

Action hamiltonienne d'un tore et formule de localisation en cohomologie équivariante

Paul-Emile Paradan

Résumé – Exploitant une idée de Witten [8], nous établissons une formule de localisation en cohomologie équivariante dans le cadre d'une action hamiltonienne d'un tore sur une variété symplectique compacte \mathcal{X} . L'intégrale sur \mathcal{X} d'une forme équivariante fermée s'exprime comme une intégrale sur les points critiques de la fonction égale au carré de l'application moment.

Hamiltonian torus action and localization formula in equivariant cohomology

Abstract – Using an idea of Witten [8], we give a localization formula in equivariant cohomology in the case of an Hamiltonian torus action on a compact symplectic manifold \mathcal{X} . The integral over \mathcal{X} of an equivariant closed form can be written as an integral over the submanifold of critical points of the square of the moment map.

Abridged English Version – Let \mathcal{X} be a compact symplectic manifold equipped with an Hamiltonian action of a compact Lie group G , with Lie algebra \mathfrak{g} . We denote by Ω the symplectic form on \mathcal{X} and $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ the moment map of this action.

Let $\mathcal{H}_G^\infty(\mathcal{X})$ the G -equivariant cohomology of \mathcal{X} with \mathbb{C}^∞ coefficients (cf 1.1). Integration over \mathcal{X} , denoted $\int_{\mathcal{X}}$, induces a morphism $\int_{\mathcal{X}} : \mathcal{H}_G^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$, where $\mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$ denotes the algebra of smooth, G -invariant functions on \mathfrak{g} .

Let $\|\cdot\|$ be a G -invariant scalar product on \mathfrak{g} . In [8], Witten introduced the “partition functions” $Z(u) = \int_{\mathcal{X} \times \mathfrak{g}} \alpha(X) e^{i\Omega_{\mathfrak{g}}(X)} e^{-u\|X\|^2/2} dX$ with $u > 0$, where $\alpha(X)$ is a closed differential form which is polynomial in the variable X , and $\Omega_{\mathfrak{g}}(X) = \Omega + \langle \mu, X \rangle$ is the equivariant symplectic form.

Under the hypothesis that G acts freely on $\mu^{-1}(0)$, Witten proposed a formula of the form $Z(u) = \sum_N Z_N(u)$, where “ N ” ranges over the connected components of the subset $\text{Cr}(\|\mu\|^2)$ of critical points of the square of the moment map. In this formula, each function $Z_N(u)$ should only depend of the value of the form α on N . Witten determined the function $Z_{\mu^{-1}(0)}$, which is in fact a polynomial, and gives for the other terms a bound of the form $Z_N(u) = O(e^{-k_N/u})$, $u > 0$ with $k_N > 0$. Witten's formula has been proved by Jeffrey and Kirwan [2], using different methods than Witten .

One of the problems which makes the calculus of the functions Z_N difficult is that, in the context of a general compact group, the subset $\text{Cr}(\|\mu\|^2)$ is not a smooth submanifold of \mathcal{X} .

In the case of an Hamiltonian torus action, we work out the ideas of Witten to obtain a new kind of localization formula in equivariant cohomology. In this Note, we explain the ingredients of this formula.

Suppose now that the group $G = T$ is a torus with Lie algebra \mathfrak{t} . Consider the applications $\mu_\varepsilon = \mu - \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$. For $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$ generic, $\text{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$ is smooth and we have a decomposition $\text{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2) = \cup_{\Delta \in \mathcal{B}} C_\Delta^\varepsilon$, where \mathcal{B} is a collection of affine subspaces of \mathfrak{t}^* (cf. Proposition 2). Fix a generic $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$. Using the same process of localization as Witten, we show that for every $\eta \in \mathcal{H}_T^\infty(\mathcal{X})$ we have the equality

$$\int_{\mathcal{X}} \eta = \sum_{\Delta \in \mathcal{B}} I_\Delta^\varepsilon(\eta)$$

in the space $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t})$ of generalized functions on \mathfrak{t} (cf. 1.1), where the generalized functions $I_\Delta^\varepsilon(\eta)$ have support contained in the subspace of \mathfrak{t} orthogonal (for the duality) to the direction of the affine subspace Δ , and depend only of the value of the form η on the submanifold C_Δ^ε (cf. Théorème).

This localization permits us to give an explicit description of the asymptotic behaviour of the partition functions “ $Z(u)$ ” (cf. Proposition 3).

The reader will find the proofs of the propositions and the theorem in [6].

1. COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE À COEFFICIENTS GÉNÉRALISÉS. — 1.1. Soit \mathcal{X} une variété différentielle. On note $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ l’algèbre sur \mathbb{C} des formes différentielles et d la dérivation extérieure. Si ξ est un champ de vecteurs sur \mathcal{X} , on note $c(\xi) : \mathcal{A}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{X})$ la contraction par le champ de vecteurs ξ .

Soit G un groupe de Lie, d’algèbre de Lie \mathfrak{g} , opérant sur \mathcal{X} . Cette action détermine un morphisme $X \rightarrow X_{\mathcal{X}}$ de \mathfrak{g} dans l’algèbre des champs de vecteurs de \mathcal{X} .

Rappelons le modèle de De Rham pour la cohomologie G -équivariante de \mathcal{X} [1, 5]. Soit $\mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(\mathcal{X}))$ l’algèbre des formes $\alpha(X)$ sur \mathcal{X} dépendant de manière \mathbb{C}^∞ de $X \in \mathfrak{g}$. Nous noterons $\mathcal{A}_G^\infty(\mathcal{X})$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(\mathcal{X}))$ formée des éléments G -invariants. On définit l’opérateur \mathcal{D} sur $\mathcal{A}_G^\infty(\mathcal{X})$ par $(\mathcal{D}\alpha)(X) := (d - c(X_{\mathcal{X}}))(\alpha(X))$. On remarque que $\mathcal{D}^2 = 0$ sur $\mathcal{A}_G^\infty(\mathcal{X})$. La cohomologie du complexe $(\mathcal{A}_G^\infty(\mathcal{X}), \mathcal{D})$ est appelée la cohomologie G -équivariante (à coefficients \mathbb{C}^∞) de \mathcal{X} , et notée $\mathcal{H}_G^\infty(\mathcal{X})$.

Soit $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(\mathcal{X}))$ l’espace des fonctions généralisées sur \mathfrak{g} à valeurs formes différentielles sur \mathcal{X} . On note $\mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{X})$ le sous-espace des éléments

G -invariants de $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(\mathcal{X}))$. On remarque que $\mathcal{A}_G^\infty(\mathcal{X}) \subset \mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{X})$ et on note encore \mathcal{D} la différentielle sur $\mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{X})$ qui prolonge celle de $\mathcal{A}_G^\infty(\mathcal{X})$ (pour la définition voir [5]). La cohomologie du complexe $(\mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{X}), \mathcal{D})$ est appelée la cohomologie G -équivariante (à coefficients $\mathcal{C}^{-\infty}$) de \mathcal{X} , et est notée $\mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{X})$.

On note $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ l'espace des fonctions généralisées sur \mathfrak{g} invariantes par G . Si \mathcal{X} est une G -variété compacte orientée, l'intégration $\alpha \rightarrow \int_{\mathcal{X}} \alpha(X)$ sur \mathcal{X} est une application $\int_{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{X})$ dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$. Cette application envoie le sous-espace $\mathcal{A}_G^\infty(\mathcal{X})$ dans l'algèbre $\mathbb{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$ des fonctions \mathbb{C}^∞ sur \mathfrak{g} qui sont G -invariantes.

1.2. Soit $\mathcal{E} \rightarrow M$ un G -fibré euclidien orienté sur une variété M , muni d'une connexion linéaire euclidienne G -invariante $\nabla^\mathcal{E}$. On note $\mathcal{A}(M, \mathcal{E}) = \Gamma(M, \wedge T^*M \otimes \mathcal{E})$ l'espace des formes différentielles sur M à valeurs dans \mathcal{E} . Au moyen de la connexion $\nabla^\mathcal{E}$, on définit le moment de $X \in \mathfrak{g}$: c'est un opérateur $\mu^\mathcal{E}(X) \in \mathcal{A}(M, \text{so}(\mathcal{E})) \subset \text{End}(\mathcal{A}(M, \mathcal{E}))$ (Définition 7.5., [1]). Ici $\text{so}(\mathcal{E})$ désigne le sous-fibré de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*$ formé des endomorphismes anti-symétriques de \mathcal{E} . Définissons maintenant quelques formes équivariantes.

Si $R^\mathcal{E} \in \mathcal{A}(M, \text{so}(\mathcal{E}))$ est la courbure de la connexion $\nabla^\mathcal{E}$, la courbure équivariante de $\nabla^\mathcal{E}$ est l'application de \mathfrak{g} dans $\mathcal{A}(M, \text{so}(\mathcal{E}))$ définie par $X \rightarrow R_\mathfrak{g}^\mathcal{E}(X) = \mu^\mathcal{E}(X) + R^\mathcal{E}$.

Considérons le pfaffien $\det_o^{1/2} : \mathcal{A}(M, \text{so}(\mathcal{E})) \rightarrow \mathcal{A}(M)$. On définit la forme d'Euler équivariante de $(\mathcal{E}, \nabla^\mathcal{E})$ en posant $\text{Eul}_o(\mathcal{E}, \nabla^\mathcal{E})(X) = \det_o^{1/2}(\frac{-1}{2\pi} R_\mathfrak{g}^\mathcal{E}(X))$. On démontre que $\text{Eul}_o(\mathcal{E}, \nabla^\mathcal{E})$ est une forme équivariante fermée à coefficients polynomiaux, et que sa classe de cohomologie ne dépend ni de la connexion, ni du produit scalaire sur les fibres (voir [1], chapitre 7).

Supposons que $G = T$ est un tore et notons \mathfrak{t} son algèbre de Lie. On suppose que les points fixes de l'action de T sur \mathcal{E} sont les points de la variété M : $\mathcal{E}^T = M$. Dans ce cadre, nous allons inverser la forme d'Euler équivariante dans $\mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$. Soit $\beta \in \mathfrak{t}$ tel que le champ de vecteurs engendré par β sur \mathcal{E} s'annule exactement sur M . On constate que pour tout $s > 0$ et tout $X \in \mathfrak{t}$ la forme $\text{Eul}_o(\mathcal{E}, \nabla^\mathcal{E})(X + is\beta)$ possède une composante de degré 0 qui ne s'annule pas sur M ; on peut donc l'inverser dans $\mathcal{A}(M)$. On vérifie que pour tout $s > 0$, $X \rightarrow A_s(X) = \text{Eul}_o(\mathcal{E}, \nabla^\mathcal{E})(X + is\beta)^{-1}$ est une forme équivariante fermée sur M . En passant à la limite sur s nous obtenons la

Proposition 1 *La famille $(A_s)_{s>0}$ de formes équivariantes (à coefficients \mathbb{C}^∞) sur M converge, lorsque $s \rightarrow 0$, vers une forme équivariante fermée $\text{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E}, \nabla^\mathcal{E}) \in \mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$.*

1.3. Soit P une variété compacte sur laquelle un tore T agit localement librement. On considère le quotient $M := P/T$ qui possède une structure

de V -variété [4]. Les formes différentielles de M sont définies comme les éléments T -basiques de l'algèbre $\mathcal{A}(P)$. Ces éléments forment une sous-algèbre $\mathcal{A}(M)$ qui est stable par rapport à la différentiation extérieure: on note $\mathcal{H}(M)$ la cohomologie du complexe $(\mathcal{A}(M), d)$. Le tore agit trivialement sur M , ainsi $\mathcal{A}_T^{-\infty}(M) := \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M))$ et la cohomologie associée, $\mathcal{H}_T^{-\infty}(M)$, est égale à $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{H}(M))$.

Soit $\omega \in \mathcal{H}^2(M) \otimes \mathfrak{t}$ la courbure du V -fibré principal $P \rightarrow M$. On note $\delta(X - \omega) \in \mathcal{H}_T^{-\infty}(M)$ la classe de support 0 définie par $\langle \delta(X - \omega), \phi(X)dX \rangle := \phi(\omega) \text{vol}(T, dX)$, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t})$. Dans cette formule dX est une mesure euclidienne pour \mathfrak{t} et $\text{vol}(T, dX)$ est le volume du groupe T pour la mesure de Haar compatible avec dX .

2. ACTION HAMILTONIENNE ET POINTS CRITIQUES DE $\|\mu\|^2$. – Soit (\mathcal{X}, Ω) une variété symplectique compacte munie de l'action hamiltonienne d'un tore T . On note \mathfrak{t} l'algèbre de Lie de T et \mathfrak{t}^* l'espace vectoriel dual. On note $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ l'application moment; c'est une application T -équivariante qui vérifie $c(X_{\mathcal{X}})\Omega = d\langle \mu, X \rangle$, $X \in \mathfrak{t}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$, on note μ_ε l'application $\mu - \varepsilon$ (c'est encore une application moment).

Comme la variété \mathcal{X} est compacte, l'action de T sur \mathcal{X} possède un nombre fini de types d'orbites: soient T_1, \dots, T_r les sous-groupes de T , stabilisateurs de points de \mathcal{X} . Pour chaque $l = 1, \dots, r$ on note \mathcal{Z}_l^k , $k = 1, \dots, n_l$ les composantes connexes de \mathcal{X}^{T_l} qui ont pour stabilisateur générique le sous-groupe T_l . Les \mathcal{Z}_l^k sont des sous-variétés symplectiques T -invariantes de \mathcal{X} . Le théorème de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg assure que les $P_{lk} := \mu(\mathcal{Z}_l^k)$ sont des polytopes de \mathfrak{t}^* . On a $(\overrightarrow{P_{lk}})^\perp = \text{Lie}(T_l)$, $\forall k = 1, \dots, n_l$. Dans cette égalité $\overrightarrow{P_{lk}}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\{a - b \mid a, b \in P_{lk}\}$ et $^\perp$ désigne l'orthogonal pour la dualité entre \mathfrak{t} et \mathfrak{t}^* .

On note $\mathcal{B} := \{\text{Aff}(P_{lk}) \mid l, k\}$ l'ensemble des sous-espaces affines de \mathfrak{t}^* engendrés par les polytopes P_{lk} . Pour chaque $\Delta \in \mathcal{B}$, on note T_Δ le sous-tore de T d'algèbre de Lie $(\overrightarrow{\Delta})^\perp$.

On munit \mathfrak{t}^* d'un produit scalaire et on note $j : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ l'isomorphisme induit par ce produit scalaire. Pour tout $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$, nous considérons la fonction $\|\mu_\varepsilon\|^2$ de \mathcal{X} dans \mathbb{R} . En nous inspirant du premier chapitre de [3], nous obtenons la

Proposition 2 *Pour tout $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$, les points critiques de $\|\mu_\varepsilon\|^2$ se mettent sous la forme*

$$\text{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2) = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{B}} \mathcal{X}^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta)),$$

où $\beta(\varepsilon, \Delta)$ est le projeté orthogonal de ε sur Δ . Il existe un ouvert dense

W de \mathfrak{t}^* tel que pour tout $\varepsilon \in W$ l'ensemble $\text{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$ est une sous-variété de \mathcal{X} , l'union précédente est disjointe, et le groupe T/T_Δ agit localement librement sur $C_\Delta^\varepsilon := \mathcal{X}^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))$.

3. LOCALISATION SUR LES POINTS CRITIQUES DE $\|\mu_\varepsilon\|^2$.— 3.1. On fixe $\varepsilon \in W$. Pour chaque $\Delta \in \mathcal{B}$, nous faisons le choix d'un supplémentaire de \mathfrak{t}_Δ dans \mathfrak{t} que l'on note $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$, tel que l'on ait une décomposition $T = T_\Delta \times T/T_\Delta$ où T/T_Δ désigne le sous-tore de T d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$.

Comme le groupe T/T_Δ agit localement librement sur la variété C_Δ^ε , on peut définir la V-variété quotient $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon := C_\Delta^\varepsilon / T/T_\Delta$ [4]. Nous avons le morphisme de Kirwan $k_\Delta : \mathcal{H}_T^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}_{T_\Delta}^\infty(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$, défini comme le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}_T^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}_T^\infty(C_\Delta^\varepsilon)$ et de l'isomorphisme de Chern-Weil $\mathcal{H}_T^\infty(C_\Delta^\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{T_\Delta}^\infty(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$.

A chaque composante connexe F de C_Δ^ε on associe le groupe $S^\Delta(F)$ qui est le stabilisateur générique de T/T_Δ sur F et on note $|S^\Delta|(F)$ son cardinal. L'application $F \rightarrow |S^\Delta|(F)$ détermine une fonction localement constante sur $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ qui sera notée $|S^\Delta|$.

Soient $\beta_\Delta := j^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta) - \varepsilon) \in \mathfrak{t}_\Delta$ et N_Δ le fibré normal de \mathcal{X}^{T_Δ} dans \mathcal{X} restreint à C_Δ^ε . Lorsque $\varepsilon \in W$, le champ de vecteurs sur N_Δ engendré par β_Δ s'annule exactement sur C_Δ^ε . Ces données nous permettent de définir, au moyen d'une connexion ∇^{N_Δ} , une forme T_Δ -équivariante fermée à coefficients généralisés sur C_Δ^ε : $\text{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(N_\Delta, \nabla^{N_\Delta}) \in \mathcal{A}_{T_\Delta}^{-\infty}(C_\Delta^\varepsilon)$ (cf. Proposition 1). En choisissant la connexion T/T_Δ -horizontale on voit que $\text{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(N_\Delta, \nabla^{N_\Delta}) \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{A}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)) := \mathcal{A}_{T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$. On notera $\text{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta) \in \mathcal{H}_{T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$ la classe de cette forme équivariante. La notation \mathcal{E}_Δ fait référence au V-fibré T_Δ -équivariant $\mathcal{E}_\Delta := N_\Delta / T/T_\Delta \rightarrow \mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$.

Le V-fibré principal $C_\Delta^\varepsilon \rightarrow \mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ de courbure ω_Δ fournit, d'après 1.3., la classe $\delta(X - \omega_\Delta) \in \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$. La décomposition $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_\Delta \oplus \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$ induit une application bilinéaire $(\eta, \nu) \mapsto \eta \diamond \nu, \mathcal{H}_{T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon) \times \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon) \rightarrow \mathcal{H}_T^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$. La V-variété $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ possède une structure symplectique héritée de celle de \mathcal{X} . Elle est donc orientée et l'intégration sur $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$, notée $\int_{\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon}$, définit un morphisme de $\mathcal{H}_T^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$ dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t})$.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette Note:

Théorème Soient $\varepsilon \in W$ et $\eta \in \mathcal{A}_T^\infty(\mathcal{X})$ une forme fermée. Nous avons dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t})$ l'égalité

$$\int_{\mathcal{X}} \eta = \sum_{\Delta \in \mathcal{B}} I_\Delta^\varepsilon(\eta),$$

où $I_{\Delta}^{\varepsilon}(\eta)$ est la fonction généralisée de support \mathfrak{t}_{Δ} définie par

$$I_{\Delta}^{\varepsilon}(\eta)(X_1+X_2) = (2i\pi)^{\dim\Delta} \int_{\mathcal{M}_{\Delta}^{\varepsilon}} \frac{1}{|S^{\Delta}|} k_{\Delta}(\eta)(X_1) \text{Eul}_{\beta_{\Delta}}^{-1}(\mathcal{E}_{\Delta})(X_1) \diamond \delta(X_2 - \omega_{\Delta}) .$$

Dans cette formule les variables X_1 et X_2 sont dans \mathfrak{t}_{Δ} et $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_{\Delta}$.

Pour toute fonction $\phi \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathfrak{t})$ à support compact, nous avons

$$\int_{\mathcal{X} \times \mathfrak{t}} \eta(X) \phi(X) dX = \sum_{\Delta \in \mathcal{B}} c_{\Delta} \int_{\mathcal{M}_{\Delta}^{\varepsilon} \times \mathfrak{t}_{\Delta}} \frac{1}{|S^{\Delta}|} k_{\Delta}(\eta, \phi)(X_1) \text{Eul}_{\beta_{\Delta}}^{-1}(\mathcal{E}_{\Delta})(X_1) dX_1 .$$

avec $c_{\Delta} = (2i\pi)^{\dim\Delta} \text{vol}(T/T_{\Delta}, dX_2)$ et $dX = dX_1 dX_2$.

Le calcul de la fonction généralisée $I_{\mathfrak{t}^*}^0$ est effectué dans [2] et [7], sous l'hypothèse que le groupe T agit localement librement sur $\mu^{-1}(0)$ (dans ce cas $\mathfrak{t}^* \in \mathcal{B}$).

Donnons quelques indications sur la démonstration de ce théorème. On fixe $\varepsilon \in W$. Soit η une forme équivariante fermée de \mathcal{X} . Pour tout nombre complexe z et toute forme équivariante λ de degré impair l'exponentielle $e^{z\mathcal{D}\lambda}$ est définie sans ambiguïté et nous avons $\int_{\mathcal{X}} \eta = \int_{\mathcal{X}} \eta e^{z\mathcal{D}\lambda}$.

Considérons, comme dans [8], le champ de vecteurs hamiltonien $\mathcal{H}^{\varepsilon}$ de la fonction T -invariante $\frac{1}{2}\|\mu_{\varepsilon}\|^2$. Au moyen d'une métrique riemannienne T -invariante sur \mathcal{X} , $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{X}}$, on introduit la 1-forme λ^{ε} définie par $\lambda^{\varepsilon} := (\mathcal{H}^{\varepsilon}, \cdot)_{\mathcal{X}}$. Le paramètre z est choisi imaginaire pur: $z = -is$, $s \in \mathbb{R}$. Le théorème de localisation provient de l'étude du comportement asymptotique de la forme $\eta e^{-is\mathcal{D}\lambda^{\varepsilon}}$ lorsque $s \rightarrow +\infty$.

3.2. Voici une application de cette formule de localisation. Dans [8], Witten introduit les fonctions de partition "Z" définies par

$$Z(u) := \int_{\mathcal{X} \times \mathfrak{t}} \alpha(X) e^{i\Omega_{\mathfrak{t}}(X)} e^{-u\|X\|^2/2} dX , \quad u > 0 ,$$

où $\alpha(X) \in \mathcal{A}_T^{\infty}(\mathfrak{t}, \mathcal{X})$ une forme équivariante fermée qui est polynomiale par rapport à $X \in \mathfrak{t}$, et $\Omega_{\mathfrak{t}}(X) = \Omega + \langle \mu, X \rangle$ est la forme symplectique équivariante.

En supposant que 0 est une valeur régulière de l'application moment, Witten donne les premiers termes du développement asymptotique de $Z(u)$ lorsque $u \rightarrow 0$: $Z(u) = Z_{\mu^{-1}(0)}(u) + O(e^{-\rho/u})$ avec $\rho > 0$ et où $Z_{\mu^{-1}(0)}(u)$ est un polynôme défini par

$$u \in \mathbb{R}, \quad Z_{\mu^{-1}(0)}(u) = (2i\pi)^{\dim T} \frac{\text{vol}(T, dX)}{|S^0|} \int_{\mathcal{M}_0} k_0(\alpha e^{i\Omega_{\mathfrak{t}}}) e^{-u\|\omega_0\|^2/2} .$$

Dans cette formule, $\mathcal{M}_0 := \mu^{-1}(0)/T$ est la réduction de Marsden-Weinstein en 0; ω_0 est la courbure du V-fibré principal $\mu^{-1}(0) \rightarrow \mathcal{M}_0$; et $k_0 : \mathcal{H}_T^\infty(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{M}_0)$ est l'application de Kirwan [3].

Au moyen du théorème précédent nous obtenons une description précise du comportement asymptotique des fonctions de partition.

Proposition 3 *Supposons que 0 est une valeur régulière de μ . On note d_α le degré polynomial de la forme α . Il existe des fonctions $h_\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{C}^∞ et paires, telles que pour tout $u > 0$*

$$Z(u) = Z_{\mu^{-1}(0)}(u) + \sum_{\substack{\Delta \in \mathcal{B} \\ \Delta \neq t^*}} u^{n_\Delta} e^{-\frac{(\rho_\Delta)^2}{2u}} h_\Delta(\sqrt{u}),$$

où $n_\Delta = \frac{\dim T_\Delta}{2} - d_\alpha$ et ρ_Δ est la distance du point 0 au sous-espace affine Δ .

Le lecteur intéressé pourra trouver les démonstrations complètes des propositions et du théorème dans [6].

References

- [1] N. BERLINE, E. GETZLER et M. VERGNE, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren, vol. 298, Springer, Berlin, 1991.
- [2] L. JEFFREY et F. KIRWAN, Localization for non Abelian group action, *Topology*, **34**, p. 291-327, 1995.
- [3] F. KIRWAN, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.
- [4] T. KAWASAKI, The signature theorem for V-manifold, *Topology*, **17**, 1978, p. 75-83.
- [5] S. KUMAR et M. VERGNE, Equivariant cohomology with generalized coefficients, *Astrisque*, 215, 1993, p. 109-204.
- [6] P.-E. PARADAN, Formule de localisation en cohomologie équivariante, Thèse, Université Paris 7-Denis Diderot, 1996.
- [7] M. VERGNE, A note on the Jeffrey-Kirwan-Witten localization formula, *Topology*, **34**, 1996, p. 243-266.
- [8] E. WITTEN, Two dimensional gauge theories revisited, *J. Geom. Phys.* **9**, 1992, p. 303-368.