

Quelques théorèmes de structure

Nous considérons ici des $\mathbb{K}$ -algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. L'action adjointe est notée $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, et la sous algèbre image de $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ est notée $\text{ad}(\mathfrak{g})$.

1 Algèbres de Lie nilpotentes

Commençons par le théorème de Engel.

Théorème 1.1 *Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie, et $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho(X)$ est un endomorphisme nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$. Alors*

1. *Pour tout $A \in \mathfrak{g}'$, l'application linéaire $\text{ad}_{\mathfrak{g}'} A : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$ est nilpotente.*
2. *Il existe $v \in V$, non nul, tel que $\rho(X)v = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$.*
3. *Il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la matrice de $\rho(X)$ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, avec des zéros sur la diagonale.*
4. *Soit $n = \dim V$. Pour tout $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\rho(X_1) \circ \dots \circ \rho(X_n)$ est nul.*

• *Preuve de 1).* Par hypothèse tout $A \in \mathfrak{g}'$ est un endomorphisme nilpotent de V . Cela entraîne que $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} A : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est nilpotent et que $\text{ad}_{\mathfrak{g}'} A = \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} A|_{\mathfrak{g}'}$ est nilpotent.

• *2) $\implies$ 3).* On démontre par récurrence sur k qu'il existe une famille $v_1, \dots, v_k$ de vecteurs linéairement indépendants de V telle que $\rho(\mathfrak{g})v_k$ appartient au sous-espace V_{k-1} engendré par $v_1, \dots, v_{k-1}$ ($V_1 = \{0\}$). Le point 2) montre que c'est vrai en $k = 1$. Supposons que c'est vrai pour tout $k < N$. Le sous espace V_{N-1} est donc stable par $\mathfrak{g}$. On peut considérer la factorisation $\bar{\rho} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/V_{N-1})$ du morphisme ρ : pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\bar{\rho}(X)$ est nilpotent. On sait alors d'après 2) qu'il existe $\bar{v}_N \in V/V_{N-1}$ tel que $\bar{\rho}(X)\bar{v}_N = 0$, ce qui signifie que $\rho(\mathfrak{g})v_N \in V_{N-1}$.

• *3) $\implies$ 4).* Evident.

• *Preuve de 2).* On démontre cela par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}'$. Si $\dim \mathfrak{g}' = 0$ c'est clair. Supposons le résultat démontré pour $\dim \mathfrak{g}' < k$. Soit $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ tel que $\dim \mathfrak{g}' = k$.

Considérons une sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$ différente de $\mathfrak{g}'$ maximale par rapport à la dimension. L'espace quotient $\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}$ est stable pour l'action coadjointe de $\mathfrak{h}$: soit $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}'/\mathfrak{h})$ le morphisme induit. D'après 1) tout les éléments $\text{ad}X, X \in \mathfrak{h}$, sont nilpotents. Comme $\dim \alpha(\mathfrak{h}) \leq \dim \mathfrak{h} < k$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à α : il existe $\overline{X_o} \in \mathfrak{g}'/\mathfrak{h}$ tel que $\alpha(\mathfrak{h})\overline{X_o} = 0$, ce qui signifie que $[\mathfrak{h}, X_o] \subset \mathfrak{h}$. Le sous-espace vectoriel¹ $\mathfrak{h} \oplus \langle X_o \rangle$ est donc une sous-algèbre de $\mathfrak{g}'$ telle que $[\mathfrak{h} \oplus \langle X_o \rangle, \mathfrak{h} \oplus \langle X_o \rangle] \subset \mathfrak{h}$. Mais $\mathfrak{h}$ étant choisie maximale, $\mathfrak{h} \oplus \langle X_o \rangle = \mathfrak{g}'$ et $[\mathfrak{g}', \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Conclusion: $\mathfrak{g}'$ possède un idéal $\mathfrak{h}$ de codimension 1.

Appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$: le sous-espace $W := \{v \in V \mid Av = 0 \text{ pour tout } A \in \mathfrak{h}\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. De plus comme $[\mathfrak{h}, X_o] \subset \mathfrak{h}$, le sous-espace W est stable par l'endomorphisme X_o . Comme $X_o : V \rightarrow V$ est nilpotent, il existe $w \in W$ non nul tel que $X_o w = 0$. Finalement on a montré l'existence de $w \neq 0$ tel que $Xw = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}'$. $\square$

Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *nilpotente* si la suite d'idéaux $\mathfrak{g}_k$ définie par

- $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k]$

est nulle à partir d'un certain rang. On vérifie aisément que $\mathfrak{g}_k = 0$ si et seulement si pour tout $X_1, \dots, X_k$ dans $\mathfrak{g}$ on a

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_1) \circ \dots \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_k) = 0. \quad (1.1)$$

Une conséquence directe de la définition est que l'image $\rho(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente par un morphisme ρ est nilpotente (car $\rho(\mathfrak{g})_k = \rho(\mathfrak{g}_k)$).

Proposition 1.2 *Les énoncés suivants sont équivalents*

1. $\mathfrak{g}$ est nilpotente
2. $\text{ad}(\mathfrak{g})$ est nilpotente
3. pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}X$ est un endomorphisme nilpotent.

¹ $\langle X_o \rangle$ désigne la droite vectorielle engendrée par X_o .

- 1) $\implies$ 3). Supposons que $\mathfrak{g}_k = 0$ et appliquons (1.1) à $X_1 = \dots = X_k = X$, on obtient $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)^k = 0$.
- 3) $\implies$ 1). Appliquons le théorème de Engel au morphisme $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Le point 4) montre que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_1) \circ \dots \circ \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X_n) = 0$ pour $n = \dim \mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{g}_n = 0$.
- 1) $\iff$ 2). Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, son image $\text{ad}(\mathfrak{g})$ par le morphisme $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ est alors nilpotente. Réciproquement si $\text{ad}(\mathfrak{g})_k = 0$ on a $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_k) = 0$ ce qui signifie que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k] = 0$ soit $\mathfrak{g}_{k+1} = 0$. $\square$

2 Algèbres de Lie résolubles

Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *résoluble* si la suite d'idéaux $\mathfrak{g}^k$ définie par

- $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$
- $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k]$

est nulle à partir d'un certain rang. Voici des critères importants.

Lemme 2.1 1. Soit $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\text{Ker} \rho$ et $\text{Im} \rho$ sont tous deux résolubles.

2. Une algèbre de Lie résoluble possède un idéal abélien ($\neq 0$).

Preuve de 1) : On a $(\text{Im} \rho)^k = \rho(\mathfrak{g}^k) = \rho(\mathfrak{g}^k)$ et $(\ker \rho)^k \subset \mathfrak{g}^k$. Donc si $\mathfrak{g}^k = 0$ on obtient $(\text{Im} \rho)^k = 0$ et $(\ker \rho)^k = 0$. Réciproquement supposons que $\text{Ker} \rho$ et $\text{Im} \rho$ sont tous deux résolubles : il existe k, l tels que $(\text{Im} \rho)^l = 0$ et $(\ker \rho)^k = 0$. Mais $(\text{Im} \rho)^l = \rho(\mathfrak{g}^l)$ donc $\mathfrak{g}^l \subset \text{Ker} \rho$. Cela implique alors que $(\mathfrak{g}^l)^k \subset (\text{Ker} \rho)^k = 0$. Comme $(\mathfrak{g}^l)^k = \mathfrak{g}^{l+k}$, on obtient finalement $\mathfrak{g}^{l+k} = 0$.

Preuve de 2) : Si $\mathfrak{g}$ est résoluble il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}^k \neq 0$ et $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k] = 0$. L'idéal $\mathfrak{g}^k \neq 0$ est donc abélien. $\square$

Rappelons l'énoncé du théorème de Lie que l'on a démontré en cours.

Théorème 2.2 Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie résoluble, V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ un morphisme² de $\mathbb{K}$ -algèbres de Lie. Alors

1. Il existe $v \in V$, non nul, et $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{K}$ -linéaire tels que $\rho(X)v = \lambda(X)v$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

² $\mathfrak{gl}(V)$ désigne l'espace des endomorphismes de V qui sont $\mathbb{C}$ -linéaires. $\mathfrak{gl}(V)$ peut être vue comme une $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. Il existe une base $\mathcal{B}$ de V , des morphismes $\mathbb{K}$ -linéaires $\lambda_k : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ pour $k = 1, \dots, n = \dim V$, tels que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la matrice de $\rho(X)$ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, avec pour diagonale $(\lambda_1(X), \dots, \lambda_n(X))$.

Si $\mathfrak{g}$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie résoluble on peut appliquer le théorème précédant au morphisme adjoint $\text{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$: ici $V = \mathfrak{g}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Le point 2) affirme qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la matrice de $\rho(X)$ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure. Ceci montre que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y) \text{ et } \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y) \text{ sont des endomorphismes nilpotents.} \quad (2.2)$$

Théorème 2.3 Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$ -algèbre et $B_{\mathfrak{g}}$ sa forme de Killing. Les énoncés suivants sont équivalentes

1. $\mathfrak{g}$ est résoluble
2. $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est résoluble
3. $\mathfrak{g}^1$ est nilpotente
4. $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$

Preuve : Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer ce théorème pour les algèbres de Lie complexes. Si $\mathfrak{g}$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre de Lie on peut considérer l'algèbre complexifiée $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$. Les suites dérivées satisfont les relations $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})^k = \mathfrak{g}^k \otimes \mathbb{C}$ et $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})_k = \mathfrak{g}_k \otimes \mathbb{C}$. On montre aisément les équivalences " $\mathfrak{g}$ est résoluble $\iff \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ est résoluble", " $\mathfrak{g}^1$ est nilpotente $\iff (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})^1$ est nilpotente" et " $\mathfrak{g}^1$ est résoluble $\iff (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})^1$ est résoluble". On voit aussi que l'énoncé 4) avec $\mathfrak{g}$ est équivalent à l'énoncé 4) avec $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$.

Preuve pour une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$:

- 1) $\iff$ 2). Comme l'algèbre quotient $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est abélienne, on voit en considérant le morphisme quotient $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est résoluble (cf. Lemme 2.1).

- 3) $\implies$ 2). Évident.

- 1) $\implies$ 4). Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, on sait d'après (2.2) que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)$ est un endomorphisme nilpotent pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Ce qui implique que $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

- 1) $\implies$ 3). Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, on sait d'après (2.2) que pour tout $Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ l'endomorphisme $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)$ est nilpotent, ce qui implique que $\text{ad}_{\mathfrak{g}^1}(Y) = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)|_{\mathfrak{g}^1}$ est nilpotent. D'après la proposition 1.2, ceci implique que $\mathfrak{g}^1$ est nilpotente.

• 4) $\implies$ 2). Comme $\mathfrak{g}^1$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ la condition $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1) = 0$ implique que la forme de Killing de $\mathfrak{g}^1$ est nulle. Considérons la sous-algèbre $\mathfrak{h} := \text{ad}(\mathfrak{g}^1)$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^1)$: elle satisfait les relations

$$\text{Tr}(XY) = 0 \quad \text{pour tout } X, Y \in \mathfrak{h} \quad (2.3)$$

On sait d'après les équivalences démontrées précédemment que “ $\mathfrak{g}^1$ est résoluble $\iff \mathfrak{h}$ est résoluble $\iff [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ est nilpotent”. Il nous suffit donc de démontrer que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ est nilpotent, et cette démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.4 *Soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $\mathfrak{a}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(V)$. Considérons $N_{\mathfrak{a}} := \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid [X, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}\}$ et $N_{\mathfrak{a}}^0 := \{X \in N_{\mathfrak{a}} \mid \text{Tr}(XY) = 0 \text{ pour tout } Y \in N_{\mathfrak{a}}\}$. Alors tout endomorphisme de $N_{\mathfrak{a}}^0$ est nilpotent.*

Appliquons ce lemme à $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$ et $V = \mathfrak{g}^1$. Ici les relations (2.3) impliquent que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset N_{\mathfrak{h}}^0$, et donc que la sous-algèbre $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{gl}(V)$ est composée d'endomorphismes nilpotents: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ est une algèbre de Lie nilpotente (voir la première section). $\square$

Preuve du lemme. Considérons la décomposition de Jordan $X = s + n$ d'un élément $X \in N_{\mathfrak{a}}^0$: s est diagonalisable, n est nilpotent et $[s, n] = 0$. Il existe une base $(e_i)_i$ de V telle que $se_i = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Considérons les éléments $\text{ad}(X), \text{ad}(s), \text{ad}(n) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$: $\text{ad}(s)$ est diagonalisable, $\text{ad}(n)$ est nilpotent et $[\text{ad}(s), \text{ad}(n)] = 0$. Ainsi $\text{ad}(X) = \text{ad}(s) + \text{ad}(n)$ est la décomposition de Jordan de $\text{ad}(X)$. En particulier il existe un polynôme P tel que $\text{ad}(s) = P(\text{ad}(X))$. Comme $\text{ad}(X)(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ on a $\text{ad}(s)(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, i.e. $s \in N_{\mathfrak{a}}$. Considérons maintenant $s' \in \mathfrak{gl}(V)$ défini par $s'e_i = \overline{\lambda_i} e_i$. Si on considère la base E_{ij} de $\mathfrak{gl}(V)$ telle que $E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i$ on a

$$\text{ad}(s)E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \quad \text{et} \quad \text{ad}(s')E_{ij} = (\overline{\lambda_i} - \overline{\lambda_j})E_{ij}.$$

On constate alors qu'il existe un polynôme Q tel que $\text{ad}(s') = Q(\text{ad}(s))$: comme $\text{ad}(s)(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ on a $\text{ad}(s')(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, i.e. $s' \in N_{\mathfrak{a}}$. Ayant supposé que $X \in N_{\mathfrak{a}}^0$ on a $\text{Tr}(Xs') = 0$. Mais $[n, s'] = 0$ donc $0 = \text{Tr}(Xs') = \text{Tr}(ss') + \text{Tr}(ns') = \sum_i |\lambda_i|^2 + 0$. On a montré que $s = 0$ et donc que X est nilpotent. $\square$

3 Algèbres de Lie semi-simples

Rappelons que le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$: on le note $\text{Rad}(\mathfrak{g})$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *simple* si

- $\mathfrak{g}$ est non-abélienne, et
- les seuls idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$ sont $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$.

Le but de cette dernière section est de montrer l'équivalence entre les différentes définitions de la notion d'algèbre semi-simple. Faisons tout d'abord les remarques suivantes. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors

- la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{h}$,
- le sous-espace $\mathfrak{h}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 0 \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{h}\}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$,
- l'intersection $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ est un idéal avec une forme de Killing nulle.

En utilisant le théorème 2.3, on a donc que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp$ est un idéal résoluble pour tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. En particulier $\text{Ker} B_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^\perp$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3.1 *Une $\mathbb{K}$ -algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite*

1. $\mathfrak{g}$ se décompose en une somme directe d'idéaux simples.
2. $\mathfrak{g}$ ne possède pas d'idéaux abéliens différents de $\{0\}$.
3. $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$
4. la forme de Killing $B_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée.

Preuve : • 1) $\implies$ 2). Considérons une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ en idéaux simples, et notons $p_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_i$ les projection : les p_i sont des morphismes d'algèbres. Considérons les images $p_i(\mathfrak{a})$ d'un idéal abélien $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$. Pour chaque i , $p_i(\mathfrak{a})$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_i$, mais $\mathfrak{g}_i$ étant simple on a forcément $p_i(\mathfrak{a}) = 0$: $\mathfrak{a}$ est donc réduit à $\{0\}$.

• 2) $\implies$ 3). Si $\text{Rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ il existe $k \in \mathbb{N}$, avec $\mathfrak{a} = (\text{Rad}(\mathfrak{g}))^k \neq 0$ et $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = (\text{Rad}(\mathfrak{g}))^{k+1} = 0$: $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien non-nul de $\mathfrak{g}$.

• 3) $\implies$ 4). Le noyau $\text{Ker} B_{\mathfrak{g}}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, il est donc inclus dans le radical de $\mathfrak{g}$. Si le radical est nul, le noyau de $B_{\mathfrak{g}}$ est nul : la forme de Killing est donc non-dégénérée.

• 4) $\implies$ 1). Supposons que $B_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée. Deux cas se présentent: soit $\mathfrak{g}$ est simple (et on a montré l'implication), soit $\mathfrak{g}$ possède un idéal $\mathfrak{h}$ (différent de $\{0\}$ et de $\mathfrak{g}$). Montrons que l'intersection $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$.

Supposons par l'absurde que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp \neq 0$. Comme c'est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{a} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp)^k \neq 0$ avec $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp)^{k+1} = 0$: $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien non-nul de $\mathfrak{g}$. En considérant un supplémentaire F de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$, tout endomorphisme $\text{ad}(X)$ s'écrit en terme matriciel de la forme

$$\text{ad}(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec $A : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$, $C : \mathfrak{a} \rightarrow F$, $B : F \rightarrow \mathfrak{a}$ et $D : F \rightarrow F$. Si X_o est un vecteur de l'idéal abélien $\mathfrak{a}$, alors

$$\text{ad}(X_o) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(X)\text{ad}(X_o) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et $\text{ad}(X)\text{ad}(X_o) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais $[X, X_o] \in \mathfrak{a}$ donc

$$\text{ad}(X)\text{ad}(X_o) - \text{ad}(X_o)\text{ad}(X) = \text{ad}([X, X_o]) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que $\text{ad}(X)\text{ad}(X_o) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc que $B_{\mathfrak{g}}(X, X_o) = \text{Tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(X_o)) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. On obtient là une contradiction car $B_{\mathfrak{g}}$ est supposée non-dégénérée.

On a donc montré que $\mathfrak{g}$ admet la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Le travail est terminé car chaque idéal a forcément une forme de Killing non dégénérée. On recommence cette procédure pour chacun d'entre eux. Après un nombre fini d'étapes on arrive à une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p$ en somme directe d'idéaux simples. $\square$