
- [38] KREBS, W., WALTERSKÖTTER, R., FLOHR, P., WALZ, G., AND HOFFMANN, S. Effect of burner design parameters on thermoacoustic stability of annular gas turbine combustors. In *Acoustics of Combustion* (University of Twente, 2000), E. SEMINAR, Ed., vol. 49. 74, 114
- [39] KREBS, W., WALZ, G., AND HOFFMANN, S. Thermoacoustic analysis of annular combustor. In *5th AIAA Aeroacoustics Conference* (1999), A. P. 99-1971, Ed. 74
- [40] KRUEGER, U., HUEREN, J., HOFFMANN, S., KREBS, W., FLOHR, P., AND BOHN, D. Prediction and measurement of thermoacoustic improvements in gas turbines with annular combustion systems. In *ASME TURBO EXPO* (Munich, Germany, 2000), A. Paper, Ed. 74
- [41] LAMARQUE, N., AND POINSOT, T. Boundary conditions for acoustic eigenmode computations in gas turbine combustion chambers. *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J.*, *accepted* (2008). 11, 101
- [42] LASCAUX, P., AND THÉODOR, R. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, 2nd ed. Masson, 1994, ch. 10, pp. 487–568. 52, 53
- [43] LEE, J., AND SANTAVICCA, D. Experimental diagnostics of combustion instabilities. In *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms and Modeling*, T. Lieuwen and V. Yang, Eds. AIAA, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, 2005, ch. 16, pp. 481–529. 9
- [44] LEFEBVRE, A. H. *Gas Turbines Combustion*. Taylor & Francis, 1999. 9
- [45] LEHOUCQ, R., AND SORENSEN, D. ARPACK : Solution of large scale eigenvalue problems with implicitly restarted arnoldi methods. [www.caam.rice.edu/software/arpack](http://www.caam.rice.edu/software/arpack). User's guide, 1997. 11, 50, 51, 52, 53, 57
- [46] LIEUWEN, T., AND YANG, V. Combustion instabilities in gas turbine engines. operational experience, fundamental mechanisms and modeling. In *Prog. in Astronautics and Aeronautics AIAA* (2005), vol. 210. 8, 9, 90, 120

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [47] MARBLE, F. E., AND CANDEL, S. Acoustic disturbances from gas nonuniformities convected through a nozzle. *J. Sound Vib.*55 (1977), 225–243. 11, 101, 121
- [48] MASCHHOFF, K., AND SORENSEN, D. PARPACK : An efficient portable large scale eigenvalue package for distributed memory parallel architectures. In *Applied Parallel Computing Industrial Computation and Optimization* (1996), S. B. . Heidelberg, Ed., vol. 1184, pp. 478–486. 11, 51, 52
- [49] MENON, S. Acoustic-vortex-flame interactions in gas turbines. In *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms and Modeling*, T. Lieuwen and V. Yang, Eds. AIAA, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 2005, ch. 11, pp. 277–314. 9
- [50] MOASE, W. H., BREAR, M. J., AND MANZIE, C. Linear and nonlinear acoustic behaviour of outlet nozzles. In *Proceedings of the Fifteenth Australasian Fluid Mechanics Conference (CD-ROM)* (2004), M. Behnia, W. Lin, , and G. D. McBain, Eds., no. AFMC00077, The University of Sydney. 9
- [51] MORGANS, A. S., AND STOW, S. R. Model-based control of combustion instabilities in annular combustors. *Combust. Flame*150, 4 (2007), 380–399. 16, 74, 114, 120
- [52] MUNJAL, M. L. *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Wiley & Sons, 1986. 18
- [53] NAGARAJA, S., KEDIA, K., AND SUJITH, R. I. Characterizing energy growth during combustion instabilities : Singularvalues or eigenvalues? *Proc. Comb. Inst.* (2008). 27
- [54] NICOUD, F., BENOIT, L., AND SENSIAU, C. Acoustic modes in combustors with complex impedances and multidimensional active flames. *AIAA Journal*45 (2007), 426–441. 10, 18, 19, 73
- [55] NOIRAY, N. *Analyse linéaire et non-linéaire des instabilités de combustion, application aux systèmes à injection multipoints et stratégies de contrôle*. Phd thesis, Ecole Centrale Paris, 2007. 46, 72, 73
- [56] NOIRAY, N., DUROX, D., SCHULLER, T., AND CANDEL, S. Self-induced instabilities of premixed flames in a multiple injection configuration. *Combust. Flame*145, 3 (2006), 435–446. 8, 9
- [57] NOIRAY, N., DUROX, D., SCHULLER, T., AND CANDEL, S. Passive control of combustion instabilities involving premixed flames anchored on perforated plates. *Proc. Combust. Inst.*31 (2007), 1283–1290. 8, 9, 46
- [58] PANKIEWITZ, C., AND SATTELMAYER, T. Hybrid methods for modelling combustion instabilities. In *Tenth International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Sweden* (2003). 16, 22
- [59] PASCHEREIT, C. O., AND GUTMARK, E. Control of thermoacoustic instabilities in a premixed combustor by fuel modulation. In *37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (Reno, NV, 1999), A. P. 99-0711, Ed. 9
- [60] PIERCE, A. D. *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*. McGraw Hill, New York, 1981. 18
- [61] POINSOT, T. *Analyse des instabilités de combustion de foyers turbulents prémélangés*. Thèse d'état, Université d'Orsay, 1987. 74, 114
- [62] POINSOT, T., AND VEYNANTE, D. *Theoretical and numerical combustion*. R.T. Edwards, 2nd edition., 2005. 17, 18, 74, 80

- 
- [63] POLIFKE, W., AND PASCHEREIT, C. O. Determination of thermo-acoustic transfer matrices by experiment and computational fluid dynamics. *ERCOFTAC bulletin*, p. 38. 9
- [64] POLIFKE, W., PONCET, A., PASCHEREIT, C. O., AND DOEBBELING, K. Reconstruction of acoustic transfer matrices by instationnary computational fluid dynamics. *J. Sound Vib.*245, 3 (2001), 483–510. 22, 96
- [65] RAYLEIGH, L. The explanation of certain acoustic phenomena. *Nature July 18* (1878), 319–321. 7, 16, 21
- [66] RIJKE, P. L. Notice of a new method of causing a vibration of the air contained in a tube open at both ends. *Phil. Mag.* 17 (1859), 419–422. 7
- [67] RUDGYARD, M. Integrated preprocessing tools for unstructured parallel CFD applications. Tech. Rep. TR/CFD/95/08, CERFACS, 1995. 11
- [68] RUDGYARD, M., SCHÖNFELD, T., STRUIJS, R., AUDEMAR, G., AND LEYLAND, P. A modular approach for computational fluid dynamics. In *ECCOMAS 2nd European Computational Fluid Dynamics Conference* (Stuttgart, 1994). 11
- [69] RUDGYARD, M., SCHÖNFELD, T., STRUIJS, R., AUDEMAR, G., AND LEYLAND, P. A modular approach for computational fluid dynamics. Tech. Rep. TR/CFD/95/07, CERFACS, 1995. 30
- [70] SAAD, Y. Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems. *Math. Comp.*42 (1984), 567–588. 53
- [71] SAAD, Y., AND SCHULTZ, M. H. GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Comput.*7, 3 (1986), 856–869. 53
- [72] SCHÖNFELD, T., AND RUDGYARD, M. Steady and unsteady flows simulations using the hybrid flow solver avbp. *AIAA Journal*37, 11 (1999), 1378–1385. 11, 30
- [73] SCHUERMANS, B., PASCHEREIT, C., AND MONKIEWITZ, P. Non-linear combustion instabilities in annular gas-turbine combustors. vol. AIAA paper 2006-0549. 114, 120
- [74] SCHUERMANS, B., POLIFKE, W., AND PASCHEREIT, C. O. Modeling transfer matrices of pre-mixed flames and comparison with experimental results. In *Int’l Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exposition* (Indianapolis/Indiana, 1999), ASME Paper. 9, 22
- [75] SENSAIU, C., NICOUD, F., AND POINSOT, T. Computation of azimuthal combustion instabilities in an helicopter combustion chamber. In *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference* (2008). 11, 74, 121
- [76] SENSAIU, C., NICOUD, F., AND POINSOT, T. A tool to study azimuthal standing and spinning modes in annular combustors. *International Journal of Aeroacoustics* 8 (2009), 57–68. 11, 74, 120
- [77] SENSAIU, C., NICOUD, F., VAN GIJZEN, M., AND VAN LEEUWEN, J. W. A comparison of solvers for quadratic eigenvalue problems from combustion. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*56 (2008), 1481–1487. 11, 51, 120
- [78] SLEIJPEN, G., BOOTEN, J., FOKKEMA, D., AND VAN DER VORST, H. Jacobi-Davidson type methods for generalized eigenproblems and polynomial eigenproblems. *BIT* 36 (1996), 595–633. 11, 51
- [79] SLEIJPEN, G., AND VAN DER VORST, H. A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problems. *SIAM J. Appl. Math.*17 (1996), 401–425. 11, 51

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [80] SLEIJPEN, G., VAN DER VORST, H., AND VAN GIJZEN, M. Quadratic eigenproblems are no problem. *SIAM News* 8 (1996), 9–10. 11, 51
- [81] STAFFELBACH, G., GICQUEL, L., BOUDIER, G., AND POINSOT, T. Large eddy simulation of self excited azimuthal modes in annular combustors. In *submitted to the 32nd International Symposium on Combustion* (2008). 9, 13, 74, 90, 102, 110, 114, 118
- [82] STOW, S. R., AND DOWLING, A. P. Thermoacoustic oscillations in an annular combustor. In *ASME Paper* (New Orleans, Louisiana, 2001). 114
- [83] STOW, S. R., DOWLING, A. P., AND HYNES, T. P. Reflection of circumferential modes in a choked nozzle. *J. Fluid Mech.* 467 (2002), 215–239. 9
- [84] TISSEUR, F., AND MEERBERGEN, K. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review* 43 (2001), 235–286. 11, 48, 51
- [85] TRUFFIN, K., AND POINSOT, T. Comparison and extension of methods for acoustic identification of burners. *Combust. Flame* 142, 4 (2005), 388–400. 22, 72, 92, 95
- [86] VAN GIJZEN, M. The parallel computation of the smallest eigenpair of an acoustic problem with damping. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 45 (1999), 765–777. 11, 51
- [87] YOU, D., YANG, V., AND SUN, X. Three-dimensional linear stability analysis of gas turbine combustion dynamics. In *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms and Modeling*, T. Lieuwen and V. Yang, Eds. AIAA, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, 2005, ch. 14, pp. 415–443. 9
- [88] ZIENKIEWICZ, O., AND MORGAN, K. *Finite elements and approximation*. Wiley, 1983. 30, 36
- [89] ZINN, B., AND LIEUWEN, T. Combustion instabilities : Basic concepts. In *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms and Modeling*, T. Lieuwen and V. Yang, Eds. AIAA, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 2005, ch. 1, pp. 3–26. 17



# **Annexes**



En annexe sont joints les articles publiés dans les journaux spécialisés ainsi que ceux présentés lors de conférences :

**A tool to study azimuthal standing and spinning modes in annular combustors**

C. Sensiau, F. Nicoud, T. Poinsot

publié dans *International Journal of Aeroacoustics*.

Cet article reprend les résultats présentés au chapitre IV de cette thèse. Dans ce papier est introduit l'hypothèse ISAAC et la fonction de transfert de flamme multi-référencée utilisée pour le calcul des instabilités azimutales dans les configurations annulaires multi-injecteurs. Les calculs AVSP sont réalisés sur un cas test académique et montrent l'existence de plages de stabilité en fonction du paramètre  $\tau$ . Ces résultats montrent également l'existence de modes tournants pour un certain type de fonction de transfert de flamme.

**Computation of azimuthal combustion instabilities in an helicopter combustion chamber**

C. Sensiau, F. Nicoud, T. Poinsot

présenté lors de la conférence *14th AIAA CEAS Aeroacoustics Conference*.

Cet article reprend une partie des résultats de l'étude thermoacoustique présentés au chapitre V de cette thèse. On s'intéresse plus particulièrement au mode azimutal. Dans un premier temps, l'influence de la géométrie sur le mode propre azimutal est analysée. On étudie dans un second temps la stabilité de ce mode. L'hypothèse ISAAC est validée par des simulations grandes échelles, ce qui permet d'utiliser la fonction de transfert multi-référencée. L'analyse de stabilité du mode azimutal montre le même type de critère de stabilité que celui obtenu dans le cas académique présenté dans l'article précédent.

**A comparison of solvers for quadratic eigenvalue problems from combustion**

C. Sensiau, F. Nicoud, M. van Gijzen, J.W. van Leeuwen

publié dans *International Journal of Numerical Methods in Fluids*.

Cet article reprend l'étude comparative des algorithmes d'Arnoldi et de Jacobi-Davidson sur les problèmes quadratiques présentés au chapitre III. Arnoldi comme Jacobi-Davidson sont des algorithmes qui permettent de déterminer une partie du spectre des valeurs propres par projection sur un sous espace vectoriel. La méthode d'Arnoldi construit un sous-espace de Krylov et nécessite un changement de variable pour traiter le problème quadratique. Dans ce cas l'algorithme de Jacobi-Davidson, qui projette directement le problème quadratique sur le sous-espace, montre de meilleures performances.

**Acoustic modes in combustors with complex impedances and multidimensional active flames**

F. Nicoud, L. Benoît, C. Sensiau, T. Poinsot

publié dans *AIAA Journal*.

Cet article présente l'ensemble des hypothèses et des modèles thermoacoustiques utilisés dans le code AVSP. L'équation de Helmholtz en milieu réactif est établie. Les conditions limites sont traitées sous forme d'impédance complexes et le couplage acoustique/combustion est modélisé par une fonction de transfert de flamme ( $n - \tau$ ) locale. L'équation de Helmholtz est ensuite discrétisée par une méthode d'éléments finis. Le problème aux valeurs propres non linéaire est résolu par une méthode de point fixe qui nécessite la résolution d'un problème quadratique à chaque sous-itération. Des cas tests académiques et des géométries industrielles sont étudiées pour montrer le potentiel de la méthode.

**Combustion instability problems analysis for high pressure jet engine cores**

M. Cazalens, S. Roux, C. Sensiau, T. Poinsot

publié dans *Journal of Propulsion and Power*.

Cet article présente l'étude d'une chambre de combustion SNECMA avec la chaîne de calcul QUIET. La comparaison des mesures expérimentales et des résultats AVSP révèlent la présence de modes azimutaux de nature différente en fonction du régime de fonctionnement du moteur. Il est montré expérimentalement que la transition d'un mode à l'autre est corrélée aux amorçages successifs du stator et du premier étage de la turbine haute pression.

**Numerical assessment of thermo-acoustic instabilities in gas turbines**

F. Nicoud, L. Benoît, C. Sensiau, T. Poinsot

présenté lors de la conférence *1st INCA Workshop*

Cet article introduit une méthode asymptotique pour évaluer l'influence du couplage acoustique/combustion sur la stabilité du mode propre longitudinal. La méthode est testée sur une configuration du type "tube de Rijke".

# A tool to study azimuthal standing and spinning modes in annular combustors

C. Sensiau\*

*CERFACS, 31057 Toulouse, France*

F. Nicoud†

*University Montpellier II, CC51, 34095 Montpellier, France*

T. Poinsot‡

*IMFT, 31400 Toulouse, France*

September 3, 2008

## Abstract

A methodology for the computation of azimuthal combustion instabilities which can occur in annular combustors is proposed in this work. A thermoacoustic numerical tool using the  $n-\tau$  model for the coupling of acoustic and combustion is required to solve the Helmholtz equation in reactive media. The methodology is based on the Independence Sector Assumption in Annular Combustor (ISAAC) which states that the heat release fluctuations in a given sector are driven only by the fluctuating mass flow rates due to the velocity perturbations through its own swirler. This assumption is first discussed with respect to a Large Eddy Simulation of an annular combustor. The methodology is then applied to an academic annular test case which exhibits amplified or damped, standing or rotating azimuthal eigenmodes depending on parameters  $n$  and  $\tau$ .

## 1 INTRODUCTION

Although thermo-acoustic instabilities have been known for a long time, they still are a challenging problem for gas turbine manufacturers. This phenomenon results from the coupling between the non-steady combustion process and one of the acoustic eigenmodes of the configuration. Large Eddy Simulations can capture those instabilities, but they still remain too expensive to be used in an industrial context. Moreover, aeronautical gas turbines use annular combustion chambers where azimuthal modes can appear at low

---

\*PhD Student. E-mail: sensiau@cerfacs.fr

†Professor, E-mail: nicoud@math.univ-montp2.fr

‡E-mail: poinsot@imft.fr

frequencies: in many chambers the lowest eigenfrequency is often associated to the azimuthal eigenmode. This paper presents a simple thermoacoustic model tool to compute azimuthal thermoacoustic instabilities, which can occur in annular combustion chambers with multiple injectors. In the first part the thermoacoustic model presented in detail in [6] is recalled. It solves the wave equation in reactive media but is limited to single flames and burners. The combustion/acoustic coupling is taken into account by using a  $n - \tau$  model. In order to extend the model to annular and multi-injectors combustion chambers an assumption has to be made. The Independence Sector Assumption in Annular Combustors (ISAAC) for parameters  $n$  and  $\tau$  is presented. This assumption is first tested thanks to a Large Eddy Simulation of a full annular combustion chamber [14]. Then the thermoacoustic model under ISAAC assumption is applied in an academic annular test case. This simple configuration shows standing or spinning eigenmodes, either amplified or damped, depending on the  $n$  and  $\tau$  parameters distribution. A sensitivity analysis of the azimuthal eigenmodes to the parameter  $\tau$  is also proposed.

## 2 THERMOACOUSTIC MODEL

The wave equation in reactive media used in the thermoacoustic model presented here is the following :

$$\frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla \cdot \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma p_0} \frac{\partial}{\partial t} q_1. \quad (1)$$

This equation is derived under the hypothesis of non viscous and zero Mach number flow. The fluctuating quantities (noted  $_1$ ) remains small compared to mean quantities (noted  $_0$ ). The derivation of Eq. (1) is described in details in [6] or [8]. Assuming harmonic motion for perturbed quantities :

$$p_1(\vec{x}, t) = \Re(\hat{p}(\vec{x}, t)e^{-i\omega t}), \quad (2)$$

$$q_1(\vec{x}, t) = \Re(\hat{q}(\vec{x}, t)e^{-i\omega t}), \quad (3)$$

one can obtain the Helmholtz equation in reactive media :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} \hat{p} + \omega^2 \hat{p} = i\omega(\gamma - 1)\hat{q} \text{ on } \Omega. \quad (4)$$

The associated boundary condition can be written :

$$\vec{\nabla} \hat{p} \cdot \vec{n} - i \frac{k}{Z(\omega)} \hat{p} = 0 \text{ on } \partial\Omega_R, \quad (5)$$

where  $Z(\omega)$  is the impedance of the boundary.  $Z(\omega) = \infty$  corresponds to rigid walls and  $Z(\omega) = 0$  to constant pressure boundaries.

The coupling between acoustic and combustion is modeled using a  $n - \tau$  formulation introduced by Crocco in 1951 [1]. In its global formulation this model links the total fluctuating heat release  $Q_1(t) = \int_V q_1(x, t) dV$  of the combustion reaction to the fluctuating velocity at a reference point, noted  $x_{ref}$ . In a realistic configuration this reference point must be chosen in the injection zone where acoustic fluctuations can modify the flow rate or the equivalence ratio. It must be as close as possible of the combustion zone [16]. Under harmonic motion this model can be cast as :

$$Q_1 = \hat{Q}_1 e^{i\omega t} \text{ with } \frac{\hat{Q}_1}{Q_{tot}} = n(\omega) e^{i\omega\tau} \frac{\hat{U}_1(\vec{x}_{ref})}{U_{bulk}}. \quad (6)$$

The scaling by the total heat release  $Q_{tot} = \frac{1}{T} \int_T \int_V q(x, t) dV dt$  and the bulk velocity  $U_{bulk}$  leads to a dimension less value for  $n$ .  $\tau$  represents the time between a velocity perturbation and the heat release fluctuation it produces. This parameter can be influenced by the flow dynamics or by kinetics. It controls stability of the configuration according to the Rayleigh criterion [9] as it will be shown in the third part of this study.

In the present approach the initial global  $n - \tau$  model is extended to a local formulation where  $n_l(\vec{x})$  and  $\tau_l(\vec{x})$  depend on spatial location [6]. Eq. (6) takes the form :

$$\frac{\hat{q}_1(\vec{x})}{q_{tot}} = n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau_l(\vec{x})} \frac{\vec{u}_1(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}}{U_{bulk}}, \quad (7)$$

where  $q_{tot} = Q_{tot}/V$  and  $\vec{u}_1(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}$  is the longitudinal fluctuating velocity at the reference point. Injecting Eq. (6) in Eq. (4) and using a finite element approach leads to an algebraic non-linear eigenvalue problem :

$$(A - D(\omega))P + \omega B(\omega)P + \omega^2 CP = 0. \quad (8)$$

The flame transfer function is encapsulated in the  $D$  matrix. The  $A$ ,  $D$ ,  $B$  and  $C$  matrices are explicitly given in [6]. This eigenvalue problem is solved using iterative subspace methods [3, 13, 12] and point fix algorithm.

### 3 The ISAAC ASSUMPTION

#### 3.1 Description of the ISAAC methodology

Most aeronautical combustors present annular geometries with  $N$  injectors ( $N$  varies typically between 10 and 24) [4, 2]. Obviously, in multi-injection configurations, the coupling between the fluctuating heat release and the acoustic fluctuation can not be described by a flame transfer function involving only one reference point as it was presented above. The local formulation (Eq. (7)) can be extended as follows :

$$\hat{q}_1(\vec{x}) = \begin{cases} n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau_l(\vec{x})} \frac{\tilde{u}_1(\vec{x}_{ref_1}) \cdot \vec{n}_1}{U_{bulk}} & \text{for } \vec{x} \in \text{Sector 1,} \\ n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau_l(\vec{x})} \frac{\tilde{u}_1(\vec{x}_{ref_2}) \cdot \vec{n}_2}{U_{bulk}} & \text{for } x \in \text{Sector 2,} \\ \dots & \\ n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau_l(\vec{x})} \frac{\tilde{u}_1(\vec{x}_{ref_N}) \cdot \vec{n}_3}{U_{bulk}} & \text{for } x \in \text{Sector } N. \end{cases} \quad (9)$$

In this approach, the annular combustion chamber is split in  $N$  sectors. Here the Independence Sector Assumption in Annular Combustor is made.

*ISAAC assumption : The heat release fluctuations in a given sector are driven only by the fluctuating mass flow rates due to the velocity perturbations through its own swirler.*

#### 3.2 Verification of the ISAAC assumption using LES

The ISAAC assumption is implicitly used in most studies of annular combustors [10, 15, 5]. It is true only if flames issuing from neighboring injectors do not interact, a property which is known to be false in certain cases [7] but seems to be acceptable in most gas turbines. A recent confirmation of the ISAAC assumption was given in [14]. In this work a massively parallel Large Eddy Simulation of a full helicopter combustion chamber is performed. A self-excited azimuthal mode develops naturally. LES results show that these turning modes modulate the flow rate through the fifteen burners and the flames oscillate back and forth in front of each burner, leading to local heat release fluctuations. LES demonstrates also that the interaction between flames can be neglected and that the first effect of the turning modes is to induce longitudinal pulsations of the flow rates through individual burners. The transfer functions for each burner have been computed and the global parameters  $n$  and  $\tau$  plotted in Fig. (1). Amplitudes and delays are nearly the same for each sector. The frequency of the azimuthal instabilities observed in this LES is about 740 Hz ( $T = 1.35$  ms). The variability of  $\tau$  (about 0.2 ms) remains small compared to the period  $T$ . Probably, differences between sectors would decrease if the number of periods computed in the LES were increased. Those results confirm the validity of the ISAAC assumption for



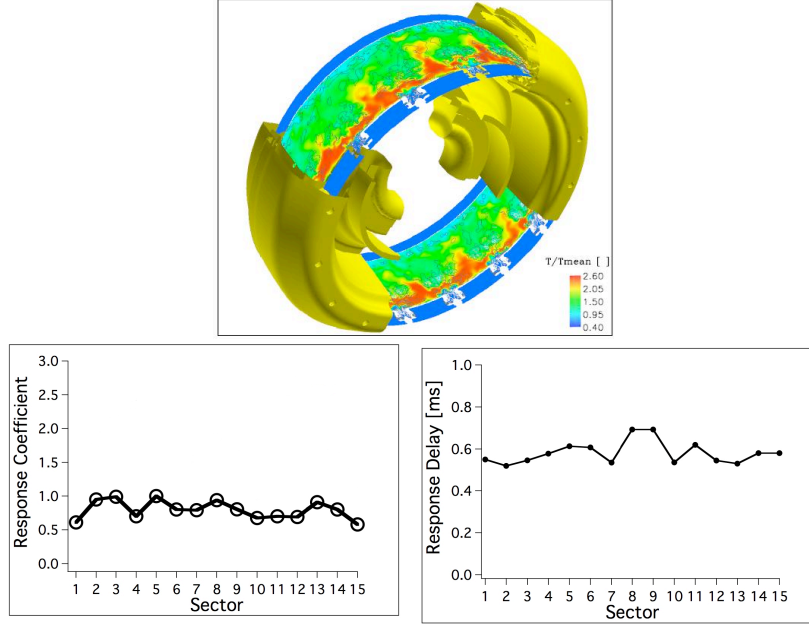


Figure 1: LES of a fifteen sector annular combustor.  $\circ n$  (nondimensionalized by  $n_{max}$ ) for each sector;  $\bullet \tau$  (ms) for each sector.

the global parameters  $n$  and  $\tau$ . More LES post processing would be required to compare the local parameters  $n_l(\vec{x})$  and  $\tau_l(\vec{x})$  defined in Eq. (7). This will be done in future work.

## 4 ACADEMIC ANNULAR TEST CASE

### 4.1 Description of the test case

The thermoacoustic model presented above is now tested in a 3D annular configuration with a compact flame located at  $x = L/2$  ( $L$  is the chamber length). The ring is 0.5 m long, the inner radius is 0.4 m and the outer radius is 0.5 m. The sound speed is constant  $c = 347$  m/s. Wall boundary conditions ( $\hat{u}_1 = 0$ ) are set everywhere except at the outlet where a pressure imposed condition is set ( $\hat{p}_1 = 0$ ). The ring is split in five identical sectors. The flame transfer function is the following :

$$\frac{\hat{Q}_1(\vec{x})}{Q_{tot}} = \begin{cases} n_1 e^{i\omega\tau_1} \frac{\hat{u}_{1x}(\vec{x}_{ref_1})}{U_{bulk}} & \text{for } \vec{x} \in \text{Sector 1,} \\ n_2 e^{i\omega\tau_2} \frac{\hat{u}_{1x}(\vec{x}_{ref_2})}{U_{bulk}} & \text{for } \vec{x} \in \text{Sector 2,} \\ \dots & \\ n_5 e^{i\omega\tau_5} \frac{\hat{u}_{1x}(\vec{x}_{ref_5})}{U_{bulk}} & \text{for } \vec{x} \in \text{Sector 5,} \end{cases} \quad (10)$$

where  $n_i$  and  $\tau_i$  are in their global formulation under the validated ISAAC assumption. The reference points  $\vec{x}_{ref_i}$  ( $x_{ref} = 0.22$  m) are placed in the middle of each sector very close (compared to the wave length considered) to the flame front located between  $x = 0.25$  m and  $x = 0.27$  m. The situation is illustrated in Fig. (2).

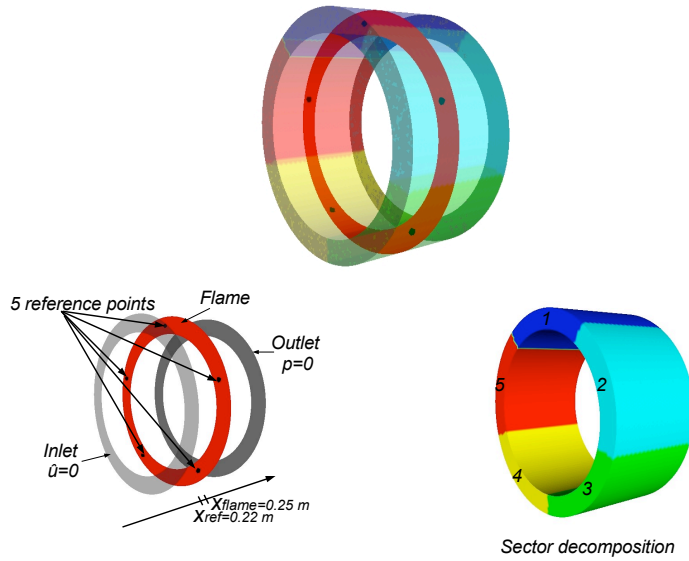


Figure 2: The academic annular test case with five sectors.

#### 4.2 Parametric stability analysis of standing modes

In this section the flame transfer function is chosen to be homogeneous in  $\theta$ :

$$n_1 = n_2 = \dots = n_5 = n^* \text{ and } \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_5 = \tau. \quad (11)$$

Fig. (3) displays the structure of the first azimuthal mode. This mode is coupled with an other azimuthal mode with the same frequency and the same amplification factor. These two modes are found spinning in opposite direction. A combination of these two modes gives a standing azimuthal mode amplified (or damped) depending on  $\tau$ . One can remark that an adequate combination of two orthogonal standing eigenmode sharing the same frequency could also lead to a rotating mode as done in [11]. According to the Rayleigh criterion the parameter  $\tau$  is known to control the stability of the configuration. In industrial applications, a usual way to damp azimuthal instabilities is to change the swirler. This influences the dynamics of the flow and hence the time delay  $\tau$  [4]. The stability of the first azimuthal mode

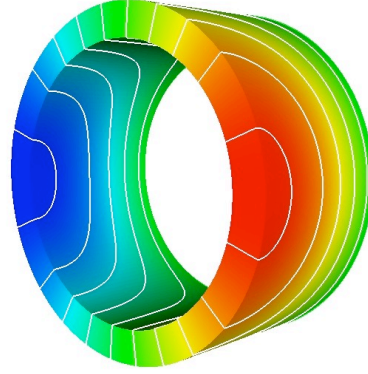


Figure 3: Pressure fluctuation of the first azimuthal mode.

is now investigated when the parameter  $\tau$  takes values between 0 and the period,  $T = 5$  ms, and two different values for  $n$  (Fig. (4)). The real part

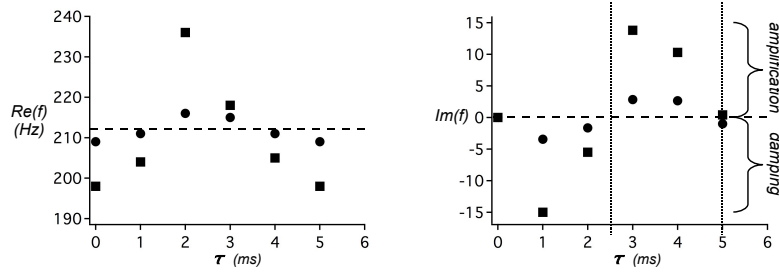


Figure 4: Influence of parameters  $n$  and  $\tau$  on the frequency and the stability of the first azimuthal mode. - -  $n=0$ ; ●  $n = n^*$ ; ■  $n = 5n^*$ .

of the frequency varies with both  $n$  and  $\tau$ , indicating that the mode shape is influenced by combustion effects. The time delay  $\tau$  controls the stability ranges and  $n$  emphasizes the instability effects. For  $n = 0$  all modes are neutral. When  $n > 0$ , for a given frequency of the first azimuthal mode, if  $\tau \in [0, T/2]$  the mode is found stable, and if  $\tau \in [T/2, T]$  the first azimuthal mode is found unstable. It has been checked that this observation was not dependent on the number of sectors. These simple results come from the fact that the flame was supposed to be compact, that the transfer function is simple and that the reference points are located at the flame position. Under these assumptions it is actually possible to verify analytically that the transition between stable and unstable states occurs when  $\tau = m \frac{T}{2}$ .

To do so one considers first a given sector. At the marginal state ( $\Im(\omega) = \omega_i = 0$ ), the Rayleigh criterion can be written as :

$$R(\tau) = \int_V \int_0^T p_1(\vec{x}, t) q(\vec{x}, t) dt dV, \quad (12)$$

$$= \int_V \int_0^T \Re(\hat{p}(x)e^{-i\omega t}) \Re(\hat{q}(x)e^{-i\omega t}) dt dV, \quad (13)$$

$$= \int_V \frac{1}{2} \Re(\hat{p}(x)\hat{q}^*(x)) dV. \quad (14)$$

It is important to notice that even if the Rayleigh criterion is considered in a single sector,  $\omega$  represents the azimuthal pulsation. The  $n - \tau$  model imposes :

$$\hat{q}(x) = n \frac{Q_{tot}}{U_{bulk}} \hat{u}(x_{ref}) e^{i\omega\tau}. \quad (15)$$

Since  $\omega$  is real, and the mode is a standing wave, the acoustic pressure and the velocity are in quadrature. It comes from the momentum equation and it is illustrated in Fig. (5) for the particular case  $n = 5n^*$ ,  $\tau = 5$  ms.

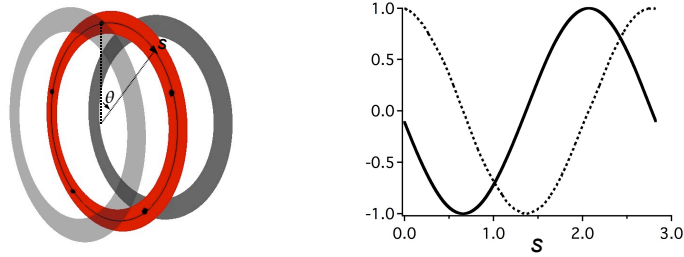


Figure 5: — Reduced pressure fluctuations  $\hat{p}(x_{ref})$ ; - - reduced longitudinal velocity fluctuations at the reference abscissa  $\hat{u}(x_{ref})$  for  $n = 5n^*$ ,  $\tau = 5$  ms.

It follows that:

$$\hat{q}_1(x) = n\alpha \hat{p}(x_{ref}) e^{i(\omega\tau + \frac{\pi}{2})}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Using Eq. (16) and Eq. (14),  $R(\tau)$  takes the form :

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \alpha n |\hat{p}_1(x_{ref})|^2 \cos(\omega\tau + \frac{\pi}{2}). \quad (17)$$

This equation applies to every sector, causing the stability ranges to be the same in all sectors. It confirms the results observed numerically in Fig. (4): the transition between stable and unstable states occurs when  $\tau = m \frac{T}{2}$ .

### 4.3 Spinning azimuthal modes

A basic question in the gas turbine community is the nature (standing or rotating) of the azimuthal mode. In [10] a theoretical non-linear model suggests that standing modes are observed for low amplitudes but that, at higher amplitudes, one of the two rotating modes eventually dominates. The present model shows that even in the linear regime, any change in the symmetry of the system can lead to the appearance of one rotating mode dominating the other one. In the example of Fig. (2) when the rotational symmetry of the configuration is broken (Fig. (6)), the standing azimuthal mode is changed into two counter rotating spinning azimuthal modes ( $1A^+$  and  $1A^-$ ) with different growth rates (Fig. (7)). Combination of modes cannot be used to produce a standing eigenmode. The particular case of the annular configuration presented below with parameters chosen as in Fig. (6) is computed.

$$\begin{aligned} n_1 &= n^*, & \tau_1 &= 1 \text{ ms}, \\ n_2 &= 2n^*, & \tau_2 &= 2 \text{ ms}, \\ & \dots & & \\ n_5 &= 5n^*, & \tau_5 &= 5 \text{ ms}. \end{aligned}$$

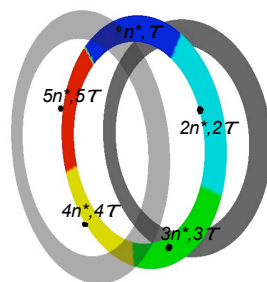


Figure 6: A case where characteristics of the flame are different in each sector.

The  $1A^+$  mode is found amplified ( $+4 \text{ s}^{-1}$ ), and the  $1A^-$  mode is found damped ( $-0.5 \text{ s}^{-1}$ ). A real configuration might not be perfectly symmet-

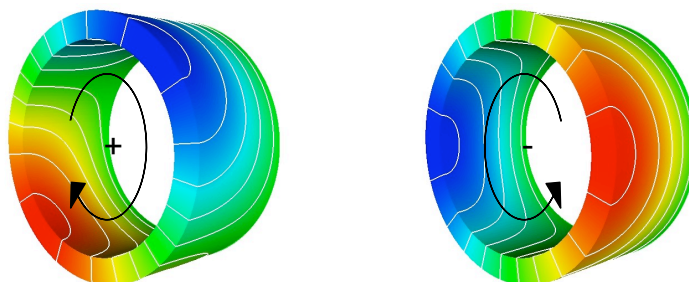
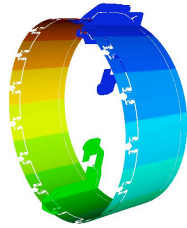


Figure 7: Azimuthal rotating eigenmodes.

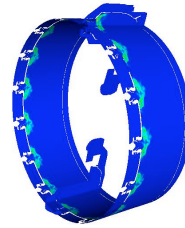
ric for many reasons. In annular combustion chambers there is a mean azimuthal flow because of the multi-perforated plates or compressor flow. Swirlers have also a common rotating direction, and turbulence effects can induce local inhomogeneities in the flow. Those arguments could explain why azimuthal spinning modes are often observed in industrial combustor [4]. Such modes have also recently been captured in LES calculations [14] and with network thermoacoustic models [10, 15, 5].

## 5 CONCLUSION

A methodology to compute azimuthal thermoacoustic instabilities has been presented. It assumes the Independence Sector Assumption in Annular Combustor (ISAAC) which states that *the heat release fluctuations in a given sector are driven only by the fluctuating mass flow rates due to the velocity perturbations through its own swirler*. This assumption has been validated for global parameters  $n$  and  $\tau$  thanks to a full annular Large Eddy Simulation of a real combustion chamber. A calculation of an academic test case has been performed in order to show the capability of the model to capture the azimuthal instabilities occurring when the flame delay  $\tau$  is varying. It has also been shown that when the rotational symmetry is broken, the azimuthal eigenmodes spin. Those conclusions confirm with results obtained with other models [10, 15, 5] and also with experimental observations [4]. Those ideas permit to propose a methodology which will be tested in future works. One can obtain the flame transfer function with a single sector unsteady reactive simulation using U-RANS or LES tools. Then, once the parameters function  $(n, \tau)$  are known they are duplicated in each sector (Fig. (8)) and the stability of the full azimuthal combustor can be studied.



The geometry is split in sectors.



The local  $n(x)$  field is replicated in each sector.

Figure 8: Application of the ISAAC methodology to a helicopter combustor.

## References

- [1] CROCCO, L. Aspects of combustion instability in liquid propellant rocket motors. part i. *J. American Rocket Society*21 (1951), 163–178.
- [2] LEFEBVRE, A. H. *Gas Turbines Combustion*. Taylor & Francis, 1999.
- [3] LEHOUCQ, R., AND SORENSEN, D. Arpack: Solution of large scale eigenvalue problems with implicitly restarted arnoldi methods. [www.caam.rice.edu/software/arpack](http://www.caam.rice.edu/software/arpack). User’s guide, 1997.
- [4] LIEUWEN, T., AND YANG, V. Combustion instabilities in gas turbine engines. operational experience, fundamental mechanisms and modeling. In *Prog. in Astronautics and Aeronautics*AIAA (2005), vol. 210.
- [5] MORGANS, A. S., AND STOW, S. R. Model-based control of combustion instabilities in annular combustors. *Combust. Flame*150, 4 (2007), 380–399.
- [6] NICOUD, F., BENOIT, L., SENSIAU, C., AND POINSOT, T. Acoustic modes in combustors with complex impedances and multidimensional active flames. *AIAA journal* 45 (2007), 426–441.
- [7] POINSOT, T. *Analyse des instabilités de combustion de foyers turbulents prémélangés*. Thèse d’état, Université d’Orsay, 1987.
- [8] POINSOT, T., AND VEYNANTE, D. *Theoretical and numerical combustion*. R.T. Edwards, 2001.
- [9] RAYLEIGH, L. The explanation of certain acoustic phenomena. *Nature July 18* (1878), 319–321.
- [10] SCHUERMANS, B., PASCHEREIT, C., AND MONKIEWITZ, P. Non-linear combustion instabilities in annular gas-turbine combustors. vol. AIAA paper 2006-0549.
- [11] SELLE, L., BENOIT, L., POINSOT, T., NICOUD, F., AND KREBS, W. Joint use of compressible large-eddy simulation and helmoltz solvers for the analysis of rotating modes in an industrial swirled burner. *Combust. Flame*145, 1-2 (2006), 194–205.
- [12] SENSIAU, C., NICOUD, F., VAN GIJZEN, M., AND VAN LEEUWEN, J. W. A comparison of solvers for quadratic eigenvalue problems from combustion. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*56 (2008), 1481–1487.
- [13] SLEIJPEN, G., AND VAN DER VORST, H. A jacobi-davidson iteration method for linear eigenvalue problems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 17 (1996), 401–425.

- [14] STAFFELBACH, G., GICQUEL, L., BOUDIER, G., AND POINSOT, T. Large eddy simulation of self excited azimuthal modes in annular combustors. In *submitted to the 32nd International Symposium on Combustion* (2008).
- [15] STOW, S. R., AND DOWLING, A. P. Thermoacoustic oscillations in an annular combustor. In *ASME Paper* (New Orleans, Louisiana, 2001).
- [16] TRUFFIN, K., AND POINSOT, T. Comparison and extension of methods for acoustic identification of burners. *Combust. Flame*142, 4 (2005), 388–400.



# Computation of azimuthal combustion instabilities in an helicopter combustion chamber

C. Sensiau\*

*CERFACS, 31057 Toulouse, France*

F. Nicoud†

*University Montpellier II, CC51, 34095 Montpellier, France*

T. Poinsot‡

*IMFT, 31400 Toulouse, France*

This work presents a detailed study of the first azimuthal mode of an annular helicopter combustor. First it is shown that the casing and geometrical details such as primary holes have to be accounted for to produce correctly the acoustics of the combustor. Then a methodology to compute azimuthal combustion instabilities is presented. It requires a thermoacoustic model using a  $n - \tau$  formulation for the coupling between acoustics and combustion. The parameters  $n$  and  $\tau$  are computed from a LES of a single sector of the combustor. The fields of  $n - \tau$  model is extended for this combustor under the Independence Sector Assumption in Annular Combustor (ISAAC). Then the stability of the first azimuthal mode is investigated.

## Introduction

Thermoacoustic instabilities result from the coupling between unstationary combustion process and one of the lowest natural acoustic eigenmodes of the configuration. This phenomenon is commonly observed by turbine manufacturers.<sup>10</sup> Moreover, since helicopter combustion chambers usually present an annular geometry, the lowest eigenfrequency of the configuration might correspond to an azimuthal mode. The numerical simulation of those instabilities still remains challenging because it involves a wide range of spacial and temporal scales in compressible unsteady reactive flows. The recent increase of CPU performance makes the compressible Large Eddy Simulation of full annular combustion chambers possible,<sup>22</sup> but these computations still remain too expensive to be used in an industrial context. In this work a detailed study of the first azimuthal mode of an annular helicopter combustor will be given. First, the influence of the geometry of the chamber in a non reactive flow is investigated. It is shown that the casing, the swirler and the primary holes have a strong influence on the acoustics of the azimuthal mode. A methodology to compute azimuthal instabilities is then presented. The main advantages of this approach is its low CPU time cost. A thermoacoustic model is used to solve the wave equation in reactive media. The coupling between acoustics and combustion is accounted for using a  $n - \tau$  model. These  $n$  and  $\tau$  parameters are computed by post processing a LES of a single sector of the annular combustor and the corresponding fields are extended to multi injection annular combustion chamber under the Independence Sector Assumption in Annular Combustor (ISAAC). This assumption is validated using a Large Eddy Simulation of the full annular helicopter combustion chamber. Then the stability of the first azimuthal mode is investigated.

## I. The Helicopter combustor

The combustor studied in this work presents an annular geometry with fifteen burners (Fig (1)). The cold flow (470 K) coming from the compressor enters the casing from the inlet, passes through the swirler

\*PhD Student, E-mail: sensiau@cerfacs.fr

†Professor, E-mail: nicoud@math.univ-montp2.fr

‡E-mail: poinsot@imft.fr

where it is mixed with the fuel. The swirling effects create a low pressure recirculation zone which stabilizes the flame in the primary zone where fresh gases are burnt (Fig. (2)). This zone is delimited by the cold jets coming from the primary holes. Burnt gases are exhausted through the outlet of the combustion chamber and enter the stator of the High Pressure Turbine. The energy coming from the gas expansion is used to drive the compressor and the rotor of the helicopter.

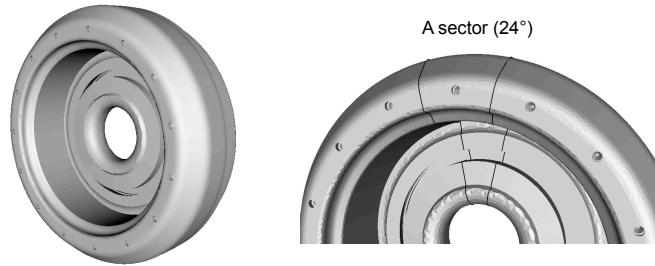


Figure 1. The annular helicopter combustor

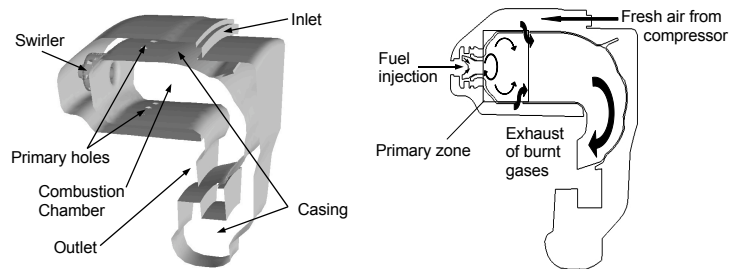


Figure 2. A sector of the helicopter combustor

## II. Acoustics without combustion effect

In this section the effects of combustion on the stability of the azimuthal eigenmode are not accounted for. Those aspects will be treated in the third section of this work. The mode shape and frequency of are strongly influenced by the geometry and the temperature field, or sound speed field (Fig. 3), inside the combustion chamber.

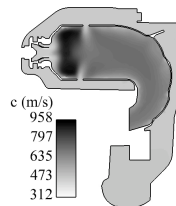


Figure 3. The sound speed field

Under the hypothesis of non viscous, zero Mach number flow and small fluctuating quantities (noted  $1$ )

compared to mean quantities (noted  $\bar{\cdot}$ ), the wave equation in in-homogeneous media takes the following form<sup>16</sup> :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla \cdot c_0^2 \nabla p_1 = 0. \tag{1}$$

Assuming harmonic motion for pressure fluctuation,  $p_1(\vec{x}, t) = \Re(\hat{p}(\vec{x})e^{-i\omega t})$ , one can obtain the Helmholtz equation in reactive media:

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} \hat{p} + \omega^2 \hat{p} = 0 \text{ on } \Omega, \tag{2}$$

with its associated boundary condition:

$$\vec{\nabla} \hat{p} \cdot \vec{n} - i \frac{k}{Z(\omega)} \hat{p} = 0 \text{ on } \partial\Omega_R. \tag{3}$$

$Z(\omega)$  is the impedance of the boundary.  $Z(\omega) = \infty$  corresponds to walls and  $Z(\omega) = 0$  to constant pressure boundaries. In Table (1) the influence of the geometry on the first azimuthal mode is illustrated. Eq. (2) is solved using a finite element method. It leads to a quadratic eigenvalue problem  $AP + \omega BP + \omega^2 CP = 0$  solved using subspace iterative methods.<sup>9,20,21</sup> The vector P gives the pressure distribution in the domain, the real part of  $\omega$  gives the eigen-pulsation of the mode and the imaginary part of  $\omega$  the growth rate or the damping of the eigen-mode due to acoustic flux at the boundaries  $\partial\Omega_R$ . The question of the boundary conditions is not treated in this work. Since experimental data are not available for this helicopter combustor, theoretical and numerical tools have to be used.<sup>7,11,24</sup> In the calculation presented in Table (1) there is no acoustic flux at the boundaries since  $Z = \infty$  is imposed everywhere. The combustion chamber (CC) and the casing (C) are first computed separately. Then they are connected with the swirler (CC+C+S) and finally primary holes are taken into account in the calculation (CC+C+S+PH).

Geometry computed			
CC	C	CC+C+S	CC+C+S+PH
The first azimuthal mode			
700 Hz	500 Hz	575 Hz	609 Hz
A cut of the first azimuthal mode			

Table 1. The influence of the geometry on the first azimuthal eigenmode

In this particular case the frequency of the first azimuthal mode remains in a narrow band between 500 Hz and 700 Hz which is typically the range of frequency involved in combustion instabilities. One can notice that a first approximation of the frequency can be easily obtained using the formula :  $f_{approx} = \frac{c_{mean}}{2\pi R_{mean}}$ , where  $c_{mean}$  stands for the mean sound speed and  $R_{mean}$  is the mean radius of the annular configuration.

Considering  $c_{mean} = 750$  m/s (Fig. (3)) inside the combustion chamber, it gives  $f_{approx} = 680$  Hz, and considering  $c_{mean} = 450$  m/s inside the casing, it gives  $f_{approx} = 500$  Hz. Those first approximations are in good agreement with the results of the calculation given in Table (1). According to this formula, it is clear that the frequency of the first azimuthal mode is greater for CC+C+S than for CC and it is lower than for C. It is also important to remark that those modes are not purely azimuthal. Because of the geometry restriction and the temperature inhomogeneities azimuthal mode have also a longitudinal component. Adding the primary holes in the calculation changes this longitudinal component of the mode shape and hence the frequency. Those results emphasize the necessity to treat carefully all the geometrical details to model correctly the acoustics involved in combustion instabilities.

### III. Acoustics with combustion effects

#### A. The wave equation in reactive media

The wave equation in reactive media takes the following form:<sup>13,16</sup>

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla \cdot c_0^2 \nabla p_1 = (\gamma - 1) \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad (4)$$

where  $q_1(x, t)$  represents the local heat release fluctuation in  $W/m^3$  due to non stationary combustion process occurring in the reaction zone. Assuming harmonic motion for fluctuating quantities the Helmholtz equation takes the form :

$$\nabla \cdot c_0^2 \vec{\nabla} \hat{p} + \omega^2 \hat{p} = i\omega(\gamma - 1) \hat{q} \text{ on } \Omega, \quad (5)$$

with its associated boundary condition:

$$\vec{\nabla} \hat{p} \cdot \vec{n} - i \frac{k}{Z(\omega)} \hat{p} = 0 \text{ on } \partial\Omega_R. \quad (6)$$

#### B. The $n - \tau$ model

The coupling between acoustics and combustion is accounted for using a  $n - \tau$  model. In its global formulation (Eq. (7)):

$$\frac{\hat{Q}_1}{Q_{tot}} = n e^{i\omega\tau} \frac{\vec{u}_1(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}}{U_{bulk}}, \quad (7)$$

it relates the fluctuations of the total heat release  $Q_1(t) = \int_V q_1(x, t) dV$  (W) of the combustion reaction to the fluctuating velocity at a reference point, noted  $\vec{x}_{ref}$ . This reference point must be chosen in the injection zone where acoustic fluctuations influence the flow rate or the equivalence ratio. It must be as close as possible of the combustion zone.<sup>25</sup>  $\vec{u}_1(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}$  is the longitudinal velocity outgoing the swirler. The scaling by the total heat release  $Q_{tot} = \frac{1}{T} \int_T \int_V q(x, t) dV dt$  and the bulk velocity  $U_{bulk}$  leads to a dimension less value for n. The time delay,  $\tau$ , represents the time between a velocity perturbation and the heat release fluctuation it produces. This parameter can be influenced by the flow dynamics or by kinetics. It controls stability of the configuration according to the Rayleigh criterion<sup>18</sup> as it will be shown in the third section of this work. Following the same ideas the  $n - \tau$  model can be expressed in a local formulation (Eq. (7)).<sup>13</sup>

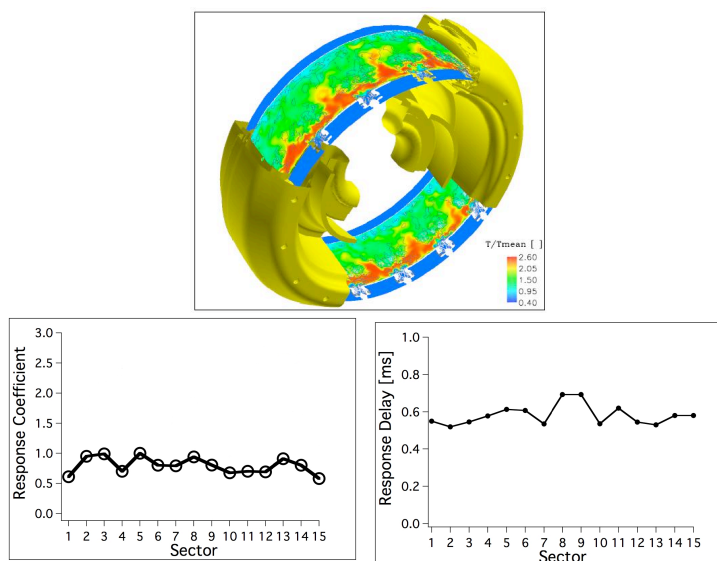
$$\frac{\hat{q}_1(\vec{x})}{q_{tot}} = n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau_l(\vec{x})} \frac{\vec{u}_1(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}}{U_{bulk}}. \quad (8)$$

In this formulation  $q_{tot} = Q_{tot}/V$  ( $W/m^3$ ), with V the volume of the reaction zone. The amplitude response coefficient,  $n_l(\vec{x})$ , and time the time delay,  $\tau_l(\vec{x})$ , are space dependent. This local approach permits to account for the inhomogeneities of the flame response to velocity perturbation. The helicopter combustion chamber described above presents an annular geometry with fifteen injectors. Obviously, in this case the coupling between the fluctuating heat release and the acoustic fluctuation can not be described by a flame transfer function involving only one point of reference. The local formulation (Eq. (8)) is extended as follows

$$\frac{\hat{q}_1(\vec{x})}{q_{tot}} = \begin{cases} n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau_l(\vec{x})} \frac{\bar{u}_1(\vec{x}_{ref1}) \cdot \bar{n}_1}{U_{bulk}} & \text{for } \vec{x} \in \text{Sector 1,} \\ n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau_l(\vec{x})} \frac{\bar{u}_1(\vec{x}_{ref2}) \cdot \bar{n}_2}{U_{bulk}} & \text{for } \vec{x} \in \text{Sector 2,} \\ \dots & \\ n_l(\vec{x}, \omega) e^{i\omega\tau_l(\vec{x})} \frac{\bar{u}_1(\vec{x}_{ref15}) \cdot \bar{n}_{15}}{U_{bulk}} & \text{for } \vec{x} \in \text{Sector 15.} \end{cases} \quad (9)$$

In this approach, the annular combustion chamber is split in 15 sectors and the Independence Sector Assumption in Annular Combustor is assumed.

*ISAAC assumption* : The heat release fluctuations in a given sector are driven only by the fluctuating mass flow rates due to the velocity perturbations through its own swirler. The ISAAC assumption is implicitly used in most studies of annular combustors.<sup>12,19,23</sup> It is true only if flames issuing from neighboring injectors do not interact, a property which is known to be false in certain cases<sup>14</sup> but seems to be acceptable in this case. In<sup>22</sup> a massively parallel Large Eddy Simulation of the full helicopter combustion chamber is performed. A self-excited azimuthal mode develops naturally. LES results show that this turning mode modulates the flow rate through the fifteen burners and the flames oscillate back and forth in front of each burner, leading to local heat release fluctuations. LES demonstrates also that the interaction between flames can be neglected and that the first effect of the turning mode is to induce longitudinal pulsations of the flow rates through individual burners. The transfer functions for each burner have been computed and the global parameters  $n$  and  $\tau$  plotted in Fig. (4). Amplitudes and delays are nearly the same for each sector. The frequency of the



**Figure 4.** LES of a fifteen sector annular combustor.  $\circ$   $n$  (adimensionalised by  $n_{max}$ ) for each sector;  $\bullet$   $\tau$  (ms) for each sector.

azimuthal instability observed in this LES is about 740 Hz ( $T = 1.35$  ms). The variability of  $\tau$  (about 0.2 ms) remains small compared to the period  $T$ . Probably, differences between sectors would decrease if the number of periods computed in the LES were increased. Those results confirm the validity of the ISAAC assumption for the global parameters  $n$  and  $\tau$ . More LES post processing would be required to compare the local parameters  $n_l(\vec{x})$  and  $\tau_l(\vec{x})$  defined in Eq. (8). This will be done in further work. In the following section  $\tau$  will be used in its global form. A sensitivity analysis of the combustor stability to this parameter is performed. At least, note that the reaction index coefficient is used in its local form,  $n_l(x)$ , in order to take into account the space inhomogeneities of the flame response to a given excitation (Fig. (6)).

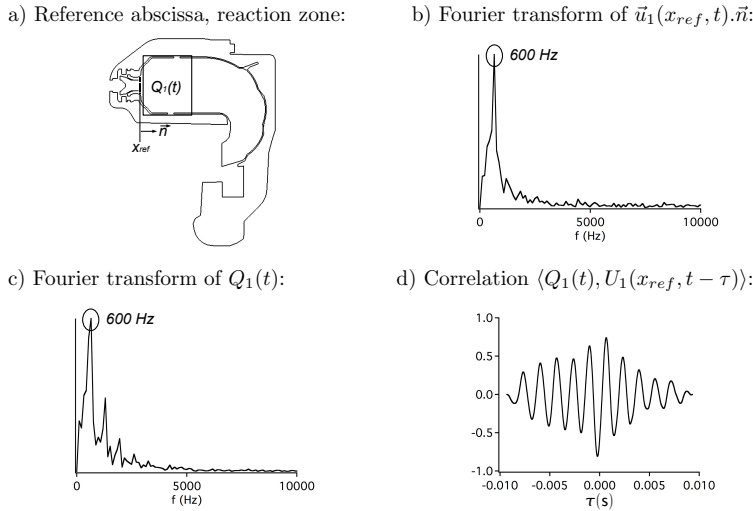
**C. ISAAC methodology for the stability analysis**

The methodology proposed for the stability analysis of the azimuthal mode is divided in three steps:

- The flame transfer function is computed by post-processing a Large Eddy Simulation of a sector of the helicopter combustor,
- Thanks to the ISAAC assumption, the response coefficients of the flame are replicated in all sectors. Notice that even if the flame transfer function is the same in each sector the heat release will be different. Indeed when an azimuthal mode develops, the velocity and the heat release fluctuations are different in each sector ( Eq. (9)).
- Using the thermoacoustic model described above, the wave equation in reactive media is solved thanks to a finite element method implemented in a parallel algorithm.<sup>13</sup> A sensitivity analysis of the stability of the first azimuthal mode to the parameter  $\tau$  is then performed.

*1. Step 1 : LES of a single sector*

This is the most CPU demanding step. The parameters of the LES are the same as used in:<sup>22</sup> the classical Smagorinsky approach is used to model the sub-grid stresses. Chemistry is accounted for with a reduced one-step scheme for JP10/air flames fitted to match the full schemes behavior for equivalence ratios ranging from 0.4 to 1.5. Five species are explicitly solved for: JP10, O, CO2, H2O and N2. Turbulence/flame interaction is modeled with the Dynamic Thickened Flame model.<sup>1,8</sup> The boundary conditions are based on a multi-species extension of the NSCBC approach.<sup>15</sup> All wall boundaries use a logarithmic law-of-the-wall formulation. The solver is compressible, so acoustic waves are explicitly resolved : the time step is limited by the acoustic CFL condition and a high-order spatial and temporal scheme is used to propagate acoustic waves with precision so that the flame/acoustics interaction is captured correctly.<sup>4,16</sup> To obtain the flame response to an acoustic perturbation the calculation is forced by injecting harmonic perturbations (600 Hz) through the inlet.<sup>3,5</sup> The fourier analysis and the correlation function in Fig. (5) show that the velocity fluctuations through the swirler at 600 Hz induce heat release fluctuations in the combustion chamber at the same frequency. This relation is expressed thanks to the  $n - \tau$  model.



**Figure 5. The LES is harmonically forced at 600 Hz by the inlet**

From this calculation of a single sector the local amplitude coefficient is computed as follows:

$$n_l(x) = \frac{|\hat{q}(x)/q_{tot}|}{|\hat{u}(x_{ref})/U_{bulk}|}, \tag{10}$$

where  $\hat{u}(x_{ref})$  (resp.  $\hat{q}(x)$ ) is the 600 Hz Fourier coefficient of the sampled signal  $\vec{u}_1(x_{ref}, t) \cdot \vec{n}$  (resp.  $\hat{q}(x, t)$ ). In this case, 8 periods were simulated with LES with a sampling frequency of 15000 Hz (25 snapshot per period). In Fig. (6) the local response amplitude coefficient,  $n_l(\vec{x})$  at 600 Hz is plotted in three different planes. One can remark that the flame response is spread in the primary zone, it is neither homogenous nor symmetric. In the following of this work the response amplitude coefficient  $n_l(\vec{x})$  is kept in its local formulation in order to take into account the flame response inhomogeneities. Note that this flame response is assumed

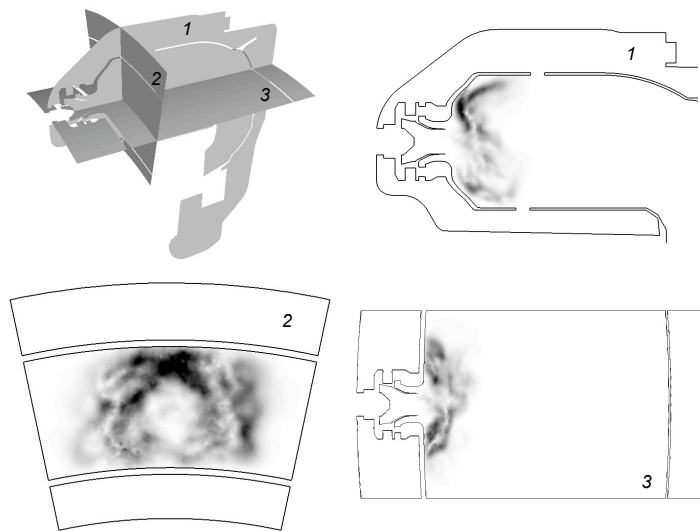


Figure 6. Inhomogeneities of the amplitude response coefficient,  $n_l(\vec{x})$ .

to be independent of the frequency of the acoustic forcing. This assumption is false if the forcing frequency varies in a broad band, but since in this particular case the frequency of the first azimuthal mode varies between 550 Hz and 610 Hz, the flame response can be considered constant. To obtain the flame response over a broader frequency range, a white noise inlet forcing, together with a Wiener-Hopf inversion should be used.<sup>2,17</sup>

2. Step 2 : duplication of the flame transfer function

Under the ISAAC assumption, the flame response to an acoustic perturbation is the same for all sectors. The local amplitude response coefficient  $n_l(x)$  is duplicated in all sectors (Fig. (7)).

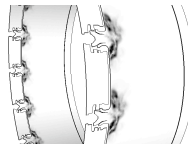


Figure 7. The FTF is duplicated for each sector.

3. Step 3 : resolution of the wave equation

The wave equation in reactive media (Eq. (5)) accounting for combustion/acoustics coupling thanks to the extended  $n - \tau$  formulation (Eq. (9)), is solved using a finite element method. Although the heat release fluctuations are not homogeneous, the time delay is imposed to be the same in the whole combustion zone. A sensitivity study of the stability of the azimuthal mode to this parameter is then possible. Tests values for  $\tau$  are chosen between 0 and 2 ms. Indeed, due to harmonic motion the stability behavior is also periodic with  $\tau$ . Results are plotted in Fig. (8).

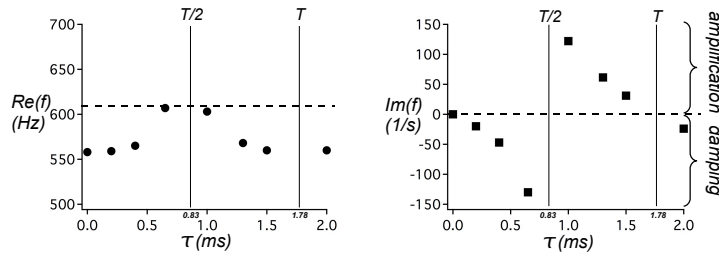


Figure 8. Influence of the parameter  $\tau$  on the frequency and the stability of the first azimuthal mode. • eigenfrequency, ■ growth rate, - - without combustion

When  $\tau$  varies the frequency varies between 555 Hz and 610 Hz. When  $\tau$  is in  $[0, T/2]$ , with  $T$  the period, the azimuthal mode is damped, but when  $\tau$  is in  $[T/2, T]$  the azimuthal mode is amplified. Those simple results are easy to explain: considering a given sector (Fig. (9)), the longitudinal velocity fluctuates following the period of the azimuthal mode. According to the  $n - \tau$  model, the velocity fluctuation induce a heat release fluctuation (Eq. (8)) after a time delay  $\tau$ . If this time delay is in  $[0, T/2]$  then the acoustic energy decreases, if  $\tau$  is in  $[T/2, T]$  then the acoustic energy increases, as it is classically established for 1D longitudinal instabilities.<sup>16</sup> The same stability ranges are predicted analytically in a simple annular configuration with an infinitely thin flame.<sup>6</sup> In a real experiment a combustion instability would occur if the acoustic loss through the boundaries (not taken into account here) would be greater than the energy growth rate due to the flame/acoustics coupling.

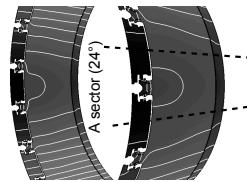


Figure 9. Pressure fluctuation for the 1A

Conclusions

The computation of azimuthal instabilities requires to mesh the full annular configuration, including its casing and geometrical details such as primary holes. Large Eddy Simulations of those instabilities are now possible but remain very expensive. In this work an alternative methodology is proposed for the computation of azimuthal combustion instabilities. It only requires the LES of a single sector of the annular combustor. The  $n - \tau$  model is extended under the Independence Sector Assumption in Annular Combustor. In further work the predictability of this approach will be checked. A classical way used by engineers to damped azimuthal instabilities is to change the swirler.<sup>10</sup> This geometry modification should change the



flame response coefficient and hence the stability ranges predicted by this methodology.

## References

- <sup>1</sup>COLIN, O., DUCROS, F., VEYNANTE, D., AND POINSOT, T. A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion. *Phys. Fluids*12, 7 (2000), 1843–1863.
- <sup>2</sup>GIAUQUE, A. *System identification and disturbance energies in reacting flows -TH/CFD/07/15*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 2007.
- <sup>3</sup>GIAUQUE, A., SELLE, L., POINSOT, T., BUECHNER, H., KAUFMANN, P., AND KREBS, W. System identification of a large-scale swirled partially premixed combustor using LES and measurements. *J. Turb.*6, 21 (2005), 1–20.
- <sup>4</sup>HIRSCH, C. *Numerical Computation of internal and external flows: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, vol. 2. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- <sup>5</sup>KAUFMANN, A., NICLOUD, F., AND POINSOT, T. Flow forcing techniques for numerical simulation of combustion instabilities. *Combust. Flame*131 (2002), 371–385.
- <sup>6</sup>KREBS, W., WALZ, G., AND HOFFMANN, S. Thermoacoustic analysis of annular combustor. In *5th AIAA Aeroacoustics Conference* (1999), A. P. 99-1971, Ed.
- <sup>7</sup>LAMARQUE, N., AND POINSOT, T. Inlet and outlet boundary conditions for acoustic eigenmodes computation in gas turbines combustion chambers. Preliminary version of an article submitted to AIAA Journal TR/CFD/07/142, CERFACS, November 2007.
- <sup>8</sup>LÉGIER, J.-P., POINSOT, T., AND VEYNANTE, D. Dynamically thickened flame LES model for premixed and non-premixed turbulent combustion. In *Proc. of the Summer Program* (2000), Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., pp. 157–168.
- <sup>9</sup>LEHOUCQ, R., AND SORENSEN, D. Arpack: Solution of large scale eigenvalue problems with implicitly restarted arnoldi methods. [www.caam.rice.edu/software/arpack](http://www.caam.rice.edu/software/arpack). User's guide, 1997.
- <sup>10</sup>LIEUWEN, T., AND YANG, V. Combustion instabilities in gas turbine engines. operational experience, fundamental mechanisms and modeling. In *Prog. in Astronautics and Aeronautics/AIAA* (2005), vol. 210.
- <sup>11</sup>MARBLE, F. E., AND CANDEL, S. Acoustic disturbances from gas nonuniformities convected through a nozzle. *J. Sound Vib.*55 (1977), 225–243.
- <sup>12</sup>MORGANS, A. S., AND STOW, S. R. Model-based control of combustion instabilities in annular combustors. *Combust. Flame*150, 4 (2007), 380–399.
- <sup>13</sup>NICLOUD, F., BENOIT, L., SENSIAU, C., AND POINSOT, T. Acoustic modes in combustors with complex impedances and multidimensional active flames. *AIAA journal* 45 (2007), 426–441.
- <sup>14</sup>POINSOT, T. *Analyse des instabilités de combustion de foyers turbulents prémélangés*. Thèse d'état, Université d'Orsay, 1987.
- <sup>15</sup>POINSOT, T., AND LELE, S. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.*101, 1 (1992), 104–129.
- <sup>16</sup>POINSOT, T., AND VEYNANTE, D. *Theoretical and numerical combustion*. R.T. Edwards, 2nd edition., 2005.
- <sup>17</sup>POLIFKE, W., PONCET, A., PASCHEREIT, C. O., AND DOEBBELING, K. Reconstruction of acoustic transfer matrices by instationary computational fluid dynamics. *J. Sound Vib.*245, 3 (2001), 483–510.
- <sup>18</sup>RAYLEIGH, L. The explanation of certain acoustic phenomena. *Nature July 18* (1878), 319–321.
- <sup>19</sup>SCHUERMANS, B., PASCHEREIT, C., AND MONKIEWITZ, P. Non-linear combustion instabilities in annular gas-turbine combustors. vol. AIAA paper 2006-0549.
- <sup>20</sup>SENSIAU, C., NICLOUD, F., VAN GIJZEN, M., AND VAN LEEUWEN, J. W. A comparison of solvers for quadratic eigenvalue problems from combustion. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*56 (2008), 1481–1487.
- <sup>21</sup>SLEJPEN, G., AND VAN DER VORST, H. A jacobi-davidson iteration method for linear eigenvalue problems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 17 (1996), 401–425.
- <sup>22</sup>STAFFELBACH, G., GICQUEL, L., BOUDIER, G., AND POINSOT, T. Large eddy simulation of self excited azimuthal modes in annular combustors. In *submitted to the 32nd International Symposium on Combustion* (2008).
- <sup>23</sup>STOW, S. R., AND DOWLING, A. P. Thermoacoustic oscillations in an annular combustor. In *ASME Paper* (New Orleans, Louisiana, 2001).
- <sup>24</sup>STOW, S. R., DOWLING, A. P., AND HYNES, T. P. Reflection of circumferential modes in a choked nozzle. *J. Fluid Mech.*467 (2002), 215–239.
- <sup>25</sup>TRUFFIN, K., AND POINSOT, T. Comparison and extension of methods for acoustic identification of burners. *Combust. Flame*142, 4 (2005), 388–400.

## A comparison of solvers for quadratic eigenvalue problems from combustion

C. Sensiau<sup>1</sup>, F. Nicoud<sup>2,\*</sup>, M. van Gijzen<sup>3</sup>, and J.W. van Leeuwen<sup>4</sup><sup>1</sup> *PhD Student, CERFACS, 31057 Toulouse Cedex 1, and University Montpellier II, France*<sup>2</sup> *Professor, University Montpellier II and CNRS I3M, Montpellier, France*<sup>3</sup> *Assistant Professor, Delft University of Technology, The Netherlands*<sup>4</sup> *Student, Delft University of Technology, The Netherlands*

## SUMMARY

Two iterative subspace methods (Arnoldi and Jacobi-Davidson) are compared for solving typical quadratic eigenvalue problems arising when studying combustion instabilities. An academic, representative test case is presented with associated analytical solution. The efficiency of the iterative methods are studied in terms of running time when 1 to 10 eigenpairs are sought for, the computational domain being discretized with 500 to 32000-nodes finite element meshes. The sensitivity of the methods to the dimension of the search subspace is also investigated. Copyright © 2007 John Wiley & Sons, Ltd.

KEY WORDS: Quadratic Eigenvalue Problems, Subspace Methods, Combustion Instabilities

## 1. INTRODUCTION

One of the difficulties in the development of low emission aircraft engines is the occurrence of thermoacoustic instabilities that are caused by the coupling between the flame and the acoustic wave [1]. The linear acoustic wave equation for the pressure fluctuations written for a non isothermal reacting flow is an appropriate framework to study this phenomenon [2]. Assuming harmonic variations, it leads to a generalized Helmholtz equation with the unsteady heat release  $\hat{\Omega}_T$  as a source term. Under the assumption that  $\hat{\Omega}_T$  is a linear function of the acoustic pressure, the Helmholtz equation is nothing but a functional eigenvalue problem whose spectral elements are the pulsation  $\omega$  and the pressure complex amplitude  $\hat{p}$ . The frequency  $f$  is obtain with the relation  $\omega = 2\pi f$ . Using a finite element method to discretise the flow domain leads to an algebraic eigenvalue problem (EVP) whose size is close to  $N$ , the number of nodes in the mesh [3]. Usually, a time delay between the acoustic field and the unsteady heat release is introduced so that  $\hat{\Omega}_T$  depends exponentially on  $\omega$  and the EVP non-linear in the

---

\*Correspondence to: F. Nicoud, Université Montpellier II, CC51, 34095 Montpellier Cedex 5 - Email: nicoud@math.univ-montp2.fr

eigenvalues. Even in the absence of flame-acoustic coupling ( $\hat{\Omega}_T=0$ ), the EVP remains non-linear in the general case. Indeed, the boundary conditions imposed for the pressure fluctuation  $\hat{p}$  are usually chosen in order to prescribe an appropriate reduced boundary impedance  $Z$ . This means imposing a Robin condition to the pressure fluctuations, viz.  $c_0 Z \nabla \hat{p} \cdot \mathbf{n} - i\omega \hat{p} = 0$ , where  $\mathbf{n}$  is the unit outward vector normal to the boundary and  $c_0$  the speed of sound. In the case where the boundary condition is given by a constant, complex valued impedance ( $Z = Z_0$ ), the eigenvalue problem is quadratic [3, 4] and can be written as:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \omega\mathbf{B}\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{C}\mathbf{P} = 0 \tag{1}$$

where  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  are sparse, square matrices of size close to the mesh size  $N$ .  $\mathbf{A}$  is also symmetric,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  are diagonal.  $\mathbf{P}$  contains the nodal values of the complex pressure amplitude.

Since the extra non linearity arising from the acoustic flame coupling can be handled efficiently by using an iterative algorithm [3] where a quadratic eigenvalue problem must be solved at each sub iteration, seeking for the most efficient method for solving quadratic EVPs is relevant to the nonlinear thermo-acoustic problem.

## 2. NUMERICAL METHODS

### 2.1. Framework

The finite element method is used as a discretisation technique to derive the quadratic eigenvalue problem. In the discretisation, two important choices have been made that are of direct consequence for the solution methods:

- The matrix  $\mathbf{C}$  corresponds to a *lumped* mass matrix, and hence is diagonal. This implies that operations both with  $\mathbf{C}$  and its inverse  $\mathbf{C}^{-1}$  are trivial to perform, and already in the discretization phase the general quadratic eigenvalue is reduced to the more simple problem

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} + \omega\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{P} = 0 .$$

- The target problems are extremely large, and hence explicit computation and storage of the global matrices is avoided. Instead, the implementation of the problem is matrix-free, which means that only routines are supplied for performing the matrix-vector multiplications  $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}$ , and  $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}$ , and the matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , and  $\mathbf{C}$  are not explicitly available.

Clearly, the solution methods should satisfy the restrictions imposed by the above choices, which implies that the solution methods should only address the matrices for performing matrix-vector multiplications. This means, for example, that methods based on the *QR* decomposition are not appropriate for solving these large scale problems. Moreover, only the first modes with the smallest frequencies are of interest in the context of thermoacoustic instabilities. The objective of this paper is thus to assess the efficiency of matrix-free methods to compute a few frequencies and associated modes of quadratic eigenvalue problems. In this context, iterative subspace methods are the appropriate methods to consider. We will consider two of these methods.

2.2. The Arnoldi method - AR

The first method that we consider is the Arnoldi method [5]. AR constructs eigenvalue approximation for the standard eigenvalue problem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \omega\mathbf{x}$$

by computing an orthonormal set of basis vectors  $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \cdots \mathbf{q}_k$  for the Krylov subspace

$$K_k(\mathbf{A}; \mathbf{q}_1) = \text{span}\{\mathbf{q}_1, \mathbf{A}\mathbf{q}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{q}_1\}$$

using the recurrence relation

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k\mathbf{H}_k + h_{k+1,k}\mathbf{q}_{k+1}\mathbf{e}_k^T. \tag{2}$$

Here,  $\mathbf{Q}_k = [\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \cdots \mathbf{q}_k]$  and  $\mathbf{e}_k$  is the  $k$ -th canonical basis vector in  $\mathbb{R}^k$ . Approximate eigenvectors  $\mathbf{u}$  are constructed as linear combinations of the vectors  $\mathbf{q}_j$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}_k\mathbf{y},$$

and the weights  $\mathbf{y}$  in this linear combination are computed by imposing the Galerkin condition

$$\mathbf{Q}_k^*\mathbf{A}\mathbf{Q}_k\mathbf{y} = \theta\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{H}_k\mathbf{y} = \theta\mathbf{y}.$$

Note that the matrix  $\mathbf{H}_k$  is computed as a side result of the Arnoldi relation. The Ritz value  $\theta$  is an approximation for the eigenvalue  $\omega$ .

Unfortunately, quadratic eigenvalue problems can not be handled directly by AR. We therefore first rewrite the quadratic problem into an equivalent standard eigenvalue problem of size  $2N$  [7], for example

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_\omega \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_\omega \end{bmatrix} = 0, \tag{3}$$

where  $\mathbf{I}$  is the unit matrix of size  $N$ . Note that  $\mathbf{P}_\omega = \omega\mathbf{P}$ . We can then solve this system with the AR algorithm.

The exterior eigenvalues, which are the eigenvalues at the extremes of the spectrum, tend to converge fastest and are generally speaking easiest to find with AR. Unfortunately, the eigenvalues we are interested, the ones close to zero, are interior eigenvalues of (3). A standard technique to find interior eigenvalues is to apply AR to the shifted and inverted problem

$$(\mathbf{M} - \sigma\mathbf{I})^{-1}\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$$

where  $\sigma$  is a shift near the eigenvalues of interest and  $\mathbf{M}$  the block matrix in eq. (3). The eigenvalues  $\omega$  of the original problem can then be computed by  $\omega = \sigma + 1/\mu$ . The  $\omega$  near the shift are mapped to exterior eigenvalues  $\mu$  of the shifted and inverted problem and convergence to them is often fast. Unfortunately, in a matrix-free context it is hard to apply this technique, since the matrix  $\mathbf{A}$  is not explicitly available. Solving the shift-and-invert systems can therefore only be performed with an iterative technique like GMRES. Unfortunately these systems are very ill conditioned if the shift is close to an eigenvalue, which results in extremely slow convergence of GMRES. Moreover, it is not clear how to construct a good preconditioner to speed-up the convergence of GMRES if  $\mathbf{A}$  is not explicitly known. Finally, the shift-and-invert systems should be solved to a high enough accuracy not to disturb the Arnoldi relation (2), which would result in inaccurate eigenvalue approximations. In view of these drawbacks we have chosen to apply the standard AR-method, without shift-and-invert technique. We use the state-of-the-art ARPACK code of Sorensen and Lehoucq [6], which implements Arnoldi with implicit restarts to limit memory requirements and to compress the information of the desired eigenvectors into a small subspace.

*2.3. The Jacobi-Davidson method -JD*

The Jacobi-Davidson method [8] was originally proposed as a method for solving the standard eigenvalue problem. It was quickly realized that JD could easily be extended for solving polynomial eigenvalue problems [9]. The potential of the method for quadratic eigenvalue problems was shown in [11, 10].

The JD-method is, like AR, a subspace method. Hence the same two key ingredients can be recognized: the construction of a suitable expansion vector for the basis of the subspace (or search space), and the computation of eigenvalue approximations. JD computes basis vectors for the subspace by solving the so called correction equation, which is given by

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{w} \mathbf{u}^*}{\mathbf{u}^* \mathbf{w}}\right) (\mathbf{A} + \theta \mathbf{B} + \theta^2 \mathbf{C}) (\mathbf{I} - \mathbf{u} \mathbf{u}^*) \mathbf{t} = -\mathbf{r} .$$

In this equation  $\mathbf{u}$  is the latest approximation to the desired eigenvector,  $\theta$  the corresponding eigenvalue approximation and the vector  $\mathbf{w}$  is given by

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{u} + 2\theta\mathbf{C}\mathbf{u} .$$

The residual  $\mathbf{r}$  is given by

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \theta\mathbf{B}\mathbf{u} + \theta^2\mathbf{C}\mathbf{u} . \tag{4}$$

The solution  $\mathbf{t}$  of the correction equation is orthogonalized with respect to the basis vectors of the search space which gives a new basis vector  $\mathbf{q}_k$ , where  $k$  denotes the iteration number. As in AR all basis vectors of the subspace are collected in a matrix  $\mathbf{Q}_k = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_k]$ , and approximate eigenvectors are constructed as linear combinations of the basis vectors  $\mathbf{u} = \mathbf{Q}_k \mathbf{y}$ . The idea behind solving the correction equation in JD is analogous the shift-and-invert idea in AR: to find expansions to the subspace that contain a large component in the direction of the wanted eigenvector. However, in JD solutions of the correction equation are sought in the space orthogonal to the latest eigenvector approximation which means that if the corresponding eigenvalue approximation  $\theta$  is close to a real eigenvalue, the system is still well conditioned.

New eigenvalue approximations are computed by imposing the Galerkin condition that the residual has to be orthogonal to the search space, which yields

$$\theta^2 \mathbf{Q}^* \mathbf{C} \mathbf{Q} \mathbf{y} + \theta \mathbf{Q}^* \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{y} + \mathbf{Q}^* \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = 0 . \tag{5}$$

This projected system is computed explicitly in JD, this in contrast to AR where the projected matrix  $\mathbf{H}$  is a by-product of the Arnoldi relation (2). The disadvantage of the JD approach is that the computation of the projected system is more costly. The advantage, on the other hand is that no matter what  $\mathbf{Q}$  is, the above relation is always consistent with (4), and hence only low-accurate solutions to the correction equations can be used as basis vectors for the search space. In practice, approximate solutions of the correction equation are computed by performing a few GMRES iterations.

It can be shown that JD is closely related to Newton's method, and if the correction equation is solved sufficiently accurately, convergence to the eigenpairs is quadratic.

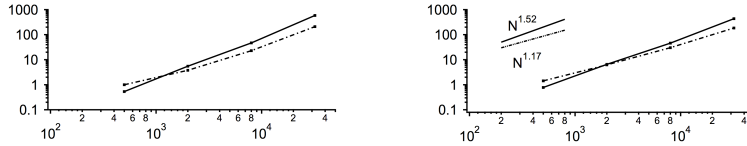


Figure 1. Scaled running times required by the AR (—) and JD (----) methods as a function of the size of the EVP. **left:** 2D case, **right:** 3D case.

3. NUMERICAL EXPERIMENTS

3.1. Test cases

Two and three dimensional model problems of increasing size are considered to compare the efficiency of the different methods. Both 2D and 3D cavities (corresponding to the domain  $0 < x < L_x, 0 < y < L_y$  and  $0 < z < L_z$  for the 3D case, with  $L_z \rightarrow \infty$  in 2D), acoustically open at the boundary  $x = L_x$  are considered in this section. For numerical applications,  $L_x = 1, L_y = 0.2, L_z = 0.1$  and the impedance is set to  $Z_0 = -1.6 - 1.2j$ .

Using a method of separation of variables, the analytical solution can be obtained and the corresponding dispersion relation in  $k = \omega/c_0$  is

$$e^{2jk_x L_x} \left(k_x - \frac{k}{Z_0}\right) - \left(k_x + \frac{k}{Z_0}\right) = 0, \quad k_x = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2 - \left(\frac{n_z \pi}{L_z}\right)^2}, \quad (n_y, n_z) \in \mathbb{N}^2$$

for the 3D case ( $n_z = 0$  in 2D). All the computations discussed in this paper have been validated by comparing the computed eigenvalues to the theoretical values from these (implicit) dispersion relations. Note that the eigenvalues are complex valued. Uniform, finite element meshes with linear elements (triangles in 2D, tetrahedras in 3D) have been used to generate quadratic EVPs with 500, 2000, 8000 and 32000 degrees of freedom. In the following we will refer to these EVPs as 2D-500, 2D-2000, ..., 3D-8000, 3D-32000.

3.2. Results

The stopping criterion is imposed to make a fair comparison. For AR an eigenvalue is considered converged if  $\|r_{AR}\| < tol\|\omega\|$  and if  $\|r_{JD}\| < tol\|\omega\|\sqrt{1 + \|\omega\|^2}$  for JD. The running times required by the AR and JD methods to obtain the 10 smallest eigenvalues are plotted in figure 1 as a function of  $N$ , the number of nodes of the finite element mesh used to discretize the EVP. The running time is scaled by the amount of time required by the JD algorithm for the case 2D-500, viz. 1.3 s. The JD method is more efficient than AR, certainly because it solves directly the quadratic problem while the linearised problem, eq. (3), is solved by AR. Note also the running time increases faster for AR than for JD; for the 3D case, the CPU time increasing roughly as  $N^{1.52}$  for AR and only  $N^{1.17}$  for JD. Figure 2 displays the scaled running times as a function of the number of eigenpairs required for the 8000-nodes cases. The scaling factor is the computing time required by the JD method to compute 1 eigenpair of the 2D-8000 case, viz. 6.41 s with the processor used. As for figure 1, JD is globally more efficient than AR, especially when a small number of eigenpairs is sought for. Eventually, figure 3 displays the scaled running times as a function of the subspace dimension for the 8000-nodes meshes. The scaling factor corresponds to JD applied to the 2D case with a subspace dimension equal to 90 and for computing 10

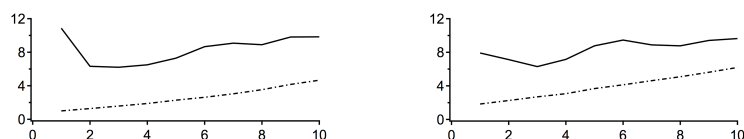


Figure 2. Scaled running times required by the AR (—) and JD (----) methods as a function of the number of eigenpairs required. **left:** 2D-8000 case, **right:** 3D-8000 case.

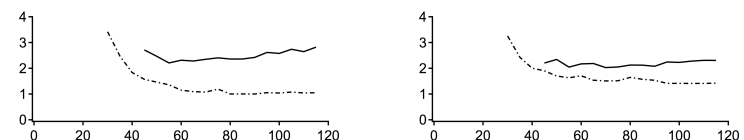


Figure 3. Scaled running times required by the AR (—) and JD (----) methods as a function of the dimension of the search subspace. **left:** 2D-8000 case, **right:** 3D-8000 case.

eigenpairs, viz. 27.78 s. A nice result is that both methods are insensitive to this parameter.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge S. Gratton for many fruitful discussions and the French national computing center, Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur, for giving access to computer resources.

REFERENCES

1. Lieuwen T, Yang V. *Combustion instabilities in gas turbine engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms, and modeling*. In Progress in Astronautics and Aeronautics, vol 210. Wiley: Chichester, 1998.
2. Poinso T, Veynante D. *Theoretical and numerical combustion*. Edwards, 2001.
3. Nicoud F, Benoit L, Sensiau C, Poinso T. Computation of 3D thermo-acoustic modes in combustors with complex impedances and multi-dimensional active flames. *AIAA Journal* 2007; **45**(2):426–441.
4. Benoit L, Nicoud F. Numerical assessment of thermo-acoustic instabilities in gas turbines. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2005; **47**(8-9):849–855.
5. Arnoldi WE. The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenproblem. *Quart. Appl. Math.* 1951; **9**:17–29.
6. Lehoucq RB, Sorensen DC, Yang C. *ARPACK Users' Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. SIAM 1998.
7. Tisseur F, Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Review* 2001; **43**(2):235–286.
8. Sleijpen GLG, and van der Vorst HA. A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1996; **17**:401–425.
9. Sleijpen GLG, Booten JGL, Fokkema DR, and van der Vorst HA, Jacobi-Davidson type methods for generalized eigenproblems and polynomial eigenproblems. *BIT* 1996; **36**:595–633.
10. Van Gijzen MB. The parallel computation of the smallest eigenpair of an acoustic problem with damping. *International journal for numerical methods in engineering* 1999; **45**: 765–777.
11. Sleijpen GLG, Van der Vorst HA, and Van Gijzen MB. Quadratic eigenproblems are no problem. *SIAM News* **29**(7).

## Acoustic Modes in Combustors with Complex Impedances and Multidimensional Active Flames

F. Nicoud\*

*University Montpellier II, 34095 Montpellier, France*

L. Benoit<sup>†</sup> and C. Sensiau<sup>†</sup>

*Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique,  
31057 Toulouse, France*

and

T. Poinso<sup>‡</sup>

*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, 31400 Toulouse, France*

DOI: 10.2514/1.24933

This paper presents a method for computing the thermoacoustic modes in combustors. In the case of a nonisothermal reacting medium, the wave equation for the pressure fluctuations contains a forcing term related to the unsteady heat release. Depending on the phase relationship between the acoustics and the flame, certain linear modes may become unstable, leading to thermoacoustic instabilities. The relevant Helmholtz equation is derived and two approaches for solving the corresponding nonlinear eigenvalue problem are proposed. The first one is based on an asymptotic expansion of the solution, the baseline being the acoustic modes and frequencies for a steady (or passive) flame and appropriate boundary conditions. This method allows a quick assessment of any acoustic mode stability but is valid only for cases where the coupling between the flame and the acoustic waves is small in amplitude. The second approach is based on an iterative algorithm where a quadratic eigenvalue problem is solved at each subiteration. It is more central processing unit demanding but remains valid even in cases where the response of the flame to acoustic perturbations is large. Frequency-dependent boundary impedances are accounted for in both cases. A parallel implementation of the Arnoldi iterative method is used to solve the large eigenvalue problem that arises from the space discretization of the Helmholtz equation. Several academic and industrial test cases are considered to illustrate the potential of the method.

### Nomenclature

$A, C$	= square sparse matrices of size $N$ which do not depend on $\omega$	$\hat{\mathcal{L}}_n$	= linear mapping from $\mathbb{C}^3$ to $\mathbb{C}$
$A, B, C, D$	= square sparse matrices of size $N$ which do not depend on $\omega$	$M$	= Mach number
$a, b$	= real and imaginary parts of the reduced impedance $Z$	$m$	= mode index
$B, R$	= square sparse matrices of size $N$ which depend on $\omega$	$N$	= size of the nonlinear eigenvalue problem, $N = N_v - N_d$
$C_p$	= heat capacity per mass unit at fixed pressure	$N_d$	= number of vertices on $\partial\Omega_D$
$C_v$	= heat capacity per mass unit at fixed volume	$N_v$	= number of vertices in the unstructured mesh describing $\Omega$
$c$	= speed of sound	$n$	= interaction index
$f$	= frequency	$\mathbf{n}_{BC}$	= outward unit vector normal to the boundary
$\Im(z)$	= imaginary part of the complex valued quantity $z$	$\mathbf{n}_{ref}$	= reference unit vector
$i$	= imaginary complex number $\sqrt{-1}$	$n_u$	= field of interaction index
$k$	= wave number $\omega/c_0$	$\mathbf{P}$	= complex valued column vector of size $N$
$k_y$	= wave number associated to the $y$ direction, $k_y = \sqrt{k^2 - (m\pi/4L)^2}$ , $m \in \mathbb{N}$	$p$	= static pressure
$L, h$	= length and height of the two-dimensional computational domain	$q$	= heat release per unit volume
$L_a$	= characteristic length scale of the acoustic perturbations	$q_{tot}$	= volume averaged heat release (scaling purpose)
$L_f$	= characteristic length scale of the turbulent flame	$\Re(z)$	= real part of the complex valued quantity $z$
$\hat{\mathcal{L}}_p$	= linear mapping from $\mathbb{C}$ to $\mathbb{C}$	$r$	= heat capacities difference $C_p - C_v$
		$S_{ref}$	= area of the burner mouth at the reference position
		$S_v$	= set of vertices of the mesh which do not belong to $\partial\Omega_D$
		$S_\Omega$	= set of all the tetrahedral elements in the mesh
		$s$	= entropy per mass unit
		$t$	= time
		$U_{bulk}$	= bulk velocity of the burner (scaling purpose)
		$\mathbf{u}$	= velocity vector
		$\mathbf{x}$	= position vector
		$x_f$	= infinitely thin premixed flame position
		$Z$	= complex impedance
		$Z_0, Z_1, Z_2$	= complex valued constants
		$\gamma$	= adiabatic coefficient $C_p/C_v$
		$\delta_f$	= effective one-dimensional premixed flame thickness
		$\partial\Omega$	= boundary of the computational domain
		$\partial\Omega_D$	= subset of the boundary where $\hat{p} = 0$

Received 3 May 2006; revision received 14 October 2006; accepted for publication 19 October 2006. Copyright © 2006 by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. All rights reserved. Copies of this paper may be made for personal or internal use, on condition that the copier pay the \$10.00 per-copy fee to the Copyright Clearance Center, Inc., 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923; include the code \$10.00 in correspondence with the CCC.

\*Professor; nicoud@math.univ-montp2.fr.

<sup>†</sup>Ph.D. Student.

<sup>‡</sup>Research Director. AIAA Associate Fellow.



$\partial\Omega_N$	= subset of the boundary where $\nabla\hat{p} \cdot \mathbf{n}_{BC} = 0$
$\partial\Omega_Z$	= subset of the boundary where the reduced impedance $Z$ is imposed
$\epsilon$	= small parameter of order $p_1/p_0$
$\rho$	= mixture density
$\tau$	= time delay
$\tau_u$	= field of time delay
$\phi_j$	= classical linear by parts form function for all node $v_j$ belonging to $S_i$
$\hat{\phi}$	= complex amplitude of the fluctuating quantity $\phi$
$\Omega$	= computational domain
$\omega$	= angular frequency
$\nabla f$	= spatial gradient of $f$

#### Subscripts

BC	= boundary value
$k, j$	= indices
ref	= reference for the flame model
0	= time-averaged variable or passive-flame mode (asymptotic method)
1	= fluctuating quantity or first order term (asymptotic method)

### I. Introduction

COMBUSTION oscillations are frequently encountered during the development of many combustion chambers for gas turbines [1–4]. To date, these oscillations cannot be predicted at the design stage and correcting actions at later stages proved to be extremely costly. Testing burners in simplified combustion chambers is a common method to verify their stability but is also an ambiguous approach because a given burner can produce unstable combustion in one chamber and not in another. Gas turbine manufacturers have devoted large efforts to handle combustion instabilities issues and a huge amount of expertise has been gathered

by the major companies [5]. Still, the mechanisms are not fully understood yet and predictive methods providing stability analysis at the design level are requested. Table 1 gathers the main characteristics of the methods developed in the past.

A current practice is to model the geometry of the combustor by a network of homogeneous (constant density) one- or two-dimensional axisymmetric acoustic elements where the acoustic problem can be solved [4,7,8] analytically. The flame is supposed infinitely thin and only appears at interfaces between the low and large temperature segments. Jump relations are used to connect all these elements, enforcing pressure continuity and flow rate conservation. The amplitudes of the forward and backward acoustic waves in each segment are determined so that all the jump relations and the boundary conditions are satisfied. This can only be achieved for a discrete set of pulsations  $\omega$  which are the roots of a dispersion relation in the complex plane. The main advantage of this approach is that it allows to describe a complex system with a few lumped elements only, leading to a very low order model that can be extensively used for predesign purpose. Extension to azimuthal modes [9,10] and 1.5-dimensional networks [11] have been proposed recently. The main drawback of this type of approach is that the geometrical details of the combustor cannot be accounted for and only the first “equivalent” longitudinal or orthoradial modes are sought for.

An alternative is to perform large eddy simulations (LES) which are well suited to study the dynamics of turbulent flames (see recent books on turbulent combustion [4,28]). Multiple recent papers have demonstrated the power of these methods [12–20]. However, an important limitation of LES is its cost: the intrinsic nature of LES (full three-dimensional resolution of the unsteady Navier–Stokes equations) makes it very expensive, even on today’s computers. Moreover, even when they confirm that a combustor is unstable, LES does not say why and how to control it. Therefore, tools are needed to analyze LES results and to provide capacities for optimization and control of thermoacoustic oscillations in chambers.

**Table 1 Computational methods for predicting acoustic modes in combustors**

<i>Networks of lumped elements</i>	
Solved variables	wave amplitudes in each element and associated frequency
Advantages	1) complex valued boundary impedances 2) parametric studies 3) possible extension to azimuthal modes
Drawbacks	1) no geometrical details 2) assumes modes shape
Key references	Lieuwen and Zinn [6], Poinot and Veynante [4], Stow and Dowling [7], Polifke et al. [8], Evesque and Polifke [9], Evesque et al. [10], Benoit [11]
<i>Direct method: LES</i>	
Solved variable	spatiotemporal evolution of all flow quantities
Advantages	accounts for nonlinear interactions
Drawbacks	1) highly CPU demanding 2) only the most amplified mode can be studied in details 3) complex boundary impedances difficult to handle
Key references	Murota and Ohtsuka [12], Desjardins and Frankel [13], Angelberger et al. [14], Carraeni et al. [15], Colin et al. [16], Pitsch and Duchamp de la Geneste [17], Huang and Yang [18], Pierce and Moin [19], Selle et al. [20]
<i>Equations for fluctuations in physical space</i>	
Solved variables	spatiotemporal evolution of fluctuating quantities
Advantages	1) intuitive 2) possible extension to limit cycle
Drawbacks	1) only the most amplified mode can be studied in detail 2) complex boundary impedances difficult to handle
Key references	Pankiewicz and Sattelmayer [21]
<i>Equations for fluctuations in frequency space</i>	
Solved variables	complex amplitude of harmonic fluctuations and associated frequency
Advantages	1) several modes computed 2) handle complex valued boundary impedances
Drawbacks	1) no possible nonlinear extension 2) nonlinear eigenvalue problem
Key references	Culick [22], Krebs et al. [23], Schuermans et al. [24,25], Martin et al. [26], Selle et al. [27], present paper

A set of linear transport equations for the perturbations of velocity, temperature, and density can be derived by linearizing the Navier–Stokes equations [29,30]. The local unsteady heat release appears as a forcing term in the linearized energy equation and is responsible for combustion noise and thermoacoustic instabilities. Assuming that an appropriate model for the unsteady heat release is available, the system of linear partial differential equations for the fluctuating quantities is closed and can be solved. The most natural way to proceed is then to use a finite element based method to discretize and solve it in physical space [21]. Starting from initial random fields of pressure, velocity, and density or temperature, each partial differential equation (PDE) is solved in the time domain, discretizing the time derivatives by a Runge–Kutta algorithm. Depending on the coupling between the flame and acoustics, especially the phase between the pressure and heat release fluctuations, some modes present in the initial fields can be amplified and grow exponentially. After a while, the fluctuations are dominated by the most amplified one (or the less damped one if the flame/acoustics coupling stabilizes all the fluctuations) and it is possible to examine the spatial structure, frequency of oscillation, and growing factor of this particular thermoacoustic mode. This intuitive approach provides a natural way to account for the coupling with the flame as well as nonlinear saturation effects [21]. However, accounting for frequency-dependent impedances at boundaries is not straightforward when performing the time domain integration. Moreover, from an engineering point of view, it is certainly not very convenient to gain knowledge only about the most unstable modes: experience shows that several modes are most often present or at least dangerous when thermoacoustic instabilities appear.

A proper framework to analyze combustion stability is the wave equation in a reacting flow [4]. A natural way of gaining information about the whole set of thermoacoustic modes is then to consider the Helmholtz equation, the frequency domain version of the wave equation. This equation can be derived by combining the linearized version of the equation of state with the set of linear PDEs for each of the fluctuating quantities. Under the low-Mach number assumption for the mean velocity field, an approximate equation controlling the propagation of pressure perturbations in a reacting flow is then obtained and, considering the associated Helmholtz equation, the initial value problem in the physical domain is transformed into an eigenvalue problem. The shape of the thermoacoustic modes is related to the eigenfunctions and their frequency and growing rate are determined by the eigenvalues. In the case of classical acoustics in a homogeneous nonreacting medium, finite element based methods are often used to perform the spatial discretization and transform the Helmholtz equation into a finite-dimension eigenvalue problem (COMSOL multiphysics; <http://www.comsol.com>). When combustion occurs, the flame/acoustic coupling term makes the eigenvalue problem nonlinear with respect to the pulsation of the mode and classical methods cannot be applied to solve the Helmholtz equation. The “linear Galerkin” method proposed by Culick [22] consists in writing the solution of the thermoacoustic problem as a linear combination of the acoustic modes of the homogeneous (without combustion forcing) Helmholtz equation. Assuming that 1) the eigenvectors of the homogeneous wave equation form an orthogonal basis of the linear space of such square integrable functions defined over the flow domain, and 2) the effect of the flame coupling is to slightly perturb the acoustic modes, Culick showed that one can assess the frequency shift induced by the unsteady heat release. The stability of the modes is then obtained by studying the sign of the imaginary part of the frequency shift. This method suffers from two major drawbacks related to the preceding two assumptions. Assumption 1 is in fact only valid for particular choices of the boundary impedance [11] (see Appendix B for more details). Classical examples of such boundary conditions are pressure imposed outlet and impermeable wall. However, in the case of a general complex boundary impedance, this condition is not fulfilled and the Galerkin method can hardly be generalized. Assumption 2 is only valid when the amplitude of the flame response to acoustic perturbations is small. However, considering the limiting case of

small frequency oscillations, it can be shown that this assumption is most likely not valid for practical cases [31].

In this paper, two methods to solve the thermoacoustic problem written in the frequency space are described in Sec. IV. The first one is based on an asymptotic expansion of the solution around the passive flame case and still requires assumption 2 but not assumption 1. The second is based on an iterative algorithm and is valid even if neither assumption 1 nor 2 is fulfilled. The basic hypotheses are first recalled in Sec. II where the derivation of the inhomogeneous Helmholtz equation is also given. The spatial discretization and linear algebra method are then described in Sec. III, whereas basic academic test cases are considered in Sec. V. Typical results obtained in the case of an industrial annular combustor are also described to illustrate the three-dimensional capabilities of the method.

## II. Basic Assumptions and Equations

### A. Basic Equations

To simplify the derivation, we will consider a gas mixture where all species share the same molar weight and heat capacity. This assumption is not necessary to derive the generalized acoustic wave equation although it makes the algebra simpler. It is valid for air flames but must be revisited for the case of  $H_2 - O_2$  mixtures, for example. A direct consequence is that the heat capacities difference is constant even if  $C_p$ ,  $C_v$ , and  $\gamma$  may depend on temperature. Viscous terms (molecular diffusion of momentum and heat) will also be neglected in the present analysis as it is usual for the analysis of low frequency acoustic perturbations.

Under the preceding assumptions, the mass, momentum, and entropy equations read, respectively,

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p \quad (2)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{r q}{p} \quad (3)$$

Together with the state equation and entropy expression

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad \text{and} \quad s - s_{st} = \int_{T_{st}}^T \frac{C_p(T')}{T'} dT' - r \ln \left( \frac{p}{p_{st}} \right) \quad (4)$$

these transport equations describe the spatiotemporal evolutions of all relevant physical flow quantities.

Equations (1–4) can be linearized by considering the simple case of large scale small amplitude fluctuations (index 1) superimposed to a zero Mach number mean flow (index 0) which depends only on space. The instantaneous pressure, density, temperature, entropy, and velocity fields can then be written as  $p = p_0 + p_1$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ ,  $s = s_0 + s_1$ , and  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ , where the quantities  $p_1/p_0$ ,  $\rho_1/\rho_0$ ,  $T_1/T_0$ ,  $s_1/s_0$ , and  $\sqrt{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}/c_0$  are of order  $\epsilon$ , where  $\epsilon \ll 1$  and  $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$  is the mean speed of sound. For simplicity, the temporal fluctuations of the heat capacities are neglected. The zero Mach number assumption ( $\mathbf{u}_0 \simeq \mathbf{0}$ ) is valid as soon as the characteristic Mach number  $M = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0}/c_0$  of the mean flow is small compared with  $L_f/L_a$  where  $L_f$  is the thickness of the reaction zone and  $L_a$  is the typical acoustic wavelength (see Appendix A for more details). This result makes the approximation  $M \simeq 0$  reasonable for many applications. Moreover, the zero Mach number assumption implies that  $\nabla p_0 = 0$  [from Eq. (2)] and  $q_0 = 0$  [from Eq. (3)], the latter condition being acceptable because only the fluctuating quantities are of interest in the present analysis. Finally, this assumption implies that the approximation  $D/Dt \approx \partial/\partial t$  holds for any fluctuating quantity because, with  $\mathbf{u}_0 \simeq \mathbf{0}$ , the nonlinear convective terms are always of second order in  $\epsilon$ .

### B. Linearization

Injecting the preceding expansions for the instantaneous flow quantities into Eqs. (1–4) and keeping only terms of order  $\epsilon$ , one obtains the following set of linear equations for the fluctuating quantities  $\rho_1$ ,  $\mathbf{u}_1$ ,  $s_1$ , and  $p_1$ :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla s_0 = \frac{r q_1}{p_0} \quad (7)$$

The linearized state equation and entropy expression are

$$\frac{p_1}{p_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{T_1}{T_0} = 0 \quad \text{and} \quad s_1 = C_p \frac{T_1}{T_0} - r \frac{p_1}{p_0} \quad (8)$$

Equation (7) shows that the fluctuating flow is not isentropic as soon as either 1) the mean entropy gradient  $\nabla s_0$  is not orthogonal to the velocity fluctuations; or 2) the heat release has an unsteady component  $q_1 \neq 0$ . In practical applications, the geometry of the flow domain is fully three-dimensional and highly complex so that the first condition is most probably matched as soon as  $\nabla s_0 \neq 0$ . Under the zero Mach number assumption, the mean pressure gradient is null and from Eq. (4), the mean entropy gradient is approximately (neglecting the gradient of  $C_p$  and  $C_v$ )  $\nabla s_0 \simeq -C_p \nabla \rho_0 / \rho_0 = C_p \nabla T_0 / T_0$ . This shows that the  $\mathbf{u}_1 \cdot \nabla s_0$  term in Eq. (7) is nonzero in the reacting zone, even if there is no heat release, viz.,  $q_1 = 0$  (*passive* or *steady* flame). The right-hand side (RHS) term of the same equation is nonzero only if the flame has an unsteady behavior (*active* or *unsteady* flame). To close the set of Eqs. (5–8), a model must be used to express the unsteady heat release  $q_1$  in terms of the other fluctuating quantities.

### C. Flame Response

Modeling the unsteady behavior of the flame is the most challenging part in the description of thermoacoustic instabilities [32]. Several models have been proposed in the past to describe the response of conic or V-shape laminar flames [33], accounting for nonlinear saturation effects [34] and equivalence ratio fluctuations [35,36]. Most models available so far (if not all of them) describe the global (integrated over space) heat released in the whole flame zone. For premixed flames, the most natural way to proceed is to relate this global quantity to the acoustic velocity in the cold gas region upstream of the flame region. The idea behind this modeling approach is that heat release depends on the flame surface which, the flame speed being given, is mainly controlled by the fresh gas flow rate. The most classical model follows seminal ideas by Crocco [37,38] and is referred to as the  $n - \tau$  model. This is essentially a one-dimensional formulation which stipulates that the global heat release at time  $t$  is proportional to a time-lagged version of the acoustic velocity at a reference upstream position, usually taken at the burner mouth:

$$Q(t) = \int_{\Omega} q_1(t) d\Omega = S_{\text{ref}} \frac{\gamma p_0}{\gamma - 1} \times n \times u_1(x_{\text{ref}}, t - \tau) \quad (9)$$

In this expression,  $Q(t)$  is the heat release integrated over the flow domain,  $u_1$  denotes the velocity component along the direction  $x$  of the main flow which feeds the flame, the interaction index controls the amplitude of the flame response to acoustic perturbations, and the time delay is between the acoustic perturbation and the response of the flame. This latter parameter controls the phase between the acoustic pressure and the unsteady heat release in the flame zone, and thus the value of the Rayleigh index

$$\mathcal{R} = \int_{\tau} \int_{\Omega} p_1 q_1 d\Omega dt \quad (10)$$

According to the classical Rayleigh criterion, flame/acoustics coupling promotes the appearance of instabilities in cases where  $\mathcal{R} > 0$ , showing the importance of the parameter  $\tau$  in the description and prediction of thermoacoustic instabilities.

Models for the global response of the flame are only justified for acoustically compact flames, viz., cases where the typical length of the flame region is small compared with the characteristic acoustic wavelength. This condition is not always matched for modern combustors with high efficiency. It is then natural to use a local flame model which would relate the local unsteady heat release to a reference acoustic velocity in the injector mouth. The natural way to proceed is then to write

$$\frac{q_1(\mathbf{x}, t)}{q_{\text{tot}}} = n_u(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{u}_1[\mathbf{x}_{\text{ref}}, t - \tau_u(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}}}{U_{\text{bulk}}} \quad (11)$$

The scaling by the total heat release and the bulk velocity have been used to make sure that  $n_u(\mathbf{x})$  has no dimension. Obviously, this modeling approach allows more degrees of freedom than any global model to represent the actual response of a typical industrial flame (two fields of parameters instead of two real numbers). However, large amounts of local data are required to tune this kind of model and for obvious technological reasons, these data can hardly be obtained experimentally. The alternative is then to use compressible reacting LES to investigate the response of a turbulent flame submitted to acoustic perturbations. By performing a spectral analysis of the unsteady fields of heat release and velocity, it is then possible to determine the optimal parameter fields  $n_u(\mathbf{x})$  and  $\tau_u(\mathbf{x})$  to match the actual flame response by using Eq. (11) [39,40].

Using the local flame model given in Eq. (11), Eq. (7) can then be rewritten as

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla s_0 = \frac{r}{p_0} \frac{q_{\text{tot}}}{U_{\text{bulk}}} n_u(\mathbf{x}) \mathbf{u}_1[\mathbf{x}_{\text{ref}}, t - \tau_u(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} \quad (12)$$

and the set of Eqs. (5), (6), (8), and (12) can be solved to determine the thermoacoustic properties of the system.

### D. Wave Equation

Taking the time derivative of Eq. (5), adding the divergence of Eq. (6) over  $\rho_0$  and using Eqs. (7) and (8) to eliminate  $\rho_1$  yields the following wave equation for the pressure fluctuations  $p_1$ :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) - \frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \frac{\partial q_1}{\partial t} \quad (13)$$

If the zero Mach number assumption is not made, it is not possible to manipulate the set of Eqs. (5–8) to obtain a scalar wave equation. It is then necessary to consider the original set of equations, either written in the time domain or in the frequency space, to solve the thermoacoustic problem. Note also that no assumption has been made about the spatial evolution of the isentropic coefficient  $\gamma$  to derive Eq. (13). If  $\gamma$  is constant over space, one recovers the classical equation for inhomogeneous medium with the elliptic term being  $\nabla \cdot (c_0^2 \nabla p_1)$ .

Equation (13) being linear, it is natural to introduce harmonic variations at frequency  $f = \omega / (2\pi)$  for pressure, velocity, and local heat release perturbations:

$$p_1 = \Re[\hat{p}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)], \quad \mathbf{u}_1 = \Re[\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)] \quad (14)$$

$$q_1 = \Re[\hat{q}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)]$$

Introducing Eq. (14) into Eq. (13) leads to the following Helmholtz equation:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p} \right) + \frac{\omega^2}{\gamma p_0} \hat{p} = i\omega \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \hat{q}(\mathbf{x}) \quad (15)$$

where  $\rho_0$  and  $\gamma$  depend on the space variable  $\mathbf{x}$  and the unknown quantities are the complex amplitude  $\hat{p}(\mathbf{x})$  of the pressure oscillation at pulsation  $\omega$ . In the frequency space, the zero Mach number assumption induces  $i\omega\hat{\mathbf{u}} = \nabla\hat{p}/\rho_0$  and the flame model Eq. (11) translates into

$$\hat{q}(\mathbf{x}) = \frac{q_{\text{tot}}}{i\omega\rho_0(\mathbf{x}_{\text{ref}})U_{\text{bulk}}} n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau_u(\mathbf{x})} \nabla\hat{p}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} \quad (16)$$

Introducing Eq. (16) into Eq. (15) leads to

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p} \right) + \frac{\omega^2}{\gamma p_0} \hat{p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} \frac{q_{\text{tot}}}{\rho_0(\mathbf{x}_{\text{ref}})U_{\text{bulk}}} n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau_u(\mathbf{x})} \nabla\hat{p}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} \quad (17)$$

This paper will focus on the resolution of Eq. (17) but the methodologies developed can be applied to the more general case where the complex amplitude of the heat release is given by

$$\hat{q}(\mathbf{x}) = \hat{\mathcal{L}}_u[\nabla\hat{p}(\mathbf{x})] + \hat{\mathcal{L}}_p[\hat{p}(\mathbf{x})] \quad (18)$$

where the two linear operators are acting on  $\nabla\hat{p}$  and  $\hat{p}$ , respectively. The wave equation for the complex pressure amplitude is then

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p} \right) + \frac{\omega^2}{\gamma p_0} \hat{p} = i\omega \frac{\gamma - 1}{\gamma p_0} [\hat{\mathcal{L}}_u(\nabla\hat{p}) + \hat{\mathcal{L}}_p(\hat{p})] \quad (19)$$

which reduces to Eq. (17) for the particular choice

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_p: \hat{g}(\mathbf{x}) &\mapsto 0 \\ \hat{\mathcal{L}}_u: \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &\mapsto \frac{q_{\text{tot}}}{i\omega\rho_0(\mathbf{x}_{\text{ref}})U_{\text{bulk}}} n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau_u(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} \end{aligned} \quad (20)$$

Of course, the general formulation Eq. (18) has the potential to include more general effects than the local  $n - \tau$  model described by Eqs. (11) and (16). For example, defining  $\hat{\mathcal{L}}_u$  as in Eq. (20) and  $\hat{\mathcal{L}}_p$  as

$$\hat{\mathcal{L}}_p: \hat{g}(\mathbf{x}) \mapsto \frac{q_{\text{tot}}}{i\omega\rho_0} n_p(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau_p(\mathbf{x})} \hat{g}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \quad (21)$$

would allow relating the unsteady heat release to the complete acoustic field at the reference position  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  instead of the velocity field only, consistently with the matrix identification approach for flame modeling [41,42]. In Eq. (21),  $n_p(\mathbf{x})$  and  $\tau_p(\mathbf{x})$  are fields of interaction index and time delay describing the effect of acoustic pressure on the unsteady heat release. Although the effects of the acoustic pressure are often neglected in flame transfer formulations, relating the unsteady heat release to the complete acoustic field (velocity and pressure) is highly desirable for cases where the flame is not compact or when its distance to the injector mouth is not small compared with the acoustic wavelength [43]. Note finally that the fields of interaction index  $n_u(\mathbf{x})$ ,  $n_p(\mathbf{x})$  and time delay  $\tau_u(\mathbf{x})$ ,  $\tau_p(\mathbf{x})$  may also depend on the frequency of the perturbations acting on the flame, although this dependency has not been explicitly written for simplicity.

### E. Boundary Conditions

Denoting the outward unit normal vector to the boundary of the flow domain, three types of boundary conditions are usually used for acoustics:

1) Zero pressure which corresponds to fully reflecting outlets where the outer pressure is imposed strongly to the flow domain, zeroing the pressure fluctuations

$$\hat{p} = 0, \quad \text{on boundary } \partial\Omega_D \quad (22)$$

2) Zero normal velocity, viz.,  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{\text{BC}} = 0$  which corresponds to fully rigid walls or reflecting inlets where the velocity of the incoming flow is imposed, zeroing the velocity fluctuations. Under the zero Mach number assumption, Eq. (6) can be used to rewrite this condition as a Neumann condition for the acoustic pressure

$$\nabla\hat{p} \cdot \mathbf{n}_{\text{BC}} = 0, \quad \text{on boundary } \partial\Omega_N \quad (23)$$

3) Imposed reduced complex impedance  $Z = \hat{p}/\rho_0 c_0 \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{\text{BC}}$ . Under the zero Mach number assumption, this condition can be rewritten as a Robin condition for the acoustic pressure

$$c_0 Z \nabla\hat{p} \cdot \mathbf{n}_{\text{BC}} - i\omega\hat{p} = 0, \quad \text{on boundary } \partial\Omega_Z \quad (24)$$

Associated with the homogeneous boundary conditions (22–24), on  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_Z$ , Eq. (17) defines a nonlinear eigenvalue problem which is the basis of the numerical tool described in the present paper.

### III. Numerical Methods for the Passive Flame Problem

The major difficulty in solving the thermoacoustic problem given in Eqs. (19) or (17) comes from the strong nonlinearity of the RHS term with respect to the pulsation  $\omega$ . As a first step, it is then natural to consider the purely acoustic problem obtained by neglecting the unsteady flame effect. This means taking  $n_u(\mathbf{x}) = n_p(\mathbf{x}) = 0$  (or, more generally,  $\hat{\mathcal{L}}_u = \hat{\mathcal{L}}_p = 0$ ) and finding  $\hat{p}(\mathbf{x})$  and  $\omega$  satisfying

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p} \right) + \frac{\omega^2}{\gamma p_0} \hat{p} = 0 \quad (25)$$

with boundary conditions (22–24). Because complex geometries must be handled properly, a finite element based method is first used to discretize Eq. (25) and obtain a finite-dimension eigenvalue problem which can then be solved by using an appropriate linear algebra method.

#### A. Spatial Discretization

A finite element strategy is used to discretize the exact geometry of the combustor so that no assumption is made a priori regarding the shape of the modes. This feature gives the Helmholtz solver the potential to test the effect of geometrical changes on the stability of the whole system. Denoting the flow domain and its boundary by  $\Omega$  and  $\partial\Omega$ , respectively, let us consider a finite element mesh made of linear elements (two-dimensional triangles, three-dimensional tetrahedra). The mesh consists of  $N_e$  elements  $\Omega_j$  ( $j \in 1, \dots, N_e$ ),  $N_v$  vertices  $v_k$  ( $k \in 1, \dots, N_v$ ) of which  $N_d$  are located on  $\partial\Omega_D$ . Also, for each node  $v_j \in \mathcal{S}_v$ , we denote by  $\phi_j$  the piecewise linear shape function which equals one at node  $v_j$  and zero for all  $v_k \neq j$ . The complex unknown function  $\hat{p}(\mathbf{x})$  is then approximated by

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \sum_{j: v_j \in \mathcal{S}_v} \hat{p}_j \phi_j$$

the homogeneous Dirichlet boundary condition on  $\partial\Omega_D$  being then automatically satisfied. Finding  $\hat{p}(\mathbf{x})$  for every  $\mathbf{x} \in \Omega$  is then equivalent to determine the  $N = N_v - N_d$  complex coefficients  $\hat{p}_j$ . To do so, we follow the classical Galerkin finite element method: start from Eq. (25), replace  $\hat{p}(\mathbf{x})$  by its approximation, multiply by the test function  $\phi_k$ , and integrate over the flow domain to obtain

$$\begin{aligned} \forall k: v_k \in \mathcal{S}_v \\ \int_{\Omega} \phi_k \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \sum_{j: v_j \in \mathcal{S}_v} \hat{p}_j \phi_j \right) \text{d}\mathbf{x} + \omega^2 \int_{\Omega} \frac{\phi_k}{\gamma p_0} \sum_{j: v_j \in \mathcal{S}_v} \hat{p}_j \phi_j \text{d}\mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Integrating the first term by parts, inverting the integration and summation operations, and making use of Eqs. (22–24), one obtains

$$\begin{aligned} \forall k: v_k \in \mathcal{S}_v, \\ - \sum_{j: v_j \in \mathcal{S}_v} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_j \text{d}\mathbf{x} \hat{p}_j + i\omega \sum_{j: v_j \in \mathcal{S}_v} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho_0 c_0 Z} \phi_k \phi_j \text{d}\sigma \hat{p}_j \\ + \omega^2 \sum_{j: v_j \in \mathcal{S}_v} \int_{\Omega} \frac{1}{\gamma p_0} \phi_k \phi_j \text{d}\mathbf{x} \hat{p}_j = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Note that only  $\partial\Omega_Z$  contributes to the boundary term because  $\phi_k(\mathbf{x}) = 0, \forall k: v_k \in \mathcal{S}_v, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_D$ , and because  $\nabla\hat{p} \cdot \mathbf{n}_{BC} = 0$  on  $\partial\Omega_N$ . Introducing the symmetric matrices  $A, B$ , and  $C$  of size  $N$  and of generic element

$$\begin{aligned} A_{kj} &= - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \nabla\phi_k \nabla\phi_j \, d\mathbf{x}, & B_{kj} &= \int_{\partial\Omega_Z} \frac{i}{\rho_0 c_0 Z} \phi_k \phi_j \, d\sigma \\ C_{kj} &= \int_{\Omega} \frac{1}{\gamma p_0} \phi_k \phi_j \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (28)$$

the following discrete form of the acoustic problem defined by Eqs. (22–25) is obtained

$$\mathcal{A}\mathbf{P} + \omega\mathcal{B}\mathbf{P} + \omega^2\mathcal{C}\mathbf{P} = 0 \quad (29)$$

where  $\mathbf{P}$  contains the  $N$  complex coefficients  $\hat{p}_j$ . Note that  $A$  and  $C$  are real matrices whereas  $B$  is complex except in the particular case where the reduced impedance  $Z$  is purely imaginary.

### B. Linear Algebra

In general, the boundary impedance is a function of the pulsation and the matrix  $B$  depends on  $\omega$ . Equation (29) then constitutes a nonlinear eigenvalue problem of size  $N$  which can be formally written as

$$\text{Find } \omega \in \mathbb{C} \text{ and } \mathbf{P} \neq 0 \text{ such that } R(\omega)\mathbf{P} = 0 \quad (30)$$

No general algorithm exists for solving this type of eigenvalue problem except for particular dependencies of the operator  $R$  on  $\omega$ . For example, when  $R$  is polynomial (of degree  $d$ ) in  $\omega$ , the problem (30) can be rewritten as a linear eigenvalue problem of the form  $SQ = \omega Q$  where  $S$  is a matrix of size  $d \times N$  which does not depend on  $\omega$  and  $Q$  is a column vector of length  $d \times N$  whose  $N$  first rows contains  $\mathbf{P}$ .

In the particular cases where  $Z$  does not depend on  $\omega$ , Eq. (29) is a quadratic eigenvalue problem because this equation can be rewritten as  $R(\omega)\mathbf{P} = 0$  where  $R = A + \omega B + \omega^2 C$ . Quadratic eigenvalue problems are rather well known from a theoretical point of view [44]. One efficient way of solving them numerically is to convert them into an equivalent linear problem of size  $2 \times N$ . This can be done, for example, by introducing the new column vector

$$\mathbf{P}_{\omega} = \omega\mathbf{P} \quad (31)$$

and rewriting Eq. (29) as

$$\mathcal{A}\mathbf{P} + \mathcal{B}\mathbf{P}_{\omega} + \omega\mathcal{C}\mathbf{P}_{\omega} = 0 \quad (32)$$

Equations (31) and (32) can then be rewritten under the following matrix form

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_{\omega} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_{\omega} \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

where  $I$  is the unit matrix of size  $N$ . Thus, the solutions  $(\omega, \mathbf{P})$  of the quadratic problem obtained from Eq. (29) when  $B$  is constant can be computed from the linear eigenvalue problem of size  $2 \times N$  defined by Eq. (33).

Several numerical methods can then be used to assess the eigenmodes. Direct methods are exact and have the advantage to provide all the eigenmodes. For example, the  $QR$  algorithm is the most efficient way of producing the Schur decomposition of the matrix defining the linear eigenvalue problem and is the method of choice when the size of the problem is typically less than 1000. Because only the first few frequencies are usually of interest from a physical point of view, it is more appropriate to use an iterative method which can be applied for large problems ( $N > 10^5$ ). For example, Krylov-based algorithms performed a partial Schur decomposition of the matrix of interest and allows the user to focus on a reduced number of eigenvalues. We are using a parallel implementation of the Arnoldi method [45] available in the P-ARPACK library.

Note that the assumption that  $B$  does not depend on  $\omega$  is not necessary for Eq. (29) to define a quadratic eigenvalue problem. Indeed, the matrix  $B$  being multiplied by  $\omega$  in Eq. (29), the problem remains quadratic in  $\omega$  as long as the impedance takes the following form

$$1/Z = 1/Z_0 + Z_1\omega + Z_2/\omega \quad (34)$$

The eigenvalue problem Eq. (29) can be written as

$$\mathcal{A}\mathbf{P} + \omega\mathcal{B}\mathbf{P} + \omega^2\mathcal{C}\mathbf{P} = 0 \quad (35)$$

where  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , and  $\mathcal{C}$  are defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij} &= A_{ij} + \int_{\partial\Omega_Z} \frac{iZ_2}{\rho_0 c_0} \phi_i \phi_j \, d\sigma, & \mathcal{B}_{ij} &= \int_{\partial\Omega_Z} \frac{i}{\rho_0 c_0 Z_0} \phi_i \phi_j \, d\sigma \\ \mathcal{C}_{ij} &= C_{ij} + \int_{\partial\Omega_Z} \frac{iZ_1}{\rho_0 c_0} \phi_i \phi_j \, d\sigma \end{aligned} \quad (36)$$

and do not depend on the pulsation. The linearization process leading to Eq. (33) can then be applied to  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , and  $\mathcal{C}$ , respectively. Eventually, frequency-dependent boundary impedance of the form Eq. (34) can be accounted for by a linear eigenvalue problem of size  $2 \times N$ .

## IV. Accounting for the Active Flame Effect

Solving Eq. (25) as in the preceding section means finding the eigenmodes of the burner, taking into account the presence of the flame through the mean temperature field but neglecting its unsteady effects. The boundary conditions are also accounted for and this approximation can provide relevant information about the shape and real frequency of the first modes of the combustor. However, because there is no coupling between the acoustics and the flame, there is no hope to discriminate between stable and unstable modes, which is the ultimate objective when addressing thermoacoustic problems. The objective of this section is to discuss how the effect of the flame/acoustic coupling can be accounted for. In this case, the appropriate equation is Eq. (17) [or Eq. (19)] instead of Eq. (25).

### A. Asymptotic Method

In this approach [46], the flame is considered as a perturbation of the situation without combustion. Under this assumption, eigenfrequencies and eigenmodes  $(\omega, \hat{p})$  of Eq. (17) are sought as first order expansions of the form

$$\omega = \omega_0 + \nu\omega_1 + O(\nu^2), \quad \hat{p} = \hat{p}_0 + \nu\hat{p}_1 + O(\nu^2) \quad (37)$$

where  $(\omega_0, \hat{p}_0)$  are solutions of the homogeneous eigenvalue problem Eq. (25),  $\nu$  is a small parameter of the problem, and  $O(\nu^2)$  stands for terms of order  $\nu^2$  or higher. The  $\nu$  parameter should be a measurement of the amplitude of the flame response so that the asymptotic analysis naturally retrieves the passive flame results when the flame/acoustic coupling tends to zero. For example in the case of the local  $n - \tau$  model Eq. (16), it is natural to define  $\nu$  as

$$\nu = \int_{\Omega} |n_u(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \quad (38)$$

As suggested by global acoustic energy budgets [4], the eigenmode stability is determined by the whole spatial distribution of the flame and the boundary losses. This means that the asymptotic expansion should not be applied on the local Eq. (17) but on a global balance equation over the domain. Multiplying Eq. (17) by the complex pressure amplitude  $\hat{p}$  and integrating over space, one obtains

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\omega^2}{\gamma P_0} \hat{p}^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma P_0} \frac{q_{\text{tot}}}{\rho_0(\mathbf{x}_{\text{ref}}) U_{\text{bulk}}} n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega \tau_u(\mathbf{x})} \hat{p} \nabla \hat{p}(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} dx \end{aligned} \quad (39)$$

Injecting Eq. (37) into Eq. (39) and keeping only first order terms in  $v$  gives the following equation

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \hat{p}_0 \left[ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla v \hat{p}_1 \right) + \frac{\omega_0^2}{\gamma P_0} v \hat{p}_1 \right] dx = -2v \int_{\Omega} \hat{p}_0^2 \omega_0 dx \\ & + \int_{\Omega} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma P_0} \frac{q_{\text{tot}}}{\rho_0(\mathbf{x}_{\text{ref}}) U_{\text{bulk}}} n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega_0 \tau_u(\mathbf{x})} \hat{p}_0 \nabla \hat{p}_0(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} dx \end{aligned} \quad (40)$$

The left-hand side (LHS) term can be simplified by using a reduction order method [47] in which  $\hat{p}_1 = \hat{p}_0 F_1$ ,  $F_1$  being a function of  $\mathbf{x}$ . Thanks to this relation, the LHS term of Eq. (40) becomes

$$\int_{\Omega} \hat{p}_0 \left[ \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla v \hat{p}_1 \right) + \frac{\omega_0^2}{\gamma P_0} v \hat{p}_1 \right] dx = v \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho_0} \hat{p}_0^2 \nabla F_1 \cdot \mathbf{n}_{\text{BC}} d\sigma \quad (41)$$

which is obviously null on  $\partial\Omega_D$  because  $\hat{p}_0 = 0$ . Moreover, because the eigenmodes with flame  $(\omega, \hat{p})$  and without flame  $(\omega_0, \hat{p}_0)$  satisfy the same boundary conditions, one can show that  $\nabla F_1 \cdot \mathbf{n}_{\text{BC}} = 0$  on  $\partial\Omega_N$  and that the following relation is valid to first order in  $v$  on  $\partial\Omega_Z$ :

$$\nabla F_1 \cdot \mathbf{n}_{\text{BC}} = \frac{i\omega_1}{c_0 Z(\omega_0)} \left( 1 - \frac{1}{Z(\omega_0)} \frac{\partial Z}{\partial \omega}(\omega_0) \right) \quad (42)$$

Introducing this relation in the RHS term of Eq. (41), an expression for the perturbation  $v\omega_1$  can be obtained:

$$v\omega_1 = \frac{q_{\text{tot}}}{\rho_0(\mathbf{x}_{\text{ref}}) U_{\text{bulk}}} \frac{\int_{\Omega} (\gamma - 1) n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega_0 \tau_u(\mathbf{x})} \hat{p}_0 \nabla \hat{p}_0(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} dx}{2\omega_0 \int_{\Omega} \hat{p}_0^2 dx + \int_{\partial\Omega_Z} [i c_0 \hat{p}_0^2 / Z(\omega_0)] \{1 - [1/Z(\omega_0)] (\partial Z / \partial \omega)(\omega_0)\} d\sigma} \quad (43)$$

In the case where the denominator of Eq. (43) is not null, this equation provides a simple way to check whether an eigenmode without combustion  $(\omega_0, \hat{p}_0)$  is made stable [ $\Im(\omega_0 + v\omega_1) < 0$ ] or unstable [ $\Im(\omega_0 + v\omega_1) > 0$ ] by the coupling with the unsteady flame. It generalizes the linear procedure proposed by Culick [22] to cases in which the boundary impedance is finite ( $|Z| \neq \infty$  and  $Z \neq 0$ ). Of course, it is only valid for cases where the amplitude of the flame response is small, viz.,  $v \ll 1$ . Considering the limiting case of small frequency oscillations, it can be shown that this assumption is most likely not valid for practical cases in which the burnt-to-fresh gas temperature ratio is of order three or larger [31]. It is thus desirable to develop a more general method which would remain valid when the amplitude of the flame response is large. Deriving such method is the objective of the next section.

## B. Iterative Method

To handle cases where the amplitude of the flame response is not small, the finite element formalism applied to the preceding Eq. (25) is now extended to Eq. (17) and associated boundary conditions Eqs. (22–24). The LHS of Eq. (17) and boundary terms on  $\partial\Omega_Z$  will give rise to the LHS of Eq. (29) or Eq. (35) under the assumption Eq. (34). Using again the finite element formalism, the RHS term of Eq. (17) can be discretized to give rise to  $\mathcal{D}\mathbf{P}$  where  $\mathcal{D}$  is of size  $N$  whose generic element is

$$\mathcal{D}_{kj} = \int_{\Omega} \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0} \frac{q_{\text{tot}}}{\rho_0(\mathbf{x}_{\text{ref}}) U_{\text{bulk}}} n_u(\mathbf{x}) e^{i\omega \tau_u(\mathbf{x})} \phi_k \nabla \phi_j(\mathbf{x}_{\text{ref}}) \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} dx \quad (44)$$

Note that  $\mathcal{D}$  is neither symmetric nor Hermitian. Eventually, the discretized thermoacoustic problem consists of the following eigenvalue problem of size  $N$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \omega\mathbf{B}\mathbf{P} + \omega^2\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathcal{D}(\omega)\mathbf{P} \quad (45)$$

In general,  $\mathcal{D}$  depends nonlinearly on the pulsation  $\omega$  and no polynomial approximation can be given for this matrix. Indeed, typical models for the unsteady heat release involve a time delay (between a velocity and/or pressure perturbation and the response of the flame) which converts into an exponential term in  $\omega$  in the Fourier space, thus in  $\mathcal{D}$ . As a consequence, the eigenvalue problem given by Eq. (45) can hardly be rewritten as a linear eigenvalue problem of larger dimension as done in the preceding section and the classical linear algebra algorithm cannot be used to solve the problem efficiently. An option is then to use an iterative method to solve Eq. (45), the  $k$ th iteration consisting in solving the quadratic eigenvalue problem in  $\omega_k$  defined as

$$[\mathbf{A} - \mathcal{D}(\omega_{k-1})]\mathbf{P} + \omega_k\mathbf{B}\mathbf{P} + \omega_k^2\mathbf{C}\mathbf{P} = 0 \quad (46)$$

A natural initialization is to set  $\mathcal{D}(\omega_0) = 0$  so that the computation of the modes without flame coupling is in fact the first step of the iteration loop. Usually, only a few (typically less than five) iterations are enough to converge toward the complex pulsation and associated mode. Finally, the algorithm to solve Eq. (45) is formally given by Algorithm 1:

- 1) Find the first few eigenfrequencies  $\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3, \dots$  without flame coupling by solving Eq. (29).
- 2) Select one of these frequencies and call it  $\omega_0$ .
- 3) Set  $\mathcal{D}(\omega_0) = 0$  and  $k = 1$ .

4) Solve Eq. (46).

5) Assess the error  $\eta = |\omega_k - \omega_{k-1}|/|\omega_0|$ .

6) Iterate on  $k$  until  $\eta$  is small enough.

To study the convergence of this algorithm, it is appropriate to consider the following eigenvalue problem  $\mathcal{P}_{\omega}$ :

$$(\mathcal{P}_{\omega}) \quad [\mathbf{A} - \mathcal{D}(\omega)]\mathbf{P} + \Omega\mathbf{B}\mathbf{P} + \Omega^2\mathbf{C}\mathbf{P} = 0 \quad (47)$$

where  $\omega$  is a complex number and  $\Omega$  and  $\mathbf{P}$  are the eigenvalue and eigenvector, respectively. Consider also the operator  $\mathcal{F}$  defined as

$$\mathcal{F}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \omega \mapsto \mathcal{F}(\omega) \quad (48)$$

where  $\mathcal{F}(\omega)$  is the eigenvalue of  $\mathcal{P}_{\omega}$  which minimizes the quantity  $|\mathcal{F}(\omega) - \omega|$ . It is obvious from the definitions of the problem  $\mathcal{P}_{\omega}$  and operator  $\mathcal{F}$  that any complex number  $\omega$  satisfying  $\mathcal{F}(\omega) = \omega$  is an eigenfrequency of the nonlinear eigenvalue problem (45). As a consequence, if Algorithm 1 converges, it provides a solution to the thermoacoustic problem. Besides, thanks to the fixed point theorem, Algorithm 1 converges as soon as  $\mathcal{F}$  is a contracting operator in a neighborhood of  $\omega_0$ . The validity of this condition can hardly be shown in the general case because  $\mathcal{F}$  strongly depends on the flame response through the  $\mathcal{D}$  term in the problem  $\mathcal{P}_{\omega}$  which stems from the discretization of the coupling term. Indeed, the behavior and regularity of the local interaction index  $n_u(\mathbf{x})$  and time delay  $\tau_u(\mathbf{x})$  with respect to both  $\mathbf{x}$  and  $\omega$  are far from understood. The only way to

gain information about this term seems to be postprocess experimental [42] or numerical data [26]. In any case, obtaining general results about the contracting properties of the operator  $\mathcal{F}$  from physical arguments is out of reach of the current understanding of the thermoacoustic instabilities. However, in all the practical cases considered so far [11,26,48], the preceding algorithm proved to be stable and to converge in less than 4-5 iterations, suggesting good contracting properties for  $\mathcal{F}$ .

## V. Numerical Results

The methodologies presented in the preceding sections have been implemented in a three-dimensional finite element based in-house acoustic solver called AVSP. Computations without active flame effects in three-dimensional geometries and fully reflecting boundary conditions were presented in Selle et al. [27], in which the ability of the approach to describe turning modes in a swirled combustor was also established. Computations where the acoustic flame coupling is accounted for in three-dimensional geometries were discussed in Martin et al. [26], showing the potential of the method to discriminate between stable and unstable thermoacoustic modes in a swirled staged combustor. These previous studies were illustrations of the joint use of acoustic and LES solvers to predict thermoacoustic instabilities and understand their connections with hydrodynamic instabilities and acoustic tones. The present paper focuses more on the numerical strategy on which the thermoacoustic solver is based and the objective of this section is to illustrate the potential of the method. The selected test cases include 1) an isothermal two-dimensional domain with various boundary conditions, 2) an anisothermal two-dimensional domain with an active flame and simple boundary conditions, 3) an anisothermal three-dimensional industrial configuration with various boundary conditions, and 4) an anisothermal three-dimensional domain with an active flame and complex valued boundary conditions.

The first two test cases allow a precise comparison of the numerical results with available analytical solutions in cases where one- and two-dimensional modes are subjected to partially reflecting boundary conditions and where one-dimensional modes are coupled to an infinitely thin active flame. The third one illustrates the three-dimensional capabilities of the formulation and the importance of accounting for complex valued boundary impedances. The fourth one is an illustration of acoustic calculations with complex valued impedance and three-dimensional active flame.

### A. Isothermal Academic Calculations

The computational domain is a rectangular cavity of length  $L = 0.4$  m and height  $h = 0.1$  m where the speed of sound is  $c_0 = 450$  m/s (Fig. 1). The unstructured mesh contains 11,367 triangular cells and 5813 nodes and is uniform over the domain. Two sets of boundary conditions are considered in the following subsections.

#### 1. Longitudinal One-Dimensional Modes

Longitudinal modes are considered first. A homogeneous Neumann condition ( $|Z| = +\infty$ ) is imposed at the bottom and top boundaries. The same condition is used at the left boundary whereas a complex impedance ( $Z = a + ib$ ) is imposed at the right side (see Fig. 1). In this case, the problem admits a set of one-dimensional solutions (longitudinal modes).

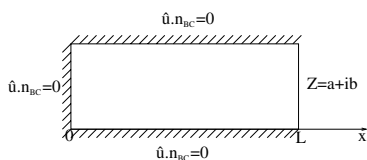


Fig. 1 Computational domain for computing the longitudinal modes of the isothermal two-dimensional domain.

*Frequencies:* Seeking for one-dimensional harmonic solutions, viz.,  $p(x, t) = \Re[\hat{p}(x) \exp(-i\omega t)]$ , the problem can be formulated as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{p} &= 0 \quad \text{with} \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0 \quad \text{for} \quad x = 0 \quad \text{and} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \frac{i\omega}{c_0 Z} \hat{p} &= 0 \quad \text{for} \quad x = L \end{aligned} \quad (49)$$

and the eigenfrequencies are equal to

$$f_m = m \frac{c_0}{2L} + \frac{c_0}{2\pi L} \arctan\left(\frac{-i}{Z}\right), \quad m \in \mathbb{N} \quad (50)$$

In the case where  $Z$  is a purely reactive impedance, viz.,  $Z = ib$  with  $b \in \mathbb{R}$ , Eq. (50) shows that the eigenfrequencies are real, consistently with the fact that the eigenmodes are marginally stable in this case because there is no acoustic flux at the boundaries. On the other hand, when  $Z$  is a purely resistive impedance, viz.,  $Z = a$  with  $a \in \mathbb{R}$ , the eigenfrequencies are complex valued and equal to

$$f = m \frac{c_0}{2L} - i \frac{c_0}{4\pi L} \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right), \quad m \in \mathbb{N} \quad (51)$$

If  $(a+1)/(a-1) > 0$ , viz.,  $|a| > 1$ , the real part of  $f$  is a multiple of the half-wave mode frequency  $c_0/2L$ , whereas in the case where  $(a+1)/(a-1) < 0$ , viz.,  $|a| < 1$ ,  $\Re(f)$  belongs to the quarter-wave modes family. In any case, the real part of the frequency does not depend on  $a$  and its imaginary part does not depend on the mode index. The numerical results are in full good agreement with these analytical findings, as illustrated in Figs. 2 and 3.

*Orthogonality of the modes:* In general, the eigenmodes of the acoustic problem with finite complex valued impedance are not orthogonal (see Appendix B for more details). This is illustrated in Table 2 for the first four eigenmodes corresponding to  $Z = 0$  and  $Z = i$ ; the indices correspond to the mode number in Eq. (50). Recall that the inner product of two eigenmodes  $\hat{p}_n(x)$  and  $\hat{p}_m(x)$  is defined as

$$\langle \hat{p}_n, \hat{p}_m \rangle = \int_{\Omega} \hat{p}_n(x) \hat{p}_m^*(x) dx \quad (52)$$

and is zero if and only if  $\hat{p}_n(x)$  and  $\hat{p}_m(x)$  are orthogonal. It follows from Appendix B that  $\langle \hat{p}_n, \hat{p}_m \rangle = 0$  when  $Z = 0$  as soon as  $m \neq n$ .

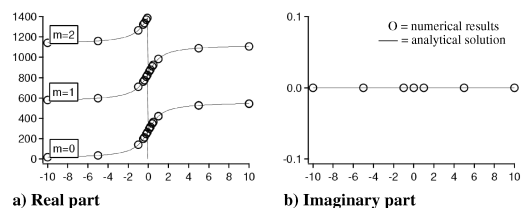


Fig. 2 Influence of purely reactive impedance  $Z = ib$  on one-dimensional modes eigenfrequencies. Abscissa represents  $b$ .

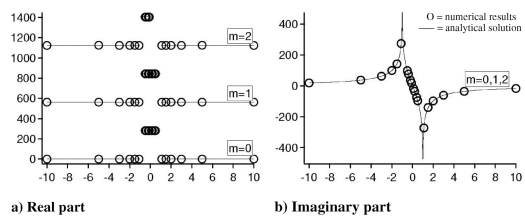


Fig. 3 Influence of purely resistive impedance  $Z = a$  on one-dimensional modes eigenfrequencies. Abscissa represents  $a$ .

**Table 2 Inner products from the first four modes (eigenmodes are normalized by imposing  $\langle \hat{p}_m, \hat{p}_m \rangle = 1$ )**

Case	$\langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 \rangle$	$\langle \hat{p}_1, \hat{p}_3 \rangle$	$\langle \hat{p}_1, \hat{p}_4 \rangle$	$\langle \hat{p}_2, \hat{p}_3 \rangle$	$\langle \hat{p}_2, \hat{p}_4 \rangle$	$\langle \hat{p}_3, \hat{p}_4 \rangle$
$Z = 0$	$2 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^{-5}$	$10^{-3}$	$6 \times 10^{-5}$
$Z = 0$ -exact	0	0	0	0	0	0
$Z = i$	0.15	0.10	0.08	0.076	0.056	0.051
$Z = i$ -exact	0.151	0.106	0.081	0.076	0.062	0.052

The computed products are indeed very small as shown in Table 2. In the case  $Z = i$ , the inner products are not expected to be zero and the following expression can be derived:

$$|\langle \hat{p}_m, \hat{p}_n \rangle| = \frac{1}{2(m+n)-1} \times \sqrt{\frac{2(4n-1)}{(4n-1)\pi-2}} \times \sqrt{\frac{2(4m-1)}{(4m-1)\pi-2}} \quad (53)$$

Table 2 shows that the agreement with computed inner products is again very good. Note that large values (e.g.,  $\langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 \rangle > \simeq 0.15$ ) are obtained. Assuming that the acoustic modes form an orthogonal functional basis is thus not justified and can lead to large errors in the case of finite valued boundary impedances.

2. Two-Dimensional Modes

This section proposes a comparison between numerical and analytical results in the case of two-dimensional modes. A homogeneous Neumann condition ( $|Z| = +\infty$ ) is now imposed at the bottom, left, and right boundaries whereas a complex impedance ( $Z = a + ib$ ) is imposed at the top edge of the computational domain (see Fig. 4).

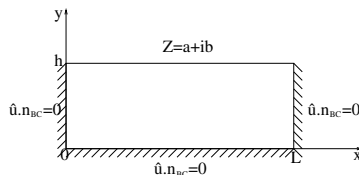
Seeking for two-dimensional harmonic solutions, viz.,  $p(x, y, t) = \Re[\hat{p}(x, y) \exp(-i\omega t)]$ , the problem can be formulated as follows :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{p} &= 0 \quad \text{with} \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0 \quad \text{for} \quad x = 0, L \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} &= 0 \quad \text{for} \quad y = 0; \quad \text{and} \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - \frac{i\omega}{c_0 Z} \hat{p} = 0 \quad \text{for} \quad y = h \end{aligned} \quad (54)$$

The relevant dispersion relation is then

$$e^{2ik_y h} \left( k_y - \frac{k}{Z} \right) - \left( k_y + \frac{k}{Z} \right) = 0, \quad k_y = \sqrt{k^2 - \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2} \quad m \in \mathbb{N} \quad (55)$$

In the case of a purely reactive impedance, viz.,  $Z = ib$  with  $b \in \mathbb{R}$ , there is no acoustic flux at the boundaries and, consistently, the wave number  $k = \omega/c_0$  given by Eq. (55) is real (see Fig. 5). On the other, when  $Z$  is a purely resistive impedance, viz.,  $Z = a$  with  $a \in \mathbb{R}$ , the acoustic flux at the top boundary depends on the mode index and both the real and imaginary parts of the eigenfrequencies depend on  $a$  (see Fig. 6). In any case, the comparison between the



**Fig. 4 Schematic of computational domain for computing two-dimensional modes of isothermal two-dimensional domain.**

analytical [Eq. (55)] and numerical eigenfrequencies shows very good agreement.

B. Active Flame Calculation in an Academic Test Case

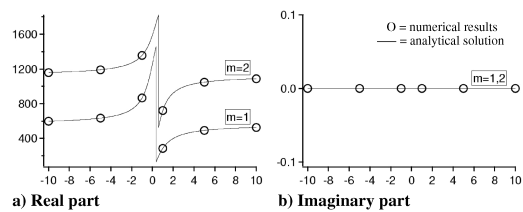
This section presents a calculation in which the influence of the flame considered as an acoustic element is accounted for. The configuration is one-dimensional and consists of a duct of length  $L = 0.5$  m and constant cross section where the fresh gas are separated from the hot gas by an infinitely thin flame located at the middle of the duct (Fig. 7). Modeling the unsteady effects of the flame thanks to the classical  $n - \tau$  model [37,38] [Eq. (9)] and assuming that the hot-to-fresh gas temperature ratio is  $T_2/T_1 = 4$  (which means that the speed of sound in the hot gas  $c_2$  is twice as large as in the fresh gas  $c_1$  while the density ratio is  $\rho_2/\rho_1 = 0.25$ ), the dispersion relation takes a rather simple form provided Dirichlet or Neumann boundary conditions are used at  $x = 0$  and  $x = L$  [49]. For example, in the case where the acoustic velocity is zero at the inlet ( $x = 0$ ) and the pressure is fixed at the outlet ( $x = L$ ), the eigenfrequencies of the problem are solutions of the following dispersion equation:

$$\cos\left(\frac{L}{4c_1}\omega\right) \left[ \cos^2\left(\frac{L}{4c_1}\omega\right) - \frac{1}{4} \frac{\Gamma(1 + ne^{i\omega\tau}) - 1}{\Gamma(1 + ne^{i\omega\tau}) + 1} - \frac{3}{4} \right] = 0 \quad (56)$$

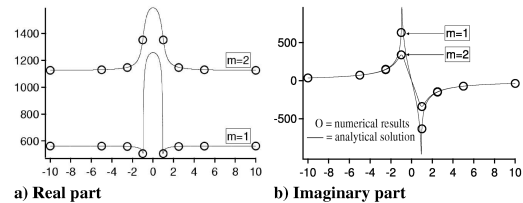
where the dimensionless coefficient  $\Gamma$  is the acoustic impedance ratio

$$\Gamma = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \quad (57)$$

Note that a more general solution of this problem is given in Kaufmann et al. [49] where a jump in the duct cross section is allowed at the flame position. The solutions of Eq. (56) are also discussed in detail in Kaufmann et al. [49], especially in the limit case  $n \rightarrow 0$ . In the more general case where the interaction index is not small, Eq. (56) can be numerically inverted for any values of the unsteady



**Fig. 5 Influence of purely reactive impedance  $Z = ib$  on two-dimensional modes eigenfrequencies. Abscissa represents  $b$ .**



**Fig. 6 Influence of purely resistive impedance  $Z = a$  on two-dimensional modes eigenfrequencies. Abscissa represents  $a$ .**



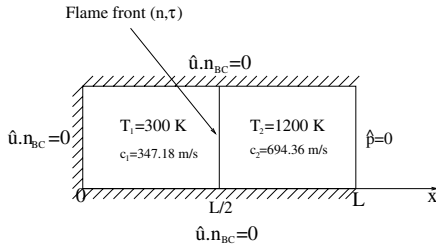


Fig. 7 One-dimensional model problem for the acoustic-flame coupling.

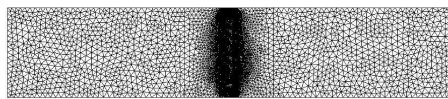


Fig. 8 Two-dimensional unstructured mesh M1 for the one-dimensional active flame calculations.

flame model parameters  $n$  and  $\tau$ . In this section, these exact eigenfrequencies are compared with the numerical results obtained by the asymptotic method and the iterative algorithm described in Secs. IV.A and IV.B, respectively.

Although analytically tractable, this test case is very demanding for any finite element based method. Indeed, discrepancies between the numerical and analytical results can be expected for two main reasons [46]:

1) In the simulations, the flame front is not infinitely thin as in the analytical model; it is at least as thick as the typical cell size in the interface region. This is a classical difficulty when Dirac delta functions are discretized.

2) The reference point needed in the flame model Eq. (9) must belong to the fresh gas side to be consistent with the philosophy of the  $n - \tau$  model. Because the flame thickness is not zero, the fresh gas region does not extend to the middle of the duct and the reference point cannot be strictly located at  $x = L/2 = 0.25$  m.

Two two-dimensional unstructured meshes have been considered, one coarse mesh (M1) and one fine mesh (M2). To keep the expected errors as small as possible, both meshes are refined near the middle of the duct, as shown in Fig. 8 for mesh M1. Using the finer mesh M2 should reduce the analytical/numerical discrepancies because 1) the classical numerical errors stemming from the spatial gradient approximations are reduced, and 2) the flame thickness can be made smaller and the reference position can be chosen closer to its theoretical value  $L/2$ . The main characteristics of meshes M1 and M2 are gathered in Table 3 where the minimal flame thickness and maximal reference position allowed by each mesh are also given.

Regarding the flame characteristics, two different values of the interaction index have been considered, viz.,  $n = 0.01$  and  $n = 5$ , corresponding to a small and large amplitude of the flame response, respectively. Regarding the time delay, a value leading to both stable and unstable modes among the first few eigenfrequencies has been selected, namely  $\tau = 10^{-4}$  s. For each value of  $n$ , a field of local interaction index  $n_u(x)$  has been constructed so that the models given in Eqs. (9) and (11) correspond to the same flame response amplitude. A simple way to proceed is to assume that  $n_u(x)$  is constant by parts, equal to  $\eta$  in the flame region and zero anywhere else. Then, integrating Eq. (11) over space and equating the result to Eq. (9) gives the following connection between the classical and local interaction index:

$$n_u(x) = \begin{cases} \eta = \frac{n}{\delta_f} \times \frac{U_{bulk}}{q_{tot}} \times \frac{\gamma P_0}{\gamma - 1}, & \text{if } x_f - \delta_f/2 < x < x_f + \delta_f/2, \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (58)$$

where  $x_f$  is the mean position of the flame, viz.,  $x_f = L/2 = 0.25$  m.

Table 3 Characteristics of meshes M1 and M2 and associated best physical values

Mesh	Triangles	Nodes	Flame region	$x_{ref}$
M1	12,000	6000	$0.249 \leq x \leq 0.251$	0.2488
M2	78,000	39,000	$0.2498 \leq x \leq 0.2502$	0.2495

When the amplitude of the flame response is small, Fig. 9a shows that both the asymptotic method and the iterative algorithm provide results in good agreement with the analytical solution, even if the coarser mesh M1 is used. With the selected time delay ( $\tau = 10^{-4}$  s), the flame-acoustic coupling makes the first and fourth modes stable, whereas the second one is not modified (this mode admits a velocity node at the middle of the duct which zeroes the coupling term [49]), and the third mode is amplified by the presence of the flame. The passive flame calculation leads to marginal modes (consistent with the purely reflecting boundary conditions) in good agreement with the theoretical real eigenfrequencies. The stabilizing/destabilizing effect of the unsteady flame is well captured by both numerical methods, showing that the linearization process proposed in Sec. IV.A is valid in this case.

When the amplitude of the flame response is large ( $n = 5$ ), Fig. 9b shows that only the third mode is amplified by the flame/acoustic coupling, the first and the fourth being damped, and the second one being left unchanged. The passive flame calculation still produces marginal modes but the amplitude of the flame response being large, the associated real eigenfrequencies do not match the theoretical values very well. Large differences between the asymptotic method and the analytical solution also appear in this case. This is not very surprising because the “small” parameter of the problem, Eq. (38), is indeed larger than unity and the developments given in Sec. IV.A are not justified. A better agreement is obtained when the iterative algorithm of Sec. IV.B is used instead. The error increases with frequency, which is classical for finite element based methods, and is larger for the imaginary part of the eigenfrequencies. For example, the error on the real part of the third mode is close to 3.3% whereas it is more than 22% for the imaginary part. To investigate the sources of the error, the finer mesh M2 was used instead of M1. Relative errors on the frequency of the third mode are given in Fig. 10 for different calculations based on the iterative algorithm. (Iteration zero corresponds to passive flame calculations.) In this figure, R1 and R2 correspond to calculations using, respectively, M1 and M2 with the corresponding flame front description and reference point definition (see Table 3). Also shown, R21 corresponds to a simulation in which M2 was used together with the flame front and reference point definition allowed by M1. Thus, comparison between R1 and R21 gives indications about the numerical errors associated with the finite element approximation, whereas comparing R21 and R2 gives indications about the effect of not considering an infinitely thin flame. In any case, the error on the real part ( $\Re(f) = 1227.3$ ) of the frequency is very small and virtually not affected by the level of approximation. The error on the imaginary part ( $\Im(f) = 41.6$ ) remains significant in the case R21, although smaller than in the case R1, indicating that the numerical errors are significant when M1 is used. Using the fine mesh and associated physical parameters description, run R2, the error is again reduced significantly,

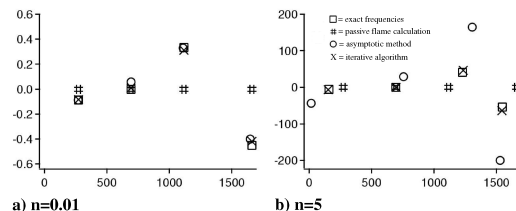


Fig. 9 Location of first four eigenfrequencies for active flame one-dimensional test case.

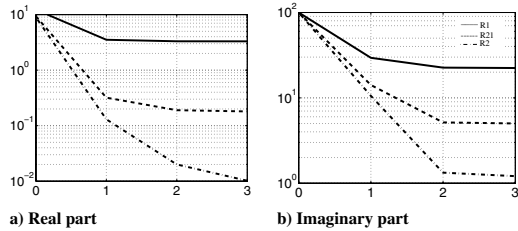


Fig. 10 Relative errors (%) on frequency of third mode (R1, R21, R2 vs iterations).

indicating that the finite flame thickness effects are not negligible. Note that the algorithm requires only one iteration to provide a good approximation of  $\Re(f)$  with less than 1% error, whereas two iterations are required to reach the same accuracy on  $\Im(f)$ .

C. Steady Flame Calculations in an Annular Test Rig

The three-dimensional acoustic solver is now used for characterizing the acoustic modes of an industrial demonstrator developed by the Snecma Moteurs company (SAFRAN Group). More precisely, an annular combustor consisting of a plenum connected to a combustion chamber with 18 swirled burners is considered. The geometry also contains 216 dilution holes evenly dispatched around the annular combustion chamber. The three-dimensional unstructured mesh contains roughly  $3.8 \times 10^5$  nodes and  $10^6$  tetrahedra (see Fig. 11). The fields of density and speed of sound are inputs of the acoustic solver and they were obtained by performing a Reynolds averaged Navier–Stokes (RANS) calculation over a  $360/18 \approx 20$  deg sector, the result of which being duplicated to produce the requested 360 deg fields. Figure 12 illustrates the three-dimensional nature of the data provided to the acoustic solver and the necessity to compute them by using an appropriate three-dimensional computational fluid dynamics tool. In the same way, accounting for the acoustic/flame coupling would require complete fields of interaction index and time delay as discussed in Sec. II.C. This would essentially require performing an LES of a 20 deg sector of the annular combustor and postprocessing the results to optimize  $n_s(x)$  and  $\tau(x)$  [26]. Such simulation has not been performed yet on the geometry of interest and only passive flame-acoustic calculations will be presented in this section. Note also that the adiabatic coefficient was considered constant in the following calculations. Two runs have been performed to illustrate the importance of accounting for complex boundary impedance when dealing with annular combustors.

1) Run A: A homogeneous Neumann condition is used for the solid walls and inlets (entrance of the plenum and the dilution holes) while the classical zero pressure fluctuations condition is imposed at the outlet of the combustion chamber.

2) Run B: The same conditions as in run A are used for the solid boundaries and the inlets but, for the outlet of the combustion chamber, a frequency-dependent impedance is now prescribed to account for the sonic surface that is present downstream the

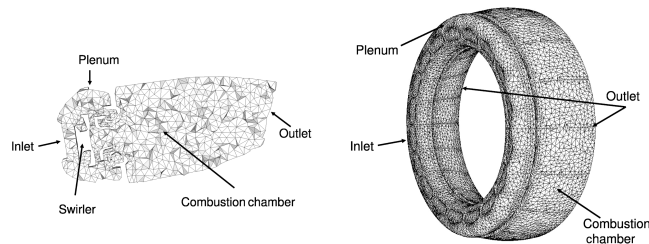


Fig. 11 Three-dimensional unstructured mesh of the annular combustor.

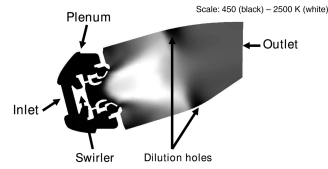


Fig. 12 Temperature field in the combustor (from 450 to 2500 K).

combustion chamber when the combustor is connected to a turbine. The frequency-dependent impedance was obtained from classical acoustic theory [50] for nozzles assuming that the first compressor blades row is choked. Real and imaginary parts of the corresponding impedance are shown in Fig. 13.

The frequencies associated with the first four modes of runs A and B are gathered in Tables 4 and 5, respectively. Because there is no acoustic loss in run A (all the boundary conditions are fully reflecting in this case), the imaginary part of the corresponding eigenfrequencies is always zero. For run B, the outlet impedance mimics the presence of a choked nozzle downstream the combustion chamber and part of the acoustic energy is leaving the computational domain through this boundary. Accordingly, all the modes are damped in run B. In the case where the classical outlet condition is used (run A), all the modes are essentially longitudinal in the combustion chamber. This result is in contradiction with the fact that turning modes are often observed in annular combustors [10,23,51]. It is actually an artifact of the classical outlet condition which imposes zero pressure fluctuations and prevents modes with phase differences within the outlet plane from existing. This is confirmed by the results of run B where three families of modes were found: 1) orthoradial modes where the acoustic pressure field in the plenum and combustion chamber is virtually axisymmetric (not exactly axisymmetric because the geometry is truly three-dimensional because of the injectors and the dilution holes), see Figs. 14a and 14b; 2) longitudinal modes where the acoustic pressure field depends mostly on the axial distance along the “symmetry” axis, see Fig. 14c; and 3) coupled modes where the pressure field in the plenum and combustion chamber depends both on the axial distance and the azimuthal angle, see Fig. 14d.

These modes structures are not obtained if the outlet impedance is set to zero, as it is usual for outlets in acoustic simulations (run A). Moreover, the lowest frequency mode, close to 350 Hz, is not captured in the  $Z = 0$  case. This illustrates the importance of prescribing proper acoustic boundary conditions for predicting the eigenmodes of annular combustors.

D. Three-Dimensional Active Flame Calculations

Three-dimensional acoustic calculations based on the AVSP code and including complex impedance and active flame were discussed recently by Martin et al. [26]. These authors considered a swirled staged combustor which proved to be unstable both experimentally and numerically by LES. The acoustic calculations showed that

1) When no coupling with the flame is considered and Neumann/Dirichlet boundary conditions are used at the inlet/outlet, three

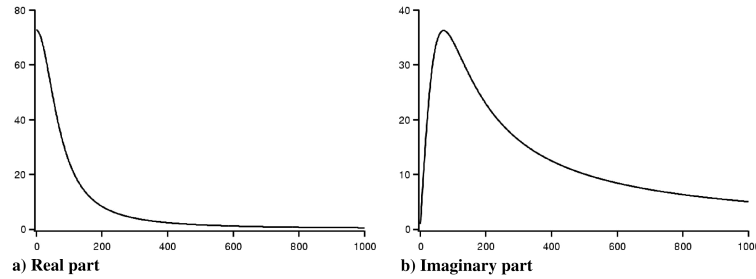


Fig. 13 Frequency-dependent reduced boundary impedance imposed at combustion chamber exit for run B.

acoustic modes (1L, 2L, 3L) are found below 1000 Hz, with frequencies close to 312, 431, and 841 Hz, respectively.

2) When complex valued impedance is prescribed at the outlet, all the acoustic modes are damped because of the acoustic losses at the boundary. The decay rates of the first three modes are close to  $-48$ ,  $-32$ , and  $-4.5$  rad/s, respectively.

3) When a complex valued impedance is used and the flame is made active, the real frequencies of the first three modes are only slightly shifted. Moreover, the 1L mode is heavily damped with a decay rate of  $-588$  rad/s, 3L becomes virtually marginal, and 2L becomes unstable with a growing rate close to  $600$  rad/s.

4) These results compare favorably with the LES calculations performed under the same conditions and showing that the turbulent flame oscillates at approximately 380 Hz, the shape of the LES pressure fluctuations along the combustor axis being very close to the shape of the 2L unstable acoustic mode. Moreover, the 2L mode growing rates from the acoustic solver and the LES code are in fair agreement.

The study of Martin et al. [26] demonstrated the ability of the method presented in Sec. IV.B to detect the existence of an unstable mode in the case of an unstable configuration. It is also important that the method predicts stability in the case of a stable configuration, even if the flame-acoustic coupling is accounted for thanks to the local  $n - \tau$  model of Sec. II.C. As a complement to the results [26] summarized before, a stable configuration is thus considered in the remainder of this section to better illustrate the acoustic calculation procedure with three-dimensional active flame.

The burner considered is a modified version of a single Siemens hybrid burner operated at 17 MPa. Fully premixed methane/air is injected through two coaxial swirlers (diagonal and axial) at an equivalence ratio of 0.42 for the axial and 0.53 for the diagonal swirler. The flow rates injected in the combustion chamber are, respectively, 1.7 kg/s for the axial and 17.7 kg/s for the diagonal swirler. More details about the geometry of the burner can be found in previous references dedicated to the structure of the corresponding

turbulent steady flame [20], the effect of piloting on the flame [52], and the relationship between hydrodynamic and acoustic fluctuations [27]. The same burner was also used by Giauque et al. [53] to assess flame transfer functions from LES, including local interaction index and time delay maps. Note also that in the following the Siemens burner is not mounted on a cylindrical or square combustion chamber as in the previous studies [20,27,52]; a geometry more representative of the actual combustion chamber is used instead. To the author's knowledge, no instabilities were found experimentally under the considered operating conditions.

The computational domain is shown in Fig. 15. The tetrahedral mesh is refined in the injection region to better capture the mean temperature gradient and flame response. As shown in Fig. 15, only a  $360/24 = 15$  deg sector of the full configuration is considered. Note, however, that no major issues are expected in performing the acoustic calculation of the 360 deg geometry (such calculation has been presented in Sec. V.C for a passive flame case). The only technical difficulty to perform a 360 deg active flame calculation is in defining one reference position per sector, which changes neither the mathematical nature of the underlying eigenvalue problem nor the related numerical issues. Although no information about the azimuthal modes can be obtained from 15 deg calculations, such computations are presented next to illustrate the method.

Table 4 Frequency and decay rate of first four eigenmodes of three-dimensional annular combustor (run A)

Mode number	$\Re(f)$	$2\pi\Im(f)$	Mode description
1	658 Hz	0 rad/s	first longitudinal
2	728 Hz	0 rad/s	first longitudinal-first orthonormal
3	890 Hz	0 rad/s	first longitudinal-second orthonormal
4	1101 Hz	0 rad/s	first longitudinal-third orthonormal

Table 5 Frequency and decay rate of first four eigenmodes of three-dimensional annular combustor (run B)

Mode number	$\Re(f)$	$2\pi\Im(f)$	Mode description
1	344 Hz	$-24.5$ rad/s	first orthonormal
2	686 Hz	$-25.1$ rad/s	second orthonormal
3	846 Hz	$-10.1$ rad/s	first longitudinal
4	896 Hz	$-12.3$ rad/s	first orthonormal-first longitudinal

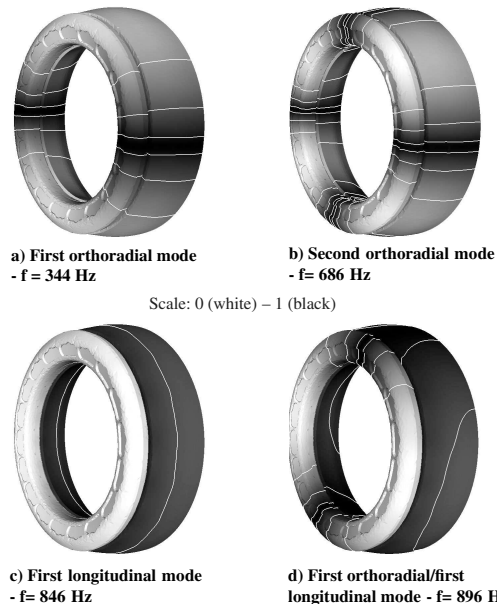


Fig. 14 Modulus of pressure amplitude for first four modes of annular combustor (run B).

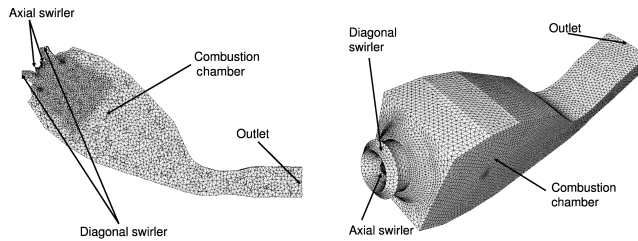


Fig. 15 Three-dimensional unstructured mesh for the acoustic analysis of the Siemens combustor.

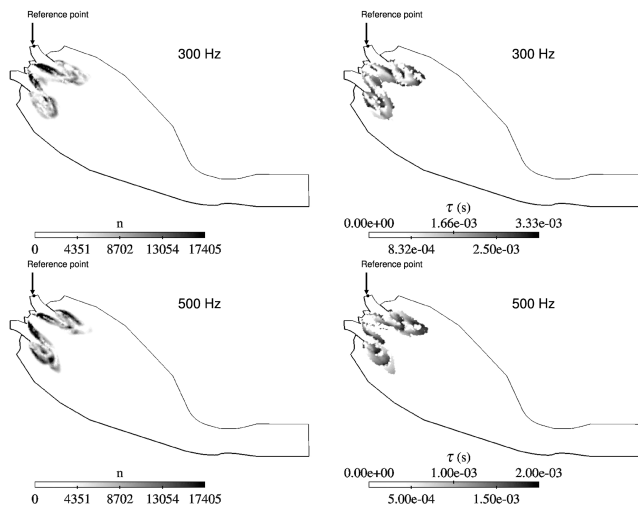


Fig. 16 Typical maps of the interaction index and time delay.

As in Sec. V.C, the fields of density and speed of sound are inputs of the acoustic solver and they were obtained by performing a Reynolds averaged Navier–Stokes calculation over the computational domain. The flame transfer function was assessed by introducing acoustic perturbations at the diagonal swirler entrance as described in Giauque et al. [53]. The difference with this reference, however, is that a broad band excitation was used instead of a harmonic signal. The Wiener-Hopf [41] equation was then used to obtain the local flame transfer function in the range 100–600 Hz by postprocessing the LES results. Typical maps of interaction index (left column) and time delays (right column) are given in Fig. 16, whereas the frequency dependence of these parameters is depicted in Fig. 17. The time delay is only plotted in regions where the amplitude of the flame response (interaction index) is significant. Significant variations of the overall amplitude of the flame response are obtained when the frequency evolves from 100 to 600 Hz.

The frequencies associated with the first five acoustic modes are gathered in Table 6. Results from both passive and active flame

simulations are included. The shape of the passive flame modes are shown in the right column. Table 6 shows that active flame modes have very similar shapes. The modulus of the pressure amplitude is shown with a scale of 0–1 (white–black, respectively). In both cases, Neumann and axiperiodic conditions were used for the liner and lateral boundaries, respectively. Complex valued impedances were prescribed at the combustion chamber inlet and outlet. In absence of experimental measurements, values consistent with the partially reflecting boundary conditions used in the LES performed to assess the flame response (shown in Figs. 16 and 17) were chosen, viz.,  $1/Z = -1 - 7540i/\omega$  for the outlet [54] and  $1/Z = -1.67$  for the inlet. With these values, the boundaries have a low-pass filter behavior [54], the cutoff frequency being close to 600 Hz. Note also that the boundary impedances are of the form Eq. (34) so that all the passive flame modes have been obtained by solving the quadratic eigenvalue problem Eq. (35) only once. For each mode, the iterative procedure of Sec. IV.B has then been used to obtain the active flame modes. In general, two iterations proved enough to reach a fair convergence of the complex frequency except for the first mode for which a third iteration has been necessary.

Different from the case investigated in Martin et al. [26], the flame-acoustic coupling in the present configuration does not modify the acoustic modes substantially. The real frequency shift is 2% or less for all modes except for the first one for which the frequency shift is more significant. All the passive flame modes are damped because of the acoustic radiation through the inlet and outlet boundaries. Note that the acoustic losses are less significant for the first radial mode (the fifth mode in Table 6). The active flame calculations show that the flame-acoustic coupling has either a stabilizing effect (modes 1 and 3) or a destabilizing effect (modes 2, 4, and 5). Even if this effect

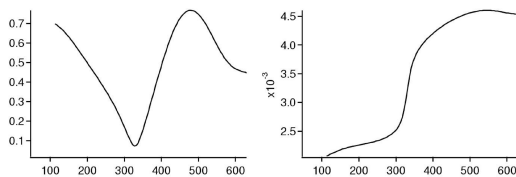







Fig. 17 Volume averaged interaction index (left) and time delay (right) vs frequency.

**Table 6** Frequency and decay rate of first five eigenmodes of Siemens combustor

Mode number	Flame	$\Re(f)$	$2\pi\Im(f)$	Mode description
1	passive	66 Hz	-80.3 rad/s	
	active	95 Hz	-83.8 rad/s	
2	passive	388 Hz	-75.2 rad/s	
	active	381 Hz	-58.1 rad/s	
3	passive	557 Hz	-119 rad/s	
	active	558 Hz	-152 rad/s	
4	passive	796 Hz	-122 rad/s	
	active	795 Hz	-45.2 rad/s	
5	passive	798 Hz	-10.5 rad/s	
	active	807 Hz	-7.5 rad/s	

is sometimes significant (see mode 4), it is always compensated by the damping effect of the boundaries so that the growing rate keeps a negative value for each mode, consistent with the overall stable behavior of the test rig.

## VI. Conclusions

A finite element based methodology has been developed to determine the thermoacoustic modes of industrial systems like annular combustors. The method handles frequency-dependent complex valued impedance at the boundaries as well as three-dimensional, distributed, and unsteady flames. Two ways of accounting for the flame-acoustic coupling have been developed and proven to give similar results in the limit case of small flame response amplitude. Several academic cases have been considered to validate the procedure and its ability to handle complex geometries has been illustrated by considering an annular combustor with 18 swirled injectors. A 15 deg sector of another annular combustor has also been considered as an example of acoustic calculation including acoustic-flame coupling. Coupled to RANS/LES codes to provide the required input data, the numerical approach described in this paper can be used to predict the thermoacoustic modes of industrial systems and associated stability.

### Appendix A: Validity of the Zero Mach Number Assumption

To quantify the validity of the zero Mach number assumption, we first note that the time and length scales for any fluctuation (density, velocity, or entropy) are  $L_a/c_0$  and  $L_a$ , respectively. For example, the  $\partial\rho_1/\partial t$  in Eq. (5) is of order  $\epsilon\rho_0c_0/L_a$ . Besides, we note that the steady part of the fields of density, velocity, or entropy can evolve significantly over the flame brush thickness. Considering this quantity as the relevant length scale for assessing gradients of time averaged fields, the order of magnitude of the terms appearing in the linear counterpart of Eqs. (1), (2), and (4) can be assessed. Of course, the linearization is performed without assuming  $\mathbf{u}_0 \simeq 0$  so that constraints on the mean Mach number  $M = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0}/c_0$  consistent with the zero Mach number assumption can be obtained afterward.

For example, the linearization of the continuity equation, Eq. (1), gives

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla\rho_0 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla\rho_1 + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad (\text{A1})$$

Note that the first three terms do not depend on the mean velocity field and were already present in Eq. (5). The two other terms of Eq. (A1), namely  $\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\rho_1$  and  $\rho_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_0$ , involve the mean velocity field and can be neglected if they are small compared with the time derivative, viz., small compared with  $\epsilon\rho_0c_0/L_a$ . Their order of magnitude being  $\epsilon\rho_0Mc_0/L_a$  and  $\epsilon\rho_0Mc_0/L_f$ , respectively, it

**Table A1** Constraints on mean Mach number implied by zero mean flow assumption

Equation	Constraint
Mass	$M \ll 1$ and $M \ll L_f/L_a$
Momentum	$M \ll L_f/L_a$ , $M \ll 1$ , and $M \ll \sqrt{L_f/L_a}$
Entropy	$M \ll 1$

follows that the zero mean flow assumption is justified as long as the Mach number is such that  $M \ll 1$  and  $M \ll L_f/L_a$ .

The same methodology can be applied to Eqs. (2) and (4). Linearizing Eq. (2) without assuming that the mean flow is at rest, one obtains Eq. (6) enriched by the terms  $\rho_0\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\mathbf{u}_0$ ,  $\rho_0\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\mathbf{u}_1$ , and  $\rho_1\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\mathbf{u}_0$  at the LHS. By comparison with the time derivative term in Eq. (6), these terms are negligible if  $M \ll L_f/L_a$ ,  $M \ll 1$ , and  $M \ll \sqrt{L_f/L_a}$ , respectively. Regarding Eq. (4), the only new term when the mean flow is not at rest is  $\mathbf{u}_0 \cdot \nabla s_1$  which can be neglected compared with  $\partial s_1/\partial t$  when  $M \ll 1$ . Eventually, Table A1 gathers all the constraints that must be matched on the mean Mach number for the zero mean flow assumption to hold. For low frequency modes of typical combustors, the flame brush thickness is smaller than the acoustic wavelength and  $M \ll L_f/L_a$  is most likely the most restrictive constraint on  $M$ .

### Appendix B: Orthogonality of the Eigenmodes

Consider  $\hat{p}_1(\mathbf{x})$  and  $\hat{p}_2(\mathbf{x})$ , two eigenmodes of Eq. (15) associated to angular frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . The objective of this appendix is to precise the conditions under which these two modes are orthogonal. We first extend the classical inner product to account for the spatial variations of  $\gamma$ , defining the following  $1/\gamma$ -weighted inner product:

$$\langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 \rangle_\gamma = \int_\Omega \frac{\hat{p}_1(\mathbf{x})\hat{p}_2^*(\mathbf{x})}{\gamma} d\mathbf{x} \quad (\text{B1})$$

By definition, the eigenvectors  $\hat{p}_1(\mathbf{x})$  and  $\hat{p}_2(\mathbf{x})$  are orthogonal if their  $1/\gamma$ -weighted inner product is zero, viz.,  $\langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 \rangle_\gamma = 0$ . Note that this definition of the orthogonality of the eigenvectors reduces to the more classical one, viz.,  $\langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 \rangle_\gamma = 0$ , when  $\gamma$  is constant over the flow domain [see Eq. (52)].

Taking the complex conjugate of Eq. (15) applied to  $[\hat{p}_2(\mathbf{x}), \omega_2]$  one obtains

$$\frac{\hat{p}_2^*}{\gamma} = -\frac{p_0}{\omega_2^*} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p}_2^* \right) - i \frac{\gamma - 1}{\gamma \omega_2^*} \hat{q}^* \quad (\text{B2})$$

and the  $\langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 \rangle_\gamma$  inner product is equal to

$$\langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 \rangle_\gamma = - \int_\Omega \frac{p_0}{\omega_2^*} \hat{p}_1 \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p}_2^* \right) d\mathbf{x} - i \int_\Omega \frac{\gamma - 1}{\gamma \omega_2^*} \hat{p}_1 \hat{q}^* d\mathbf{x} \quad (\text{B3})$$

The second integral strongly depends on the unsteady heat release. In the case of a complex turbulent flame and given the current knowledge and understanding of flame-acoustic coupling, there is no reason to believe that this term should be zero or that it can be compensated by the first integral which does not depend on combustion. Thus, in the case of an unsteady flame, the thermoacoustic modes are most likely nonorthogonal.

Let us now consider the more interesting passive flame case for which the orthogonality of the modes is sometimes assumed [22]. Integrating the first integral of Eq. (B3) by parts leads to

$$\langle \hat{p}_1, \hat{p}_2 \rangle_\gamma = \frac{p_0}{\omega_2^*} \int_\Omega \frac{1}{\rho_0} \nabla \hat{p}_1 \cdot \nabla \hat{p}_2^* d\mathbf{x} - \frac{p_0}{\omega_2^*} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho_0} \hat{p}_1 \nabla \hat{p}_2^* \cdot \mathbf{n}_{\text{BC}} d\sigma \quad (\text{B4})$$

Integrating again by parts and using Eq. (15) applied to  $(\hat{p}_1, \omega_1)$  lead to

$$\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) (\hat{p}_1, \hat{p}_2)_\gamma = \frac{p_0}{\omega_2^2} \int_{\partial\Omega_Z} \frac{1}{\rho_0} (\hat{p}_2^* \nabla \hat{p}_1 - \hat{p}_1 \nabla \hat{p}_2^*) \cdot \mathbf{n}_{BC} d\sigma \quad (\text{B5})$$

Note that the boundary integral is taken over  $\partial\Omega_Z$  only because neither  $\partial\Omega_D$  nor  $\partial\Omega_N$  contribute given that either  $\hat{p}_1 = \hat{p}_2^* = 0$  or  $\nabla \hat{p}_1 \cdot \mathbf{n}_{BC} = \nabla \hat{p}_2^* \cdot \mathbf{n}_{BC} = 0$  on these boundaries. At this point, it is useful to consider the two distinct cases.

*Case 1:*  $\partial\Omega_Z$  is empty. In this case, only Neumann or Dirichlet conditions are prescribed and the angular frequencies are real valued ( $\omega_1^* = \omega_2$ ) because there is no acoustic radiation through the boundaries. Equation (B5) reduces to

$$\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) (\hat{p}_1, \hat{p}_2)_\gamma = 0 \quad (\text{B6})$$

which shows that  $\hat{p}_1$  and  $\hat{p}_2$  are orthogonal as soon as  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Because one can always find orthogonal eigenvectors sharing the same eigenfrequency by using the Gram–Schmidt orthogonalization procedure, the acoustic problem admits a set of orthogonal eigenvectors when  $\partial\Omega_Z$  is empty.

*Case 2:*  $\partial\Omega_Z$  is not empty. Excluding the particular case in which  $\omega_1 = \omega_2^*$ , the eigenvectors  $\hat{p}_1$  and  $\hat{p}_2$  are orthogonal only if the boundary integral in Eq. (B5) turns out to be zero. In other words, the eigenvectors of the acoustic problem with finite impedance are nonorthogonal in the general case. A sufficient condition for zeroing the RHS of Eq. (B5) is obviously

$$\hat{p}_2^* \nabla \hat{p}_1 \cdot \mathbf{n}_{BC} = \hat{p}_1 \nabla \hat{p}_2^* \cdot \mathbf{n}_{BC} \quad \text{on } \partial\Omega_Z \quad (\text{B7})$$

Making use of Eq. (24), this constraint can be rewritten as

$$\frac{\omega_1}{Z(\omega_1)} = -\frac{\omega_2^*}{Z^*(\omega_2)} \quad (\text{B8})$$

The following analytic form for  $Z(\omega)$  ensures that Eq. (B8) is satisfied for any values of  $\omega_1$  and  $\omega_2$ :

$$Z(\omega) = iR_0\omega, \quad R_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{B9})$$

Thus, a sufficient condition for the acoustic problem to admit orthogonal eigenvectors is that the boundary impedance, if finite, is given as in Eq. (B9). Note that a particular case is the Dirichlet condition  $Z = 0$ .

### Acknowledgments

The authors acknowledge Société Nationale d'Étude et de Construction de Moteurs d'Aviation for its support and the French national computing center, Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur, for giving access to parallel computers.

### References

- Poinsot, T., Trouvé, A., Veynante, D., Candel, S., and Esposito, E., "Vortex Driven Acoustically Coupled Combustion Instabilities," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 177, April 1987, pp. 265–292.
- Candel, S., "Combustion Instabilities Coupled by Pressure Waves and Their Active Control," *24th Symposium (International) on Combustion*, Combustion Institut, Pittsburgh, PA, 1992, pp. 1277–1296.
- Crighton, D., Dowling, A., Ffowcs Williams, J., Heckl, M., and Leppington, F., *Modern Methods in Analytical Acoustics*, Lecture Notes, Springer–Verlag, New York, 1992.
- Poinsot, T., and Veynante, D., *Theoretical and Numerical Combustion*, R. T. Edwards, Philadelphia, 2001.
- Lieuwen, T., and Yang, V. (eds.), *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines. Operational Experience, Fundamental Mechanisms, and Modeling*, Vol. 210, Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, Reston, VA, 2005.
- Lieuwen, T., and Zinn, B., "Application of Multipole Expansions to Sound Generation from Ducted Unsteady Combustion Processes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 235, No. 3, 2000, pp. 405–414.
- Stow, S., and Dowling, A., "Thermoacoustic Oscillations in an Annular Combustor," *ASME Turbo Expo*, 2001-GT-0037, 2001.
- Polifke, W., Paschereit, C., and Doebbeling, K., "Constructive and Destructive Interference of Acoustic and Entropy Waves in a Premixed Combustor with a Choked Exit," *International Journal of Acoustics and Vibration*, Vol. 6, No. 3, 2001, pp. 135–146.
- Evesque, S., and Polifke, W., "Low-Order Acoustic Modelling for Annular Combustors: Validation and Inclusion of Modal Coupling," *International Gas Turbine and Aeroengine Congress & Exposition*, American Society of Mechanical Engineers Paper GT-2002-30064, 2002.
- Evesque, S., Polifke, W., and Pankiewicz, C., "Spinning and Azimuthally Standing Acoustic Modes in Annular Combustors," *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, AIAA Paper 2003-3182, 2003.
- Benoit, L., "Prédiction des Instabilités Thermo-Acoustiques Dans les Turbines à Gaz," Ph.D. Thesis, Univ. Montpellier II, 2005.
- Murota, T., and Ohtsuka, M., "Large-Eddy Simulation of Combustion Oscillation in Premixed Combustor," *International Gas Turbine and Aeroengine Congress & Exposition*, American Society of Mechanical Engineers Paper 99-GT-274, 1999.
- Desjardins, P., and Frankel, S., "Two Dimensional Large Eddy Simulation of Soot Formation in the Near Field of a Strongly Radiating Nonpremixed Acetylene-Air Jet Flame," *Combustion and Flame*, Vol. 119, Nos. 1–2, 1999, pp. 121–133.
- Angelberger, C., Egolopoulos, F., and Veynante, D., "Large Eddy Simulations of Chemical and Acoustic Effects on Combustion Instabilities," *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 65, No. 2, 2000, pp. 205–222.
- Caraeni, D., Bergström, C., and Fuchs, L., "Modeling of Liquid Fuel Injection, Evaporation and Mixing in a Gas Turbine Burner Using Large Eddy Simulation," *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 65, No. 2, 2000, pp. 223–244.
- Colin, O., Ducros, F., Veynante, D., and Poinsot, T., "Thickened Flame Model for Large Eddy Simulations of Turbulent Premixed Combustion," *Physics of Fluids*, Vol. 12, No. 7, 2000, pp. 1843–1863.
- Pitsch, H., and Duchamp de la Geneste, L., "Large Eddy Simulation of Premixed Turbulent Combustion Using a Level-Set Approach," *Proceedings of the Combustion Institute*, Vol. 29, July 2002, pp. 2001–2005.
- Huang, Y., and Yang, V., "Bifurcation of Flame Structure in a Lean Premixed Swirl-Stabilized Combustor: Transition from Stable to Unstable Flame," *Combustion and Flame*, Vol. 136, No. 3, 2004, pp. 383–389.
- Pierce, C., and Moin, P., "Progress-Variable Approach for Large Eddy Simulation of Non-Premixed Turbulent Combustion," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 504, April 2004, pp. 73–97.
- Selle, L., Lartigue, G., Poinsot, T., Koch, R., Schildmacher, K.-U., Krebs, W., Prade, B., Kaufmann, P., and Veynante, D., "Compressible Large-Eddy Simulation of Turbulent Combustion in Complex Geometry on Unstructured Meshes," *Combustion and Flame*, Vol. 137, No. 4, 2004, pp. 489–505.
- Pankiewicz, C., and Sattelmayer, T., "Time Domain Simulation of Combustion Instabilities in Annular Combustors," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 125, No. 3, 2003, pp. 677–685.
- Culick, F., "Combustion Instabilities in Liquid-Fueled Propulsion Systems: An Overview," AGARD meeting 72B PEP, 1987.
- Krebs, W., Walz, G., and Hoffmann, S., "Thermoacoustic Analysis of Annular Combustor," *5th AIAA Aeroacoustics Conference*, AIAA Paper 99-1971, 1999.
- Schuermans, B., Bellucci, V., Nowak, D., and Paschereit, C., "Modelling of Complex Thermoacoustic Systems: A State-Space Approach," *Ninth International Congress on Sound and Vibration*, 2002.
- Schuermans, B., Bellucci, V., and Paschereit, C., "Thermoacoustic Modeling and Control of Multiburner Combustion Systems," *International Gas Turbine and Aeroengine Congress & Exposition*, American Society of Mechanical Engineers Paper 2003-GT-38688, 2003.
- Martin, C., Benoit, L., Sommerer, Y., Nicoud, F., and Poinsot, T., "LES and Acoustic Analysis of Combustion Instability in a Staged Turbulent Swirled Combustor," *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 4, 2006, pp. 741–750.
- Selle, L., Benoit, L., Poinsot, T., Nicoud, F., and Krebs, W., "Joint Use of Compressible Large-Eddy Simulation and Helmholtz Solvers for the Analysis of Rotating Modes in an Industrial Swirled Burner," *Combustion and Flame*, Vol. 145, Nos. 1–2, 2006, pp. 194–205.
- Peters, N., *Turbulent Combustion*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 2000.
- Chu, B., "On the Energy Transfer to Small Disturbances in Fluid Flow (Part 1)," *Acta Mechanica*, Vol. 1, No. 3, Sept. 1965, pp. 215–234.
- Nicoud, F., and Poinsot, T., "Thermoacoustic Instabilities: Should the

- Rayleigh Criterion be Extended to Include Entropy Changes?," *Combustion and Flame*, Vol. 142, No. 2, 2005, pp. 153–159.
- [31] Dowling, A., "Calculation of Thermoacoustic Oscillations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 180, No. 4, 1995, pp. 557–581.
- [32] Lieuwen, T., "Modeling Premixed Combustion-Acoustic Wave Interactions: A Review," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 19, No. 5, 2003, pp. 765–781.
- [33] Schuller, T., Durox, D., and Candel, S., "Unified Model for the Prediction of Laminar Flame Transfer Functions: Comparisons Between Conical and V-Flames Dynamics," *Combustion and Flame*, Vol. 134, No. 1, 2003, pp. 21–34.
- [34] Dowling, A., "Nonlinear Self-Excited Oscillations of a Ducted Flame," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 346, Sept. 1997, pp. 271–290.
- [35] Lieuwen, T., and Zinn, B., "Role of Equivalence Ratio Oscillations in Driving Combustion Instabilities in Low NO<sub>x</sub> Gas Turbines," *Proceedings of the Combustion Institute*, Vol. 27, Aug. 1998, pp. 1809–1816.
- [36] Sattelmayer, T., "Influence of the Combustor Aerodynamics on Combustion Instabilities from Equivalence Ratio Fluctuations," *International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*, American Society of Mechanical Engineers Paper 2000-GT-0082, 2000.
- [37] Crocco, L., "Aspects of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors. Part 1," *American Rocket Society Journal*, Vol. 21, No. 6, 1951, pp. 163–178.
- [38] Crocco, L., "Aspects of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors. Part 2," *American Rocket Society Journal*, Vol. 22, No. 1, 1952, pp. 7–16.
- [39] Varoquie, B., Légier, J., Lacas, F., Veynante, D., and Poinso, T., "Experimental Analysis and Large Eddy Simulation to Determine the Response of Non-Premixed Flame Submitted to Acoustic Forcing," *Proceedings of the Combustion Institute*, Vol. 29, July 2002, pp. 1965–1970.
- [40] Truffin, K., Varoquie, B., and Poinso, T., "Measurements of Transfer Functions in Reacting Flows Using Large Eddy Simulations," *10th International Congress on Sound and Vibration*, P-38, 2003, pp. 785–793.
- [41] Polifke, W., Poncet, A., Paschereit, C., and Doebbeling, K., "Reconstruction of Acoustic Transfer Matrices by Stationary Computational Fluid Dynamics," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245, No. 3, 2001, pp. 483–510.
- [42] Paschereit, C., Schuermans, B., Polifke, W., and Mattson, O., "Measurement of Transfer Matrices and Source Terms of Premixed Flames," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 124, No. 2, 2002, pp. 239–247.
- [43] Truffin, K., and Poinso, T., "Comparison and Extension of Methods for Acoustic Identification of Burners," *Combustion and Flame*, Vol. 142, No. 4, 2005, pp. 388–400.
- [44] Tisseur, F., and Meerbergen, K., "Quadratic Eigenvalue Problem," *SIAM Review*, Vol. 43, No. 2, 2001, pp. 235–286.
- [45] Lehoucq, R., and Sorensen, D., "ARPACK User's Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods," [www.caam.rice.edu/software/ARPACK](http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK), Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [46] Benoit, L., and Nicoud, F., "Numerical Assessment of Thermoacoustic Instabilities in Gas Turbines," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 47, Nos. 8–9, 2005, pp. 849–855.
- [47] Bender, C., and Orszag, S., *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Springer, New York, 1999.
- [48] Martin, C., Benoit, L., Nicoud, F., and Poinso, T., "Analysis of Acoustic Energy and Modes in a Turbulent Swirled Combustor," *Proceedings of the Summer Program*, Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., Stanford, CA, 2004, pp. 377–394.
- [49] Kaufmann, A., Nicoud, F., and Poinso, T., "Flow Forcing Techniques for Numerical Simulation of Combustion Instabilities," *Combustion and Flame*, Vol. 131, No. 4, 2002, pp. 371–385.
- [50] Marble, F., and Candel, S., "Acoustic Disturbances from Gas Nonuniformities Convected Through a Nozzle," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 55, Nov. 1977, pp. 225–243.
- [51] Schuermans, B., Paschereit, C., and Monkewitz, P., "Non-Linear Combustion Instabilities in Annular Gas-Turbine Combustors," AIAA Paper 2006-0549, 2006.
- [52] Sengissen, A., Giauque, A., Staffelbach, G., Porta, M., Krebs, W., Kaufmann, P., and Poinso, T., "Large Eddy Simulation of Piloting Effects on Turbulent Swirling Flames," *Proceedings of the Combustion Institute* (to be published), Vol. 31, 2006.
- [53] Giauque, A., Selle, L., Poinso, T., Buechner, H., Kaufmann, P., and Krebs, W., "System Identification of a Large-Scale Swirled Partially Premixed Combustor Using LES and Measurements," *Journal of Turbulence*, Vol. 6, No. 21, 2005, pp. 1–20.
- [54] Selle, L., Nicoud, F., and Poinso, T., "Actual Impedance of Non-Reflecting Boundary Conditions: Implications for the Computation of Resonators," *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 5, 2004, pp. 958–964.

C. Kaplan  
Associate Editor

# Combustion Instability Problems Analysis for High Pressure Jet Engine Cores

Michel Cazalens\*  
*SNECMA, Villaroche, 77780, France*

Sébastien Roux†, Claude Sensiau‡  
*CERFACS, Toulouse, 31057, France*

and  
Thierry Poinsot§  
*IMFT, 31400, Toulouse Cedex, France, Associate Fellow*

The design of a clean combustion technology based on lean combustion principles will have to face combustion instability. This oscillation is often discovered late in engine development when unfortunately only a few degrees of freedom still exist to solve the problem. Individual component test rigs are usually not useful in detecting combustion instability at an early stage because they do not have the same acoustic boundary conditions as the full engine. An example of this unsteady activity phenomenon observed during the operation of a high-pressure core is presented and analyzed. To support the investigation work, two numerical tools have been extensively used: (1) experimental measurement of unsteady pressure and the results of a multidimensional acoustic code are used to confirm that the frequency variations of the observed modes within the operating domain of the high pressure core are due to the excitation of the first and second azimuthal combustor modes. The impact of acoustic boundary conditions for the combustor exhaust is shown to control the appearance and mode transition of this unsteady activity. (2) 3D reacting and non-reacting Large Eddy Simulations (LES) for the complete combustor and for the injection system cup alone suggest that the aerodynamic instability of the flow passing through the cup could be the noise source exciting the azimuthal acoustic modes of the chamber. Based on these results, the air system (cup) was re-designed in order to suppress this aerodynamic instability and experimental combustion tests confirm that the new system is free of combustion instability.

## I. Introduction

A High-pressure core used for the development of gas turbines is constituted of the association of a combustor chamber, a high-pressure compressor and a high-pressure turbine (Fig. 1). Such devices are very useful for engine manufacturers because they are demonstrators where advanced technology, which is intended to be put into service later for new engines, can be fully assessed. It is a very important step within the research and technological

---

\* Combustion Design Reviewer, SNECMA, 2 Rd Point René Ravaud, 77550 MOISSY CRAMAYEL, FRANCE.

† Research scientists, CERFACS, 31057 TOULOUSE, FRANCE.

‡ Research scientists, CERFACS, 31057 TOULOUSE, FRANCE.

§ Research Director, IMF Toulouse, 31400 TOULOUSE, FRANCE, AIAA Associate Fellow.



development process because the components which have been designed and tested separately, will work together for the first time. Some new problems involving components coupling, noise and instability may appear during high pressure core tests even if during each individual component test campaign, no significant unsteady activity was detected. Combustion instabilities due to interaction between acoustic and unsteady combustion, are characterized by strong oscillations of pressure, velocity and reaction rate and have been commonly observed in multiple industrial devices<sup>1</sup> since the first observations were made more than a century ago<sup>2</sup>. Sometimes, as the consequence of acoustic disturbance, some hydrodynamic bifurcations are observed leading to the creation of large-scale structures within the flow which are parts of the combustion instability process. Even if the acoustic activity does not induce some corresponding structural vibrations, the generated noise level is usually regarded as unacceptable.

Today, lean combustion systems are promising devices in order to meet the future NO<sub>x</sub> emission reduction requirements. Unfortunately they are also more sensitive to combustion instability compared to classical combustors for at least two reasons:

- Lean combustion structures are more easily extinguished by turbulent fluctuations than the stoichiometric ones. As they can be reignited later in the combustor, they have the potential to become acoustic sources. Since the technological objective is to burn in a lean mode, the total percentage of the combustor occupied by lean combustion zones is increasing and therefore the probability of getting a more intense coupling between combustion and acoustics also increases.
- Since more air is affected to the injection system, the probability of exciting hydrodynamic instability entering into the process of combustion instability, is also increasing. As large scale structures issued from the air system associated with the injection system, control the mixing between fuel and air, they could lead to unsteady combustion and interactions with the acoustic waves in order to produce self-excited combustion oscillation.

The development of clean combustion devices based on lean combustion will be successful only if engine manufacturers implement the relevant knowledge and numerical methodology to:

- Reliably identify, analyze and understand all the related combustion instabilities appearing at each development stage: component level, high pressure core level and engine level in order to find solutions.
- Fully integrate combustion instability issues into the combustor design process to minimize their impact over the whole engine operating domain.

Moreover, in order to reduce the time and cost for development, engine manufacturers will probably more and more run high pressure cores without any previous component tests. Then controlling the complete process (identification, analysis, understanding, proposition of solution) would appear to be of the first importance.

This paper presents an investigation methodology which has been successful in the understanding of high pressure core experiment results. This methodology combines experiments and numerical methods where Large Eddy Simulation (LES) and acoustic analysis are the main components: LES has become a standard tool in the study of the dynamics of turbulent flames for gas turbines<sup>4,11-14,17-19,22,24-29</sup> or for piston engines<sup>16</sup> while acoustic analysis is a standard numerical method for predicting acoustic modes in cavities which has been extended to reacting flow cases by multiple authors in the past<sup>5,6,8,24</sup>. These tools will be described briefly here since the paper concentrates on the results they provide rather than on their theoretical basis. Section 2 presents the configuration and the related observed unsteady phenomena while section 3 rapidly describes the numerical tools used for the work. Section 4 focuses on analysis. Once the acoustic modes controlling the observed oscillations have been identified, a detailed discussion about their appearance, transition, and hysteresis is given. Hypotheses regarding the nature of the acoustic source at the origin of the phenomenon are formulated and verified. A general conclusion is made in section 5.

## II. Configuration and Observed Phenomenon

The high pressure core configuration includes a high pressure compressor, a combustor and a high pressure turbine (Fig. 1). After a small delay past the ignition of the combustor, all unsteady pressure sensors (Fig. 1) mounted on the core engine indicate strong fluctuations (Fig. 2). For atmospheric operating core conditions the oscillations appear at rotation speeds of around 9000 rpm. Since there is no mechanical response detected anywhere, this unsteady activity involves only aero-acoustic issues. By increasing engine power, the unsteady activity disappears for rotation speeds of around 16500 rpm. Usually, sensors are installed at different axial and azimuthal locations on the core engine. For the present case, sensors C1 to C6 are mounted at different azimuthal locations on the last stator stage of the high pressure compressor. Others sensors are located on the combustor false igniter, and in some cavities outside the main flow. For civilian applications, the combustor casing is designed in order to be equipped with two igniters. For high pressure core testing, one igniter is sufficient and the other one is replaced by an unsteady pressure sensor, named the false igniter, which monitors the pressure inside the combustor.

Figure. 3 displays the measured frequencies with respect to the combustor inlet temperature over several test days and reveals that:

- Unsteady activity frequencies are changing as the operating point of the core engine is changing, but they are not linear functions of the rotation speed.
- Two different domains can be identified: within domain 1, frequencies are in the range of 400Hz to 600Hz while within domain 2, they are in the range of 700Hz to 900Hz.
- The unsteady pressure signal amplitude is highly dispersed and does not exhibit any clear relation with the mechanical, aerodynamic or thermodynamic operating parameters of the core engine.

For a given test day, the transition between domain 1 and domain2 is abrupt and the frequency shift is around 300Hz. The rotation speed of the core engine corresponding to transition during acceleration is not the same as the one corresponding to transition from domain 2 to domain 1 during a deceleration. This hysteresis phenomenon suggests that the thermal behaviour of the core engine could play a role in the process governing the transition between the two domains. This aspect will be specifically discussed later. Unsteady activity disappears roughly 0.2s after the shut down of the fuel flow. The rotation speed just begins to decrease and no dramatic aerodynamic change is expected at this time. This observation confirms that combustion is an essential ingredient for the existence of this instability process. It is not an aerodynamic noise amplified within some internal cavities because in this case, it would continue to exist even when the fuel flow is stopped. Unsteady activity also disappears when the rotation speed exceeds 16500 rpm, showing that certain regimes with combustion are also stable.

### **III. Numerical Tools**

In order to study the unsteady behaviour described in the previous section, four different solvers have been used:

- AVBP: a Large Eddy Simulation (LES) solver<sup>22</sup>. This tool enables solving full compressible Navier Stokes equations in complex geometries. It has been validated successfully on numerous combustion chambers over the last five years<sup>3,20,21,23,24,25,26</sup>. LES have revolutionized the capacities of CFD in the field of unsteady combustion by providing an insight into the large scale structures present in the flow. Since combustion instability is most often associated with large scale vortices, LES is the most obvious choice to study such phenomena.

- N3S: a Reynolds Averaged Navier Stokes solver which is used to compute the mean flow within the combustor using classical turbulence models.
- NOZZLE: a one-dimensional acoustic solver giving the impedances of nozzles such as the diffuser or the distributor located downstream from the combustion chamber
- AVSP: a three-dimensional Helmholtz solver which provides the solutions to the acoustic equations (frequencies and mode structure) in a domain where temperature and speed of sound are given by AVBP or N3S and impedances are estimated using NOZZLE. AVSP solves the wave equation in a non isothermal three-dimensional domain<sup>19,30</sup>. This solver has been used in conjunction with AVBP and is useful in understanding experimental or LES results<sup>7,8</sup>. Although the LES of the complete combustor is feasible, a pure acoustic analysis is still valuable not only for cost and time delay reasons, but also to understand all of the possible oscillation modes: LES will only give the most amplified mode corresponding to a given set of boundary conditions, while the Helmholtz solver AVSP will provide all possible acoustic modes that can exist within the system in terms of frequency and the amplification factor.

#### IV. Analysis of the instability modes

##### A. Acoustics analysis

Fig. 4 displays pressure signals that are measured by sensors C1 to C6 when the combustor operates in domain 1 and domain 2 respectively. A phase shift exists between all sensors showing that the modes are not longitudinal. Sensors C1-C4 and C3-C6 are located on opposite sides just after the last high pressure compressor stage and then just before the combustion chamber. For these two pairs of sensors, Fig. 4 shows that the phase difference between the pressure signals is close to  $\pi$  for domain 1 (compatible with uneven azimuthal modes) and zero for domain 2 (compatible with even azimuthal modes). In order to check whether the modes observed experimentally are linked to acoustics, AVSP was used for the complete combustor (Fig. 5a) and for several operating conditions of the core engine, covering the entire domain of interest. Five thermodynamics conditions have been chosen from the ones experienced by the core engine. For each condition AVSP provides the frequency and the spatial structure of all the acoustic modes that can exist within the system. The mesh used for AVSP is derived from the LES mesh performed on one sector: it includes the plenum and the injection system but does not include the turbine nozzle that is represented by its equivalent impedance calculated with NOZZLE. As the real chamber contains 18 injection

systems, the global acoustical mesh is obtained by reproducing the mesh corresponding to one sector eighteen times. The mean temperature fields needed by AVSP to compute the corresponding speed of sound fields are obtained from RANS computations with the N3S Nature code: the sound speed varies between 400 and 900 m/s. For each regime, as done for the mesh itself, the speed of sound field is then reproduced eighteen times in the azimuthal direction to obtain the complete speed of sound field for the combustor: a possible influence of manufacturing variations of injection systems on the azimuthal temperature profile is not taken into account. The acoustic boundary conditions for AVSP correspond to the impedance computed by NOZZLE at the outlet and to velocity nodes for all inlets and walls. The results of acoustic computations are presented on Fig. 5 and 6. Fig. 5b displays the structure of the first longitudinal mode (1L) in the symmetry plane of the chamber while Fig. 5c displays the structures of the first two azimuthal modes (1A and 2A). Fig. 6 presents the frequency evolution for the first longitudinal mode (1L), the first and second azimuthal ones (1A and 2A) as functions of the mean temperature at the combustor outlet. The same figure also displays experimental recorded frequencies. Fig. 6 indicates that the computed 2A frequency evolution over the domain of interest lies very well within the measured frequencies for domain 2, and exhibits the right slope. Moreover, the spatial structure of the computed 2A mode (Fig. 5c) is fully compatible with the one that can be perceived through the six pressure sensors C1 to C6 (Fig. 4) suggesting that the second azimuthal mode of the plenum-combustor system (2A) is the mode appearing within domain 2. Note that this result shows that an oscillation mode (like Domain 2 in Fig. 3) with a frequency which changes with rotation speed, can still be linked to an acoustic mode simply because acoustic frequencies also shift when the regimes change.

For the mode of domain 1, the analysis is more difficult since Fig. 6 indicates that the frequencies computed by AVSP are outside domain 1, while the azimuthal spatial structure that can be drawn from the recorded pressure signal is fully compatible with the one obtained for the computed first azimuthal mode. The mismatch in frequency (around 500 Hz experimentally for around 400 Hz in AVSP) is probably due to the fact that the boundary conditions are not perfectly identified in AVSP and are sufficiently small to conclude that the first azimuthal mode (1A) is observed within domain 1.

From the five computed thermodynamic conditions, we have derived a linear correlation giving the frequency of the 2A mode as a function of the average temperature at the combustor outlet. The 2A mode has been chosen because it is the one that is more often encountered during the operation of the high pressure core and also because the fit of the computed acoustic frequency with the measured one is the best. A set of two hundred operating

conditions of the high pressure core corresponding to several days of tests has been considered. Then the differences between the acoustic frequency obtained with the previous correlation and the measured ones is calculated for each operating condition. Thus a table linking this difference to the measured amplitudes by the sensors put at the last compressor stator stage and by the one inside the combustor, is available. In order to simplify the presentation, the two hundred frequency differences have been distributed into five categories (Tab. 1) For each category the amplitude average is computed from the measured corresponding ones and the final results are synthesized into table. 1

**Table 1 Average amplitude for each category**

Category	Range of frequency difference, Hz	Average amplitude, mbar (last compressor stator stage)	Average amplitude, mbar (inside the combustor)
1	0 - 10	82	130
2	11- 20	65	112
3	21-30	60	101
4	31-40	40	54
5	41-50	26	26

Table.1 clearly shows that the maximum amplitudes are obtained when the frequency of the instability corresponds, with a small dispersion, to the acoustic frequency of the combustor and demonstrates the thermo acoustic nature of the phenomena. Moreover the sensor located into the combustor gives a stronger signal than the ones which are on the last compressor stator stage. Table. 1 also shows that a background acoustics activity exists which could be due to the activity of an unsteady source that should be identified.

**B. Appearance, Transition and Hysteresis**

The previous section has suggested that the mode responsible for Domain 1 unsteady activity is the first azimuthal (1A) while the mode inducing oscillations in Domain 2 is the second azimuthal (2A). The two acoustic modes can exist simultaneously or not depending on the thermodynamic state, on the combustion distribution and on acoustic boundary conditions. Indeed during the operations of the core engine, at least two singularities can provide strong changes for the acoustics boundary conditions of the combustor. They correspond to regimes where first, the high pressure turbine nozzle and second, the first stage of the high-pressure turbine choke. As anticipated from Fig. 1, choking the turbine nozzle has an obvious impact on the acoustic boundary conditions at the outlet of the

combustor. The choking of the first high-pressure row can have an impact on the acoustic boundary conditions of the combustor in two ways:

- A coupling mechanism between the two shock waves can lead to a change in acoustic boundary conditions or to a simple interaction / adaptation of the first shock to the presence of the second one. This mechanism alters the flow and acoustics near the combustor outlet.
- All the mass flow rate issued from the pre-diffuser does not enter the combustor and part of it flows into the combustor casing to cool the high pressure turbine nozzle and the first row of vanes. Row choking can change acoustic impedances and this information can be transmitted to the chamber through the external flow around the combustor then affecting all mass flow rates coming into the combustor and especially the one associated with the injection system. Although influence through primary holes, dilution holes and effusion cooling is also possible, it is expected that the main effect is through the injection system.

If this scenario is true, a simple verification is that there should be coincidence first, between the appearance of the unsteady activity and the turbine nozzle choking (around 8000-9000 rpm) and second, between the transition and the choking of the high-pressure turbine first row (between 13500 rpm and 15000 rpm). These tests have been performed experimentally over various test days and confirm this assumption by proving that unsteady activity on mode 1 begins when the turbine nozzle chokes and that mode 2 replaces mode 1 when the first high-pressure row of the turbine chokes. Thermal effects and dilatation affecting the geometric the flow passage areas are different between acceleration and deceleration of the core engine, therefore, as choking will not occur at the same rotation speeds for acceleration and deceleration, hysteresis is observed for the transition between the two acoustic modes.

### **C. Identification of the Source Exciting the Azimuthal Modes**

The previous sections have shown that the modes observed experimentally were two azimuthal modes of the chamber and that the choking of the passages downstream of the chamber, was triggering these modes. This analysis is incomplete because the source of the oscillation is still unknown: acoustics alone cannot induce instability in the absence of a forcing mechanism. To identify this mechanism, additional LES and experiments were performed first for the combustor itself (with combustion, Section C1) and then for the injection system alone (without combustion, section C2).

C1. LES of the combustor (reacting flow)

The previous experimental results can be analyzed in terms of Strouhal numbers: based on the air velocity at the injection system exit and on related characteristic dimensions, the Strouhal numbers of modes 1 and 2 vary between 0.2 and 0.5. This simple observation suggests that hydrodynamic modes might contribute to the unstable loop leading to modes 1 and 2: natural hydrodynamic instability in swirling sheared flow is known to produce large scale turbulent structures that are able to provide the instability initiation mechanism through the induced oscillations of the mixing rate between air and fuel and of the reaction rate. In order to identify such large coherent structures, an analysis of the following operating point of the core engine ( $T_{30}=473\text{K}$ ,  $P_{30}=4,4$  bar and  $\text{FAR}=1,2\%$ ) corresponding to high levels of acoustic noise during tests has been made using LES. Figure 7 displays the LES geometry that includes the high-pressure distributor at the chamber outlet to reproduce the corresponding acoustic condition (a complete analysis of the LES results is given in the PhD thesis of S. Roux<sup>9</sup>). At this regime, the high-pressure distributor is almost choked and its impedance is close to a choked nozzle (which means that it behaves acoustically almost like a rigid wall). Fuel is supposed to vaporize instantaneously when it enters the chamber and is injected on the burner axis (see Fig. 8).

Typical LES fields at random instants are given in Fig. 8. The flame is stabilized in the primary zone by the large swirl level. The isosurface of the stoichiometric mixture fraction allows a visualization of the natural instability mode observed in almost all swirling flows at these levels of swirl<sup>10</sup>: a precessing vortex core (PVC) exists on the chamber axis and moves both the rich zones and the flame front around the axis of the burner. This instability mode is not very strong in this case, where the chamber is isolated from any upstream forcing, but it indicates a clear sensitivity in the frequency range of the PVC: the spectra of axial velocity obtained by LES on the burner axis (Fig. 9), reveals that the PVC appearing in this chamber is produced at a frequency ranging from 600 to 1200 Hz. The recirculation zone and the flame move in the same frequency range. This range contains the frequency of the mode observed in the experiment in Domain 2 and corresponds to Strouhal numbers of the order of 0.6 that is typical of such flow. Even though this LES does not prove that the PVC is the source of the instability, it confirms that the chamber reacts strongly in this frequency range and that no upstream perturbation is needed to destabilise the flow inside the combustor. Therefore the field of investigation can be reduced to the combustor module only.

## C2. Experimental and LES study of injection system unsteadiness (no combustion).

The objective is now to confirm the previous findings for the complete range of operating conditions of the injection system and to identify technological modifications in order to suppress instability. Focus has been put on



pure thermo-acoustic behaviour because no response of the fuel injector regarding possible unsteadiness of the liquid mass flow rate due to the acoustic wave has been detected during the operation of the high pressure core in the presence of high amplitude instability. The high liquid pressure loss at the injector tip, of more than 40 bar, implies that the acoustic wave has a very little impact on the fuel flow rate. Moreover, a mechanical analysis of the complete injector has shown that it cannot react for the frequency range involved in the analysis. Since it is not conceivable to modify the combustor geometry at this development step in order to make it insensitive to the perturbation induced by the source, changes to the air system associated with the injection system, in order to suppress the hydrodynamic source, have to be identified.

Fig. 10 displays the air system associated with the injection system. It is usually comprised of five main elements: cup holes, purge holes, first swirler, second swirler and a cooling system. The noise generated by the air system has been characterized from experimental results at an atmospheric pressure for different flow conditions. The air system was installed into a specific setup fed by air to generate different pressure drops from 1% to 6%. A microphone was installed some centimeters downstream from the setup. Post processing of the monitored values of unsteady pressure allows for the determination of the pressure spectrum for each operating condition (Fig. 11). For frequencies lower than 1000 Hz, a moving peak with respect to pressure drop is present. For a pressure drop equal to 1%, this peak is centred around 300Hz, for a pressure drop equal to 4%, it is centred around 600 Hz and for a pressure drop equal to 6%, it is centred around 800Hz. This peak is intense and this result confirms the LES suggestion of the previous section, indicating that the air system could be at the origin of the unsteady activity and acts as an acoustic source where frequency varies as a function of the flow velocity through the air system. The resulting unsteady activity amplitude depends on the amplification rate by combustion within the combustor. When the frequency peak coincides with the natural frequency of the combustor, amplitude is expected to be high, otherwise it remains low. This analysis seems to be confirmed by Fig. 21 displaying the evolution of the measured amplitude during an acceleration of the core engine and shows the large corresponding variations of amplitude and by the analysis given in section A.

In order to identify what elements or element combinations of the air system could be responsible for this hydrodynamic instability, some complementary tests have been made to obtain the acoustic spectra corresponding to the cases described by Table. 2, when pressure loss varies from 1% to 6%.

**Table 2 - Air system configurations**

Case	Cup holes	Purge holes	Swirler 1	Swirler 2
1	Open	Open	Open	Open
2	Closed	Closed	Open	Open
3	Closed	Closed	Open	Closed
4	Closed	Closed	Closed	Open
5	Closed	Open	Closed	Open
6	Open	Open	Closed	Closed

Fig. 12 to Fig. 16 display a zoom of the obtained acoustic spectra centred on the range of frequencies of interest for cases two to six and for two pressure losses (2% and 6%). Since the scales are different between all the records, the maximum and the minimum amplitudes are directly indicated within the figures. Fig. 12 suggests that this moving peak results from the hydrodynamic instability of the flow issued from the swirlers. Fig. 13 and Fig.14 indicate that only swirler 2 is involved in instability with a possible amplification mechanism by a coupling with the flow of the purge holes (Fig. 15). Fig. 16 demonstrates that the flow issued from the purge holes and from the cup holes does not generate any hydrodynamic instability. Since LES captures the dynamics of swirling flows rather easily<sup>21</sup>, the complete experimental configuration has been computed for pressure losses equal to 4% and for the configurations that correspond to case 1 and 3 of Table 2. The overall mesh is displayed by Fig. 17 and details near the air system are provided by Fig. 18. A virtual sensor has been put into the computations in order to obtain the acoustic spectra to be compared with the experimental one. Fig. 19 indicates that the high amplitude acoustic peak is very well captured by LES at the right frequency while no particular acoustic activity can be detected on Fig. 20 as was expected from the previous experimental results. Therefore LES will be considered as useful for the re-design process of the air system.

**D. Modification of the injection system in order to solve the problem.**

The previous analysis demonstrated that the air system was the origin of unsteady activity and needed a specific design optimization. Due to the need for NOx emission reduction, air system permeability has to be kept constant and changes cannot be easily introduced because modifications brought to the air system can impact on performance other than emission, such as temperature profiles at the exit of the combustor, a weak extinction limit and the altitude restart domain. Changes have been applied to the air flow split of the air system (Table. 3) and to the locking of the vanes of swirler 2 going from 60° to 45° in order to get an optimized design.

**Table 3 - Details of the changes for the air flow split**

Element	Current design	Optimized design
Purge holes	5%	2%
Cup holes	28%	32%
Swirler 1	24%	32%
Swirler 2	31%	24%
Cooling	11%	10%

During the optimization process, LES computations of some other designs have been performed and the selection of the optimized one has been made only from the analysis of the corresponding computational results. The new system has been manufactured and tested without combustion in the set up of Section C2 with the same procedure as in C2. The corresponding acoustic spectrum for 4% pressure loss is displayed in Fig. 22. The comparison of Fig. 11 (corresponding to the initial design) with Fig. 22 (corresponding to the optimized design) reveals that the 600 Hz peak has disappeared. The same conclusion is obtained for the complete range of injection system operating conditions in terms of pressure loss. More importantly, tests with combustion were repeated and as expected, no unsteady activity has been detected with the optimized air system.

## V. Conclusion

The objective of design for future lean combustion systems in gas turbine chambers, is to make the combustor and injection systems free of any instability problem over their entire domain of operation. In the present research, experiments, LES and acoustic modelling codes have been used together in order to analyze, understand and solve a complex combustion instability problem occurring on a high-pressure core engine. This work demonstrates that the maturity level gained by numerical tools is now sufficient to complement experiments during the resolution of industrial problems at the design phase. This is a significant result since lean combustion is the strategy chosen by most engine manufacturers in order to make future engines more environmentally friendly in terms of pollution emissions. The present work also confirms the importance of acoustic boundary conditions both in the real world, because they control the oscillation modes, and in the numerical world because they are needed to provide the correct predictions of unstable modes. This also suggests that the characterization of acoustic impedances will be a major task in the future, at the high-pressure compressor outlet, at the combustor outlet for choked and non-choked conditions and for combustor walls when they are effusion cooled<sup>15</sup>. Since LES tools are at the core of the numerical

process, it seems that further improvements regarding the capacity of LES to take into account two-phase flow and especially the influence of acoustics on the liquid phase from injection to evaporation, will also be welcome.

## VI. References

- <sup>1</sup>Lieuwen, T., Yang, V., "Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines: Operational Experience, Fundamental Mechanisms, and Modeling", Progress in Astronautics and Aeronautics Series. AIAA, Washington, DC, 2006, Vol 210.
- <sup>2</sup>Rayleigh, L., "The explanation of certain acoustic phenomena", Royal Institution Proceedings, 1878, pp. 542, 1878.
- <sup>3</sup>Schmitt, P., Schuermans, B., Geigle, K. P., Poinso, T., "Large-eddy simulation and experimental study of heat transfer, nitric oxide emissions and combustion instability in a swirled turbulent high pressure burner", J. Fluid Mech, Vol. 570, 2007, pp.17 – 46.
- <sup>4</sup>Janicka, J., Sadiki, A., "Large eddy simulation for turbulent combustion", *Proceeding of the Combustion Institute*, Vol. 30, 2004, pp. 537-547
- <sup>5</sup>Stow, S., Dowling A., "Thermoacoustic oscillations in an annular combustor", ASME, 2001, GT-0374
- <sup>6</sup>Walz, G., Krebs, W., Hoffmann, S., Judith, H., "Detailed analysis of the acoustic mode shapes of an annular combustion chamber", *AIAA Int. Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition*, 1999, Paper 99-113.
- <sup>7</sup>Selle, L., Benoit, L., Poinso, T., Krebs, W., "Joint use of compressible LES and Helmholtz solvers for analysis of rotating modes in an industrial swirled burner". *Comb. Flame*, Vol.145 (1-2), 2006, pp.194-205.
- <sup>8</sup>Martin, C., Benoit, L., Nicoud F., Poinso, T., "Analysis of acoustic energy and modes in a turbulent swirled combustor", *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 4, 2006, pp. 741-750.
- <sup>9</sup>Roux, S., "LES methodologies for gas turbine chambers", PhD thesis, INP Toulouse, 2007.
- <sup>10</sup>Syred, N., "A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core in swirl combustion systems" *Progress in Energy and Combustion Sciences*, Vol. 32, No. 2, 2006, pp. 93-161.
- <sup>11</sup>Schildmacher, K., Hoffman, A., Selle, L., Koch, R., Schulz, C., Bauer, H-J., Poinso, T., Krebs, W., Prade, B., "Unsteady flame and flow field interaction of a premixed model gas turbine burner", *Proceeding of the Combustion Institute*, Vol. 31, 2007, 3197-3205.

- <sup>12</sup>Boudier, G., Gicquel, L., Poinso, T., Bissières, D., Berat, C., "Comparison of LES, RANS and Experiments in an Aeronautical Gas Turbine Combustion Chamber", *Proceeding of the Combustion Institute*, Vol. 31, 2006, in press.
- <sup>13</sup>Sengissen, A., Giauque, A., Staffelbach, G., Porta, M., Krebs, W., Kaufmann, P., Poinso, T., "LES of piloting effects on turbulent swirling flames", *Proceeding of the Combustion Institute*, Vol. 31, 2006, in press.
- <sup>14</sup>Sengissen, A., Poinso, T., Van Kampen, J.F., Kok, J.B., "Response of swirled non-premixed burner to fuel flow rate modulation", 2006, To appear in Springer CY-LES.
- <sup>15</sup>Mendez, S., Nicoud, F., Poinso, T., "LES of a turbulent flow around a multi perforated plate", 2006, To appear in Springer CY-LES.
- <sup>16</sup>Thobois, L., Rymer, G., Soulères, T., Poinso, T., Van den Heuvel, "Large-eddy Simulation for the prediction of aerodynamics in IC engines", *International Journal of Vehicle Design*, Vol. 39, No. 4, 2005, pp. 368-382.
- <sup>17</sup>Giauque, A., Selle, L., Poinso, T., Buechner H., Laufmann P., Krebs, W., "System identification of a large scale swirled partially premixed combustor using LES and measurements", *Journal of Turbulence*, Vol. 6, No. 21, 2005, pp. 1-20.
- <sup>18</sup>Nicoud, F., Poinso, T., "Thermoacoustic instabilities: should the Rayleigh criterion be extended to include entropy changes?", *Combustion and Flame*, Vol. 142, 2005, pp. 153-159.
- <sup>19</sup>Poinso, T., Veynante, D., "Theoretical and Numerical Combustion", 2<sup>nd</sup> ed., R.T. Edwards, 2005, Chap. 8.
- <sup>20</sup>Priere, C., Gicquel, L. Y. M., Gajan, P., Strzelecki, A., Poinso, T. and Berat, C., "Experimental and Numerical Studies of Dilution Systems for Low Emission Combustors", *AIAA Journal*, Vol. 43, No. 8, 2005, pp. 1753-1766.
- <sup>21</sup>Roux S., Lartigue G., Poinso T., Meier U. and Berat C., "Studies of mean and unsteady flow in swirled combustor using experiments, acoustic analysis and Large Eddy Simulations", *Combustion and Flame*, Vol. 141, 2005, pp. 40-54.
- <sup>22</sup>Moureau V., Lartigue G., Sommerer Y., Angelberger C., Colin O., Poinso T., "High-order methods for DNS and LES of compressible multi-component reacting flows on fixed and moving grids", *Journal of Computational Physics*, Vol. 202, 2005, pp. 710-736.
- <sup>23</sup>Sommerer Y., Galley D., Poinso T. Ducruix S., Lacas F. and Veynante D., "Large eddy simulation and experimental study of flashback and blow-off in a lean partially premixed swirled burner", *Journal of Turbulence*, 2004, Vol. 5. 037.
- <sup>24</sup>Selle, L., Lartigue, G., Poinso, T., Koch, R., Schildmacher, K.-U., Krebs, W., Prade, B., Kaufmann, P., Veynante, D., "Compressible Large-Eddy Simulation of turbulent combustion in complex geometry on unstructured meshes". *Combustion and Flame*, Vol. 137, 2004, pp. 489-505.
- <sup>25</sup>Pitsch, H. Large Eddy Simulation of Turbulent combustion *Annual Review of Fluid Mechanics* 38, 452-482, 2006.
- <sup>26</sup>Schmitt, P., Schuermans, B., Geigle, K. P. and Poinso, T. Large-eddy simulation and experimental study of heat transfer, nitric oxide emissions and combustion instability in a swirled turbulent high pressure burner. *J. Fluid Mech.* 570, 17-46, 2007.

<sup>27</sup> Menon, S. and Patel N.. Subgrid modeling for simulation of spray combustion in large scale combustors *AIAA J.* 44, 4, 709-723, 2006.

<sup>28</sup> James, S., Zhu, J. and Anand, M Large eddy simulation as a design tool for gas turbine combustion systems *AIAA J.* 44, 4, 674-686, 2006.

<sup>29</sup> Huang, Y., Wang S. and Yang, V. Systematic analysis of lean-premixed swirl-stabilized combustion *AIAA J.* 44, 4, 724-740, 2006.

<sup>30</sup> Nicoud F., Benoit L. and Sensiau C. Acoustic Modes in Combustors with Complex Impedances and Multidimensional Active Flames *AIAA J.* 45, 2, 426-441, 2007.

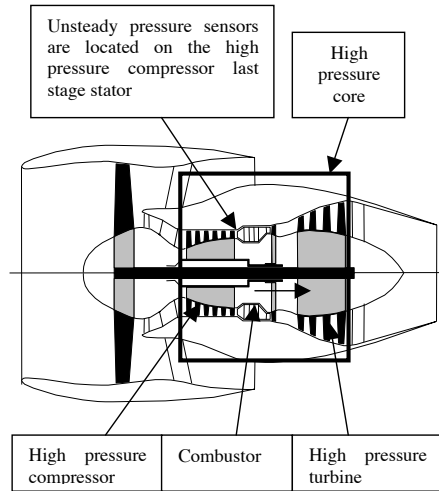


Fig. 1 Aero engine classical structure

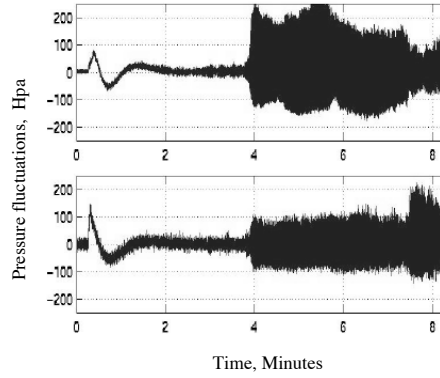
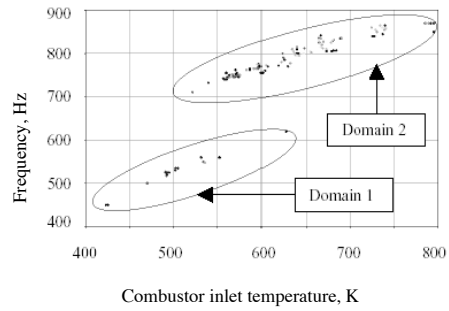
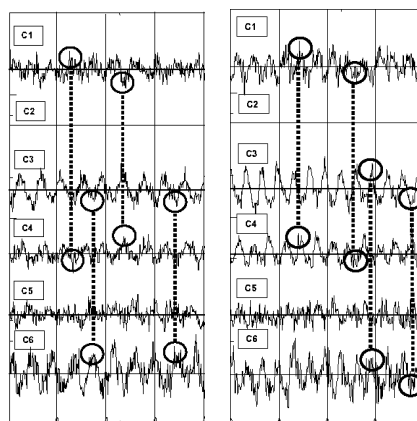


Fig. 2 Typical signals recorded by unsteady pressure sensors

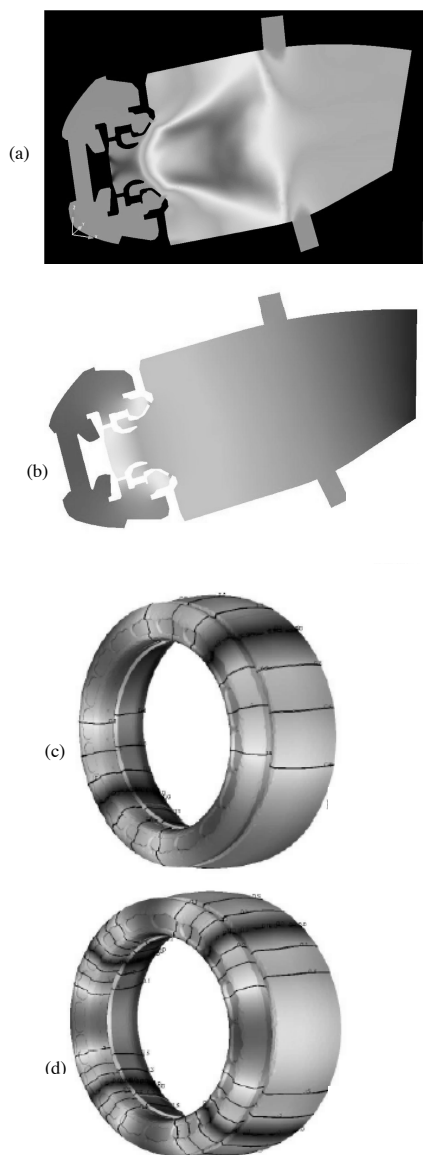


**Fig. 3 Unsteady activity domains with respect to combustor inlet temperature**



**Fig. 4 Typical signals recorded by the last high pressure compressor stage unsteady pressure sensors when unsteady activity runs into domain 1 ( left) and into domain 2 (right).**





**Fig. 5 (a): Configuration and speed of sound field, scale is from 340m/s to 995m/s. (b): structure of mode 1L, (c): structure of the first azimuthal acoustic modes. (d): structure of the second azimuthal acoustic modes. Pressure fluctuation modulus are displayed for mode structure. Black colours indicate maximum pressure amplitude and white colours indicate pressure nodes.**

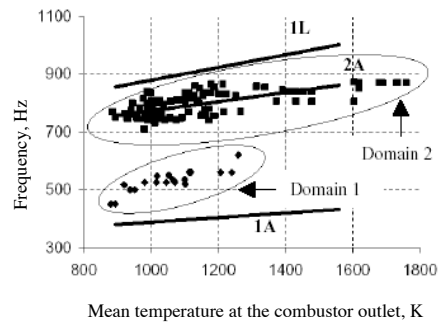


Fig. 6 Comparison of the evolution of unsteady activity frequency with the computed frequencies of 1L, 1A and 2A acoustical modes of the combustor.

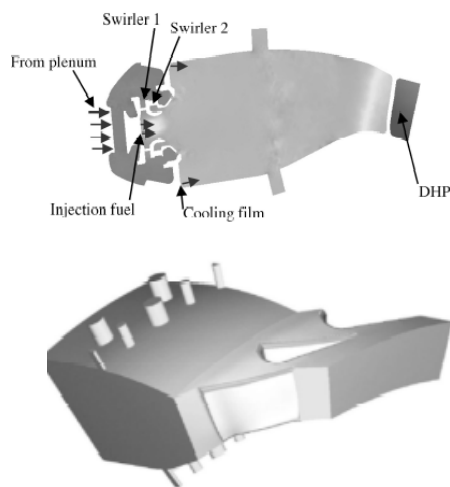


Fig. 7 Configuration for LES computation. Pressure field on a central cutting plane and global geometry.

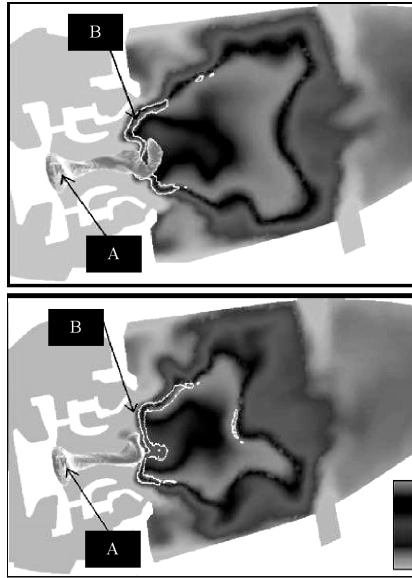


Fig. 8 Temperature field in central cutting plane. B is the isosurface of stoichiometric mixture fraction at two instants. A is the fuel injection. The temperature range is from 500K to 2600K (dark regions).

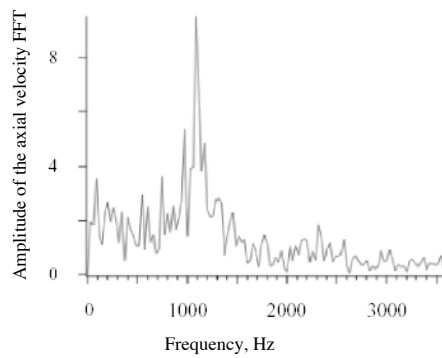


Fig. 9 FFT of axial velocity at the exit of the injection system (computational data).

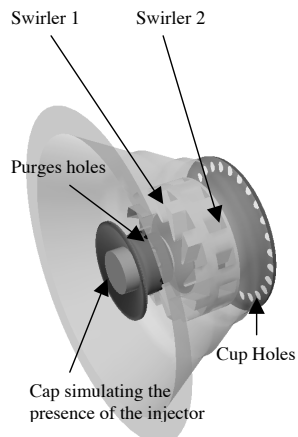


Fig. 10 Air system with a part of the experimental set up.

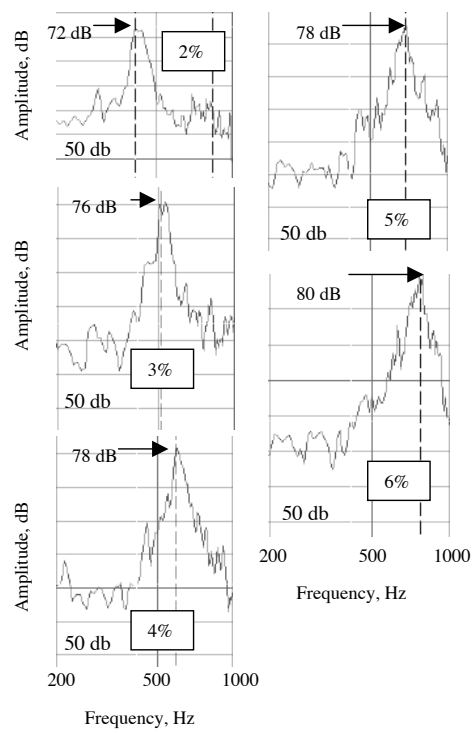


Fig. 11 Pressure spectrum for configuration 1

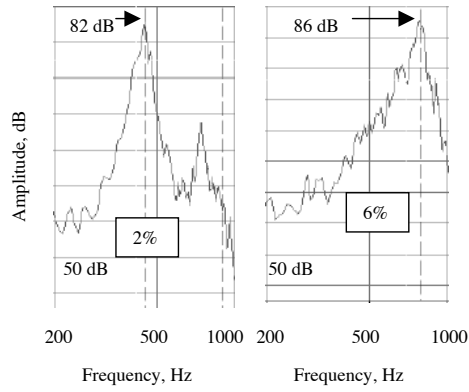


Fig. 12 Pressure spectrum for configuration 2

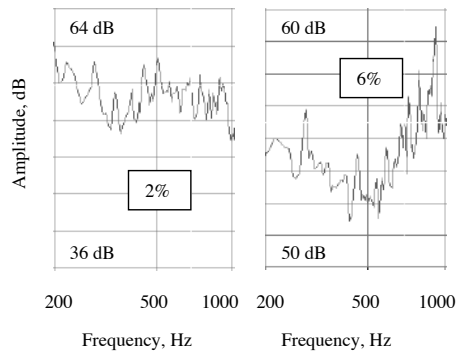
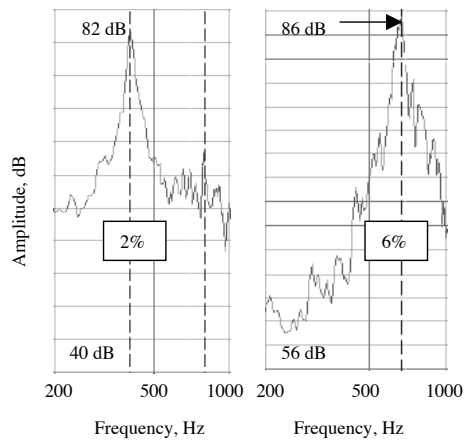
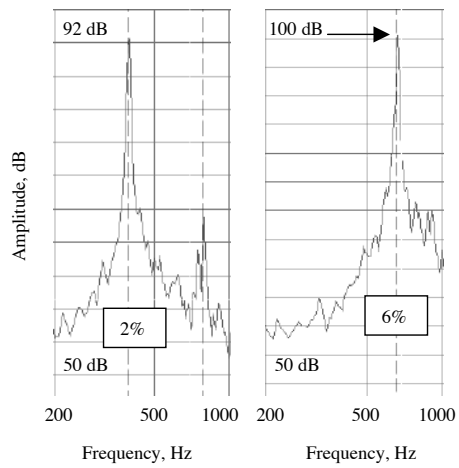


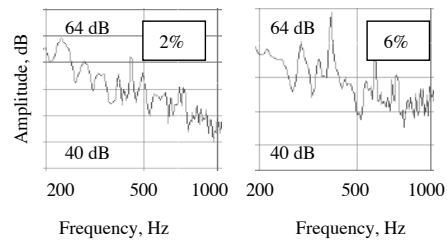
Fig. 13 Pressure spectrum for configuration 3



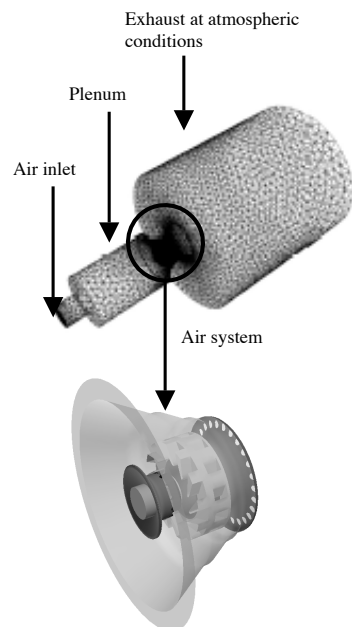
**Fig. 14** Pressure spectrum for configuration 4



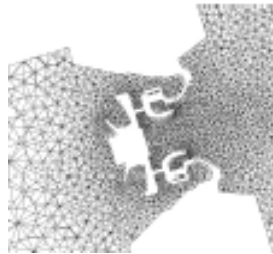
**Fig. 15** Pressure spectrum for configuration 5



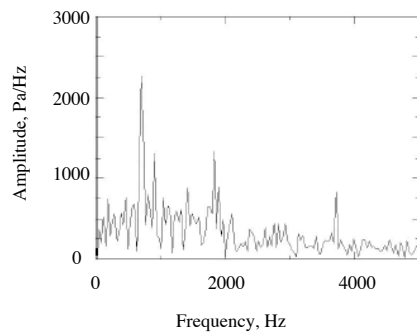
**Fig. 16 Pressure spectrum for configuration 6**



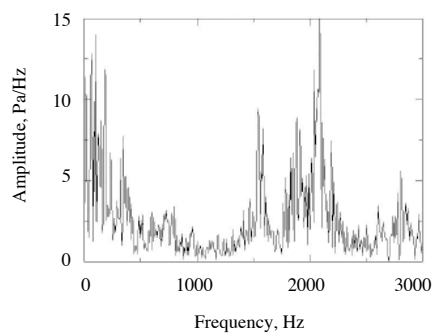
**Fig. 17 Complete mesh for the non reactive LES computations.**



**Fig. 18** Details of the mesh for the air system.

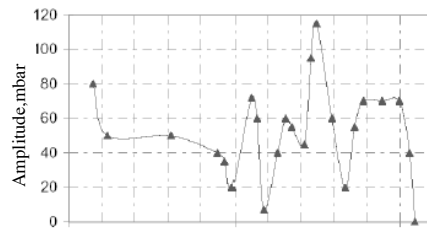


**Fig. 19** Computed spectra for configuration 1.

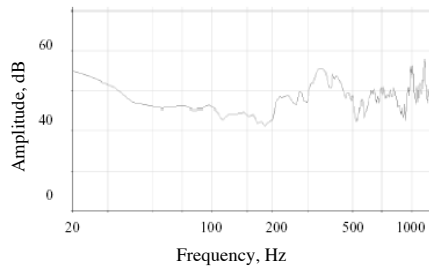


**Fig. 20** Computed spectra for configuration 3.





**Fig. 21 One-hour temporal evolution of unsteady activity amplitude.**



**Fig. 22 Pressure spectrum for the modified injection system for a pressure drop =4%.**

# Numerical assessment of thermo-acoustic instabilities in gas turbines

Franck Nicoud\*

*Université Montpellier II, CC51, 34095 Montpellier, France*

Laurent Benoit and Claude Sensiau†

*CERFACS, 42 Av. G. Coriolis, 31057 Toulouse, France*

and Thierry Poinsot‡

*IMFT, allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France*

**A new methodology to assess the effect of the flame/acoustics coupling on the stability of the modes without combustion is presented. An asymptotic method is used to account for the acoustic flame transfer function. The efficiency and accuracy of the approach is demonstrated on an academic case similar to a Rijke tube configuration.**

## Introduction

It has been known for a long time that the coupling between acoustic waves and flames in industrial systems can lead to high amplitude instabilities.<sup>11–13</sup> In addition to inducing oscillations of all physical quantities (pressure, velocities, temperature, etc ...), these instabilities can increase the amplitude of the flame motion and, in extreme cases destroy part of the burner due to large heat transfer in the premixing tube. Since the equivalence ratio oscillates when instabilities are present, there is a general trend for combustors to be more unstable when operating in the lean regime (more air injected than necessary to burn the amount of fuel injected). Besides, due to new international constraints, pollutant emissions must be reduced and many gas turbine manufacturers strategies consist in operating their systems under leaner and leaner conditions. Consequently, there is a need to better understand combustion instabilities and to predict them at the design level. The objective of this paper is to present a methodology to predict unstable/stable thermo-acoustic modes of a combustor. Since no assumptions about the geometry are required, this method can be applied to realistic configurations.<sup>9</sup> The equations of linear acoustics are first written in the case of three dimensional reactive flows and the problem is closed by using flame transfer functions (which can be evaluated with Large Eddy Simulation calculations on realistic configurations<sup>7</sup>). An asymptotic expansion method is then developed in order to recover a classical eigenvalues problem from these equations. Finally, the methodology is tested by computing an academic example whose theoretical solution is known.

## METHODOLOGY

### Governing Equations

A suitable description of the thermo-acoustic instabilities can be derived by making use of the perfect gas law and classical equations of fluid mechanics, i.e. equations of mass, momentum and energy conservation. Besides, assumptions of constant mean pressure and low Mach number appear reasonable from gas turbines observations. Moreover, since eigenmodes exhibited in practical systems lie in the low/medium frequency domain, viscosity as well as thermodiffusivity may moreover be neglected. Under these assumptions, a wave equation for small pressure perturbations may be derived<sup>10</sup> and reads:

$$\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla p') - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -(\gamma - 1) \frac{\partial \dot{q}'}{\partial t} \quad (1)$$

where primed and overbarred variables stand for the thermo-acoustic perturbation and mean variables respectively whereas  $p$ ,  $c$  and  $\dot{q}$  stand for pressure, sound speed and rate of heat release. Note that the specific heat ratio  $\gamma$  has been assumed constant for deriving this equation but the flow field fluctuations are not supposed isentropic. Eq. 1 is thus relevant to any large scale of small amplitude pressure fluctuations. Solving this equation requires a model for the rate of heat release fluctuations  $\dot{q}'$  in order to close the problem. As suggested by the seminal studies of Crocco,<sup>4,5</sup> the

\* Professor, Université Montpellier II and CNRS UMR5149.

† PhD Student, CFD Team, CERFACS

‡ Research director IMF Toulouse, INP de Toulouse and CNRS. Associate fellow AIAA.

flame is modeled as a purely acoustic element, neglecting the effects of local turbulence, chemistry or heat losses. The simplest model reads:

$$\frac{\dot{q}'(\vec{x}, t)}{\bar{q}(\vec{x})} = n_l(\vec{x}) \frac{\vec{u}'(\vec{x}_{ref}, t - \tau(\vec{x})) \cdot \vec{n}_{ref}}{\vec{u}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}} \quad (2)$$

where  $n_l(\vec{x})$  is a local interaction index and  $\tau(\vec{x})$  stands for a time lag between the local unsteady heat release  $\dot{q}'(\vec{x}, t)$  and the acoustic velocity  $\vec{u}'$  at a reference position  $\vec{x}_{ref}$  and direction  $\vec{n}_{ref}$ . The other variables introduced are the local mean rate of heat release  $\bar{q}(\vec{x})$  and the mean speed at the reference point  $\vec{u}(\vec{x}_{ref})$ . This formulation generalizes the  $n - \tau$  model<sup>4,5</sup> used in the framework of one dimensional configurations with infinitely thin flames<sup>10</sup> to the case of three dimensional flows with distributed combustion. Assuming harmonic fluctuations of small amplitudes,  $p' = \Re(\hat{p}(\vec{x})e^{-i\omega t})$ , with  $i^2 = -1$ , equations 1 and 2 can be combined with the linearized momentum equation  $i\omega\vec{p}\vec{u} = \nabla\hat{p}$  to give:

$$\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \hat{p}) + \omega^2 \hat{p} = \frac{(\gamma - 1)\bar{q}(\vec{x})}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})\vec{u}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}} n_l(\vec{x}) e^{i\Re(\omega)\tau(\vec{x})} \nabla \hat{p} \cdot \vec{n}_{ref}(\vec{x}_{ref}) \quad (3)$$

This latter equation together with proper boundary conditions constitutes the eigenvalue problem satisfied by the harmonic fluctuations  $\hat{p}$  in the flow domain  $\Omega$  bounded by the surface  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_{VN} \cup \partial\Omega_Z$ . Three types of boundary conditions have been considered:

- A Dirichlet condition  $\hat{p} = 0$  on  $\partial\Omega_D$ .
- A Neumann condition  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ ,  $\vec{n}$  the outward normal unit vector on  $\partial\Omega_N$ .
- An admittance type condition on  $\partial\Omega_Z$  which implies:

$$\frac{1}{Z} = \frac{-i\bar{c}\nabla\hat{p} \cdot \vec{n}}{\omega\hat{p}} \quad (4)$$

where  $Z$  is the reduced impedance  $Z = \hat{p}/(\bar{\rho}\bar{c}\vec{u} \cdot \vec{n})$ .

#### Numerical approach

At first, the problem without source term is considered. This corresponds to the case of an acoustically passive flame with zero unsteady heat release  $\dot{q}'$ . Note however that the mean heat release  $\bar{q}$  is not necessary zero. Consistently, the mean temperature and speed of sound may still be functions of space. Using the classical Galerkin finite element method to discretize the problem and assuming  $1/Z = \alpha_1/\omega + \alpha_2 + \alpha_3\omega$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , complex constants, one ends up with the finite dimension problem

$$[A][P] + \omega[B][P] + \omega^2[P] = 0 \quad (5)$$

where the matrix  $[A]$  of size  $m$  represents the  $\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla)$  operator and  $[B]$  represents the boundary terms.  $[P]$  is the column vector whose components are the values of  $\hat{p}$  at the  $m$  nodes of the finite element mesh. The resulting problem is not linear anymore (with respect to  $\omega^2$ ) but this difficulty can be overcome by using a suitable variable transformation.<sup>3</sup> A classical eigenvalue problem of size  $2 \times m$  can then be recovered and solved by an Arnoldi method.<sup>6</sup>

#### Accounting for the unsteady combustion

The eigenvalue problem associated with Eq. 3 can not be solved directly by classical methods developed for linear algebra. In the present approach, the flame is considered as an element which slightly modifies the eigenmode without combustion. Specifically, a global energy form of Eq. 3 is first derived by multiplying this equation by  $\hat{p}$  and integrating over  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \hat{p} [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \hat{p}) + \omega^2 \hat{p}] dV = \int_{\Omega} \frac{(\gamma - 1)\bar{q}(\vec{x})}{\bar{\rho}(\vec{x}_{ref})\vec{u}(\vec{x}_{ref}) \cdot \vec{n}_{ref}} n_l(\vec{x}) e^{i\Re(\omega)\tau(\vec{x})} \hat{p} \nabla \hat{p} \cdot \vec{n}_{ref}(\vec{x}_{ref}) dV \quad (6)$$

We then define the expansion parameter  $\epsilon = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} n_l(\vec{x}) dV$  and seek for the eigenmodes  $(\omega, \hat{p})$  of Eq. 3 as a first order expansion around the modes without combustion  $(\omega_0, \hat{p}_0)$ :

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + o(\epsilon^2) \quad (7)$$

$$\hat{p} = \hat{p}_0 + \epsilon\hat{p}_1 + o(\epsilon^2) \quad (8)$$

Introducing these relations in Eq. 6 and keeping only first order terms give the following equation:

$$\int_{\Omega} \hat{p}_0 [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \epsilon \hat{p}_1) + \omega_0^2 \epsilon \hat{p}_1] dV = -2\epsilon \int_{\Omega} \hat{p}_0^2 \omega_0 \omega_1 dV + \int_{\Omega} \frac{(\gamma - 1) \bar{q}(\bar{x}) (\nabla \hat{p}_0 \cdot \bar{n}_{ref})(\bar{x}_{ref})}{\bar{\rho}(\bar{x}_{ref}) \bar{u}(\bar{x}_{ref}) \cdot \bar{n}_{ref}} n_l(\bar{x}) e^{i\Re(\omega_0)\tau(\bar{x})} \hat{p}_0 dV \quad (9)$$

The LHS term can be simplified by using a reduction order method<sup>1</sup> in which  $\hat{p}_1 = \hat{p}_0 F_1$ ,  $F_1$  being a spatial derivable function. Thanks to this relation, the LHS term of Eq. 9 becomes:

$$\int_{\Omega} \hat{p}_0 [\nabla \cdot (\bar{c}^2 \nabla \epsilon \hat{p}_1) + \omega_0^2 \epsilon \hat{p}_1] dV = \epsilon \int_{\partial\Omega} \bar{c}^2 \hat{p}_0^2 \nabla F_1 \cdot d\vec{S} \quad (10)$$

which is obviously null on  $\partial\Omega_D$  since  $\hat{p}_0 = 0$ . Moreover the eigenmodes with flame ( $\omega, \hat{p}$ ) and without flame ( $\omega_0, \hat{p}_0$ ) verify the same boundary conditions, one can show that  $\nabla F_1 \cdot d\vec{S} = 0$  on  $\partial\Omega_N$  and that the following relation is valid at the first order in  $\epsilon$  on  $\partial\Omega_Z$ ,

$$\nabla F_1 \cdot d\vec{S} = \frac{i\omega_1}{\bar{c}Z(\omega_0)} \left( 1 - \frac{1}{Z(\omega_0)} \frac{\partial Z}{\partial \omega}(\omega_0) \right) \quad (11)$$

Consequently, by introducing this relation in the RHS term of Eq. 10, an expression for the perturbation  $\epsilon\omega_1$  can be obtained:

$$\epsilon\omega_1 = \frac{\int_{\Omega} \bar{q}(\bar{x}) \hat{p}_0 n_l(\bar{x}) e^{i\Re(\omega_0)\tau(\bar{x})} (\gamma - 1) (\nabla \hat{p}_0 \cdot \bar{n}_{ref})(\bar{x}_{ref}) dV}{\bar{\rho}(\bar{x}_{ref}) \bar{u}(\bar{x}_{ref}) \cdot \bar{n}_{ref} \left[ 2\omega_0 \int_{\Omega} \hat{p}_0^2 dV + \int_{\partial\Omega_Z} \frac{i\epsilon \hat{p}_0^2}{Z(\omega_0)} \left( 1 - \frac{1}{Z(\omega_0)} \frac{\partial Z}{\partial \omega}(\omega_0) \right) dS \right]} \quad (12)$$

In the case where the denominator of Eq .12 is not null, this equation provides a simple way to check whether an eigenmode without combustion ( $\omega_0, \hat{p}_0$ ) is made stable ( $\Im(\omega_0 + \epsilon\omega_1) < 0$ ) or unstable ( $\Im(\omega_0 + \epsilon\omega_1) > 0$ ) by the coupling with the unsteady flame.

## ACADEMIC EXAMPLE OF APPLICATION

### Description of the configuration and theoretical solution

The aforementioned method is tested on the configuration illustrated by Fig. 1. It deals with a two dimensional tube with a closed inlet, an opened outlet and a mean temperature jump induced by a flame located at its middle. Since the flame thickness is much smaller than the typical wave length, the flame is considered as infinitely thin. Following the methodology of Poinso and Veynante,<sup>10</sup> suitable jump relations across the flame provide a characteristic relation matched by the pulsation  $\omega$  of the longitudinal modes,

$$\cos\left(\frac{kL}{4}\right) [n e^{i\omega\tau} \sin^2\left(\frac{kL}{4}\right) - 3\cos^2\left(\frac{kL}{4}\right) + 2] = 0 \quad (13)$$

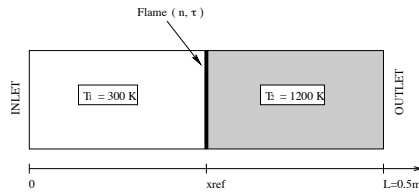
where  $k = \omega/c_1$  stands for the wave number in the fresh gases. With the formalism chosen in the second section, an eigenmode is unstable whenever  $\Im(\omega)$  is positive. Besides, the classical one dimensional  $n - \tau$  model<sup>10</sup> used in Eq. 13 can be related to the model in Eq. 2 and:

$$\epsilon = \frac{\bar{c}^2(\bar{x}_{ref})}{(\gamma - 1)c_p(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)} n \quad (14)$$

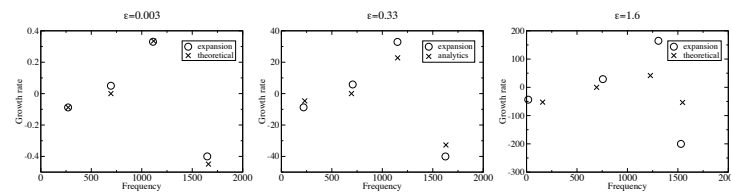
where  $c_p$  is the massic heat capacity at constant pressure. In this simple example,  $c_p$  and  $\gamma$  are considered spatially constant and are equal to  $1004.5 J.K^{-1}.kg^{-1}$  and 1.4 respectively . In addition, following Crocco,<sup>4,5</sup> the heat release fluctuations are coupled to the velocity fluctuations in the fresh gas. In this academic example it means that the theoretical reference position required for defining the flame transfer function is chosen immediately upstream the flame, i.e. at the abscissa  $x_{ref} = 0.25m$ .

### Application of the asymptotic expansion method

Although the configuration described in is one dimensional, all the calculations have been performed on unstructured two dimensional meshes with triangular cells. Two kinds of mesh have been used: a first one with 561 nodes and a second one, highly refined in the flame vicinity, with 5231 nodes. Two main issues have been addressed:



**Fig. 1** configuration retained for first order expansion method validation



**Fig. 2** Representation in the complex plan of the theoretical and computed eigen frequencies

- Optimal position of the reference point:

Because of the large temperature variation near  $x_{ref}$ , the computation of the acoustic pressure gradient at the reference point (see Eq. 12) is not reliable in the vicinity of the flame. To overcome this difficulty, the reference location has been taken as the closest grid point to the flame in the fresh gas viz.  $x_{ref} = 0.24m$  for the 561 nodes mesh instead of  $x_{ref} = 0.25m$  for the theoretical model. The refinement in the second mesh allows a reference position closer to the theoretical value:  $x_{ref} = 0.249m$ . Table 1 shows that the results obtained with the two meshes are in close agreement with the theory: as long as the gap between the theoretical and the numerical reference location is small in comparison with the eigenmode wavelength, accurate computation can be performed.

	$x_{ref} = 0.24m$	$x_{ref} = 0.249m$	$x_{ref} = 0.25m$
<b>coarse mesh (561 nodes)</b>	$270.4 - 0.087i$	X	X
<b>refined mesh (5231 nodes)</b>	$271.3 - 0.093i$	$271.4 - 0.088i$	X
<b>theoretical</b>	$271.5 - 0.098i$	$271.6 - 0.088i$	$271.6 - 0.088i$

**Table 1** Effect of reference position value and the grid resolution for the first eigen frequency ;  $\epsilon = 0.003$ ,  $\tau = 10^{-4}s$ . Cross "X" indicates unfeasible calculation.

- Validity domain with respect to expansion parameter  $\epsilon$  value:

Three values of the expansion parameter are considered,  $\epsilon = 0.003$  ( $n = 0.01$ ),  $\epsilon = 0.33$  ( $n = 1.0$ ) and  $\epsilon = 1.6$  ( $n = 5.0$ ) in any case the time delay being  $\tau = 10^{-4}s$ . Eigen frequencies obtained in each case are compared with theoretical solutions of Eq. 13. The results are available in Fig. 2 and displayed in the complex plane. As expected, the computed eigen frequencies match the theoretical results for low values of  $\epsilon$ . Discrepancies appear for  $\epsilon$  values close to one but the error on the real part of the eigen frequencies is bounded to 15% excepted for the first mode with  $\epsilon = 1.6$ . Concerning the imaginary part of the eigen frequencies, the error is more important but the stability of the mode, i.e. the sign of the imaginary part, is always correctly predicted. Moreover, the third mode is always found the most unstable. From these results, first order asymptotic expansion seems to increase the shift induced by the flame in eigen frequency values but the trend is correctly predicted even for expansion parameter values beyond its theoretical application range ( $\epsilon \ll 1$ ).

## CONCLUSION

A methodology to evaluate the stability of the thermo-acoustic eigenmodes with an active acoustic flame has been proposed. Because of the particular source term induced by the flame, a special treatment is required. An asymptotic expansion method used together with a flame transfer function model allows to assess how the unsteady combustion modifies the stability of the eigenmodes of the system. This strategy is tested on an academic case. An other method based on a point fix algorithm<sup>14</sup> is available to evaluate the stability of the thermo-acoustic eigenmodes with an active acoustic flame.

Currently, the code developed by CERFACS, AVSP, is integrated with other solvers.<sup>16</sup> The aim of this computational chain is to model all phenomena playing a role in thermo-acoustic instability:

- compute the sound speed in the combustor,
- compute the boundary conditions taking into account the influence of the high pressure turbine stator,
- compute the flame transfert fonction,

to determine the eigenmodes of the combustor and their growing rates. There are two steps of increasing difficulty in this chain. First, it is useful to evaluate the eigenmodes without acoustic source due to the flamme. These modes are potentially dangerous.<sup>15</sup> Second, one can evaluate the growing rate for these modes with an appropriate flame transfert fonction.

We are currently testing these integrated solvers in industrial combustion chambers and results will be presented during the workshop.

### References

- <sup>1</sup>C. Bender. and S. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for scientists and Engineers Theoretical and Numerical Combustion*. McGraw-Hill International editions, 1987.
- <sup>2</sup>CERFACS AVBP: a LES code for reactive flows. [www.cerfacs.fr/cfd/avbp\\_code.php](http://www.cerfacs.fr/cfd/avbp_code.php)
- <sup>3</sup>F. Chatelin. *Eigenvalues of matrices* John Willey and Sons, pages 121-122, 1993
- <sup>4</sup>L. Crocco. *Aspects of combustion instability in liquid solid propellant rocket motors. Part i* J. American Rocket Society, 21:163-178, 1951.
- <sup>5</sup>L. Crocco. *Aspects of combustion instability in liquid solid propellant rocket motors. Part ii* J. American Rocket Society, 22, 1952.
- <sup>6</sup>R. Lehoucq, D. Sorensen. *ARPACK user's guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. [www.caam.rice.edu/software/ARPACK](http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK), 1997.
- <sup>7</sup>A. Kaufmann., F. Nicoud, T. Poinso *Flow forcing techniques for numerical simulation of combustion instabilities* Combustion and Flame, 131(4):371-385, 2001.
- <sup>8</sup>F. E. Marble, S. M. Candel. *Acoustic disturbance from gas non-uniformities convected through a nozzle* Journal of Sound and Vibration, 55(2), pages 225-243, 1977.
- <sup>9</sup>C. Martin, L. Benoit, F. Nicoud and T. Poinso *LES and acoustic analysis of combustion instability in a staged turbulent swirled combustor*. AIAA J. in press, 2005.
- <sup>10</sup>T. Poinso and D. Veynante. *Theoretical and Numerical Combustion*. Edwards, pages 355-408, 2001.
- <sup>11</sup>A. Putnam. *Combustion driven oscillations in industry*. American Elsevier, 1971.
- <sup>12</sup>L. Rayleigh. *The explanation of certain acoustic phenomena*. Nature, pages 319-321, 1878.
- <sup>13</sup>F.A. Williams. *Combustion theory*. Benjamin Cummings, 1985.
- <sup>14</sup>L. Benoit. *Prédictions des instabilités thermoacoustiques dans les turbines à gaz*. Thèse, UNIVERSITE MONTPELLIER II, 2005.
- <sup>15</sup>L. Selle, L. Benoit, T. Poinso, F. Nicoud, W. Krebs. *Joint use of Compressible Large-Eddy Simulation and Helmholtz solvers for the analysis of rotating modes in an industrial swirled burner*. submitted to Combustion and Flame, 2005.
- <sup>16</sup>CERFACS QUIET: acoustic tool package. [www.cerfacs.fr/atp](http://www.cerfacs.fr/atp)







# Numerical simulations of thermoacoustic instabilities in annular combustion chambers

## ABSTRACT:

Thermoacoustic instabilities are spontaneously excited by a feedback loop between an oscillatory combustion process and one of the natural acoustic modes of the combustor. This phenomenon causes loss of performance and severe damages to the engine. However, aeronautical engines or gas turbines manufacturers often observe this kind of instabilities during the experiments. In this work we propose a methodology dedicated to the computation of thermoacoustic instabilities usable in an industrial context. The coupling between acoustics and combustion is accounted for thanks to a specific Helmholtz equation including a reacting flow term. Using a finite element approach leads to an algebraic non-linear eigenvalue problem with  $N$  dimensions ( $N$  the number of nodes in the mesh). A point fix algorithm mixed with subspace iterative methods (Arnoldi implemented in ARPACK or Jacobi-Davidson) permits to solve this problem efficiently. Because aeronautical combustors usually present an annular shape with 10 to 20 injectors located all over the circumference, a multi-referenced  $(n - \tau)$  flame transfer function is proposed. This thermoacoustic model shows amplified or damped, standing or spinning azimuthal modes depending on the parameter  $\tau$ . This methodology is integrated in the calculation chain QUIET (AVBP-N3S-NOZZLE-AVSP) and it is used to study thermoacoustic instabilities of a Turbomeca engine. The results are shown to be in good accordance with large eddy simulations of the whole combustor.

## KEYWORDS:

Thermoacoustic instabilities, Helmholtz equation, Eigenvalue problems, Large Eddy Simulations, Flame Transfer Functions, Annular combustion chambers.

## RÉSUMÉ :

Les instabilités thermoacoustiques résultent du couplage entre les phénomènes instationnaires de combustion et les modes propres acoustiques basse fréquence de la configuration. Ce phénomène dégrade considérablement les performances du moteur et peut engendrer sa destruction. Ces instabilités sont pourtant couramment observées par les concepteurs de moteurs aéronautiques ou de turbines à gaz industrielles lors des essais et restent très difficiles à maîtriser. Dans cette thèse est proposée une méthodologie pour le calcul numérique de ces instabilités thermoacoustiques applicable sur des géométries industrielles annulaires complexes. Le couplage acoustique-combustion est modélisé par une équation de Helmholtz munie d'un terme spécifique aux écoulements réactifs. La discrétisation de cette équation par une méthode de type éléments finis conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres non linéaire, matriciel, de taille  $N$  (le nombre de noeuds du maillage). L'utilisation d'un algorithme de point fixe combiné avec des méthodes itératives de sous espace (Arnoldi intégré dans ARPACK et Jacobi-Davidson) permet de traiter ce type de problème efficacement. Les chambres de combustion aéronautiques présentent généralement des géométries annulaires multi-injecteurs; une fonction de transfert de flamme  $(n - \tau)$  multi-référencée est proposée pour appréhender ce type de configuration. Ce modèle thermoacoustique montre l'existence de mode azimutaux amortis ou amplifiés, stationnaires ou tournants, selon le paramètre  $\tau$  de la fonction de transfert. Cette méthodologie intégrée dans la chaîne de calcul QUIET (AVBP-N3S-NOZZLE-AVSP) est utilisée pour faire l'étude thermoacoustique de la chambre équipant un moteur développé par Turbomeca. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les simulations grandes échelles de la chambre annulaire complète.

## MOTS CLÉS :

Instabilités thermoacoustiques, Equation de Helmholtz, Problèmes aux valeurs propres, Simulations Grandes Echelles, Fonctions de Transfert de Flamme, Chambres de combustion annulaires.

## DISCIPLINE :

Mathématiques et Modélisation.