Cônes limites des sous-groupes discrets des groupes réductifs sur un corps local

J.-F. Quint

Résumé

Soient $\mathbb{K}$ un corps local, $\mathbf{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe réductif et $G = \mathbf{G}(\mathbb{K})$. Si Γ est un sous-groupe de G, Y. Benoist a défini son cône limite : c'est le cône fermé engendré par l'ensemble des conjugués des composantes hyperboliques des éléments de Γ dans une chambre de Weyl de G. Nous démontrons ici que, lorsque $\mathbb{K}$ est non-arcimédien, tout cône convexe fermé, à support rationnel et stable par l'involution d'opposition d'une chambre de Weyl vectorielle de G est cône limite d'un sous-groupe Zariski dense de G.

1 Introduction

Soit $\mathbb{K}$ un corps local. Dans toute la suite on notera $\mathbf{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe réductif connexe et G le groupe de ses $\mathbb{K}$-points.

1.1 Résultats

Soit E un espace vectoriel réel muni du système de racines restreintes de $\mathbf{G}$ et soit E^+ une chambre de Weyl de E. On dispose de la projection de Jordan $\lambda : G \to E^+$. Choisissons une projection de Cartan $\mu : G \to E^+$.

On note ι l'involution d'opposition de E^+ : si x est dans E^+, $\iota(x)$ est l'unique élément de E^+ conjugué à $-x$ par le groupe de Weyl W de E.

Soit Γ un sous-groupe de G. Dans [2], Y. Benoist a associé à Γ son cône limite l_Γ : c'est le cône fermé engendré par $\lambda(\Gamma)$ dans E^+. Il est stable par ι. Supposons Γ Zariski dense dans G. On démontre alors dans [2] que l_Γ est convexe et que c'est le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$ dans E^+.

La connaissance de ce cône asymptote est utile dans l'étude des propriétés asymptotiques des sous-groupes de G. Par exemple, si H_1 et H_2 sont des sous-groupes fermés de G et que les cônes asymptotes à $\mu(H_1)$ et $\mu(H_2)$ ne se rencontrent qu'en $\{0\}$, H_1 agit proprement sur G/H_2 (*cf.* [1, 5.2]).

Supposons toujours Γ Zariski dense dans G.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, l_Γ est d'intérieur non vide ([2, 7.4]) et, réciproquement, tout cône convexe, fermé, d'intérieur non vide et stable par ι inclus dans E^+ est le cône limite d'un sous-groupe Zariski dense de G ([2, 5.1]).

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, E est naturellement muni d'une forme rationnelle et l_Γ est à support rationnel. Réciproquement, Y. Benoist a conjecturé ([2, 1.4]) que tout cône convexe, fermé, à support rationnel, stable par ι inclus dans E^+ était le cône limite d'un sous-groupe Zariski dense de G. Nous démontrons ici cette assertion. Notre résultat s'énoncera donc :

Théorème. *Soit $\mathbb{K}$ un corps local non-archimédien,* **G** *un $\mathbb{K}$-groupe réductif connexe et G le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Soit E^+ une chambre de Weyl de G. Alors, si $\mathcal{C} \subset E^+$ est un cône convexe, fermé, à support rationnel et stable par ι, il existe un sous-groupe Γ Zariski dense dans G tel que $l_\Gamma = \mathcal{C}$.*

Nous obtiendrons en fait un résultat plus précis : soit $E_C = E^W$. D'après [2, 3.2], le cône limite d'un sous-groupe discret et Zariski dense de G sort de E_C. On aura :

Corollaire. *Soit $\mathcal{C} \subset E^+$ un cône convexe, fermé, à support rationnel, stable par ι et non inclus dans E_C. Alors, il existe un sous-groupe Γ discret et Zariski dense dans G tel que $l_\Gamma = \mathcal{C}$.*

La principale différence entre les cas réel et non-archimédien tient au fait que, dans la situation non-archimédienne, l'application λ est localement constante. Cette remarque a d'ailleurs déjà permis à Y. Benoist ([2, 1.4]) de montrer l'analogue de notre théorème pour les sous-semi-groupes.

Dorénavant, $\mathbb{K}$ désignera donc un corps local non-archimédien.

1.2 Structure de la démonstration

La structure de la démonstration est celle de [2, 5.1]. Il s'agit, étant donnés des éléments $g_1, \dots, g_l$ de G, d'arriver à calculer $\lambda(g_1 \dots g_l)$ en fonction de $\lambda(g_1), \dots, \lambda(g_l)$. Ce calcul se ramène à celui du rayon spectral de $g_1 \dots g_l$ dans suffisament de représentations de G.

À la section 3.2, proposition 3.3, nous donnerons, sous certaines hypothèses, une formule exacte pour ce calcul qui est une amélioration de celle de [3, 1.4] : l'hypothèse de proximalité est remplacée par celle de p-proximalité, notion que nous introduisons en 3.1. Ceci nous permettra de construire des sous-groupes ayant un cône limite contenu dans une facette singulière de E^+.

Cette formule exprime $\lambda(g_1 \dots g_l)$ comme la somme des $\lambda(g_1), \dots, \lambda(g_l)$ et d'un terme d'erreur $\nu(g_1 \dots g_l)$ lié à la géométrie des points fixes attracteurs de $g_1, \dots, g_l$ dans les variétés drapeaux de G. L'une des idées nouvelles de cet article consiste à construire des éléments $g_1, \dots, g_l$ pour lesquels le terme d'erreur $\nu(g_1 \dots g_l)$ vit dans un cône prescrit : c'est l'objet de la section 4. Dans cette partie technique, nous serons amenés à utiliser les théorèmes de structure de F. Bruhat et J. Tits. Le lecteur non familiarisé avec cette théorie pourra simplement admettre la proposition 4.4. Nous le renvoyons aussi à [9], où sont énoncés les principaux résultats de [4] et de [5]. Cependant, au cours du texte, nous traiterons l'exemple du groupe GL_n.

La section 4 utilise en particulier l'existence dans un espace de représentation de $\mathbf{G}$ d'une classe particulière de normes, décrite au paragraphe 2.4. Cette existence se démontre indépendament du reste du texte, en utilisant, là aussi, les résultats de Bruhat-Tits. Nous consacrons à la démonstration de ce résultat la section 6.

Je tiens à remercier Yves Benoist pour les nombreux conseils et remarques qu'il m'a fournis durant l'élaboration de ce travail. Je remercie aussi les referees pour leurs suggestions à propos du texte.

2 Préliminaires

2.1 Notations

Rappelons que, dans toute la suite, $\mathbb{K}$ est un corps local non-archimédien.

On note $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{K}$, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de $\mathbb{K}$, q le cardinal de k et u une uniformisante de $\mathbb{K}$, *i.e.* un élément de $\mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$. On note ω la valuation de $\mathbb{K}$ telle que $\omega(u) = 1$ et on munit $\mathbb{K}$ de la valeur absolue $x \mapsto q^{-\omega(x)}$. Étant donnée une extension finie de $\mathbb{K}$, on la munit de l'unique valeur absolue prolongeant celle-ci.

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$.

On fixe un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$ et on note A le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Soit X le groupe des caractères de $\mathbf{A}$: c'est un groupe abélien libre de rang fini.

Soit $\Sigma \subset X$ l'ensemble des poids de $\mathbf{A}$ dans $\mathfrak{g}$. C'est un système de racines dans $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X$. On choisit dans Σ un système de racines positives Σ^+ et on note Π la base de Σ associée à ce choix.

Si $\Theta \subset \Sigma$ est une partie stable par l'addition et contenue dans un système de racines positives, on note $\mathbf{U}_\Theta$ l'unique $\mathbb{K}$-sous-groupe de $\mathbf{G}$ normalisé par $\mathbf{A}$ d'algèbre de Lie $\bigoplus_{\alpha \in \Theta} \mathfrak{g}_\alpha$ et U_Θ le groupe des $\mathbb{K}$-points de $\mathbf{U}_\Theta$. Si α est une racine non multipliable (resp. multipliable), on note $\mathbf{U}_\alpha$ pour $\mathbf{U}_{\{\alpha\}}$ (resp. $\mathbf{U}_{\{\alpha,2\alpha\}}$) et U_α le groupe des $\mathbb{K}$-points de $\mathbf{U}_\alpha$.

On note $\mathbf{Z}$ le centralisateur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$ et Z le groupe de ses $\mathbb{K}$-points.

Soit W le groupe de Weyl de Σ. Il s'identifie au quotient du normalisateur de A par Z. Si α est une racine, on note $\sigma_\alpha \in W$ la réflection associée.

Pour tout α dans Σ, on note $\mathbf{G}_\alpha$ le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par $\mathbf{Z}$, $\mathbf{U}_\alpha$ et $\mathbf{U}_{-\alpha}$: c'est un groupe réductif de $\mathbb{K}$-rang 1 et la composante neutre $\mathbf{A}_\alpha$ du groupe $\{a \in \mathbf{A} | \sigma_\alpha(a) = a^{-1}\}$ est un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal du groupe dérivé de $\mathbf{G}_\alpha$. On note G_α le groupe des $\mathbb{K}$-points de $\mathbf{G}_\alpha$ et A_α le groupe des $\mathbb{K}$-points de $\mathbf{A}_\alpha$. On note e_α l'unique élément de A_α tel que $\alpha(e_\alpha) = u^{-2}$.

On note E l'espace vectoriel dual du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X$. Le dual du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X$ est une forme rationnelle de E. Pour tout χ dans X, on note χ^ω la forme linéaire associée sur E. Alors Σ^ω est un système de racines dans E^*. On note E^+ la chambre de Weyl associée à Π^ω dans E et E^{++} l'intérieur de E^+. Pour tous x, y dans E, on note $x \geq y$ (resp. $x > y$) si et seulement si $x - y$ appartient à E^+ (resp. à E^{++}). Soit w_0 l'unique élément de W qui envoie E^+ sur $-E^+$. L'application $\iota = -w_0$ est appelée involution d'opposition de E^+. Elle permute les éléments de Π.

On pose $E_C = E^W$ et on note E_S l'unique supplémentaire W-stable de E_C : Π^ω est une base de E_S^* et $(\frac{1}{2}\nu(e_\alpha))_{\alpha \in \Pi}$ est sa base duale.

Pour tout z dans Z, on note $\nu(z)$ l'unique vecteur de E tel que, pour tout caractère rationnel χ de $\mathbf{Z}$, on ait :

$$\chi^\omega(\nu(z)) = -\omega(\chi(z)).$$

L'application ν est un homomorphisme de groupes de Z dans E. L'image de ν est un réseau stable par l'action de W dans E. On note $Z^+ = \nu^{-1}(E^+)$, $Z^{++} = \nu^{-1}(E^{++})$, $A^+ = Z^+ \cap A$ et $A^{++} = Z^{++} \cap A$.

Soit $\theta \subset \Pi$. On note

$$E_\theta = \{x \in E | \forall \alpha \in \Pi \backslash \theta \quad \alpha^\omega(x) = 0\},$$

$E_\theta^+ = E^+ \cap E_\theta$ et $E_\theta^{++} = E_\theta^+ \backslash \left(\bigcup_{\theta' \subsetneq \theta} E_{\theta'}^+\right)$: ce sont les facettes du cône polyédral E^{++}. Pour tous x, y dans E_θ, on note $x \geq_\theta y$ (resp. $x >_\theta y$) si et seulement si $x - y$ appartient à E_θ^+ (resp. à E_θ^{++}). De même, on note $Z_\theta = \nu^{-1}(E_\theta)$, $Z_\theta^+ = \nu^{-1}(E_\theta^+)$ et $Z_\theta^{++} = \nu^{-1}(E_\theta^{++})$ ainsi que $A_\theta = A \cap Z_\theta$, $A_\theta^+ = A \cap Z_\theta^+$ et $A_\theta^{++} = A \cap Z_\theta^{++}$.

Dorénavant, pour tout χ dans X, on note encore χ pour χ^ω.

2.2 Décomposition de Jordan

Un élément de G est dit elliptique si et seulement si il est semi-simple et contenu dans un sous-groupe compact de G. Un élément de G est dit hyperbolique si et seulement si il est conjugué à un élément de A. On dit qu'un élément g de G a une décomposition de Jordan si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $g = g_e g_h g_u$ avec g_e elliptique, g_h hyperbolique et g_u unipotent qui commutent deux à deux. Dans ce cas, on note $\lambda(g)$ l'image par ν de l'unique élément de A^+ conjugué à g_h : il ne dépend pas de la décomposition choisie. Pour tout g dans G, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que g^n admette une décomposition de Jordan. On note encore $\lambda(g) = \frac{1}{n}\lambda(g^n)$: il ne dépend pas de n. L'application $\lambda : G \to E^+$ est localement constante. Pour tout g dans G, on a $\lambda(g^{-1}) = \iota(\lambda(g))$.

Exemple 2.1. Si $\mathbf{G}$ est le groupe GL_n et $\mathbf{A}$ le groupe des matrices diagonales inversibles, alors $\mathbf{Z} = \mathbf{A}$ et Σ est l'ensemble des caractères de la forme

$$\alpha_{i,j} : \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_i \lambda_j^{-1}$$

($1 \leq i \neq j \leq n$). L'ensemble Σ^+ des $\alpha_{i,j}$ tels que $i < j$ est un système de racines positives dans Σ. Le groupe de Weyl W s'identifie à $\mathfrak{S}_n$ par l'application qui, à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, associe

$$\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \mathrm{Diag}\left(\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)}\right).$$

Pour ces choix, A^+ (resp. A^{++}) est l'ensemble des matrices de la forme $\mathrm{Diag}\,(t_1, \ldots, t_n)$ avec $t_1, \ldots, t_n$ dans $\mathbb{K}\backslash\{0\}$ et $\omega(t_n) \geq \ldots \geq \omega(t_1)$ (resp. $\omega(t_n) > \ldots > \omega(t_1)$). On identifie E et $\mathbb{R}^n$ en posant, pour tous $t_1, \ldots, t_n$ dans $\mathbb{K}\backslash\{0\}$,

$$\nu(\mathrm{Diag}\,(t_1, \ldots, t_n)) = (-\omega(t_1), \ldots, -\omega(t_n)).$$

On a alors $E_S = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + \ldots + x_n = 0\}$ et $E_C = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = \ldots = x_n\}$. Pour tout g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda(g)$ est la suite des opposés des valuations des valeurs propres de g, rangés par ordre décroissant.

Soit Γ un sous-groupe de G. On note l_Γ le cône fermé de E^+ engendré par $\lambda(\Gamma)$. On dit que l_Γ est le cône limite de Γ. Il est stable par ι.

2.3 Décomposition de Cartan

Soit K un bon sous-groupe compact maximal de G relativement à A, comme dans [4, 3.3], c'est-à-dire tel que, si N est le normalisateur de A dans G, $N = (N \cap K)A$.

On a : $G = KZ^+K$. Plus précisément, pour tous z_1, z_2 dans Z^+, z_2 appartient à Kz_1K si et seulement si $\nu(z_1) = \nu(z_2)$. Il existe donc une unique application $\mu : G \to E^+$ telle que, pour tous g_1, g_2 dans G, g_2 appartienne à Kg_1K si et seulement si $\mu(g_1) = \mu(g_2)$ et que $\mu_{|Z^+} = \nu_{|Z^+}$. L'application μ est localement constante et propre. Pour tout g dans G, on a : $\mu(g^{-1}) = \iota(\mu(g))$ et la formule du rayon spectral s'écrit :

$$\frac{1}{n}\mu(g^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(g).$$

Exemple 2.2. Si $\mathbf{G}$ est le groupe GL_n et si K est $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, pour tout g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et pour tout p dans $[\![1, n]\!]$, on note $\wedge^p g$ l'action de g sur $\wedge^p \mathbb{K}^n$, muni de sa norme naturelle. Alors, pour tout g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$\mu(g) = \left(\log_q \|g\|, \log_q \left\|\wedge^2 g\right\| - \log_q \|g\|, \ldots, \log_q \|\wedge^n g\| - \log_q \left\|\wedge^{n-1} g\right\|\right).$$

Soit $P \subset E$. On appelle cône asymptote à P l'ensemble des vecteurs x dans E pour lesquels il existe une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans P et une suite de réels positifs $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telles que $t_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Soit Γ un sous-groupe de G. Par la formule du rayon spectral, l_Γ est contenu dans le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$.

Théorème 2.1 (Benoist, [2])**.** *Supposons Γ Zariski dense dans G. Alors, le cône l_Γ est exactement le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$. Il est convexe et stable par ι.*

2.4 Représentations et bonnes normes

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$.

On appelle poids restreints de ρ les poids de la représentation $\rho_{|\mathbf{A}}$. D'après [8, 7.2], l'ensemble des poids restreints possède un plus grand élément χ pour l'ordre associé à Π sur X. On dit que χ est le plus haut poids restreint de ρ. Les autres poids restreints sont de la forme $\chi - \sum_{\alpha\in\Pi} n_\alpha \alpha$ avec, pour tout α dans Π, $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout g dans G, le rayon spectral de $\rho(g)$ est $q^{\chi(\lambda(g))}$.

Soit Λ l'ensemble des poids restreints de ρ. Pour tout v dans V, notons $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la famille de ses composantes sur les espaces poids. À la section 6, nous démontrerons le théorème 6.1 : celui-ci assure l'existence d'une norme ultramétrique K-invariante $\|.\|$ sur V telle que, pour tout v dans V, on ait :

$$\|v\| = \max_{\lambda\in\Lambda} \|v_\lambda\|$$

et que, pour tout λ dans Λ, pour tout z dans $\mathbf{Z}(\mathbb{K})$, la restriction de $\rho(z)$ à V_λ soit une similitude de rapport $q^{\lambda(\nu(z))}$.

On dira qu'une norme sur V ayant ces propriétés est (ρ, A, K)-bonne. Si V est muni d'une norme (ρ, A, K) bonne, pour tout g dans G, la norme de $\rho(g)$ est $q^{\chi(\mu(g))}$.

Exemple 2.3. Si $\mathbf{G}$ est le groupe GL_n et si K est $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, si ρ est la représentation naturelle de GL_n dans $\wedge^p\mathbb{K}^n$ $(1 \le p \le n)$, alors la norme ultramétrique naturelle sur $\wedge^p\mathbb{K}^n$ est (ρ, A, K)-bonne.

3 Proximalité

Nous donnons ici une formule exacte pour le calcul du rayon spectral d'un produit d'automorphismes linéaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une norme ultramétrique $\|.\|$. Pour tout p dans $[\![1, n]\!]$, on munit $\mathbb{P}(\wedge^p V)$ de la distance induite par la norme de V et on note $\mathfrak{G}_p(V) \subset \mathbb{P}(\wedge^p V)$ la variété des sous-espaces vectoriels de dimension p de V : c'est une sous-variété régulière Zariski fermée de $\mathbb{P}(\wedge^p V)$.

3.1 p-proximalité

Soit g dans $\mathcal{L}(V)$. On note $\lambda_1(g)$ le rayon spectral de g. On note V_g^+ le plus grand sous-espace vectoriel g-stable de V où toutes les valeurs propres de g sont de module $\lambda_1(g)$. On note $V_g^<$ son unique supplémentaire g-stable. Alors, si $p = \dim V_g^+$, V_g^+ est un point fixe attracteur pour l'action de g dans $\mathfrak{G}_p(V)$. Son bassin d'attraction est l'ouvert de Zariski $\{W \in \mathfrak{G}_p(V) | W \cap V_g^< = \{0\}\}$.

Soit g dans $\mathcal{L}(V)\backslash\{0\}$ et soit p dans $[\![1, n]\!]$. On dit que g est p-proximal si et seulement si $\dim V_g^+ = p$ et si la restriction de g à V_g^+ est une similitude de rapport $\lambda_1(g)$.

Exemple 3.1. Soit M un réseau de V et g un élément de $\mathcal{L}(V)\backslash\{0\}$ diagonalisable dans une base de M. Soit $p = \dim V_g^+$. Munissons V de la norme associée à M :

$$\forall v \in V \quad \|v\| = \inf \left\{ |\lambda| \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{K}^*, \frac{v}{\lambda} \in M \right\}.$$

Alors, g est p-proximal.

Remarque 3.1. Pour p=1, la p-proximalité est juste la proximalité au sens usuel et ne dépend pas de la norme choisie.

On a un critère simple de p-proximalité, analogue à celui de [1, 6.2] :

Lemme 3.1. *Soit g dans $\mathcal{L}(V)\backslash\{0\}$ et soit p dans $[\![1, n]\!]$. Alors, g est p-proximal si et seulement si*

(i) g a un point fixe attracteur V^+ dans $\mathfrak{G}_p(V)$.

(ii) $g_{|V^+}$ est une similitude.

On a alors $V_g^+ = V^+$ et $\lambda_1(g)$ est le rapport de la similitude $g_{|V^+}$.

Soit toujours g dans $\mathcal{L}(V)\backslash\{0\}$ et soit $p = \dim V_g^+$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note :

$$\begin{aligned} b_g^\varepsilon &= \{X \in \mathbb{P}(V) \,|\, d(X, \mathbb{P}(V_g^+)) \leq \varepsilon\} \\ B_g^\varepsilon &= \{X \in \mathbb{P}(V) \,|\, d(X, \mathbb{P}(V_g^<)) \geq \varepsilon\} \\ \beta_g^\varepsilon &= \{W \in \mathfrak{G}_p(V) | \mathbb{P}(W) \subset B_g^\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Soient $0 < \varepsilon < r \leq 1$. On dit que g est (p, r, ε)-proximal si et seulement si *(i)* g est p-proximal.

(ii) Pour tout X dans $\mathbb{P}\left(V_g^+\right)$ et pour tout Y dans $\mathbb{P}\left(V_g^<\right)$, $d(X,Y) \geq 2r$.

(iii) $g(B_g^\varepsilon) \subset b_g^\varepsilon$.

(iv) La restriction de g à β_g^ε est ε-lipschitzienne.

Notons que, si g est (p,r,ε)-proximal, alors, pour tout $l \geq 1$, g^l est (p,r,ε)-proximal.

Remarque 3.2. Soient g dans $\mathcal{L}(V)\backslash\{0\}$, p-proximal, et $0 < \varepsilon < r \leq 1$. Si, pour tout X dans $\mathbb{P}\left(V_g^+\right)$ et pour tout Y dans $\mathbb{P}\left(V_g^<\right)$, $d(X,Y) \geq 2r$, il existe $l > 0$ tel que, g^l soit (p,r,ε)-proximal.

3.2 Produit d'éléments (p,r,ε)-proximaux

Dans tout ce paragraphe, on fixe un entier $p \in [\![1,n]\!]$.

Soit (X,d) un espace métrique et Y et Z des parties de X. On note

$$d(Y,Z) = \inf_{\substack{y\in Y\\ z\in Z}} d(y,z)$$

et

$$\delta(Y,Z) = \sup_{y\in Y} d(y,Z).$$

Nous aurons à utiliser :

Lemme 3.2. *Soit $r > 0$. Il existe $0 < \varepsilon_V(r) < r$ tel que, pour toute décomposition en somme directe $V = U \oplus W$ avec $d(\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)) \geq r$, si π est la projection sur U parallèlement à W, pour tout vecteur v dans V, on a $\|\pi(v)\| = \|v\|$ dès que $d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}(U)) \leq \varepsilon_V(r)$.*

Démonstration. Cela résulte de la compacité de l'ensemble des (U,W) considérés et du caractère localement constant de la norme des vecteurs non nuls. $\square$

Soit g un élément p-proximal de $\mathcal{L}(V)\backslash\{0\}$. On note π_g la projection de V sur V_g^+ parallèlement à $V_g^<$.

Soient g et h des élément p-proximaux de $\mathcal{L}(V)\backslash\{0\}$. Supposons que π_g induise une similitude de V_h^+ dans V_g^+. On note alors $\nu_1(g,h)$ son rapport.

Soient $g_1, \ldots, g_l$ des éléments p-proximaux de $\mathcal{L}(V)\setminus\{0\}$. On note $g_0 = g_l$. Supposons que, pour tout i dans $[\![1, l]\!]$, π_{g_i} induise une similitude de $V^+_{g_{i-1}}$ dans $V^+_{g_i}$. On note alors

$$\nu_1(g_l, \ldots, g_0) = \prod_{i=1}^{l} \nu_1(g_i, g_{i-1}).$$

Le résultat suivant est un analogue de ceux énoncés dans [2, 2.2], [1, 6.4] et [3, 1].

Proposition 3.3. *Soient $l \geq 2$ et, pour tout i dans $[\![1, l]\!]$, $0 < \varepsilon_i < r_i \leq 1$ et g_i un élément (p, r_i, ε_i)-proximal de $\mathcal{L}(V)\setminus\{0\}$. On note $\varepsilon_0 = \varepsilon_l$, $r_0 = r_l$ et $g_0 = g_l$. On suppose que, pour tout i dans $[\![1, l]\!]$, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_V(r_i)$, que $d\left(\mathbb{P}\left(V^+_{g_{i-1}}\right), \mathbb{P}\left(V^<_{g_i}\right)\right) \geq r_{i-1} + r_i$ et que π_{g_i} induit une similitude de $V^+_{g_{i-1}}$ dans $V^+_{g_i}$. Alors, pour tous $n_1, \ldots, n_l \geq 1$, $g_l^{n_l} \ldots g_1^{n_1}$ est p-proximal et*

$$\lambda_1(g_l^{n_l} \ldots g_1^{n_1}) = \lambda_1(g_l)^{n_l} \ldots \lambda_1(g_1)^{n_1} \nu_1(g_l, \ldots, g_0).$$

Démonstration. Quitte à remplacer, pour tout i, g_i par $g_i^{n_i}$, on peut supposer $n_1 = \ldots = n_l = 1$. Soit $g = g_l \ldots g_1$. On a $g_1 B^{\varepsilon_1}_{g_1} \subset b^{\varepsilon_1}_{g_1}$ et, comme, $d(\mathbb{P}\left(V^+_{g_1}\right), \mathbb{P}\left(V^<_{g_2}\right)) \geq r_1 + r_2$, $b^{\varepsilon_1}_{g_1} \subset B^{\varepsilon_2}_{g_2}$. Donc, $g_2 g_1 B^{\varepsilon_1}_{g_1} \subset b^{\varepsilon_2}_{g_2}$ et, par récurrence, $g B^{\varepsilon_1}_{g_1} \subset b^{\varepsilon_l}_{g_l} \subset B^{\varepsilon_1}_{g_1}$ et la restriction de g à $\beta^{\varepsilon_1}_{g_1}$ est $\varepsilon_l \ldots \varepsilon_1$-lipschitzienne. Comme ce dernier ensemble est fermé et stable par g, g y a un point fixe attracteur V^+. Comme $g B^{\varepsilon_1}_{g_1} \subset b^{\varepsilon_l}_{g_l}$, $\delta(\mathbb{P}\left(V^+\right), \mathbb{P}\left(V^+_{g_l}\right)) \leq \varepsilon_l$. En particulier, V^+ est intérieur à $\beta^{\varepsilon_1}_{g_1}$, donc c'est un point fixe attracteur pour l'action de g sur $\mathfrak{G}_p(V)$.

Montrons que g induit sur V^+ une similitude de rapport

$$\lambda_1(g_l) \ldots \lambda_1(g_1) \nu_1(g_l, \ldots, g_0).$$

D'après le lemme 3.1, cela suffit pour conclure. Soit v_0 un vecteur non nul de V^+. Pour tout i dans $[\![1, l]\!]$, soit $v_i = g_i \ldots g_1 v_0$ et p_i la projection sur $V^+_{g_{i-1}}$ parallèlement à $V^<_{g_i}$. Soit i dans $[\![1, l]\!]$. On a $\mathbb{K} v_{i-1} \in b^{\varepsilon_{i-1}}_{g_{i-1}}$. Donc, d'après le lemme 3.2, comme $d\left(\mathbb{P}\left(V^+_{g_{i-1}}\right), \mathbb{P}\left(V^<_{g_i}\right)\right) \geq r_{i-1}$ et que $\varepsilon_{i-1} \leq \varepsilon_V(r_{i-1})$,

$$\|p_i(v_{i-1})\| = \|v_{i-1}\|.$$

Or, $\pi_{g_i}(v_{i-1}) = \pi_{g_i} p_i(v_{i-1})$, donc

$$\|\pi_{g_i}(v_{i-1})\| = \nu_1(g_i, g_{i-1}) \|p_i(v_{i-1})\| = \nu_1(g_i, g_{i-1}) \|v_{i-1}\|.$$

D'autre part, on a $\mathbb{K}v_i \in b_{g_i}^{\varepsilon_i}$. Donc, à nouveau d'après le lemme 3.2, comme $d\left(\mathbb{P}\left(V_{g_i}^+\right), \mathbb{P}\left(V_{g_i}^<\right)\right) \geq r_i$ et que $\varepsilon_i \leq \varepsilon_V(r_i)$,

$$\|v_i\| = \|\pi_{g_i}(v_i)\| .$$

Or, comme g_i et π_{g_i} commutent, $\pi_{g_i}(v_i) = g_i\pi_{g_i}(v_{i-1})$, donc

$$\|v_i\| = \|g_i\pi_{g_i}(v_{i-1})\| = \lambda_1(g_i)\|\pi_{g_i}(v_{i-1})\| = \lambda_1(g_i)\nu_1(g_i, g_{i-1})\|v_{i-1}\|$$

et, par conséquent,

$$\|v_l\| = \lambda_1(g_l)\dots\lambda_1(g_1)\nu_1(g_l,\dots,g_0)\|v_0\| .$$

D'après le lemme 3.1, g est p-proximal, $V_g^+ = V^+$ et

$$\lambda_1(g) = \lambda_1(g_l)\dots\lambda_1(g_1)\nu_1(g_l,\dots,g_0).$$

□

Remarque 3.3. La démonstration précédente permettrait même d'estimer $0 < \varepsilon < r \leq 1$ tels que g soit (p, r, ε)-proximal. Nous n'en aurons pas besoin dans la suite.

4 Conjugaisons associées aux points fixes de ι

Nous construisons ici des éléments de G dont les images dans les représentations de $\mathbf{G}$ vérifient les hypothèses de la proposition 3.3.

4.1 Racines invariantes par ι

On dit que deux racines α et β dans Σ non colinéaires sont fortement orthogonales si et seulement si $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ ne sont pas des racines. Alors les groupes $\mathbf{G}_\alpha$ et $\mathbf{G}_\beta$ commutent. En particulier, les réflexions σ_α et σ_β commutent.

Munissons E d'un produit scalaire $(.,.)$ W-invariant. Si α et β sont deux racines fortement orthogonales, on a $(\alpha, \beta) = 0$. Réciproquement, si α et β sont deux racines orthogonales et que $\alpha + \beta$ n'est pas une racine, alors $\alpha - \beta = \sigma_\beta(\alpha + \beta)$ n'est pas une racine.

Nous pouvons ainsi trouver beaucoup de familles fortement orthogonales de racines :

Lemme 4.1. *Il existe un sous-ensemble Ξ de Σ^+ qui engendre $(E^*)^\iota$ et qui est constitué de racines positives deux à deux fortement orthogonales. Pour un tel ensemble Ξ, on a :*

$$w_0 = \prod_{\alpha \in \Xi} \sigma_\alpha.$$

La démonstration s'inspire de [7, 2].

Démonstration. Supposons qu'un tel ensemble Ξ existe et montrons alors la formule $w_0 = \prod_{\alpha\in\Xi} \sigma_\alpha$. Posons $w = \prod_{\alpha\in\Xi} \sigma_\alpha$. Pour tout α dans Ξ, on a : $w\alpha = -\alpha$. Donc $w_{|(E^*)^\iota} = -\mathrm{Id}_{(E^*)^\iota}$. Par ailleurs, comme $(E^*)^{w_0}$ est l'orthogonal de $(E^*)^\iota$, pour tout α dans Ξ, on a : $\sigma_{\alpha|(E^*)^{w_0}} = \mathrm{Id}_{(E^*)^{w_0}}$, et, donc, $w_{|(E^*)^{w_0}} = \mathrm{Id}_{(E^*)^{w_0}}$. Il vient : $w = w_0$.

Montrons à présent l'existence de Ξ par récurrence sur le rang de Σ. On peut clairement se ramener au cas où Σ est irréductible. Soit alors β la plus grande racine de Σ^+. Soit $\Sigma_1 = \Sigma \cap \beta^\perp$: c'est un système de racines dans E^* et le groupe de Weyl W_1 de Σ_1 est le stabilisateur dans W de β.

Soit Π_1 l'ensemble $\Pi \cap \beta^\perp$. Montrons que Π_1 est la base de Σ_1 associée au système de racines positives $\Sigma_1^+ = \Sigma^+ \cap \beta^\perp$. Soit $\alpha = \sum_{\pi\in\Pi} n_\pi \pi$ $(n_\pi \in \mathbb{N})$ dans Σ_1^+. Pour tout π dans Π, comme $\beta + \pi$ n'est pas une racine, on a $(\beta, \pi) \geq 0$. Par conséquent, comme $(\beta, \alpha) = 0$, pour π dans Π, on a $\pi \in \Pi_1$ dès que $n_\pi \neq 0$, ce qu'il fallait démontrer. Soient w_1 le plus long élément de W_1 relativement à Π_1 et $\iota_1 = -w_1$.

Montrons que $\sigma_\beta w_1 = w_0$. En effet, $-\sigma_\beta w_1(\Pi)$ est une base de Σ, donc elle s'écrit $w\Pi$, pour un certain w dans W. Comme β est la plus grande racine de $-\sigma_\beta w_1(\Pi)$, on a $w\beta = \beta$ et, donc, w appartient à W_1. Or $\Pi_1 \subset -\sigma_\beta w_1(\Pi)$, donc $w\Pi_1 = \Pi_1$ et $w = \mathrm{Id}_{E^*}$. Par conséquent, $-\sigma_\beta w_1(\Pi) = \Pi$ et $\sigma_\beta w_1 = w_0$.

Par récurrence, il existe un sous-ensemble Ξ_1 de Σ_1^+ qui engendre $(E^*)^{\iota_1}$ et qui est constitué de racines positives deux à deux fortement orthogonales. Posons $\Xi = \Xi_1 \cup \{\beta\}$ et montrons que Ξ vérifie les conclusions du lemme.

Comme β est la plus grande racine de Σ^+, pour tout α dans Ξ_1, $\alpha + \beta$ n'est pas une racine et $(\alpha, \beta) = 0$. Donc Ξ est bien constitué de racines deux à deux fortement orthogonales. Par ailleurs, comme $\iota(\beta) = \beta$,

$$(E^*)^\iota = \mathbb{R}\beta \oplus ((E^*)^\iota \cap \beta^\perp)$$

et, comme $w_0 = \sigma_\beta w_1$ et que $w_1\beta = \beta$,

$$(E^*)^\iota \cap \beta^\perp = (E^*)^{\iota_1}.$$

Par conséquent, comme Ξ_1 engendre $(E^*)^{\iota_1}$, Ξ engendre $(E^*)^{\iota}$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Dorénavant, on fixe un tel ensemble Ξ, qu'on suppose constitué de racines longues. La famille $(\nu(e_\alpha))_{\alpha\in\Xi}$ (voir 2.1 pour la définition de e_α) est une base orthogonale de E^ι.

Exemple 4.1. Si $\mathbf{G}$ est le groupe GL_n et $\mathbf{A}$ le groupe des matrices diagonales inversibles, l'ensemble

$$\Xi = \left\{ \alpha_{i,n+1-i} \middle| 1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right] \right\}$$

convient.

Soit $\theta \subset \Pi$ tel que $\iota(\theta) = \theta$. On note Ξ_θ l'ensemble des α dans Ξ tels que $\alpha_{|E_\theta} \neq 0$. On connait bien les invariants de ι dans E_θ :

Lemme 4.2. *Pour tout $\theta \subset \Pi$ tel que $\iota(\theta) = \theta$, on a :*

$$(E_\theta^{++})^\iota \subset \bigoplus_{\alpha\in\Xi_\theta} \mathbb{R}_+^* \nu(e_\alpha).$$

Démonstration. Par définition de Ξ_θ, $(E_\theta)^\iota \subset \bigoplus_{\alpha\in\Xi_\theta} \mathbb{R}\nu(e_\alpha)$. Le lemme en découle, puisqu'une racine positive qui n'est pas identiquement nulle sur E_θ^{++} y est partout strictement positive. $\square$

Exemple 4.2. Si $\mathbf{G}$ est le groupe GL_n et $\mathbf{A}$ le groupe des matrices diagonales inversibles, avec les identifications faites dans les exemples précédents, $(E^{++})^\iota$ est l'ensemble des x dans $\mathbb{R}^n$ tels que $x_1 > \ldots > x_n$ et que, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $x_i + x_{n+1-i} = 0$.

4.2 Conjugaisons spéciales

Avec nos conventions, la famille $(Z, (U_\alpha)_{\alpha\in\Sigma})$ constitue une donnée radicielle génératrice de type Σ dans le groupe G, au sens de [4, 6.1]. Dorénavant, nous fixerons une valuation $\Phi = (\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ de cette donnée radicielle, compatible avec la valuation ω de $\mathbb{K}$, comme dans [4, 6.2] : ceci est possible, d'après [5, 5.1.20].

Soit α dans Σ. Alors φ_α est une application de U_α dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avec $\varphi_\alpha^{-1}(\{\infty\}) = \{e\}$ et, pour tous z dans Z et u dans U_α, on a $\varphi_\alpha(zuz^{-1}) = \varphi_\alpha(u) - \alpha(\nu(z))$. Les $(\varphi_\alpha^{-1}([l,\infty]))_{l\in\mathbb{R}}$ constituent une base de voisinages de e dans U_α.

D'après [4, 6.2.15], on peut supposer que, pour tout α dans Σ, $\varphi_\alpha(U_\alpha) \supset \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ et que $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}) = U_\alpha \cap K$. Alors, d'après [4, 6.2.19] et [5, 4.6.7], pour tout α dans Σ, K contient un représentant de σ_α. On fixe de tels représentants, qu'on note encore $(\sigma_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$.

Exemple 4.3. Si $\mathbf{G}$ est le groupe GL_n et $\mathbf{A}$ le groupe des matrices diagonales inversibles, notons, pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$, $\mathbf{U}_{i,j} = \mathbf{U}_{\alpha_{i,j}}$ et $U_{i,j} = U_{\alpha_{i,j}}$. Soit $\theta_{i,j}$ l'application qui, à $t \in \mathbb{K}$, associe la matrice dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1 et dont tous les autres termes sont nuls, sauf celui d'indice (i,j), qui est égal à t : c'est un isomorphisme de $(\mathbb{K},+)$ sur $U_{i,j}$. On pose $\varphi_{i,j} = \omega \circ \theta_{i,j}^{-1}$. Alors, $(A,(U_{i,j}))$ est une donnée radicielle génératrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\varphi_{i,j})$ est une valuation de cette donnée radicielle. Dorénavant, dans tous les exemples, nous considererons GL_n comme muni de cette valuation.

D'après [4, 6.2.2 (3)], pour tout α dans Σ et pour tout l dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\varphi_{-\alpha}^{-1}(l)(K\cap Z)\varphi_\alpha^{-1}(l)\sigma_\alpha \subset U_{-\alpha}(K\cap Z)(e_\alpha)^{-l}U_\alpha. \tag{4.1}$$

Par ailleurs, d'après [4, 6.3.6], pour tout α dans Σ et pour tout $l > 0$, l'ensemble $\varphi_{-\alpha}^{-1}(l)(K\cap Z)\varphi_\alpha^{-1}(l)$ est stable par passage à l'inverse et par conjugaison par les éléments de $\sigma_\alpha(K\cap Z)$ et, pour tout $l' > l$, on a :

$$(\varphi_{-\alpha}^{-1}(l)(K\cap Z)\varphi_\alpha^{-1}(l))(\varphi_{-\alpha}^{-1}(l')(K\cap Z)\varphi_\alpha^{-1}(l')) \subset \varphi_{-\alpha}^{-1}(l)(K\cap Z)\varphi_\alpha^{-1}(l). \tag{4.2}$$

Enfin, pour tout voisinage V de e dans G, il existe l_0 dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $l \geq l_0$, on ait :

$$\varphi_{-\alpha}^{-1}(l)(K\cap Z)\varphi_\alpha^{-1}(l) \subset V(Z\cap K). \tag{4.3}$$

Exemple 4.4. Si $\mathbf{G}$ est le groupe GL_2 et α l'unique racine positive de Σ, pour tout l dans $\mathbb{N}^*$, $\varphi_{-\alpha}^{-1}(l)(K\cap Z)\varphi_\alpha^{-1}(l)$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_2 \\ v_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

avec $u_1, u_2 \in \mathcal{O}^*$ et $\omega(v_1) = \omega(v_2) = l$.

Soit $\theta \subset \Pi$ une partie stable par ι. On pose $\sigma_\theta = \prod_{\alpha \in \Xi_\theta} \sigma_\alpha$: d'après le lemme 4.1, pour tout x dans E_θ, $w_0 x = \sigma_\theta x$.

On note $\Upsilon_\theta \subset K$ l'ensemble des υ dans $\prod_{\alpha \in \Xi_\theta} G_\alpha$ tels qu'il existe une famille $(l_\alpha)_{\alpha \in \Xi_\theta}$ d'entiers strictement positifs vérifiant :

$$\upsilon \in \left(\prod_{\alpha \in \Xi_\theta} \varphi_{-\alpha}^{-1}(l_\alpha) \right) (K \cap Z) \left(\prod_{\alpha \in \Xi_\theta} \varphi_{\alpha}^{-1}(l_\alpha) \right) \text{ et } \prod_{\alpha \in \Xi_\theta} e_\alpha^{l_\alpha} \in A_\theta^{++}.$$

La famille $(l_\alpha)_{\alpha \in \Xi_\theta}$ est alors nécessairement unique. Pour un tel υ, on pose :

$$\phi_\theta(\upsilon) = \prod_{\alpha \in \Xi_\theta} e_\alpha^{-l_\alpha}.$$

Rappelons que, pour x, y dans E_θ, on a noté $x >_\theta y$ si et seulement si, pour tout α dans θ, $\alpha(x) > \alpha(y)$. Des formules (4.1), (4.2) et (4.3), on déduit :

Lemme 4.3. *Avec ces hypothèses et ces notations, on a :*

(i) Pour tout υ dans Υ_θ, on a :

$$\upsilon \sigma_\theta \in U_{-\Xi_\theta} (K \cap Z) (\phi_\theta(\upsilon)) U_{\Xi_\theta}.$$

(ii) Pour tout υ dans Υ_θ, υ^{-1} appartient à Υ_θ et $\phi_\theta(\upsilon^{-1}) = \phi_\theta(\upsilon)$.

(iii) Pour tout υ dans Υ_θ et pour tout z dans $K \cap Z$, $(\sigma_\theta z) \upsilon (\sigma_\theta z)^{-1}$ appartient à Υ_θ et $\phi_\theta((\sigma_\theta z) \upsilon (\sigma_\theta z)^{-1}) = \phi_\theta(\upsilon)$.

(iv) Pour tous υ, υ' dans Υ_θ, si $\nu(\phi_\theta(\upsilon)) >_\theta \nu(\phi_\theta(\upsilon'))$, alors $\upsilon\upsilon'$ et $\upsilon'\upsilon$ appartiennent à Υ_θ et $\phi_\theta(\upsilon\upsilon') = \phi_\theta(\upsilon'\upsilon) = \phi_\theta(\upsilon)$.

(v) Pour tout voisinage V de e dans G, il existe un entier $l \geq 0$ tel que l'on ait :

$$\forall \upsilon \in \Upsilon_\theta \quad (\forall \alpha \in \theta \quad \alpha(\nu(\phi_\theta(\upsilon))) \leq -l) \Rightarrow (\upsilon \in V(K \cap Z)).$$

Exemple 4.5. Soit $\mathbf{G}$ le groupe GL_n avec les notations des exemples précédents et $\theta = \Pi$.

Si n est pair, Υ_Π est l'ensemble des matrices υ de la forme

$$\begin{pmatrix} u_1 & & & v_n \\ & & & \\ & u_{\frac{n}{2}} & v_{\frac{n}{2}+1} & \\ & v_{\frac{n}{2}} & u_{\frac{n}{2}+1} & \\ & & & \\ v_1 & & & u_n \end{pmatrix}$$

avec $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{O}^*$ et, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\omega(v_i) = \omega(v_{n+1-i}) > 0$. Pour un tel v, on a

$$\phi_\Pi(v) = (-\omega(v_1), \ldots, -\omega(v_{\frac{n}{2}}), \omega(v_{\frac{n}{2}}), \ldots, \omega(v_1)).$$

Si n est impair, Υ_Π est l'ensemble des matrices v de la forme

$$\begin{pmatrix} u_1 & & & & v_n \\ & u_{\frac{n-1}{2}} & & v_{\frac{n+3}{2}} & \\ & & u_{\frac{n+1}{2}} & & \\ & v_{\frac{n-1}{2}} & & u_{\frac{n+3}{2}} & \\ v_1 & & & & u_n \end{pmatrix}$$

avec $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{O}^*$ et, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $i \neq \frac{n+1}{2}$, $\omega(v_i) = \omega(v_{n+1-i}) > 0$. Pour un tel v, on a

$$\phi_\Pi(v) = (-\omega(v_1), \ldots, -\omega(v_{\frac{n-1}{2}}), 0, \omega(v_{\frac{n-1}{2}}), \ldots, \omega(v_1)).$$

4.3 Action des éléments de Υ_θ dans les représentations de G

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de **G** de plus haut poids restreint χ.

Soit $\theta \subset \Pi$. On note V_θ^+ la somme de tous les espaces poids associés à des poids de la forme $\chi - \sum_{\alpha \in \Pi \setminus \theta} n_\alpha \alpha$ avec, pour tout α dans $\Pi \setminus \theta$, $n_\alpha \in \mathbb{N}$. On pose $p_{\theta,\rho} = \dim V_\theta^+$ et on note $V_\theta^<$ l'unique supplémentaire A-stable de V_θ^+.

Munissons V d'une norme (ρ, A, K)-bonne. Soit g dans Z_θ^{++} et k dans K. Soit $h = kgk^{-1}$. Alors $\rho(h)$ est $p_{\theta,\rho}$-proximal, $V_{\rho(h)}^+ = kV_\theta^+$ et $V_{\rho(h)}^< = kV_\theta^<$.

Rappelons que q désigne le cardinal du corps résiduel de $\mathbb{K}$. Les résultats suivants nous serviront à appliquer la proposition 3.3 :

Proposition 4.4. *Soit $\theta \subset \Pi$ une partie stable par ι. Soient v dans Υ_θ et g et h dans Z_θ^{++}. Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de* **G** *de plus haut poids restreint χ, munie d'une norme (ρ, A, K)-bonne. Alors, $\rho(vhv^{-1})$ et $\rho(vh^{-1}v^{-1})$ sont $p_{\theta,\rho}$-proximaux. La projection de $V_{\rho(vhv^{-1})}^+ = vV_\theta^+$ sur $V_{\rho(g)}^+$ parallèlement à $V_{\rho(g)}^<$ est une isométrie* *et la projection de $V^+_{\rho(\upsilon h^{-1}\upsilon^{-1})} = \upsilon\sigma_\theta V^+_\theta$ sur $V^+_{\rho(g)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(g)}$ est une similitude de rapport $q^{\chi(\nu(\phi_\theta(\upsilon)))}$.*

Démonstration. Posons $p = p_{\theta,\rho}$ et $n = \dim V$. Notons π la projection sur V^+_θ parallèlement à $V^<_\theta$. On choisit une base de V dont les p premiers vecteurs forment une base de V^+_θ et les $n-p$ suivants forment une base de $V^<_\theta$.

Soient α dans Σ^+ et u dans U_α. D'après [6, 27.2], pour tout poids restreint λ et pour tout v dans V_λ, on a :

$$uv - v \in \sum_{k\in\mathbb{N}^*} V_{\lambda+k\alpha}.$$

Par conséquent, dans la base choisie, la matrice de l'image par ρ d'un élément de U_{Ξ_θ} est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

et celle de l'image d'un élément de $U_{-\Xi_\theta}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & B' \end{pmatrix}.$$

En outre, la matrice de l'image par ρ d'un élément de $K \cap Z$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} U_p & 0 \\ 0 & U_{n-p} \end{pmatrix}$$

où U_p et U_{n-p} sont respectivement les matrices d'une isométrie u_p de V^+_θ et d'une isométrie u_{n-p} de $V^<_\theta$. Par conséquent, comme υ appartient à K, $\rho(\upsilon)$ est une isométrie dont la matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} U_p & C \\ D & E \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout w dans υV^+_θ, on a :

$$\|\pi v\| = \left\|\pi\upsilon(\upsilon^{-1}w)\right\| = \left\|u_p\upsilon^{-1}w\right\| = \left\|\upsilon^{-1}w\right\| = \|w\|.$$

Comme $V^+_{\rho(\upsilon h\upsilon^{-1})} = \upsilon V^+_\theta$, la projection de $V^+_{\rho(\upsilon h\upsilon^{-1})}$ sur $V^+_{\rho(g)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(g)}$ est une isométrie.

Par ailleurs, d'après le lemme 4.1, on a $\sigma_\theta{}^{-1}h^{-1}\sigma_\theta \in Z_\theta^{++}$. Donc $\rho(\upsilon h^{-1}\upsilon^{-1})$ est p-proximal et $V^+_{\rho(\upsilon h^{-1}\upsilon^{-1})} = \upsilon\sigma_\theta V_\theta^+$. D'après le lemme 4.3, $\upsilon\sigma_\theta$ appartient à $U_{-\Xi_\theta}(K \cap Z)(\phi_\theta(\upsilon))U_{\Xi_\theta}$ et, donc, comme $\upsilon\sigma_\theta$ appartient à K, $\rho(\upsilon\sigma_\theta)$ est une isométrie dont la matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} V_p & C' \\ D' & E' \end{pmatrix},$$

où V_p est la matrice de la restriction à V_θ^+ de l'image par ρ d'un élément de $(K \cap Z)\phi_\theta(\upsilon)$. En particulier, pour tout w dans $\upsilon\sigma_\theta V_\theta^+$, on a :

$$\|\pi w\| = \left\|\pi(\upsilon\sigma_\theta)(\sigma_\theta^{-1}\upsilon^{-1}w)\right\| = q^{\chi(\nu(\phi_\theta(\upsilon)))}\left\|\sigma_\theta^{-1}\upsilon^{-1}w\right\| = q^{\chi(\nu(\phi_\theta(\upsilon)))}\|w\|.$$

Donc la projection de $V^+_{\rho(\upsilon h^{-1}\upsilon^{-1})}$ sur $V^+_{\rho(g)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(g)}$ est une similitude de rapport $q^{\chi(\nu(\phi_\theta(\upsilon)))}$. □

Corollaire 4.5. *Soit $\theta \subset \Pi$ une partie stable par ι. Soit $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Z_θ^{++} et $(\upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Υ_θ telle que, pour tous $i < j$, $\phi_\theta(\upsilon_i) >_\theta \phi_\theta(\upsilon_j)$. Soit, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $h_i = \upsilon_i g_i \upsilon_i^{-1}$. Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$ de plus haut poids restreint χ munie d'une norme (ρ, A, K)-bonne. Alors, pour tous $i \neq j$ et pour tous ε, η dans $\{-1, 1\}$, la projection de $V^+_{\rho(h_j^\eta)}$ dans $V^+_{\rho(h_i^\varepsilon)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(h_i^\varepsilon)}$ est une isométrie si $\varepsilon = \eta$ et une similitude de rapport $q^{\chi(\nu(\phi_\theta(\upsilon_{\min(i,j)})))}$ si $\varepsilon = -\eta$.*

Démonstration. Soient $i \neq j$ dans $\mathbb{N}^*$. Montrons que la projection de $V^+_{\rho(h_j)}$ dans $V^+_{\rho(h_i)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(h_i)}$ est une isométrie et que la projection de $V^+_{\rho(h_j^{-1})}$ dans $V^+_{\rho(h_i)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(h_i)}$ est une similitude de rapport $q^{\chi(\nu(\phi_\theta(\upsilon_{\min(i,j)})))}$.

Soit $\upsilon = \upsilon_i^{-1}\upsilon_j$. D'après le lemme 4.3, υ appartient à Υ_θ et $\phi_\theta(\upsilon) = \phi_\theta(\upsilon_{\min(i,j)})$. Soit $g = g_i$ et $h = \upsilon g_j \upsilon^{-1}$: d'après la proposition 4.4, la projection de $V^+_{\rho(h)}$ sur $V^+_{\rho(g)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(g)}$ est une isométrie et la projection de $V^+_{\rho(h^{-1})}$ sur $V^+_{\rho(g)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(g)}$ est une similitude de rapport $q^{\chi(\phi_\theta(\upsilon))}$. Or, $\rho(\upsilon_i)$ est une isométrie de V et l'on a $h_i = \upsilon_i g \upsilon_i^{-1}$ et $h_j = \upsilon_i h \upsilon_i^{-1}$. Donc la projection de $V^+_{\rho(h_j)}$ sur $V^+_{\rho(h_i)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(h_i)}$ est une isométrie et la projection de $V^+_{\rho(h_j^{-1})}$ sur $V^+_{\rho(h_i)}$ parallèlement à $V^<_{\rho(h_i)}$ est une similitude de rapport $q^{\chi(\nu(\phi_\theta(\upsilon)))}$.

L'étude des projections de $V^+_{\rho(h_j)}$ et de $V^+_{\rho(h_j^{-1})}$ sur $V^+_{\rho(h_i^{-1})}$ parallèlement à $V^<_{\rho(h_i^{-1})}$ s'en déduit en remplaçant ci-dessus $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $(\iota(g_i))_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $(\sigma_\theta\upsilon_i\sigma_\theta^{-1})_{i\in\mathbb{N}}$, puisque, d'après le lemme 4.3, pour tout i dans $\mathbb{N}$, $\sigma_\theta\upsilon_i\sigma_\theta^{-1}$ appartient à Υ_θ et que $\phi_\theta(\sigma_\theta\upsilon_i\sigma_\theta^{-1}) = \phi_\theta(\upsilon_i)$. □

5 Construction d'un sous-groupe de cône limite donné

Nous pouvons à présent conclure :

Théorème 5.1. *Soit $\mathcal{C} \subset E^+$ un cône convexe, fermé, à support rationnel et stable par ι. Alors il existe un sous-groupe Γ Zariski dense dans G tel que $l_\Gamma = \mathcal{C}$.*

Démonstration. Commençons par supposer $\mathcal{C} \subset E_C$. Comme $\iota_{|E_C} = -\mathrm{Id}_{E_C}$, $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de E_C. Comme $\mathcal{C}$ est à support rationnel, on a : $\mathcal{C} = \mathbb{R}(\nu(A)\cap\mathcal{C})$. Soit $B = A^W \cap \nu^{-1}(\mathcal{C})$: c'est un sous-groupe central de G, donc $\Gamma = KB$ est un sous-groupe de G. Comme K est ouvert dans G, Γ est Zariski dense dans G. Enfin, on a $\mu(\Gamma) = \nu(A)\cap\mathcal{C}$, donc $l_\Gamma = \mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C} \not\subset E_C$, on conclut par le théorème plus précis ci-après. □

Théorème 5.2. *Soit $\mathcal{C} \subset E^+$ un cône convexe, fermé, à support rationnel stable par ι et non inclus dans E_C. Alors il existe un sous-groupe Γ discret et Zariski dense dans G tel que $l_\Gamma = \mathcal{C}$.*

Soit θ la plus petite partie de Π telle que $\mathcal{C}$ soit inclus dans E^+_θ. L'idée de la démonstration consiste à prendre pour Γ le sous-groupe engendré par une partie de G constituée d'éléments de G conjugués à des éléments de A^{++}_θ par des éléments υ de l'ensemble Υ_θ construit au paragraphe 4.5 et pour lesquels $\phi_\theta(\upsilon)$ appartient au sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{C}$.

Pour montrer qu'un sous-groupe est discret, nous utiliserons le lemme classique dit du *tennis de table* :

Lemme 5.3. *Soient X un espace topologique localement compact et $(g_i)_{i\in I}$ une famille d'homéomorphismes de X. On note Γ le groupe d'homéomorphismes de X engendré par les $(g_i)_{i\in I}$. On se donne, pour tous i dans I et ε dans $\{-1,1\}$, des parties $B_{i,\varepsilon}$ et $b_{i,\varepsilon}$ de X telles que* *(i) pour tous i dans I et ε dans $\{-1,1\}$, on a $g_i^\varepsilon B_{i,\varepsilon} \subset b_{i,\varepsilon}$.*

(ii) pour tous $i \neq j$ dans I et ε, η dans $\{-1,1\}$, on a $b_{i,\varepsilon} \subset B_{j,\eta}$ et $b_{i,\varepsilon} \cap b_{j,\eta} = \emptyset$.

(iii) l'ensemble

$$\bigcap_{\substack{i \in I \\ \varepsilon \in \{-1,1\}}} B_{i,\varepsilon} \backslash b_{i,\varepsilon}$$

est d'intérieur non vide.

Alors, le groupe Γ est le groupe libre de générateurs les $(g_i)_{i\in I}$ et il est discret pour la topologie compact-ouvert.

Démonstration du théorème 5.2. On fixe une fois pour toutes une famille finie $\mathcal{R}$ de représentations rationnelles irréductibles de dimension finie de $\mathbf{G}$ telle que :

(i) Pour tout $\theta \subset \Pi$, $\theta \neq \emptyset$, il existe (ρ, V) dans $\mathcal{R}$ telle que ρ soit injective et que $p_{\theta,\rho} < \dim V$.

(ii) Les plus hauts poids restreints des éléments de $\mathcal{R}$ engendrent E^* (ceci étant possible d'après [8]).

Pour tout g dans G et pour tout x dans E, on a $\lambda(g) = x$ si et seulement si, pour tout (ρ, V) dans $\mathcal{R}$, de plus haut poids restreint χ, on a $\lambda_1(\rho(g)) = q^{\chi(x)}$. Pour contrôler le cône limite d'un sous-groupe de G, il suffira donc de connaitre le rayon spectral de ses éléments dans chacune des représentations de $\mathcal{R}$. C'est ce qu'on va faire, grâce à la proposition 3.3.

On munit chacune de ces représentation d'une norme (ρ, A, K)-bonne.

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{C}$. On note $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ l'intérieur de $\mathcal{C}$ dans F. Comme le cône fermé $\mathcal{C}$ est à support rationnel, il est engendré par $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \cap \nu(A)$.

Soit θ le plus petit sous-ensemble de Π tel que $\mathcal{C} \subset E_\theta$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par ι, θ l'est aussi. Le cône fermé $\mathcal{C}$ est engendré par $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \cap \nu(A_\theta^{++})$.

Soit $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $A_\theta^{++} \cap \nu^{-1}\left(\overset{\circ}{\mathcal{C}}\right)$ tels que les $(\nu(g_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ engendrent $\mathcal{C}$. Pour tout (ρ, V) dans $\mathcal{R}$, de plus haut poids restreint χ, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout k dans K, $\rho(kg_ik^{-1})$ est $p_{\theta,\rho}$-proximal, $\lambda_1(\rho(kg_ik^{-1})) = q^{\chi(\nu(g_i))}$, $V^+_{\rho(kg_ik^{-1})} = kV^+_\theta$ et $V^<_{\rho(kg_ik^{-1})} = kV^<_\theta$.

Nous allons chercher à construire un sous-groupe Γ de G, engendré par des conjugués des $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, dont les images à travers chacune des représentations de $\mathcal{R}$ vérifient les hypothèses de la proposition 3.3.

Comme $\mathcal{C}$ est convexe, à support rationnel et stable par ι, $\mathcal{C}$ contient des éléments de $(\nu(A_\theta^{++}))^\iota$. Donc, d'après le lemme 4.2, $\mathcal{C}$ contient un élément L de la forme $\sum_{\alpha\in\Xi_\theta} l_\alpha \nu(e_\alpha)$ avec, pour tout α dans Ξ_θ, $l_\alpha \in \mathbb{N}^*$. Comme $\theta \neq \emptyset$, $L \neq 0$. On choisit, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, un élément υ_i de Υ_θ tel que $\nu(\phi_\theta(\upsilon_i)) = -iL$, de telle sorte que, pour tous $i < j$ dans $\mathbb{N}^*$, $\nu(\phi_\theta(\upsilon_i)) >_\theta \nu(\phi_\theta(\upsilon_j))$.

Posons $\upsilon_0 = e$, l'élément neutre de G. Le corollaire 4.5 s'applique à $(\upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$. En particulier, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout (ρ, V) dans $\mathcal{R}$, avec les notations de 3.2,

$$\begin{array}{ll} d\left(\mathbb{P}\left(\upsilon_i V_\theta^+\right), \mathbb{P}\left(V_\theta^<\right)\right) > 0 & d\left(\mathbb{P}\left(\upsilon_i V_\theta^+\right), \mathbb{P}\left(\sigma_\theta V_\theta^<\right)\right) > 0 \\ d\left(\mathbb{P}\left(\upsilon_i \sigma_\theta V_\theta^+\right), \mathbb{P}\left(V_\theta^<\right)\right) > 0 & d\left(\mathbb{P}\left(\upsilon_i \sigma_\theta V_\theta^+\right), \mathbb{P}\left(\sigma_\theta V_\theta^<\right)\right) > 0. \end{array}$$

Comme on a, d'après le lemme 4.3,

$$\upsilon_i V_\theta^+ \xrightarrow[i\to\infty]{} V_\theta^+ \text{ et } \upsilon_i \sigma_\theta V_\theta^+ \xrightarrow[i\to\infty]{} \sigma_\theta V_\theta^+,$$

quitte à remplacer $(\upsilon_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ par une suite extraite, on peut supposer qu'il existe une suite de réels $(r_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ dans $]0, 1]$ telle que, en posant, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $h_i = \upsilon_i g_i \upsilon_i^{-1}$, on ait, pour tout (ρ, V) dans $\mathcal{R}$:

(i) Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout ε dans $\{-1, 1\}$, $\rho(h_i^\varepsilon)$ est $p_{\theta,\rho}$-proximal et

$$d\left(\mathbb{P}\left(V^+_{\rho(h_i^\varepsilon)}\right), \mathbb{P}\left(V^<_{\rho(h_i^\varepsilon)}\right)\right) \geq 2r_i.$$

(ii) Pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}^*$ et pour tous ε, η dans $\{-1, 1\}$,

$$d\left(\mathbb{P}\left(V^+_{\rho(h_i^\varepsilon)}\right), \mathbb{P}\left(V^<_{\rho(h_j^\eta)}\right)\right) \geq r_i + r_j$$

Comme $\theta \neq \emptyset$, il existe une représentation (ρ_0, V_0) dans $\mathcal{R}$ telle que ρ_0 soit injective et que $p_{\theta,\rho_0} < \dim V_0$. Choisissons, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $\varepsilon_i > 0$ de sorte que, pour tout (ρ, V) dans $\mathcal{R}$, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_V(r_i)$ (avec les notations du lemme 3.2) et que

$$\bigcap_{\substack{i\in\mathbb{N}^*\\ \varepsilon\in\{-1,1\}}} B^{\varepsilon_i}_{\rho_0(h_i^\varepsilon)} \backslash b^{\varepsilon_i}_{\rho_0(h_i^\varepsilon)} \text{ soit d'intérieur non vide,} \tag{5.1}$$

cette dernière hypothèse permettant d'appliquer le lemme 5.3 pour assurer le caractère discret du sous-groupe que nous allons construire.

Puisque, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $\nu(g_i)$ appartient à $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et que, pour tout j dans $\mathbb{N}^*$, $\nu(\phi_\theta(\upsilon_j))$ appartient à F, quitte à remplacer, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, g_i par une puissance convenable, on peut supposer que :

$$\nu(g_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \nu(\phi_\theta(\upsilon_j)) \in \mathcal{C}. \tag{5.2}$$

Quitte à encore remplacer g_i par une puissance supérieure, on peut supposer que, pour tout (ρ, V) dans $\mathcal{R}$, $\rho(g_i)$ et $\rho(g_i^{-1})$ sont $(p_{\theta,\rho}, r_i, \varepsilon_i)$-proximaux.

D'après le corollaire 4.5, pour tous $i \neq j$ et pour tous ε, η dans $\{-1, 1\}$, la projection de $V^+_{h_j^\eta}$ sur $V^+_{h_i^\varepsilon}$ parallèlement à $V^<_{h_i^\varepsilon}$ est une isométrie si $\varepsilon = \eta$ et une similitude de rapport $q^{\chi(\nu(\phi_\theta(\upsilon_{\min(i,j)})))}$ si $\varepsilon = -\eta$.

Soit Γ le sous-groupe de G engendré par les $(h_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Quitte à remplacer g_1, g_2 et υ_1 par des éléments proches, on peut supposer, d'après [8, 4.4], que Γ est Zariski dense dans G. De plus, on a, pour tout (ρ, V) dans $\mathcal{R}$, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout ε dans $\{-1, 1\}$,

$$h_i^\varepsilon \left(B^{\varepsilon_i}_{\rho(h_i^\varepsilon)} \right) \subset b^{\varepsilon_i}_{\rho(h_i^\varepsilon)}$$

et, pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}^*$ et pour tous ε, η dans $\{-1, 1\}$,

$$b^{\varepsilon_i}_{\rho(h_i^\varepsilon)} \subset B^{\varepsilon_j}_{\rho(h_j^\eta)}.$$

Vue l'hypothèse (5.1) faite sur les $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, d'après le lemme 5.3, $\rho_0(\Gamma)$ est le groupe libre engendré par les $(\rho_0(h_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ et il est discret dans $\mathrm{GL}(V_0)$. À fortiori Γ est le groupe libre engendré par les $(h_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et, comme ρ_0 est injective, il est discret dans G.

Montrons que $l_\Gamma = \mathcal{C}$.

Comme, pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda(h_i) = \nu(g_i)$ et que $(\nu(g_i))_{i\in\mathbb{N}^*}$ engendre $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{C} \subset l_\Gamma$.

Réciproquement, montrons que pour tout h dans Γ, $\lambda(h)$ appartient à $\mathcal{C}$. Soit $h = h_{i_l}^{n_l} \dots h_{i_1}^{n_1}$ ($n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $i_k \neq i_{k+1}$ pour tout $1 \leq k \leq l-1$) dans Γ. Quitte à remplacer h par un conjugué, on peut supposer que $i_1 \neq i_l$. Notons $i_0 = i_l$ et $n_0 = n_l$. Pour tout (ρ, V) dans $\mathcal{R}$, pour tout k dans $[\![1, l]\!]$, la projection parallèlement à $V^<_{h_{i_k}^{n_k}}$ induit, de $V^+_{h_{i_{k-1}}^{n_{k-1}}}$ dans $V^+_{h_{i_k}^{n_k}}$, une isométrie si $n_{k-1}n_k > 0$ et une similitude de rapport $q^{\chi(\nu(\phi_\theta(v_{\min(i_k,i_{k-1})})))}$ si $n_{k-1}n_k < 0$. Par conséquent, la proposition 3.3 s'applique : $\rho(h)$ est $p_{\theta,\rho}$-proximal et, si χ est le plus haut poids restreint de (ρ, V), on a :

$$q^{\chi(\lambda(h))} = \lambda_1(\rho(h)) = \prod_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_k>0}} \lambda_1(\rho(h_{i_k}))^{n_k} \prod_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_k<0}} \lambda_1(\rho(h_{i_k})^{-1})^{n_k}$$
$$\prod_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_{k-1}n_k<0}} q^{\chi(\nu(\phi_\theta(v_{\min(i_k,i_{k-1})})))}.$$

On en déduit, puisque les plus hauts poids restreints des éléments de $\mathcal{R}$ engendrent E^*,

$$\begin{aligned}\lambda(h) &= \sum_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_k>0}} n_k\lambda(h_{i_k}) + \sum_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_k<0}} n_k\lambda(h_{i_k}^{-1}) + \sum_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_{k-1}n_k<0}} \nu(\phi_\theta(v_{\min(i_k,i_{k-1})}))\\ &= \sum_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_k>0}} n_k\nu(g_{i_k}) + \sum_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_k<0}} n_k\iota(\nu(g_{i_k})) + \sum_{\substack{1\leq k\leq l\\ n_{k-1}n_k<0}} \nu(\phi_\theta(v_{\min(i_k,i_{k-1})})).\end{aligned}$$

Donc, vue l'hypothèse 5.2, $\lambda(h)$ appartient à $\mathcal{C}$, ce qu'il fallait démontrer. □

6 Immeuble de G et représentations

Soit (ρ, V) une $\mathbb{K}$-représentation de $\mathbf{G}$. On note $\mathrm{X}_{\mathbf{A},\rho}$ l'ensemble des poids de $\mathbf{A}$ dans V à travers ρ : on les appelle poids restreints de ρ. Pour tout v dans V, on note $(v_\chi)_{\chi\in\mathrm{X}_{\mathbf{A},\rho}}$ la famille de ses composantes sur les espaces-poids de $\mathbf{A}$.

L'objet de cette section est la démonstration de :

Théorème 6.1. *Soit (ρ, V) une $\mathbb{K}$-représentation de $\mathbf{G}$. Il existe une norme ultramétrique K-invariante $\|.\|$ sur V ayant les propriétés suivantes :*

(i) pour tout v dans V, on a :

$$\|v\| = \max_{\chi\in\mathrm{X}_{\mathbf{A},\rho}} \|v_\chi\|.$$

(ii) pour tout poids χ de $\mathbf{A}$ dans V, pour tout z dans $\mathbf{Z}(\mathbb{K})$, la restriction de $\rho(z)$ à V_χ est une similitude de rapport $q^{\chi^\omega(\nu(z))}$.

Nous utilisons ici librement le vocabulaire de [4] et de [5].

6.1 Un résultat algébrique

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle réseaux de V les sous-$\mathcal{O}$-modules de V de type fini qui engendrent V : ils sont libres de rang $\dim V$. Si $\mathfrak{H}$ est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes sans torsion et ρ une représentation du $\mathbb{K}$-groupe $\mathfrak{H}_{\mathbb{K}}$ dans V, on dit que $\mathfrak{H}$ opère sur un réseau M de V par ρ si et seulement si ρ provient par extension des scalaires d'une $\mathcal{O}$-représentation de $\mathfrak{H}$ dans M. Cette $\mathcal{O}$-représentation est alors unique.

Pour tout réseau M de V on appelle réseau dual de M et on note M^* le réseau de V^* : $\{\varphi \in V^* | \varphi(M) \subset \mathcal{O}\}$. Alors, $\mathfrak{H}$ opère sur M si et seulement si, pour tous v dans M et φ dans M^*, le coefficient de ρ associé à v et φ appartient à $\mathcal{O}[\mathfrak{H}] \subset \mathbb{K}[\mathfrak{H}]$.

Il vient immédiatement :

Lemme 6.2. *Soit $\mathfrak{H}$ un $\mathcal{O}$-schéma en groupes sans torsion et ρ une représentation du $\mathbb{K}$-groupe $\mathfrak{H}_{\mathbb{K}}$ dans V. Soit $\mathcal{M}$ un ensemble fini de réseaux sur lesquels $\mathfrak{H}$ opère par ρ. Alors $\mathfrak{H}$ opère sur les réseaux $\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M$ et $\sum_{M\in\mathcal{M}} M$.*

Démonstration. Cela résulte du fait que le réseau dual de $\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M$ est $\sum_{M\in\mathcal{M}} M^*$ et que le réseau dual de $\sum_{M\in\mathcal{M}} M$ est $\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M^*$.$\square$

Donnons un premier exemple d'opération d'un schéma en groupes sur un réseau :

Lemme 6.3. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathbf{T}$ un $\mathbb{K}$-tore déployé du $\mathbb{K}$-groupe $\mathrm{GL}(V)$. Alors il existe un réseau M de V tel que le $\mathcal{O}$-prolongement $\mathfrak{T}$ de $\mathbf{T}$ en un $\mathcal{O}$-schéma en tores déployé opère sur M.*

Démonstration. Soit Λ l'ensemble des poids de la représentation naturelle de $\mathbf{T}$ dans V. On choisit, pour tout λ dans Λ, un réseau M_λ de V_λ. Alors $\mathfrak{T}$ opère clairement sur le réseau $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. $\square$

Soit F une facette de l'immeuble de $\mathbf{G}$. On note, comme dans [5, 4.6.2 et 5.1.9], $\mathfrak{G}_F^\circ \subset \mathfrak{G}_F \subset \hat{\mathfrak{G}}_F \subset \mathfrak{G}_F^\dagger$ les $\mathcal{O}$-schémas en groupes de fibre générique $\mathbf{G}$ associés à F : chacun est un sous-schéma en groupes ouvert distingué des suivants et la composante neutre de $\mathfrak{G}_F^\dagger$ est $\mathfrak{G}_F^\circ$. Il existe un sous-groupe $N_F^\dagger$ de $\mathfrak{G}_F^\dagger(\mathcal{O})$ tel que $N_F^\dagger / \left(N_F^\dagger \cap \mathfrak{G}_F(\mathcal{O})\right)$ soit fini et que $\mathfrak{G}_F^\dagger$ soit engendré par $N_F^\dagger$ et par $\mathfrak{G}_F$.

Proposition 6.4. *Supposons que* $\mathbf{G}$ *soit déployé sur une extension non-ramifiée* $\mathbb{L}$ *de* $\mathbb{K}$*. Soit* F *une facette de l'immeuble de* $\mathbf{G}$*. Soit* (ρ, V) *une* $\mathbb{K}$*-représentation de* $\mathbf{G}$*. Alors* $\mathfrak{G}_F^\dagger$ *opère sur un réseau de* V *par* ρ*.*

Démonstration. Commençons par nous ramener au cas où $\mathbf{G}$ est déployé. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension galoisienne finie, non ramifiée, de groupe de Galois Γ, sur laquelle $\mathbf{G}$ est déployé. Soit F' la plus petite facette de l'immeuble de $\mathbf{G}_\mathbb{L}$ contenant F. Alors, dans le $\mathcal{O}_\mathbb{L}$-schéma en groupes $\mathfrak{G}_{F'}^\dagger$ provient par le changement de base $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_\mathbb{L}$ de $\mathfrak{G}_F^\dagger$ Supposons que $\mathfrak{G}_{F'}^\dagger$ opère sur un réseau N de $V_\mathbb{L}$. Pour tout γ dans Γ, $\mathfrak{G}_{F'}^\dagger$ opère sur γN. Le sous-$\mathcal{O}_\mathbb{L}$-module N' de $V_\mathbb{L}$ engendré par les γN, pour γ dans Γ, est un réseau de $V_\mathbb{L}$ et, d'après le lemme 6.2, $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}_\mathbb{L}}^\dagger$ opère sur N'. Or, comme N' est stable par Γ et que $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est non-ramifiée, N' s'écrit $M \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}_\mathbb{L}$, où M est un réseau de V. Comme, $\mathcal{O}[\mathfrak{G}_F^\dagger] = \mathcal{O}_\mathbb{L}[\mathfrak{G}_{F'}^\dagger]^\Gamma$, $\mathfrak{G}_F^\dagger$ opère sur M.

On est donc ramené à traiter le cas où $\mathbf{G}$ est déployé. Alors, $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$ est un $\mathbb{K}$-tore maximal de $\mathbf{G}$, et, d'après le lemme 6.3, $\mathfrak{A}$ opère sur un réseau de V. Par ailleurs, $\mathfrak{G}_F$ provient d'une donnée radicielle schématique ([5, 3.1]) $(\mathfrak{A}, (\mathfrak{U}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma})$. Par [5, 3.6], il existe un réseau M de V tel que $\mathfrak{A}$ opère sur M et que, pour tout α dans Σ, $\mathfrak{U}_\alpha$ opère sur M. D'après le théorème [5, 3.8], il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{V}$ de la section unité de $\mathfrak{G}_F$ tel que ρ se prolonge en un $\mathcal{O}$-morphisme de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{GL}(M)$. D'après [5, 1.2.13 et 4.6.6], ρ se prolonge en un $\mathcal{O}$-morphisme de $\mathfrak{G}_F$ dans $\mathfrak{GL}(M)$. D'après le lemme 6.2, $\mathfrak{G}_F$ opère sur le réseau M' engendré par les nM, pour n dans $N_F^\dagger/\left(N_F^\dagger \cap \mathfrak{G}_F(\mathcal{O})\right)$, qui est $N_F^\dagger$-stable. Alors, $\mathfrak{G}_F^\dagger$ opère sur M'. $\square$

6.2 Démonstration du théorème de représentation

Notons $\mathfrak{Z}$ le schéma canonique de fibre générique $\mathbf{Z}$.

D'après [5, 5.1], il existe une extension galoisienne finie non ramifiée $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, de groupe de Galois Γ, telle que $\mathbf{G}$ soit quasi-déployé sur $\mathbb{L}$ et qu'il existe un tore $\mathbb{L}$-déployé maximal $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ de $\mathbf{G}_\mathbb{L}$ défini sur K. Alors Γ possède un unique point fixe dans l'immeuble de $\mathbf{Z}_\mathbb{L}$. Soit F la plus petite facette de l'immeuble de $\mathbf{Z}_\mathbb{L}$ contenant le point fixe de Γ ; la facette F est contenue dans l'appartement associé à $\mathbf{B}$ et le schéma $\mathfrak{Z}$ provient de $\mathfrak{Z}_F^\dagger$ par le changement de base $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_\mathbb{L}$. Comme le point fixe de Γ est le barycentre de F, il ext fixé par tous les éléments de $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_\mathbb{L})$. Par conséquent, dans l'immeuble de $\mathbf{G}$, les éléments de $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_\mathbb{L})$ fixent point par point l'appartement de $\mathbf{A}$.

Soit $\mathbf{C}$ le centralisateur de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{G}$. C'est un $\mathbb{K}$-tore maximal de $\mathbf{G}$. Soit D l'espace vectoriel dual de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}(\mathbf{B})$, ν l'homomorphisme naturel $\mathbf{C}(\mathbb{L}) \to D$ et, pour tout χ dans $\mathrm{X}(\mathbf{B})$, χ^{ω} la forme linéaire associée sur D. Soit Σ_0 l'ensemble des racines de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{Z}$. On identifie E et $\bigcap_{\alpha\in\Sigma_0} \ker \alpha^{\omega}$. On pose :

$$Y = \nu^{-1}(E) \subset \mathbf{C}(\mathbb{L}).$$

Comme $\mathbf{Z}(\mathbb{K})$ stabilise la facette F, on a :

$$\mathbf{Z}(\mathbb{K}) \subset Y\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_{\mathbb{L}}).$$

On connait bien les modules des valeurs propres des éléments de Y :

Lemme 6.5. *Soient χ un caractère de $\mathbf{A}$ et κ un caractère de $\mathbf{C}$ dont la restriction à $\mathbf{A}$ soit χ. Alors, pour tout c dans Y, on a :*

$$-\omega(\kappa(c)) = \chi^{\omega}(\nu(c)).$$

Démonstration. L'application

$$\begin{array}{c} c \mapsto -\omega(\kappa(c)) \\ \mathbf{C}(\mathbb{L}) \to \mathbb{R} \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes continu. Comme $\nu^{-1}(0)$ est un sous-groupe compact de $\mathbf{C}(\mathbb{L})$, elle factorise à travers un homomorphisme de groupes de $\nu(\mathbf{C}(\mathbb{L}))$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, elle induit une forme linéaire de D qui est égale à χ^{ω} sur E, ce qu'il fallait démontrer. □

Nous pouvons à présent conclure :

Démonstration du théorème 6.1. Soit F une facette de l'immeuble de $\mathbf{G}$ contenue dans l'appartement associé à $\mathbf{A}$ et soit K son stabilisateur compact dans G. Soit (ρ, V) une $\mathbb{K}$-représentation de $\mathbf{G}$ et. Montrons qu'il existe une norme sur V vérifiant les conclusions du théorème 6.1.

Soit $\mathbb{M}$ une extension finie de $\mathbb{L}$ déployant $\mathbf{C}$. Soit F' la plus petite facette de l'immeuble de $\mathbf{G}_{\mathbb{M}}$ contenant F. D'après [5, 4.2.24], la facette F' est contenue dans l'appartement associé à $\mathbf{C}$. D'après la proposition 6.4, on peut trouver un $\mathcal{O}_{\mathbb{M}}$-réseau M de $V_{\mathbb{M}}$ sur lequel $\mathfrak{G}^{\dagger}_{F'}$ opère par ρ. Munissons $V_{\mathbb{M}}$ de la norme associée à ce réseau ; pour tout v dans $V_{\mathbb{M}}$, on a :

$$\|v\| = \inf\left\{ |\lambda| \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{M}^* \quad \frac{v}{\lambda} \in M \right\}.$$

Comme K et $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})$ stabilisent F', ils sont inclus dans $\mathfrak{G}^{\dagger}_{F'}(\mathcal{O}_{\mathbb{M}})$ et cette norme est K-invariante et $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})$-invariante.

Soit $\mathfrak{C}$ le $\mathcal{O}_{\mathbb{M}}$-schéma en tores déployé prolongeant $\mathbf{C}_{\mathbb{M}}$. Comme F' est contenue dans l'appartement de l'immeuble de $\mathbf{G}_{\mathbb{M}}$ associé à $\mathbf{C}$, l'injection $\mathbf{C} \to \mathbf{G}$ se prolonge en un morphisme $\mathfrak{C} \to \mathfrak{G}^{\dagger}_{F'}$. Alors, $\mathfrak{C}$ opère sur M par ρ et l'on a :

$$M = \bigoplus_{\kappa \in \mathrm{X}_{\mathbf{C},\rho}} (M \cap V_{\mathbb{M},\kappa}).$$

En particulier, on a :

$$M = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{X}_{\mathbf{A},\rho}} (M \cap V_{\mathbb{M},\chi}),$$

et, donc, pour tout v dans $V_{\mathbb{M}}$,

$$\|v\| = \max_{\chi \in \mathrm{X}_{\mathbf{A},\rho}} \|v_\chi\|.$$

Démontrons alors la seconde partie du lemme. Soit χ un poids de $\mathbf{A}$ dans V. Il suffit de montrer que les éléments de $\mathbf{Z}(\mathbb{K})$ induisent des similitudes sur $V_{\mathbb{M},\chi}$. Pour tout v dans $V_{\mathbb{M},\chi}$, on a :

$$\|v\| = \max_{\substack{\kappa \in \mathrm{X}_{\mathbf{C},\rho} \\ \kappa_{|\mathbf{A}} = \chi}} \|v_\kappa\|.$$

D'après le lemme 6.5, les éléments de Y induisent donc des similitudes sur $V_{\mathbb{M},\chi}$. Comme les éléments de $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_{\mathbb{L}})$ stabilisent $V_{\mathbb{M},\chi}$ et y induisent des isométries, les éléments de $\mathbf{Z}(\mathbb{K})$ y induisent des similitudes.

La restriction de cette norme à V convient.$\square$

Références

[1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Annals of mathematics* **144** (1996), 315-347.

[2] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geometric and functional analysis* **7** (1997), 1-47.

[3] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires (II), *Advanced studies in pure mathematics* **26** (2000), 33-48.

[4] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées, *Publications mathématiques de l'IHES* **41** (1972), 5-251.

[5] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publications mathématiques de l'IHES* **60** (1984), 5-184.

[6] J.E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Text in Mathematics 21, Springer Verlag , New York, 1981.

[7] A. Joseph, A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra, *Journal of algebra* **48** (1977), 241-289.

[8] J. Tits, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **247** (1971), 196-220.

[9] J. Tits, Reductive groups over local fields, *Proceedings of the symposium in pure mathematics of the american mathematical society* **33** (1977), 29-69.

Jean-François Quint
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
`quint@dma.ens.fr`