Peut-on dénouer le nœud de trèfle ?

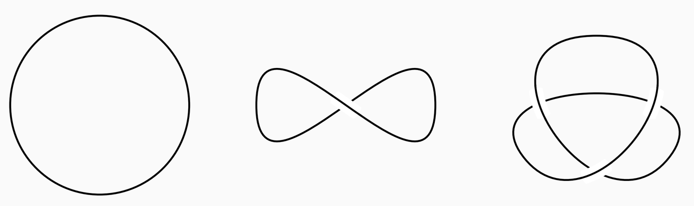
COLORIONS AVEC TROIS CRAYONS

Les nœuds

Un nœud en mathématiques n'est que la formalisation de ce que chacun imagine : une ficelle nouée. Seule différence : on en recolle les bouts. Le nœud le plus simple est le nœud trivial, qui consiste en un simple anneau de ficelle. Il en existe d'autres, plus compliqués - pour le plus grand bonheur des marins et des grimpeurs. Un nœud donné peut être déformé pour se présenter sous une forme plus ou moins compliquée : c'est une expérience que chacun peut faire avec, au choix, des fils d'écouteurs, de cerf-volant ou une ligne de canne à pêche.

Invariant de nœuds

La question de savoir si deux nœuds sont équivalents, c'est-à-dire si on peut passer de l'un à l'autre en tirant sur certains brins de la ficelle mais sans jamais la couper, s'avère très difficile. Pour chercher à y répondre, les mathématicien·ne·s aiment bien s'appuyer sur des invariants de nœuds. Un invariant de nœud est simplement une quantité (par exemple un nombre) définie pour chaque nœud. Si cette quantité est différente pour deux nœuds, on est ainsi assuré que les deux nœuds sont bien différents.



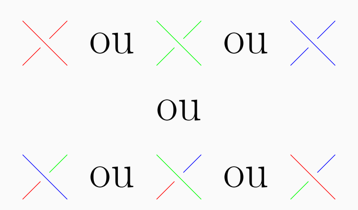
Trois diagrammes représentant le même nœud : le nœud trivial

Comme il est en général compliqué de manipuler des nœuds (qui flottent dans un espace de dimension 3), on préfère souvent représenter un nœud par un diagramme, dessiné sur papier ou écran selon le choix (tous les dessins de nœuds sur cette fiche sont ce qu'on appelle des diagrammes). Mais un nœud peut être représenté par plusieurs diagrammes différents (voir la figure ci-contre) ! Heureusement, l'invariant est le même pour tous les diagrammes d'un même nœud – c'est même pour ça que ça s'appelle un invariant. Donc si nous avons deux diagrammes avec chacun une valeur d'invariant différente, nous pouvons êtres sûr·e·s qu'il ne s'agit pas du même nœud.

Nous allons ici comparer le nœud de trèfle et le nœud trivial pour voir s'il est possible de modifier un diagramme du nœud de trèfle jusqu'à obtenir un cercle.

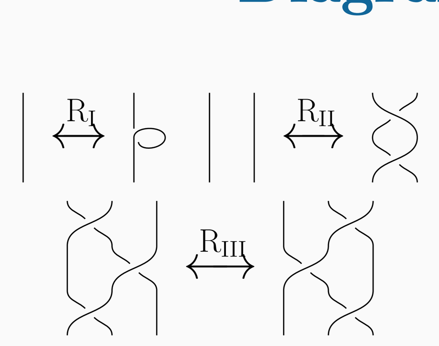
3-coloriages de Fox

Un diagramme de nœud consiste en un ou plusieurs traits continus, ou arcs, que nous cherchons à colorier en **rouge**, **vert** ou **bleu**. Mais attention : à chaque croisement, il faut que les trois arcs soient de la même couleur, ou alors que chacun soit d'une couleur différente. Nous appelons ça un *tricoloriage*.



Le nombre de tricoloriages possibles est notre invariant recherché. L'objectif de la séance est de montrer que cette quantité est bien un invariant, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du diagramme considéré, puis de vérifier que le nœud trivial et le nœud de trèfle ont un nombre de 3-coloriages différents.

Diagrammes équivalents

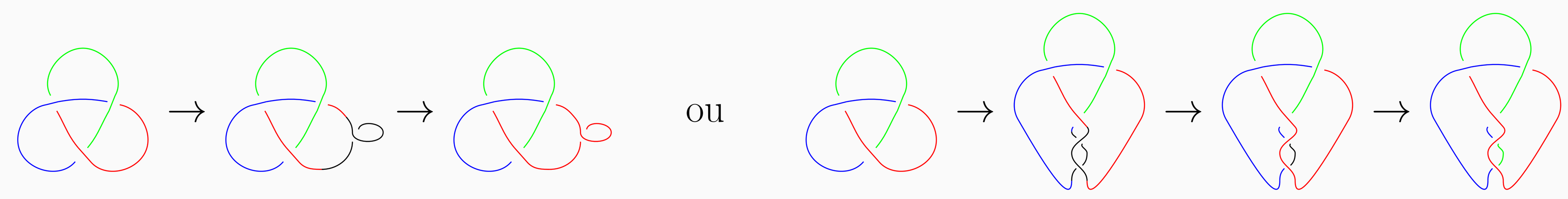


Les trois mouvements de Reidemeister

Deux diagrammes sont dits équivalents s'ils représentent le même nœud. Ce dernier peut avoir été manipulé et donc ne pas présenter la même position de croisements ou d'arcs. Le théorème de Reidemeister affirme que deux diagrammes sont équivalent si et seulement si il est possible d'obtenir un des diagrammes en appliquant une suite de mouvements de Reidemeister (voir l'image ci-contre) à l'autre.

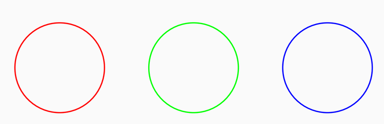
Propriété d'invariance

On peut consacrer une quinzaine de minutes à la preuve de l'invariance du nombre de 3-coloriages sous les mouvements de Reidemeister. Pour cela, on peut suggérer aux participants de se concentrer sur la partie modifiée du diagramme, et de chercher à deviner un coloriage à l'arrivée à partir d'un coloriage fixé au départ. On pourra ensuite discuter unicité, voire bijection ensembliste, ou soigneusement éviter ces termes selon le public ! On présente deux exemples concrets ci-dessous.



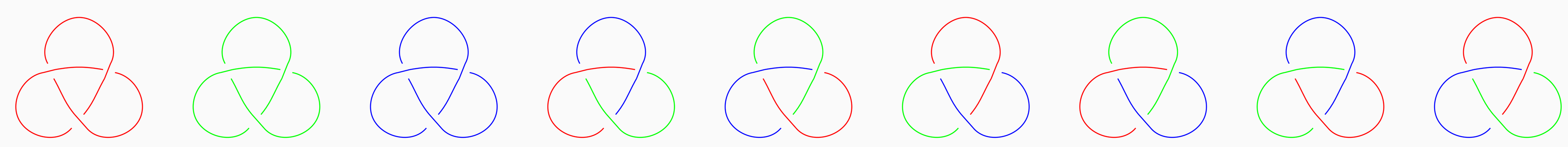
;

Tricoloriages du nœud trivial



On voit rapidement que quand le nœud trivial est représenté par un cercle, ce diagramme possède qu'un seul arc. Donc il sera colorié avec une seule couleur à la fois. Le nombre de tricoloriages possibles est 3. On peut remarquer qu'avec n'importe quel autre diagramme de ce nœud on obtient le même nombre de colorations.

Tricoloriages du nœud de trèfle



On peut faire une liste complète des tricoloriages pour le nœud de trèfle : il en existe 9.
Il est donc maintenant possible de conclure que le nœud trivial et le nœud de trèfle ne sont pas équivalents, puisque $3 \neq 9$, et donc le nœud de trèfle n'est pas dénouable.

Déroulé de la séance

Cette séance fait idéalement suite à celle sur le sac de nœuds. Une courte introduction à la notion d'invariants et au théorème de Reidemeister permet d'introduire les outils. Pour le théorème de Reidemeister, il peut être deviné en partant par exemple d'un nœud trivial qu'on présente sous une forme plus compliquée et qu'on dénoue pas à pas en regardant les diagrammes correspondants (voir les diagrammes dans le bloc *Invariant de nœuds*).

Le premier objectif de la séance consiste à prouver le fait que le nombre de tricoloriages est invariant. Ceci peut se faire collectivement (au tableau), ou chacun dans son coin, ou par petits groupes qui se voient attribuer l'un des trois mouvements. Selon l'âge des participants, une preuve par l'exemple peut être suffisamment convaincante.

Une fois l'invariance établie, on veut calculer le nombre de 3-coloriages du nœud trivial et du trèfle. Cela peut se faire de façon individuelle devant sa propre feuille, ou collective par groupes au tableau, et après quelques minutes il est possible d'obtenir ces 9 tricoloriages. Un argument de comptage peut se développer : on fixe un brin, on peut lui donner l'une des 3 couleurs de base. Puis on traverse un des croisements. Soit le brin suivant a la même couleur (pas de choix), et alors on voit que le troisième brin se voit associer nécessairement la même couleur, soit on change de couleur au croisement (deux choix possibles) et le troisième brin a nécessairement la troisième couleur. On a donc $3(1+2) = 9$ choix possibles.

Timing indicatif : après une introduction rapide (5 minutes, à ajuster au public), on peut consacrer dix à quinze minutes à la preuve d'invariance. Le comptage des 3-coloriages prend encore cinq à dix minutes.

Âge : séance réalisée avec des lycéens (MathC2+), et des profs de maths en formation à l'IREM. Les profs de maths avaient envie de bien comprendre la preuve de l'invariance et on y a passé du temps. Avec un public plus jeune, cette activité permet une initiation à la démonstration. Moyennant un raisonnement par disjonction de cas, c'est une jolie démonstration accessible aux élèves.

Un peu d'histoire

Le mathématicien Ralph Fox, connu pour ses contributions en théorie des nœuds, a introduit les 3-coloriages (et une généralisation à n couleurs un peu plus subtile) en 1956, dans un but pédagogique. Le théorème de Reidemeister sur lequel on s'appuie date de 1926-1927, et est dû à Alexander et Briggs d'une part, et Reidemeister de l'autre. Alexander comme Reidemeister sont des grands noms de la formalisation de la théorie des nœuds et de ce qu'on appelle la topologie algébrique.

Références

Quelques articles sur le site Images des mathématiques :

— Une famille infinie de nœuds et sa suite. On y introduit les notions de base et on y parle de 3-coloriages de Fox. Beaucoup des images présentées sur cette fiche en sont extraites.
— Des nœuds indétordables
— Peut-on dénouer l'icosaèdre ?
— Des beaux entrelacs

Un numéro spécial de Pour la science évoque plein de questions reliées aux nœuds.
Le livre *Knots and links* de Cromwell est peut-être le plus accessible des livres de cours.

Fiche réalisée par Léa Dusollier, Thibaut Godin et Hoel Queffelec.