Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur

J.-F. Quint

Résumé

Soient G un groupe de Lie semi-simple, réel, connexe et de centre fini, $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ une chambre de Weyl fermée de $\mathfrak{a}$. Si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G, nous lui associons une fonction homogène $\psi_\Gamma : \mathfrak{a}^+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ qui généralise l'exposant de convergence de Γ considéré en $\mathbb{R}$-rang 1. Nous montrons alors que cette fonction est concave. Dans un travail ultérieur, nous en déduirons des constructions de généralisations des mesures de Patterson-Sullivan.

Nous démontrons aussi des analogues de nos résultats sur les corps locaux.

I Introduction

I.1 Résultats

Soit G un groupe de Lie semi-simple, réel, connexe et de centre fini. On choisit une involution de Cartan τ de G. On note K le sous-groupe compact maximal de G constitué de l'ensemble des points fixes de τ et $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ tel que, pour x dans $\mathfrak{a}$, $\tau(\exp x) = \exp(-x)$. Soit $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ une chambre de Weyl. On dispose alors de la décomposition de Cartan $G = K(\exp \mathfrak{a}^+)K$ et de la projection associée $\mu : G \to \mathfrak{a}^+$.

Si Γ est un sous-groupe de G, l'étude des propriétés asymptotiques de Γ passe par la description de l'ensemble $\mu(\Gamma)$. Dans [4], Y. Benoist a démontré que, si Γ est un sous-groupe Zariski dense de G, le cône asymptote à l'ensemble $\mu(\Gamma)$ est convexe et d'intérieur non vide. On l'appelle cône limite de Γ.

Si le $\mathbb{R}$-rang de G est égal à 1, pour g dans G, la donnée de $\mu(g)$ est simplement celle de la distance entre le point fixe x de K dans l'espace symétrique de G et son translaté gx par g. Si Γ est un sous-groupe discret de G, un rôle important est alors joué par l'exposant de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-td(x,\gamma x)} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

c'est-à-dire par le nombre réel

$$\limsup_{a \to \infty} \left(\frac{1}{a} \log \left(\operatorname{card}\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma x) \leq a\} \right) \right).$$

Citons par exemple, la théorie de Patterson-Sullivan introduite dans [14] et [18].

Le but de cet article est la généralisation à la situation de rang supérieur de l'étude de la divergence exponentielle des sous-groupes discrets. On voit alors apparaître un phénomène nouveau de convexité, que nous allons à présent décrire.

Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. Soit $\|.\|$ une norme (invariante par le groupe de Weyl) sur $\mathfrak{a}$. Si $\|.\|$ est la norme euclidienne provenant d'une métrique riemannienne G-invariante sur l'espace symétrique de G, pour tout g dans G, $\|\mu(g)\|$ est la distance entre le point fixe de K et son translaté par g.

Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{a}$, on note $\tau_{\mathcal{C}}$ l'exposant de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \mu(\gamma) \in \mathcal{C}}} e^{-t\|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et, pour x dans $\mathfrak{a}$, on pose

$$\psi(x) = \|x\| \inf \tau_{\mathcal{C}},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{a}$ qui contiennent x. La fonction homogène ψ ne dépend pas de la norme choisie. Si $\|.\|$ est une norme sur $\mathfrak{a}$, la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-t\|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a pour exposant de convergence

$$\sup_{x \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}} \frac{\psi(x)}{\|x\|}.$$

Soit ρ la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ qui est la somme des racines multipliées par la dimension de leurs espaces poids dans l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Notre principal résultat s'écrit :

Théorème. *La fonction ψ est majorée par ρ. Elle est concave et semi-continue supérieurement. L'ensemble*

$$\{x \in \mathfrak{a} \mid \psi(x) > -\infty\}$$

est exactement le cône limite de Γ. De plus, ψ est positive sur le cône limite de Γ et strictement positive sur son intérieur relatif.

Dans [17], nous appliquerons ce théorème à la construction de généralisations des mesures de Patterson-Sullivan. Ce problème avait déjà été considéré par P. Albuquerque dans [1]. En $\mathbb{R}$-rang 1, c'est l'étude de ces mesures qui permet, sous certaines hypothèses, d'obtenir des équivalents des fonctions orbitales de comptage pour l'action de Γ dans l'espace symétrique de G. Concernant les questions de comptage, nos méthodes permettent de montrer :

Proposition. *Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathfrak{a}$. Alors*

$$\frac{1}{a}\log\left(\operatorname{card}\{\gamma \in \Gamma \mid \|\mu(\gamma)\| \leq a\}\right)$$

admet une limite $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ quand a tend vers ∞ et l'on a :

$$\operatorname{card}\{\gamma \in \Gamma \mid \|\mu(\gamma)\| \leq a\} \underset{a\to\infty}{=} O\left(a^{r-1}e^{a\tau}\right)$$

où r est le $\mathbb{R}$-rang de G.

En d'autres termes, en appliquant ce résultat aux normes euclidiennes invariantes par le groupe de Weyl :

Corollaire. *Soit X l'espace symétrique de G, muni d'une métrique riemannienne G-invariante. Alors, il existe $\tau > 0$ tel que, pour tous x, y dans X, on ait :*

$$\frac{1}{a}\log\left(\operatorname{card}\{\gamma \in \Gamma \mid d(x,\gamma y) \leq a\}\right) \xrightarrow[a\to\infty]{} \tau$$

et

$$\operatorname{card}\{\gamma \in \Gamma \mid d(x,\gamma y) \leq a\} \underset{a\to\infty}{=} O\left(a^{r-1}e^{a\tau}\right).$$

I.2 Structure des démonstrations

La démonstration du théorème s'effectue en deux étapes.

Dans la première partie du texte, on établit :

Proposition. *Soit* Γ *un sous-groupe discret Zariski dense de* G*. Il existe une application* $\pi : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) il existe un réel $\kappa \geq 0$ *tel que, pour tous* γ_1, γ_2 *dans* Γ*,*

$$\|\mu(\pi(\gamma_1, \gamma_2)) - \mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_2)\| \leq \kappa.$$

(ii) pour tout réel $R \geq 0$*, il existe une partie finie* H *de* Γ *telle que, pour* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$ *dans* Γ*, avec* $\|\mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_1')\| \leq R$ *et* $\|\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma_2')\| \leq R$*,*

$$\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \pi(\gamma_1', \gamma_2') \Rightarrow (\gamma_1' \in \gamma_1 H \text{ et } \gamma_2' \in H\gamma_2)\,.$$

Une telle application π sera, dans la suite du texte, appelée produit générique dans Γ. L'idée de la preuve est d'écrire $\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 f \gamma_2$ où f est choisi dans une partie finie F de Γ, de façon à éliminer les problèmes qui se posent quand γ_1 est proche de γ_2^{-1}. La partie F sera construite en utilisant un résultat de H. Abels, G.-A. Margulis et G.-A. Soifer, le lemme II.3.4, dont nous redonnerons la démonstration. La vérification du point *(i)* de la proposition s'effectue en estimant la norme de $\gamma_1 f \gamma_2$ dans suffisament de représentations de G, au lemme II.3.3. Le point délicat est la vérification de la partie *(ii)*. Sa démonstration s'inspire de phénomènes de géométrie dans G/K liés à l'existence en rang supérieur d'analogues du fameux lemme des ombres de Sullivan ([18]). On définit, pour g dans G, une partie B_g^ε de la variété des drapeaux de G de sorte que gB_g^ε joue le rôle des ombres de [18] et on montre un analogue du lemme des ombres, la proposition II.3.7. Reste alors à vérifier que, sous les hypothèses que nous aurons faites, les ombres $\gamma_1 B_{\gamma_1}^\varepsilon$ et $\gamma_1 f \gamma_2 B_{\gamma_1 f \gamma_2}^\varepsilon$ se rencontrent, c'est ce qui est fait dans la démonstration du lemme II.3.8.

Dans la deuxième partie on déduit de l'existence d'un produit générique dans Γ qu'il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tels que, pour x, y dans $\mathfrak{a}$,

$$\operatorname{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(b(x+y, \alpha))) \geq \gamma \operatorname{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(b(x, \beta))) \operatorname{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(b(y, \beta))),$$

et l'on démontre la concavité de ψ à partir de cette seule propriété de l'ensemble $\mu(\Gamma)$.

Enfin, dans une troisième partie, nous terminerons la démonstration précise du théorème.

I.3 Corps locaux

Dans l'esprit de [4], nous démontrerons des analogues des résultats ci-dessus pour les groupes semi-simples définis sur un corps valué localement compact. Nous utiliserons les analogues des décompositions de Cartan et d'Iwasawa pour ces groupes, établis par F. Bruhat et J. Tits dans [8] et [9]. Nous renvoyons le lecteur à [20], pour un résumé de cette théorie.

J'ai bénéficié, pour l'élaboration de ce travail, des remarques et des suggestions d'Yves Benoist. Je tiens ici à l'en remercier.

II Produit générique

Soit $\mathbb{K}$ un corps local : $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, pour un entier premier p, soit le corps des fractions $\mathbb{F}_q((T))$ de l'anneau des séries formelles sur le corps fini à q éléments.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on le munit de la valeur absolue usuelle et on pose $q = e$, $u = e^{-1}$ et pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, $\omega(x) = -\log|x|$.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on note $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{K}$, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de $\mathbb{K}$, q le cardinal de k et u une uniformisante de $\mathbb{K}$, *i.e.* un élément de $\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$; on note ω la valuation de $\mathbb{K}$ telle que $\omega(u) = 1$ et on munit $\mathbb{K}$ de la valeur absolue $x \mapsto q^{-\omega(x)}$.

Étant donnée une extension algébrique de $\mathbb{K}$, on la munit de l'unique valeur absolue prolongeant celle de $\mathbb{K}$.

Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie Y de X, on note :

$$b(Y, \varepsilon) = \{x \in X | d(x, Y) \leq \varepsilon\} \text{ et } B(Y, \varepsilon) = \{x \in X | d(x, Y) \geq \varepsilon\}.$$

Pour toutes parties Y et Z de X, on note :

$$d(Y, Z) = \inf_{(y,z) \in Y \times Z} d(y, z) \text{ et } \delta(Y, Z) = \sup_{y \in Y} d(y, Z).$$

Pour tout ensemble X et pour tout x dans X, on note δ_x la mesure de Dirac en x.

Si t est un nombre réel, on note $[t]$ sa partie entière.

II.1 Algèbre linéaire normée

Nous démontrons ici l'ensemble des résultats d'algèbre linéaire qui seront utilisés dans ce texte. Ils seront ensuite réinterprétés dans les groupes réductifs, à travers leurs représentations linéaires.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie m. On munit $\mathbb{P}(V)$ de la topologie quotient de celle de $V - \{0\}$: c'est un espace topologique compact.

II.1.1 Rayon spectral et proximalité

Soit f un endomorphisme de V. On note $\lambda_1(f)$ le rayon spectral de f, c'est-à-dire le plus grand des modules des valeurs propres de f. On note V_f^+ le plus grand sous-espace vectoriel f-stable de V où toutes les valeurs propres de f sont de module $\lambda_1(f)$ et $V_f^<$ l'unique supplémentaire f-stable de V_f^+.

Munissons V d'une norme. On a la formule du rayon spectral :

$$\forall f \in \mathcal{L}(V) \quad \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_1(f).$$

Un endomorphisme $f \neq 0$ de V est dit proximal dans $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si f possède une unique valeur propre de module maximal et qu'elle est de multiplicité 1, *i.e.* si et seulement si $\dim V_f^+ = 1$. Cette valeur propre appartient alors à $\mathbb{K}$.

Soit f un endomorphisme non nul de V. Alors f est proximal dans $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si f possède un point fixe attracteur dans $\mathbb{P}(V)$. Ce point fixe est alors V_f^+.

II.1.2 Bonnes normes et bonnes sommes directes

Une norme sur V est une application $\|.\| : V \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes usuels :

(i) $\forall v \in V \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|.$

(iii) $\forall v, w \in V \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on dit qu'une norme sur V est une bonne norme si et seulement si elle est induite par un produit scalaire euclidien (resp. un produit scalaire hermitien). Si V est muni d'une bonne norme, on dit qu'une somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ est une bonne somme directe si et seulement si elle est orthogonale pour le produit scalaire.

Si $\mathbb{K}$ est non archimédien, on dit qu'une norme sur V est une bonne norme si et seulement si elle est ultramétrique, c'est-à-dire si et seulement si, pour tous v, w dans V, on a $\|v+w\| \leq \max(\|v\|, \|w\|)$. Si V est muni d'une bonne norme, on dit qu'une somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ est une bonne somme directe si et seulement si, pour tout $v = v_1 + v_2$ dans V, avec v_1 dans V_1 et v_2 dans V_2, on a :

$$\|v\| = \max(\|v_1\|, \|v_2\|).$$

Supposons dorénavant V muni d'une bonne norme. Donnons une caractérisation des bonnes sommes directes ; c'est une généralisation d'un exercice classique de géométrie euclidienne :

Lemme II.1.1. *Soit $V = V_1 \oplus V_2$ une somme directe dans V. Elle est bonne si et seulement si ses projecteurs sont de norme* 1.

Démonstration. Soit p le projecteur sur V_1 parallèlement à V_2. Si la somme directe est bonne, on a $\|p\| = 1$. Réciproquement, supposons que p est de norme 1.

Supposons que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit v dans $V_2^{\perp}$. Soit $w = v - p(v)$. Alors v et w sont orthogonaux et $p(v) = v - w$. Par conséquent, on a :

$$\|v\| \geq \|p(v)\| = \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2} \geq \|v\|$$

et, donc, $\|p(v)\| = \|v\|$, ou encore $w = 0$. Il vient $V_2^{\perp} \subset V_1$ et, comme ces deux espaces ont même dimension, $V_2^{\perp} = V_1$, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons que $\mathbb{K}$ est non-archimédien. Remarquons que l'on a $\|1-p\| \leq \max(1, \|p\|) \leq 1$. Pour tout v dans V, il vient :

$$\|v\| = \|p(v) + (1-p)(v)\| \leq \max(\|p(v)\|, \|(1-p)(v)\| \leq \|v\|$$

et, donc, $\|v\| = \max(\|p(v)\|, \|(1-p)(v)\|)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Il existe une unique bonne norme sur $\wedge^2 V$ telle que, pour toute bonne somme directe $V_1 \oplus V_2 \subset V$ la somme directe $(\wedge^2 V_1) \oplus (V_1 \wedge V_2) \oplus (\wedge^2 V_2) \subset \wedge^2 V$ soit bonne et que, pour v, w dans V, si $\mathbb{K}v$ et $\mathbb{K}w$ sont en bonne somme directe, on ait $\|v \wedge w\| = \|v\| \, \|w\|$. Alors, l'application

$$\begin{aligned} (V - \{0\})^2 &\to \mathbb{R}_+ \\ (v, w) &\mapsto \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\| \, \|w\|} \end{aligned}$$

factorise à travers une distance sur $\mathbb{P}(V)$, qui y induit sa topologie usuelle. C'est un résultat classique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le cas général est traité dans [15]. On munira toujours l'espace projectif d'un espace vectoriel bien normé de cette distance. Si le dual V^* de V est muni de la bonne norme duale de celle de V, pour tous $v \neq 0$ dans $\mathbb{P}(V)$ et $\varphi \neq 0$ dans $\mathbb{P}(V^*)$, on a :

$$d(\mathbb{K}v, \varphi^\perp) = \frac{|\varphi(v)|}{\|\varphi\| \, \|v\|} = d(\mathbb{K}\varphi, v^\perp).$$

Nous utiliserons :

Lemme II.1.2. *Soit $\varepsilon > 0$. Soient $V = V_1 \oplus V_2$ une bonne somme directe et p le projecteur sur V_1 parallèlement à V_2. Pour tout v dans $V - \{0\}$ avec $d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}(V_2)) \geq \varepsilon$, on a $\|p(v)\| \geq \varepsilon \|v\|$.*

Démonstration. On peut, bien sûr, supposer $v \notin V_1$. Alors, soient v_1 et v_2 les composantes de v sur V_1 et V_2. On a $d(\mathbb{K}v, \mathbb{K}v_2) \geq \varepsilon$. Or

$$d(\mathbb{K}v, \mathbb{K}v_2) = \frac{\|v \wedge v_2\|}{\|v\| \, \|v_2\|} = \frac{\|v_1 \wedge v_2\|}{\|v\| \, \|v_2\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v\|},$$

d'où le résultat. □

II.1.3 Semi-similitudes

Nous étudions ici une classe particulière d'endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

On dit qu'un endomorphisme f de V est une similitude si et seulement s'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que, pour tout v dans V, on ait :

$$\|f(v)\| = \lambda \|v\|.$$

On dit alors que λ est le rapport de f. On dit que f est une semi-similitude si et seulement s'il existe une bonne somme directe $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ telle que, pour tout i dans $[\![1, k]\!]$, f stabilise V_i et induise sur V_i une similitude de rapport λ_i. Dans ce cas, on peut supposer que l'on a :

$$\lambda_1 > \ldots > \lambda_k.$$

On a alors, pour tout v dans V, $\lambda_k \|v\| \leq \|fv\| \leq \lambda_1 \|v\|$. En particulier, λ_1 est à la fois la norme et le rayon spectral de f.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une semi-similitude est simplement un endomorphisme normal de V.

Lemme II.1.3. *Soit f une semi-similitude. Soit $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ une bonne somme directe dans V telle que, pour tout i dans $[\![1,k]\!]$, f laisse stable V_i et induise sur V_i une similitude de rapport λ_i. Supposons que l'on a $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k$.*

(i) Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par f. Alors on a $W = (W \cap V_1) \oplus \ldots \oplus (W \cap V_k)$ et, en particulier, la restriction de f à W est une semi-similitude.

(ii) Soit $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_l$ une autre somme directe, non nécessairement bonne, telle que, pour tout j dans $[\![1,l]\!]$, f laisse stable W_j et induise sur W_j une similitude de rapport μ_j et que l'on ait $\mu_1 > \ldots > \mu_l$. Alors $k = l$ et, pour tout i dans $[\![1,k]\!]$, $W_i = V_i$ et $\lambda_i = \mu_i$.

Démonstration. Pour tout entier n, posons

$$h_n = -\left[\frac{\log(\|f^n\|)}{\log q}\right] \text{ et } p_n = \frac{1}{u^{h_n}} f^n.$$

On a, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$1 \leq \|p_n\| \leq q.$$

On fixe une valeur d'adhérence p dans $\mathcal{L}(V)$ de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout v dans V_1, le vecteur $p(v)$ appartient à V_1 et $\|p(v)\| = \|p\| \|v\|$. En particulier, la restriction de p à V_1 est un automorphisme. Par ailleurs, pour tout v dans $V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$, on a $p(v) = 0$.

Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par f. Alors, W est stable par p. En particulier, $W \cap V_1$ est stable par p et, donc, par l'inverse de la restriction de p à V_1.

Soit v dans W. Écrivons $w = v_1 + v'$ avec v_1 dans V_1 et v' dans $V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$. On a :

$$p(v) = p(v_1) \in W \cap V_1$$

et, donc,

$$v_1 \in W.$$

Il vient :

$$W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap (V_2 \oplus \ldots \oplus V_k))$$

d'où la première propriété par récurrence.

La seconde en est une conséquence. □

Soit f une semi-similitude. On note V_f^M le plus grand sous-espace vectoriel stable par f où f induise une similitude de rapport $\|f\|$ et V_f^m son unique supplémentaire stable par f. La somme directe $V = V_f^M \oplus V_f^m$ est bonne. Une semi-similitude f est proximale si et seulement si $\dim V_f^M = 1$ et, alors, on a $V_f^+ = V_f^M$ et $V_f^< = V_f^m$.

II.1.4 Propriétés des semi-similitudes

Nous effectuons ici des contrôles uniformes sur l'action des semi-similitudes dans $\mathbb{P}(V)$ qui seront utilisés pour la construction du produit générique, à la section II.3.

Commençons par remarquer que beaucoup de vecteurs permettent d'estimer la norme d'une semi-similitude :

Lemme II.1.4. *Soient f une semi-similitude de V et $\varepsilon > 0$. Pour tout vecteur non nul v de V, si $d\left(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_f^m\right)\right) \geq \varepsilon$, alors on a $\|fv\| \geq \varepsilon \|f\| \|v\|$.*

Démonstration. Écrivons $v = v_1 + v_2$ avec v_1 dans V_f^M et v_2 dans V_f^m. D'après le lemme II.1.2, on a $\|v_1\| \geq \varepsilon \|v\|$ et, donc,

$$\|fv\| \geq \|fv_1\| = \|f\| \|v_1\| \geq \varepsilon \|f\| \|v\| .$$

□

On a aussi une information sur l'action des semi-similitudes sur $\mathbb{P}(V)$ en termes de métrique :

Lemme II.1.5. *Soient f une semi-similitude de V et $\varepsilon > 0$. La restriction de f à $B\left(\mathbb{P}\left(V_f^m\right), \varepsilon\right)$ est $\frac{1}{\varepsilon^2}$-lipschitzienne.*

Démonstration. Remarquons que, comme f est une semi-similitude, on a $\|\wedge^2 f\| \leq \|f\|^2$. Donnons-nous alors deux vecteurs non nuls v et w avec $d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_f^m\right)) \geq \varepsilon$ et $d(\mathbb{K}w, \mathbb{P}\left(V_f^m\right)) \geq \varepsilon$. D'après le lemme II.1.4, on a $\|fv\| \geq \varepsilon \|f\| \|v\|$ et $\|fv\| \geq \varepsilon \|f\| \|v\|$. Il vient :

$$\begin{aligned} d(\mathbb{K}fv, \mathbb{K}fw) = \frac{\|(fv) \wedge (fw)\|}{\|fv\| \|fw\|} &\leq \frac{\|f\|^2 \|v \wedge w\|}{\|fv\| \|fw\|} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\| \|w\|} = \frac{1}{\varepsilon^2} d(\mathbb{K}v, \mathbb{K}w). \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant et notre généralisation du lemme des ombres serviront de base au contrôle de distance dans la construction du produit générique :

Lemme II.1.6. *Soient $r > 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour toute semi-similitude f de V, pour tout hyperplan W de V avec $\delta\left(\mathbb{P}\left(V_f^M\right), \mathbb{P}(W)\right) \geq r$, on ait :*

$$f^{-1} b(\mathbb{P}(W), \eta) \subset b(\mathbb{P}\left(f^{-1}W\right), \varepsilon).$$

Démonstration. Soit f une semi-similitude de V. Alors, son adjoint f^* est une semi-similitude de V^*. Soit φ une forme linéaire non nulle de V. On a $f^{-1}(\varphi^\perp) = (f^*(\varphi))^\perp$. Supposons que $\delta\left(\mathbb{P}\left(V_f^M\right), \mathbb{P}\left(\varphi^\perp\right)\right) \geq r$. Alors, comme, pour v dans V_f^M, $(V^*)_{f^*}^m \subset v^\perp$, on a

$$d\left(\mathbb{K}\varphi, \mathbb{P}\left((V^*)_{f^*}^m\right)\right) \geq r.$$

Soit $0 < \eta \leq \frac{r}{2}$. Soit v un vecteur non nul de V et supposons que l'on a $d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(\varphi^\perp\right)) \leq \eta$. On a $d(\mathbb{K}\varphi, \mathbb{P}\left(v^\perp\right)) \leq \eta$ et, donc, d'après le lemme II.1.5, on a $d(\mathbb{K}f^*(\varphi), \mathbb{P}\left(f^*(v^\perp)\right)) \leq \frac{4\eta}{r^2}$. Comme $f^*(v^\perp) = (f^{-1}(v))^\perp$, il vient,

$$f^{-1} b(\varphi^\perp, \eta) \subset b\left(f^{-1}(\varphi^\perp), \frac{4\eta}{r^2}\right),$$

d'où le résultat. □

II.2 Groupes réductifs

On fixe un $\mathbb{K}$-groupe réductif connexe $\mathbf{G}$. On note G le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Nous introduisons ici le vocabulaire concernant G et ses décompositions qui sera utilisé dans la suite du texte. Le lecteur trouvera plus de précisions, pour la théorie générale des groupes réductifs, dans [6] et [12], pour la théorie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dans [10] et [11] et, pour la théorie sur des corps non-archimédiens, dans [8], [9] et [20].

II.2.1 Système de racines et chambre de Weyl

Pour tout $\mathbb{K}$-groupe $\mathbf{H}$, on note $\mathrm{X}(\mathbf{H})$ le groupe de ses caractères rationnels.

On note r le $\mathbb{K}$-rang de $\mathbf{G}$. On fixe un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$ et on note A le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. On note $\mathbf{Z}$ le centralisateur de $\mathbf{A}$ dans

$\mathbf{G}$ et Z le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Le groupe $\mathrm{X}(\mathbf{A})$ est un groupe abélien libre de rang r. L'homomorphisme de restriction identifie $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$ à un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{X}(\mathbf{A})$. On note E^* le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}(\mathbf{A})$ et E son dual. Pour tout χ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, on note χ^ω la forme linéaire associée sur E.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Soit Σ l'ensemble des racines de $\mathbf{A}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors Σ^ω est un système de racines dans E^*. On choisit dans Σ un système de racines positives Σ^+ et on note Π la base de Σ associée à ce choix.

On note E^+ et E^{++} les chambres de Weyl positive et strictement positive de Σ^+ dans E^+. On munit E de l'ordre associé à E^+ : si x et y sont deux vecteurs de E, on a $x \geq y$ si et seulement si $x - y$ appartient à E^+. Plus généralement, pour tous x, y dans E, pour tout $C \geq 0$, on note $x \geq_C y$ si et seulement si

$$\forall \alpha \in \Pi \quad \alpha^\omega(x - y) \geq -C.$$

On note W le groupe de Weyl de Σ : il s'identifie au quotient du normalisateur de A dans G par Z. Pour tout α dans Σ, on note $\sigma_\alpha \in W$ la réflexion associée. On note w_0 le plus long élément de W : c'est l'unique élément de W qui envoie E^+ sur $-E^+$. On appelle $\iota = -w_0$ l'involution d'opposition de E^+. On note E_S l'unique supplémentaire W-stable de l'espace E^W des points fixes de W dans E et $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ la famille des poids fondamentaux de Π, avec la convention $(\varpi_\alpha)_{|E^W} = 0$, pour α dans Π.

Pour tout z dans Z, on note $\nu(z)$ l'unique vecteur de E tel que, pour tout χ dans $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$, on ait :

$$\chi^\omega(\nu(z)) = -\omega(\chi(z)).$$

L'application ν est un homomorphisme de groupes de Z dans E. Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application ν est surjective. Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, l'image de ν est un réseau stable par l'action de W dans E. On note $Z^+ = \nu^{-1}(E^+)$.

Pour tout α dans Σ, on note m_α la dimension de l'espace poids de α dans $\mathfrak{g}$ et on pose $\rho = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha^{m_\alpha}$.

Dorénavant, on considèrera tout caractère rationnel de $\mathbf{A}$ comme une forme linéaire sur E. On fixe une partie X_C de $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$ qui engendre $(E^*)^W$

On fixe un produit scalaire W-invariant $(.,.)$ sur E. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

II.2.2 Facettes

On note $\mathbf{P}_\Pi$ le $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique minimal de $\mathbf{G}$ associé au choix de $\mathbf{A}$ et de Σ^+.

Soit $\theta \subset \Pi$. On note θ^c le complémentaire de θ dans Π.

On note

$$E_\theta = \bigcap_{\alpha \in \theta^c} \ker \alpha, \; E_\theta^+ = E_\theta \cap E^+ \text{ et } E_\theta^{++} = E_\theta^+ - \left(\bigcup_{\tau \subsetneq \theta} E_\tau^+ \right).$$

Les $(E_\theta^+)_{\theta \subset \Pi}$ sont les facettes du cône polyhédral E^+.

On note W_θ le fixateur de E_θ dans W : c'est le sous-groupe de W engendré par les réflexions associées aux éléments de θ^c. On note p_θ l'unique projecteur (orthogonal) W_θ-invariant de E dans E_θ. Nous aurons à utiliser :

Lemme II.2.1. *Pour tout x dans E, pour tout y dans E_θ, on a :*

$$(p_\theta(x) = y) \Leftrightarrow (\forall \chi \in X_C \cup \{\varpi_\alpha | \alpha \in \theta\} \quad \chi(x) = \chi(y)).$$

Démonstration. Nous utilisons ici librement les résultats de [7, 1.10].

Il s'agit de montrer que l'on a :

$$\ker p_\theta = E_S \cap \bigcap_{\alpha \in \theta} \ker \varpi_\alpha.$$

Soit p_θ^*, l'adjoint de p_θ. Alors, comme l'image de p_θ est E_θ, p_θ^* est un projecteur orthogonal de noyau $\bigoplus_{\alpha \in \theta^c} \mathbb{R}\alpha$ et, donc, d'image

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in \theta^c} \mathbb{R}\alpha \right)^\perp = \bigoplus_{\alpha \in \theta} \mathbb{R}\varpi_\alpha \oplus (E^*)^W,$$

d'où le résultat. □

On note $\mathbf{A}_\theta$ la composante Zariski connexe de $\bigcap_{\alpha \in \theta^c} \ker \alpha$ dans $\mathbf{A}$. Soit $\mathbf{L}_\theta$ le centralisateur de $\mathbf{A}_\theta$ dans $\mathbf{G}$: c'est un $\mathbb{K}$-groupe réductif connexe. On note L_θ le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. On note $\mathbf{P}_\theta$ le $\mathbb{K}$-groupe $\mathbf{L}_\theta \mathbf{P}_\Pi$ et P_θ le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. De même, on note $\mathbf{P}_\theta^\vee$ le $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ opposé à $\mathbf{P}_\theta$ par rapport à $\mathbf{A}$ et $P_\theta^\vee$ le groupe de ses $\mathbb{K}$-points.

II.2.3 Représentations de G

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$.

On appelle poids restreints de ρ les poids rationnels de la représentation $\rho_{|\mathbf{A}}$. D'après [19, 7.2], l'ensemble des poids restreints possède un plus grand élément χ pour l'ordre associé à Π sur E^*. On dit que χ est le plus haut poids restreint de ρ. Les autres poids restreints sont de la forme $\chi - \sum_{\alpha\in\Pi} n_\alpha \alpha$ avec, pour tout α dans Π, $n_\alpha \in \mathbb{N}$. On note V_Π^+ l'espace poids associé à χ et $V_\Pi^<$ l'unique supplémentaire A-stable de V_Π^+.

D'après [19], on a :

Proposition II.2.2 (Tits)**.** *Il existe une famille de représentations rationnelles irréductibles $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ de $\mathbf{G}$ telles que, pour tout α dans Π, le plus haut poids restreint χ_α de (ρ_α, V_α) soit un multiple du poids fondamental associé à α et que* $\dim V_{\alpha,\Pi}^+ = 1$. $\square$

Dorénavant, on fixe une telle famille de représentations. D'après le lemme II.2.1, on a :

Lemme II.2.3. *Pour tout $\theta \subset \Pi$, pour tous x dans E et y dans E_θ, on a :*

$$(p_\theta(x) = y) \Leftrightarrow (\forall \chi \in X_C \cup \{\chi_\alpha | \alpha \in \theta\} \quad \chi(x) = \chi(y)).$$

$\square$

Pour tout α dans Π, on note X_α la droite $V_{\alpha,\Pi}^+$ et $V_\alpha^<$ son unique supplémentaire A-stable. Tous les poids de $\mathbf{A}$ dans $V_\alpha^<$ sont de la forme

$$\chi_\alpha - \alpha - \sum_{\beta\in\Pi} n_\beta \beta$$

avec, pour tout β dans Π, $n_\beta \in \mathbb{N}$.

II.2.4 Décomposition de Jordan

Un élément de G est dit elliptique si et seulement s'il est semi-simple et contenu dans un sous-groupe compact de G. Un élément de G est dit hyperbolique si et seulement s'il est conjugué à un élément de A. On dit qu'un élément g de G admet une décomposition de Jordan si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme $g = g_e g_h g_u$ avec g_e elliptique, g_h hyperbolique et g_u unipotent qui commutent deux à deux. Dans ce cas, on note $\lambda(g)$ l'image par ν d'un élément de A^+ conjugué à g_h : il ne dépend que de g.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tous les éléments de G admettent une décomposition de Jordan.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, pour tout g dans G, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que g^n admette une décomposition de Jordan. On note encore $\lambda(g) = \frac{1}{n}\lambda(g^n)$: il ne dépend pas de n.

L'application $\lambda : G \to E^+$ est $\mathbb{R}$-analytique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et localement constante si $\mathbb{K}$ est non-archimédien. Pour tout g dans G, on a : $\lambda(g^{-1}) = \iota(\lambda(g))$.

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$ de plus haut poids restreint χ. Pour tout g dans G, on a $\lambda_1(\rho(g)) = q^{\chi(\lambda(g))}$. Supposons $\dim V_\Pi^+ = 1$. Alors $\rho(g)$ est proximal si et seulement si, pour tout α dans Π tel que $\chi - \alpha$ soit un poids de ρ, on a $\alpha(\lambda(g)) > 0$. En particulier, pour tous α dans Π et g dans G, $\rho_\alpha(g)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$ si et seulement si $\alpha(\lambda(g)) \neq 0$.

Soient $\theta \subset \Pi$ et g dans G. On dit que g est θ-proximal si et seulement si, pour tout α dans θ, $\alpha(\lambda(g)) > 0$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout α dans θ, $\rho_\alpha(g)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$.

II.2.5 Décomposition de Cartan

Soit K un bon sous-groupe compact maximal de G relativement à A, c'est à dire tel que le normalisateur de A dans K contienne des représentants de tous les éléments de W.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, K est l'ensemble des points fixes d'une involution de Cartan τ de G telle que, pour tout a dans A, $\tau(a) = a^{-1}$.

On a $G = KZ^+K$. De plus, pour tous z_1, z_2 dans Z^+, z_2 appartient à Kz_1K si et seulement si $\nu(z_1) = \nu(z_2)$. En particulier, on a $\ker \nu = K \cap Z$. Il existe donc une unique application $\mu : G \to E^+$ telle que, pour tous g_1, g_2 dans G, g_2 appartienne à Kg_1K si et seulement si $\mu(g_1) = \mu(g_2)$ et que $\mu_{|Z^+} = \nu_{|Z^+}$. L'application μ est propre. Elle est $\mathbb{R}$-analytique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et localement constante si $\mathbb{K}$ est non-archimédien. Pour tout g dans G, on a $\mu(g^{-1}) = \iota(\mu(g))$ et la formule du rayon spectral :

$$\frac{1}{n}\mu(g^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(g).$$

L'application $g \mapsto p_\emptyset(\mu(g))$ est un homomorphisme de G dans E^W ; en d'autres termes, pour tout χ dans X_C, pour tous g, h dans G, on a $\chi(\mu(gh)) = \chi(\mu(g)) + \chi(\mu(h))$.

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$, de plus haut poids restreint χ. Pour tout κ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, on note V_κ

l'espace poids associé à κ.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on peut choisir un produit scalaire (resp. un produit scalaire hermitien) sur V pour lequel les éléments de $\rho(K)$ sont orthogonaux (resp. unitaires) et ceux de $\rho(A)$ symétriques (resp. hermitiens). On munit V de la norme associée. Les $(V_\kappa)_{\kappa \in \mathrm{X}(\mathbf{A})}$ sont en bonne somme directe et, pour tout z dans Z, pour tout κ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, $\rho(z)$ induit sur V_κ une similitude de rapport $e^{\kappa(\nu(z))}$.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on peut trouver, d'après [16, 6], une norme ultramétrique K-invariante sur V telle que les $(V_\kappa)_{\kappa \in \mathrm{X}(\mathbf{A})}$ soient en bonne somme directe et que, pour tout z dans Z, pour tout κ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, $\rho(z)$ induise sur V_κ une similitude de rapport $q^{\kappa(\nu(z))}$.

Dans les deux cas, on dira qu'une norme sur V ayant ces propriétés est (ρ, A, K)-bonne. Pour une norme (ρ, A, K)-bonne, les éléments de $\rho(K)$ sont des isométries et ceux de $\rho(Z)$ des semi-similitudes. Pour tout g dans G, la décomposition de Cartan permet donc d'écrire $\rho(g)$ comme le produit d'une isométrie et d'une semi-similitude. En particulier, on a :

$$\|\rho(g)\| = q^{\chi(\mu(g))}$$

et, si k est un élément de K tel que g appartienne à kZK, pour tout v dans V tel que $\rho(g)v$ appartienne à kV_Π^+, on a :

$$\|\rho(g)v\| = \|\rho(g)\| \, \|v\| \,.$$

Dorénavant, on munit, pour tout α dans Π, V_α d'une norme (ρ_α, A, K)-bonne et $\mathbb{P}(V_\alpha)$ de la distance associée. Rappelons un résultat de Y. Benoist :

Lemme II.2.4 (Benoist, [3, 5.1])**.** *Pour toute partie compacte L de G, il existe une partie compacte M de E telle que, pour tout g dans G, on ait :*

$$\mu(LgL) \subset \mu(g) + M.$$

Démonstration. Soit L une partie compacte de G. Soient g dans G et l_1 et l_2 dans L. D'une part, pour tout α dans Π, on a :

$$\left\|\rho_\alpha(l_1)^{-1}\right\|^{-1} \|\rho_\alpha(g)\| \left\|\rho_\alpha(l_2)^{-1}\right\|^{-1} \leq \|\rho_\alpha(l_1 g l_2)\| \leq \|\rho_\alpha(l_1)\| \, \|\rho_\alpha(g)\| \, \|\rho_\alpha(l_2)\|$$

d'où, par conséquent,

$$\chi_\alpha(\mu(g)) - 2 \max_{l \in L} \chi_\alpha(\mu(l^{-1})) \leq \chi_\alpha(\mu(l_1 g l_2)) \leq \chi_\alpha(\mu(g)) + 2 \max_{l \in L} \chi_\alpha(\mu(l))$$

et, d'autre part, pour tout χ dans X_C, on a :

$$\chi(\mu(l_1 g l_2)) = \chi(\mu(l_1)) + \chi(\mu(g)) + \chi(\mu(l_2))$$

d'où

$$|\chi(\mu(l_1 g l_2)) - \chi(\mu(g))| \leq 2 \max_{l \in L} |\chi(\mu(l))| \, .$$

Le résultat en découle, puisque l'ensemble $X_C \cup \{\chi_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ engendre E^*.
□

De même, on peut montrer :

Lemme II.2.5. *Pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un voisinage W de e dans G tel que, pour tout g dans G,*

$$\mu(WgW) \subset \mu(g) + V.$$

□

II.2.6 Sous-groupes paraboliques et variétés drapeaux

Soit $\theta \subset \Pi$. On note $\mathcal{P}_\theta$ l'ensemble des $\mathbb{K}$-sous-groupes paraboliques conjugués à $\mathbf{P}_\theta$ de $\mathbf{G}$. L'application

$$\begin{aligned} G &\to \mathcal{P}_\theta \\ g &\mapsto g\mathbf{P}_\theta g^{-1} \end{aligned}$$

identifie $\mathcal{P}_\theta$ et G/P_θ : on peut ainsi voir $\mathcal{P}_\theta$ comme une variété $\mathbb{K}$-analytique. Comme l'action de K sur $\mathcal{P}_\theta$ est transitive, cette variété analytique est compacte. On note ν_θ l'unique probabilité borélienne K-invariante de $\mathcal{P}_\theta$.

On note ξ_θ le sous-groupe $\mathbf{P}_\theta$ vu comme un point de $\mathcal{P}_\theta$ et $\mathcal{Q}_\theta^-$ la sous-variété fermée $\mathcal{P}_\theta - P_\theta^\vee \xi_\theta = \mathcal{P}_\theta - P_\Pi^\vee \xi_\theta$ de $\mathcal{P}_\theta$.

Pour tout α dans θ, GX_α est une sous-variété $\mathbb{K}$-analytique fermée de $\mathbb{P}(V_\alpha)$. En particulier, le G-entrelacement

$$\mathcal{P}_\theta \to \prod_{\alpha \in \theta} \mathbb{P}(V_\alpha)$$

qui, à un sous-groupe parabolique de type θ, associe la famille de ses uniques points fixes dans les V_α, $\alpha \in \theta$, est une immersion fermée. Il identifie ξ_θ

avec $(X_\alpha)_{\alpha\in\theta}$ et $\mathcal{Q}_\theta^-$ avec le complémentaire de l'intersection de son image et de $\prod_{\alpha\in\theta}(\mathbb{P}(V_\alpha)-\mathbb{P}(V_\alpha^<))$. Pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, on note $(\xi_\alpha)_{\alpha\in\theta}$ son image par cette application. On munit $\mathcal{P}_\theta$ de la distance induite par la distance produit de $\prod_{\alpha\in\theta}\mathbb{P}(V_\alpha)$. Alors, K agit par isométries et G par transformations lipschitziennes sur $\mathcal{P}_\theta$.

Soit g dans G. Alors g est θ-proximal si et seulement s'il possède un point fixe attracteur dans $\mathcal{P}_\theta$. On note alors $\xi_{\theta,g}^+$ ce point fixe : il s'identifie à $\left(V^+_{\alpha,\rho_\alpha(g)}\right)_{\alpha\in\theta}$.

Soit $L\subset P_\Pi$ une partie bornée. L'ensemble $\bigcup_{z\in Z^+} z^{-1}Lz$ est encore borné. De même, si $L\subset P_\Pi^\vee$ est une partie bornée, l'ensemble $\bigcup_{z\in Z^+} zLz^{-1}$ est encore borné. Pour tout $\varepsilon>0$, on pose :

$$B_\theta^\varepsilon=\{\xi\in\mathcal{P}_\theta|\forall\alpha\in\theta\quad d(\xi_\alpha,\mathbb{P}(V_\alpha^<))\geq\varepsilon)\}.$$

Il existe une partie compacte L de $P_\Pi^\vee$ telle que $B_\theta^\varepsilon\subset L\xi_\theta$.

II.2.7 Sous-groupes Zariski denses

Nous rappelons ici une partie des résultats de [4, 4] et de [5].

Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G. On appelle cône limite de Γ et on note l_Γ le cône fermé engendré par $\lambda(\Gamma)$ dans E^+.

Soit $P\subset E$. On appelle cône asymptote à P l'ensemble des vecteurs x dans E pour lesquels il existe une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans P et une suite de réels positifs $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telles que $t_nx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Par la formule du rayon spectral, l_Γ est contenu dans le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$.

Théorème II.2.6 (Benoist, [4])**.** *Le cône limite l_Γ de Γ est exactement le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$ et l'ensemble $\mu(\Gamma)$ reste à distance bornée de l_Γ. Le cône l_Γ est convexe et, si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, son intersection avec E_S est d'intérieur non vide dans E_S.* $\square$

On appelle type de Γ et on note θ_Γ l'unique partie θ de Π telle que $l_\Gamma\subset E_\theta^+$ et que $l_\Gamma\cap E_\theta^{++}\neq\emptyset$: c'est le plus grand $\theta\subset\Pi$ tel que Γ contienne des éléments θ-proximaux. Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, $\theta_\Gamma=\Pi$. L'ensemble θ_Γ est stable par ι et, si Γ est discret, $\theta_\Gamma\neq\emptyset$.

On note F_Γ le sous-espace vectoriel de E engendré par l_Γ. Nous aurons à utiliser l'existence dans Γ de sous-semi-groupes libres :

Proposition II.2.7 (Benoist, [4, 5.1])**.** *Si $\theta_\Gamma \neq \emptyset$, il existe un réel $\kappa \geq 0$ tel que, pour tout cône $\mathcal{C}$ dans E, si l'intérieur dans F_Γ de $\mathcal{C} \cap l_\Gamma$ est non vide, il existe des éléments γ_1 et γ_2 dans Γ et des vecteurs x_1 et x_2 dans $\mathcal{C} \cap l_\Gamma$ tels que le sous-semi-groupe Δ de Γ engendré par γ_1 et γ_2 soit libre et que, si Φ est l'unique homomorphisme de semi-groupes envoyant γ_1 sur x_1 et γ_2 sur x_2, pour tout γ dans Δ, mot de longueur l en les générateurs γ_1 et γ_2, on ait :*

$$\mu(\gamma) \in \mathcal{C} \text{ et } \|\mu(\gamma) - \Phi(\gamma)\| \leq \kappa l.$$

□

II.3 Produit générique

Dans cette section nous allons démontrer :

Proposition II.3.1. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. Il existe une application $\pi : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) il existe un réel $\kappa \geq 0$ tel que, pour tous γ_1, γ_2 dans Γ,

$$\|\mu(\pi(\gamma_1, \gamma_2)) - \mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_2)\| \leq \kappa.$$

(ii) pour tout réel $R \geq 0$, il existe une partie finie H de Γ telle que, pour $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$ dans Γ, avec $\|\mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_1')\| \leq R$ et $\|\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma_2')\| \leq R$,

$$\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \pi(\gamma_1', \gamma_2') \Rightarrow (\gamma_1' \in \gamma_1 H \text{ et } \gamma_2' \in H\gamma_2)\,.$$

L'idée de la construction est d'écrire, pour γ_1, γ_2 dans Γ, $\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 f_{\gamma_1,\gamma_2} \gamma_2$ où f_{γ_1,γ_2} est choisi dans une partie finie de Γ de façon à vérifier les hypothèses des lemmes II.3.3 et II.3.8.

Dorénavant, on fixe, pour tout élément g de G, un élément z_g de Z^+ et des éléments k_g et l_g de K tels que $g = k_g z_g l_g$.

II.3.1 Un calcul de composante de Cartan

Nous effectuons ici le calcul qui permet de valider le point *(i)* de la proposition II.3.1.

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$ munie d'une norme (ρ, A, K)-bonne. On munit $\mathbb{P}(V)$ de la distance associée. Rappelons que, pour tout z dans Z^+, si, pour tout α dans Π,

$\alpha(\nu(z)) > 0$, $\rho(z)$ est une semi-similitude avec $V^M_{\rho(z)} = V^+_\Pi$ et $V^m_{\rho(z)} = V^<_\Pi$ et que, pour tout g dans G, pour tout v dans V tel que $\rho(g)v$ appartienne à $k_g V^+_\Pi$, on a :

$$\|\rho(g)v\| = \|\rho(g)\| \, \|v\| \, .$$

Pour tout g dans G, on note :

$$V^M_{\rho,g} = k_g V^+_\Pi \text{ et } V^m_{\rho,g} = l_g^{-1} V^<_\Pi .$$

Pour α dans Π, on notera $V^M_{\alpha,g}$ et $V^m_{\alpha,g}$ pour $V^M_{\rho_\alpha,g}$ et $V^m_{\rho_\alpha,g}$.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si, pour tout α dans Π, $\alpha(\mu(g)) > 0$, $V^M_{\rho,g}$ et $V^m_{\rho,g}$ ne dépendent pas des k_g et l_g choisis.

En appliquant le lemme II.1.4 aux représentations de $\mathbf{G}$, on obtient :

Lemme II.3.2. *Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$ munie d'une norme (ρ, A, K)-bonne. Pour tous $\varepsilon > 0$ et g dans G, on a :*

$$\forall v \in V - \{0\} \quad \left(d\left(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V^m_{\rho,g}\right)\right) \geq \varepsilon\right) \Rightarrow \left(\|gv\| \geq \varepsilon \, \|\rho(g)\| \, \|v\|\right) .$$

Démonstration. Comme K agit par isométries sur V, il suffit de démontrer ce résultat quand g est dans Z^+. Alors, $\rho(g)$ est une semi-similitude et $V^m_{\rho(g)}$ est contenu dans $V^<_\Pi$. Le résultat est alors une conséquence du lemme II.1.4. □

Nous sommes à présent en mesure d'effectuer le calcul de la composante de Cartan du produit générique. L'hypothèse sur les distances dans l'énoncé ci-dessous traduit le fait que f écarte suffisament les uns des autres les ensembles de drapeaux associés à g et à h.

Lemme II.3.3. *Soient $\theta \subset \Pi$, $r > 0$ et F une partie compacte de G. Il existe un réel $\kappa \geq 0$ tel que, pour tous g, h dans G, pour tout f dans F,*

$$\left(\forall \alpha \in \theta \quad d\left(fV^M_{\alpha,h}, \mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,g}\right)\right) \geq r\right) \Rightarrow \left(\|p_\theta(\mu(gfh) - \mu(g) - \mu(h))\| \leq \kappa\right) .$$

Démonstration. Comme on l'a vu au paragraphe II.2.5, pour tous g et h dans G, pour tout f dans F, pour tout χ dans X_C, on a :

$$\chi(\mu(gfh)) = \chi(\mu(g)) + \chi(\mu(f)) + \chi(\mu(h))$$

et, donc,

$$|\chi(\mu(gfh) - \mu(g) - \mu(h))| \leq \max_{f \in F} |\chi(\mu(f))| \, .$$

Par ailleurs, d'après le lemme II.3.2, pour tout g dans G, pour tout α dans θ, on a :

$$\forall v \in V_\alpha \quad \left(d\left(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,g}\right)\right) \geq r\right) \Rightarrow \left(\|gv\| \geq r \|\rho_\alpha(g)\| \|v\|\right).$$

Soient g et h dans G. Soit f dans F tels que, pour tout α dans θ, on ait :

$$d\left(fV^M_{\alpha,h}, \mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,g}\right)\right) \geq r.$$

Soit α dans θ. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\|\rho_\alpha(gfh)\| &\leq \|\rho_\alpha(g)\| \|\rho_\alpha(h)\| \|\rho_\alpha(f)\| \\ &\leq \|\rho_\alpha(g)\| \|\rho_\alpha(h)\| \max_{k\in F} \|\rho_\alpha(k)\|\end{aligned}$$

donc,

$$\chi_\alpha(\mu(gfh) - \mu(g) - \mu(h)) \leq \max_{k\in F} \chi_\alpha(\mu(k)).$$

D'autre part, soit v un vecteur non nul de V_α tel que $hv \in V^M_{\alpha,h}$. On a :

$$\begin{aligned}\|\rho_\alpha(gfh)v\| &\geq r \|\rho_\alpha(g)\| \|\rho_\alpha(fh)v\| \\ &\geq r \|\rho_\alpha(g)\| \left\|\rho_\alpha(f)^{-1}\right\|^{-1} \|\rho_\alpha(h)v\| \\ &\geq r \|\rho_\alpha(g)\| \left\|\rho_\alpha(f)^{-1}\right\|^{-1} \|\rho_\alpha(h)\| \|v\|.\end{aligned}$$

Il vient :

$$\|\rho_\alpha(gfh)\| \geq r \left(\max_{k\in F} \left\|\rho_\alpha(k)^{-1}\right\|\right)^{-1} \|\rho_\alpha(g)\| \|\rho_\alpha(h)\|$$

d'où

$$\chi_\alpha(\mu(gfh) - \mu(g) - \mu(h)) \geq \log_q r - \max_{k\in F} \chi_\alpha(\mu(k^{-1})).$$

Le résultat en découle, puisque, d'après le lemme II.2.3, pour tout x dans E, $p_\theta(x)$ est entièrement déterminé par les $\chi(x)$, pour χ dans $X_C \cup \{\chi_\alpha \mid \alpha \in \theta\}$. $\square$

II.3.2 Un résultat de finitude

Rappelons que, si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une famille de droites $(X_j)_{j\in J}$ est dite être en position générale si et seulement si pour toute partie finie K de J de cardinal $\leq \dim V$, la famille de droites $(X_j)_{j\in K}$ est en somme directe. Si J est fini, l'ensemble des familles de droites en position générale est un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}(V)^J$.

Le résultat suivant est dû à H. Abels, G.-A. Margulis et G.-A. Soifer ([2, 4.7]). Il nous permettra de trouver, dans un sous-groupe Zariski dense Γ de G, une partie finie F telle que, étant donnés deux éléments g et h de G, il existe f dans F vérifiant les hypothèses des lemmes II.3.3 et II.3.8.

Si (ρ, V) est une représentation rationnelle irréductible et de dimension finie de $\mathbf{G}$, de plus haut poids restreint χ, on note θ_ρ l'ensemble des α dans Π tels que $\chi - \alpha$ soit un poids de ρ.

Proposition II.3.4 (Abels-Margulis-Soifer). *Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G. Soit $(\rho_i, V_i)_{i\in I}$ une famille finie de représentations rationnelles, irréductibles et de dimensions finies de $\mathbf{G}$, chacune munie d'une norme. On suppose que, pour tout i dans I, on a $\theta_{\rho_i} \subset \theta_\Gamma$. Alors, il existe une partie finie F de Γ et un réel $r > 0$ ayant la propriété suivante : pour toutes familles $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ où, pour tout i dans I, X_i est une droite et Y_i un hyperplan de V_i, il existe f dans F tel que, pour tout i dans I,*

$$d\left(fX_i, \mathbb{P}\left(Y_i\right)\right) \geq r.$$

Démonstration. Soit h un élément θ_Γ-proximal de Γ : pour tout i dans I, $\rho(h)$ est proximal dans $\mathbb{P}(V_i)$. Notons, pour simplifier,

$$V_i^+ = V_{i,\rho_i(h)}^+ \text{ et } V_i^< = V_{i,\rho_i(h)}^<.$$

Soit $l \in \mathbb{N}$. Par récurrence, comme Γ est Zariski dense dans G, qui est Zariski connexe, et comme les $(\rho_i, V_i)_{i\in I}$ sont irréductibles, on peut construire une famille $(g_j)_{1\leq j\leq l}$ d'éléments de Γ telle que, pour tout i dans I,

(i) la famille de droites $(g_jV_i^+)_{1\leq j\leq l}$ est en position générale.

(ii) la famille d'hyperplans $(g_iV_i^<)_{1\leq i\leq l}$ est en position générale.

(iii) pour tous j, k dans $[\![1, l]\!]$, $g_jV_i^+ \not\subset g_kV_i^<$.

Supposons $l \geq \sum_{i\in I} \dim V_i$. Alors, on peut trouver $r > 0$ tel que, pour toutes familles $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ où, pour tout i dans I, X_i est une droite et Y_i un hyperplan de V_i,

(i) il existe j dans $[\![1, l]\!]$ tel que, pour tout i dans I,

$$d\left(X_i, \mathbb{P}\left(g_jV_i^<\right)\right) \geq r.$$

(ii) il existe k dans $[\![1,l]\!]$ tel que, pour tout i dans I,

$$d\left(g_k V_i^+, \mathbb{P}\left(Y_i\right)\right) \geq r.$$

(iii) pour tous j,k dans $[\![1,l]\!]$,

$$d(g_j V_i^+, \mathbb{P}\left(g_k V_i^<\right)) \geq r.$$

Pour tout j dans $[\![1,l]\!]$, on pose $V_{i,j}^+ = g_j V_i^+$ et $V_{i,j}^< = g_j V_i^<$.

Choisissons, pour tout j dans $[\![1,l]\!]$, un entier n_j suffisament grand pour que, pour tout i dans I, $\rho(g_j h^{n_j} g_j^{-1})$ envoie

$$B\left(\mathbb{P}\left(V_{i,j}^<\right), \frac{r}{2}\right) \text{ dans } b\left(V_{i,j}^+, \frac{r}{2}\right)$$

et posons, pour tout j dans $[\![1,l]\!]$, $h_j = g_j h^{n_j} g_j^{-1}$.

Posons $F = \{h_k h_j | 1 \leq j,k \leq l\}$ et montrons que la partie F et le réel $\frac{r}{2}$ vérifient les conclusions de la proposition.

Soient, pour tout i dans I, X_i une droite de V_i et Y_i un hyperplan de V_i. Il existe j dans $[\![1,l]\!]$ tel que, pour tout i dans I,

$$d\left(X_i, \mathbb{P}\left(V_{i,j}^<\right)\right) \geq r$$

et, par conséquent,

$$d\left(h_j X_i, V_{i,j}^+\right) \leq \frac{r}{2}.$$

Par ailleurs, il existe k dans $[\![1,l]\!]$ tel que, pour tout i dans I,

$$d\left(V_{i,k}^+, \mathbb{P}\left(Y_i\right)\right) \geq r.$$

Or, pour tout i dans I, comme

$$d\left(V_{i,j}^+, \mathbb{P}\left(V_{i,k}^<\right)\right) \geq r,$$

on a

$$d\left(h_j X_i, \mathbb{P}\left(V_{i,k}^<\right)\right) \geq \frac{r}{2}$$

et, donc,

$$d\left(h_k h_j X_i, \mathbb{P}\left(V_{i,k}^+\right)\right) \leq \frac{r}{2}.$$

Il vient :

$$d\left(h_k h_j X_i, \mathbb{P}\left(Y_i\right)\right) \geq \frac{r}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Déduisons-en un résultat qui sera utilisé dans la démonstration du lemme II.3.8 :

Corollaire II.3.5. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toutes familles $(U_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ et $(W_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$, où, pour tout α dans Π, U_α et W_α sont des hyperplans de V_α, il existe ξ dans $\mathcal{P}_\Pi$ avec, pour tout α dans Π,*

$$d(\xi_\alpha, \mathbb{P}(U_\alpha)) \geq \varepsilon \text{ et } d(\xi_\alpha, \mathbb{P}(W_\alpha)) \geq \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $r > 0$ comme dans la proposition II.3.4 avec $\Gamma = G$ et, comme famille de représentations, la réunion de deux copies de $(V_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$. Soient, pour tout α dans Π, U_α et W_α des hyperplans de V_α. Alors, il existe f dans G tel que, pour tout α dans Π, on ait :

$$d(fX_\alpha, \mathbb{P}(U_\alpha)) \geq r \text{ et } d(fX_\alpha, \mathbb{P}(W_\alpha)) \geq r.$$

Le point $\xi = f\xi_\Pi$ convient. □

II.3.3 Un contrôle de distance

Ce paragraphe et le suivant ont pour but d'établir les résultats intermédiaires permettant de démontrer le point *(ii)* de la proposition II.3.1. Nous commençons ici par généraliser des phénomènes de géométrie à courbure strictement négative.

Soit toujours $\theta \subset \Pi$. On note K_θ le groupe $P_\theta \cap K$ et, pour tout $C \geq 0$, on pose

$$E_\theta^C = \{x \in E^+ | \forall \alpha \in \theta^c \quad \alpha(x) \leq C\}$$

et $Z_\theta^C = \nu^{-1}(E_\theta^C)$.

Dans [1, 3.5], P. Albuquerque démontrait une généralisation du lemme des ombres de Sullivan. Le lemme suivant est la contraposée de ce résultat : à partir d'une information sur les actions d'un élément k de K et d'un élément z de Z sur une variété drapeau, il permet de contrôler la distance entre z et kz.

Lemme II.3.6. *Pour tout $C \geq 0$ et pour toute partie compacte L de $P_\Pi^\vee$, il existe une partie compacte M de G telle que, pour tout z dans Z_θ^C, pour tout k dans K,*

$$(k\xi_\theta \in zL\xi_\theta) \Rightarrow \left(z^{-1}kz \in M\right).$$

Démonstration. Donnons-nous C et L comme dans l'énoncé. On peut supposer que, pour tout z dans Z^+, $zLz^{-1} \subset L$.

Pour tout z dans Z^+ et pour tout p dans L, choisissons $k(z,p)$ dans K et $q(z,p)$ dans P_Π tels que $zp = k(z,p)q(z,p)$, *i.e.* $k(z,p)q(z,p)$ est une décomposition d'Iwasawa de zp.

Pour z dans Z^+ et p dans L, on a : $q(z,p)z^{-1} = k(z,p)^{-1}zpz^{-1} \in KL$ et, donc, la partie de P_Π

$$L' = \{q(z,p)z^{-1} | z \in Z^+, p \in L\}$$

est bornée. Par conséquent,

$$L'' = \{z^{-1}q(z,p) | z \in Z^+, p \in L\} \subset \bigcup_{z \in Z^+} z^{-1}L'z$$

est bornée. Or, pour tout z dans Z^+, pour tout p dans L,

$$z^{-1}k(z,p)z = z^{-1}(zpq(z,p)^{-1})z = p(z^{-1}q(z,p))^{-1} \in L(L'')^{-1}.$$

Par ailleurs, l'ensemble

$$L''' = \bigcup_{z \in Z_\theta^C} z^{-1}K_\theta z$$

est borné.

Soient alors k dans K et z dans Z_θ^C tels que $k\xi_\theta \in zL\xi_\theta$. Écrivons $k\xi_\theta = zp\xi_\theta$ avec p dans L. On a :

$$k\xi_\theta = k(z,p)\xi_\theta$$

i.e. $k \in k(z,p)K_\theta$ et, donc,

$$z^{-1}kz \in (z^{-1}k(z,p)z)(z^{-1}K_\theta z) \subset L(L'')^{-1}L'''.$$

□

Pour tous g dans G et $\varepsilon > 0$, on note

$$B^\varepsilon_{\theta,g} = l_g^{-1}B^\varepsilon_\theta.$$

Nous faisons jouer à l'ensemble $gB^\varepsilon_{\theta,g}$ le rôle des ombres de [18] et [1].

L'énoncé du résultat suivant signifie que, si un élément de G a une composante de Cartan proche de la facette associé à θ, on peut reconstituer cet élément, à un compact près, à partir de sa composante de Cartan et de son ombre dans $\mathcal{P}_\theta$.

Proposition II.3.7. *Pour tous $C \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte M de G telle que, pour tout $\theta \subset \Pi$, pour tous g, h dans G avec $\mu(g) \in E_\theta^C$ et $\mu(h) \geq_C \mu(g)$, si $gB_{\theta,g}^\varepsilon \cap hB_{\theta,h}^\varepsilon \neq \emptyset$, alors on a :*

$$g \in k_h z_g M.$$

Démonstration. Choisissons une partie compacte L de $P_\Pi^\vee$ telle que $B_\theta^\varepsilon \subset L\xi_\theta$ et que, pour tout z dans Z^+, $zLz^{-1} \subset L$. Posons :

$$L' = \bigcup_{\substack{z \in Z \\ \forall \alpha \in \Pi\ |\alpha(\nu(z))| \leq C}} z^{-1}Lz.$$

L'ensemble L' est encore borné.

D'après le lemme II.3.6, on peut trouver une partie compacte M de G telle que, pour tout z dans Z_θ^C, pour tout k dans K,

$$(k\xi_\theta \in zL'\xi_\theta) \Rightarrow (kz \in zM)\,.$$

Par ailleurs, on peut trouver une partie compacte M' de G telle que, pour tout z dans Z_θ^C, $z^{-1}K_\theta z \subset M'$.

Soient g et h comme dans l'énoncé. On a :

$$gB_{\theta,g}^\varepsilon \subset k_g z_g L\xi_\theta \text{ et } hB_{\theta,h}^\varepsilon \subset k_h z_h L\xi_\theta.$$

Comme $\mu(h) = \nu(z_h) \geq_C \mu(g) = \nu(z_g)$, il vient :

$$k_h z_h L\xi_\theta \subset k_h z_g L'\xi_\theta$$

et, donc,

$$k_g z_g L'\xi_\theta \cap k_h z_g L'\xi_\theta \neq \emptyset.$$

Soit $\xi \in k_g z_g L'\xi_\theta \cap k_h z_g L'\xi_\theta$. Soit m_1 dans K tel que $\xi = k_g m_1 \xi_\theta$.

On a :

$$m_1\xi_\theta \in z_g L'\xi_\theta$$

et, donc,

$$m_1 z_g \in z_g M \text{ ou encore } k_g m_1 z_g \in gKM.$$

Soient $h' = k_h z_g l_h$ et m_2 dans K tels que $\xi = k_g m_2 \xi_\theta$. On a, de même,

$$k_h m_2 z_g \in h'KM.$$

Or, comme

$$k_g m_1 \xi_\theta = \xi = k_h m_2 \xi_\theta,$$

on a :

$$k_g m_1 \in k_h m_2 K_\theta.$$

Il vient :

$$g \in k_g m_1 z_g M^{-1} K \subset k_h m_2 K_\theta z_g M^{-1} K \subset h' K M M' M^{-1} K.$$

□

II.3.4 Produit générique dans G

Le résultat suivant combine la proposition II.3.7 et les raisonnements de la section II.1.

Lemme II.3.8. *Soient $\theta \subset \Pi$, $C > 0$, $r > 0$ et F une partie compacte de G. Il existe une partie compacte M de G ayant la propriété suivante : soient g, h dans G et f dans F ; si*

$$\mu(g), \mu(gfh) \in E_\theta^C \text{ et si } \forall \alpha \in \theta \quad d\left(f V_{\alpha,h}^M, \mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^m\right)\right) \geq r,$$

alors on a :

$$g \in k_{gfh} z_g M.$$

Ce lemme signifie que, si f, g et h sont des éléments de G et que f met les ensembles de drapeaux associés à g et h en position suffisament générale, on peut retrouver g, à un compact près, à partir de sa composante de Cartan et de gfh. Comme on sait, d'après le lemme II.3.3, que, quitte à augmenter C, sous nos hypothèses, on a $\mu(gfh) \geq_C \mu(g)$, on va chercher à appliquer la proposition II.3.7, et, donc, à montrer que, pour un $\varepsilon > 0$, on a $g B_{\theta,g}^\varepsilon \cap (gfh) B_{\theta,gfh}^\varepsilon \neq \emptyset$, ou encore $B_{\theta,g}^\varepsilon \cap fh B_{\theta,gfh}^\varepsilon \neq \emptyset$. Pour montrer cette dernière propriété, on appliquera le lemme suivant à h :

Lemme II.3.9. *Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$, munie d'une norme (ρ, A, K)-bonne. Pour tous $r > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tels que, pour tout g dans G, pour tout hyperplan W de V, si $\delta\left(V_{\rho,g}^M, \mathbb{P}(W)\right) \geq r$, on a :*

$$g^{-1} b\left(\mathbb{P}(W), \eta\right) \subset b\left(\mathbb{P}\left(g^{-1} W\right), \varepsilon\right).$$

Démonstration. Comme K agit par isométries sur $\mathbb{P}(V)$, il suffit de le démontrer pour g dans Z^+. Alors, $\rho(g)$ est une semi-similitude et notre résultat est le lemme II.1.6. □

Démonstration du lemme II.3.8. Comme G agit par transformations lipschitziennes sur les $\mathbb{P}(V_\alpha)$, $\alpha \in \Pi$, on peut trouver $r' > 0$ tel que, pour tout f dans F, pour tout α dans θ et pour tous X, Y dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$, on ait

$$(d(fX, Y) \geq r) \Rightarrow (d(X, f^{-1}Y) \geq r').$$

Soit $\varepsilon > 0$ comme dans le corollaire II.3.5.

D'après le lemme II.3.9, il existe un réel $0 < \eta \leq \varepsilon$ vérifiant la propriété suivante : soient g dans G et, pour tout α dans θ, un hyperplan W_α de V_α avec

$$d(\mathbb{P}\left(V^M_{\alpha,g}\right), \mathbb{P}(W_\alpha)) \geq r',$$

alors, on a

$$\forall \alpha \in \theta \quad g^{-1}b(\mathbb{P}(W_\alpha)), \eta) \subset b(\mathbb{P}\left(g^{-1}W_\alpha\right), \varepsilon).$$

Il existe un réel $0 < \varpi \leq \eta$ tel que, pour tout α dans θ, pour tout hyperplan W de V_α, pour tout f dans F, on ait :

$$f^{-1}b(\mathbb{P}(W), \varpi) \subset b(f^{-1}\mathbb{P}(W), \eta).$$

Par ailleurs, d'après le lemme II.3.3, quitte à augmenter C, on peut supposer que, pour tous g, h dans G, pour tout f dans F, si

$$\forall \alpha \in \theta \quad d\left(fV^M_{\alpha,h}, \mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,g}\right)\right) \geq r,$$

on a $p_\theta(\mu(gfh)) \geq_C p_\theta(\mu(g))$. Alors, si $\mu(g), \mu(gfh)$ sont dans E^C_θ, on a $\mu(gfh) \geq_{3C} \mu(g)$.

Enfin, d'après la proposition II.3.7, il existe une partie compacte M de G telle que, pour tout $\theta \subset \Pi$, pour tous g, h dans G avec $\mu(g) \in E^C_\theta$ et $\mu(h) \geq_{3C} \mu(g)$, si $gB^\varepsilon_{\theta,g} \cap hB^\varepsilon_{\theta,h} \neq \emptyset$, alors on a :

$$g \in k_h z_g M.$$

Soient g, h dans G et f dans F avec $\mu(g), \mu(gfh) \in E^C_\theta$. Supposons que l'on a :

$$\forall \alpha \in \theta \quad d\left(fV^M_{\alpha,h}, \mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,g}\right)\right) \geq r,$$

On a $\mu(gfh) \geq_{3C} \mu(g)$. Par ailleurs, pour tout α dans θ, on a :

$$h^{-1}b\left(f^{-1}\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right), \eta\right) \subset b\left(h^{-1}f^{-1}\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right), \varepsilon\right)$$

ce qui implique :

$$h^{-1}f^{-1}b\left(\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right), \varpi\right) \subset b\left(h^{-1}f^{-1}\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right), \varepsilon\right).$$

On peut trouver ξ dans $\mathcal{P}_\theta$ tel que, pour tout α dans θ, on ait :

$$d\left(\xi_\alpha, \mathbb{P}\left(V_{\alpha,gfh}^{m}\right)\right) \geq \varepsilon \text{ et } d\left(\xi_\alpha, h^{-1}f^{-1}\mathbb{P}\left(V_{\alpha,g}^{m}\right)\right) \geq \varepsilon.$$

On a alors :

$$\xi \in B_{\theta,gfh}^{\varepsilon} \subset B_{\theta,gfh}^{\varpi} \text{ et } fh\xi \in B_{\theta,g}^{\varpi}$$

ou encore :

$$gfh\xi \in (gfh)B_{\theta,gfh}^{\varpi} \cap gB_{\theta,g}^{\varpi}$$

et, par conséquent, d'après la proposition II.3.7, $g \in k_{gfh}z_gM$. $\square$

II.3.5 Produit générique dans Γ

Les lemmes II.3.3 et II.3.8 et la proposition II.3.4 nous permettent maintenant de conclure :

Démonstration de la proposition II.3.1. D'après le théorème II.2.6, on peut trouver un réel $C > 0$ tel que, pour tout γ dans Γ, pour tout α dans θ_Γ^c, $\alpha(\mu(\gamma)) \leq C$.

La famille $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha\in\theta_\Gamma}$ vérifie les hypothèses de la proposition II.3.4. Il existe donc une partie finie F de Γ et un réel $r > 0$ tels que, pour toute famille $(U_\alpha, W_\alpha)_{\alpha\in\theta_\Gamma}$ où, pour tout α dans θ_Γ, U_α est une droite et W_α un hyperplan de V_α, il existe f dans F tel que, pour tout α dans θ_Γ,

$$d\left(fU_\alpha, \mathbb{P}\left(W_\alpha\right)\right) \geq r.$$

Soient γ_1, γ_2 dans Γ. On peut trouver un élément f_{γ_1,γ_2} de F tel que, pour tout α dans θ_Γ, on ait :

$$d\left(f_{\gamma_1,\gamma_2}V_{\alpha,\gamma_2}^{M}, \mathbb{P}\left(V_{\alpha,\gamma_1}^{m}\right)\right) \geq r.$$

En d'autres termes, le triplet $(g, h, f) = (\gamma_1, \gamma_2, f_{\gamma_1,\gamma_2})$ vérifie les hypothèses des lemmes II.3.3 et II.3.8.

On pose $\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 f_{\gamma_1,\gamma_2} \gamma_2$. Comme $\mu(\Gamma)$ est à distance bornée de E_{θ_Γ}, il existe, d'après le lemme II.3.3, un réel $\kappa \geq 0$ tel que, pour tous γ_1, γ_2 dans Γ,

$$\|\mu(\pi(\gamma_1, \gamma_2)) - \mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_2)\| \leq \kappa.$$

Par ailleurs, d'après le lemme II.3.8, il existe une partie compacte M de G telle que, pour tous γ_1, γ_2 dans Γ, on ait $\gamma_1 \in k_{\pi(\gamma_1,\gamma_2)} z_{\gamma_1} M$. En particulier, soient $R \geq 0$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2'$ dans Γ, avec $\|\mu(\gamma_1) - \mu(\gamma_1')\| \leq R$, $\|\mu(\gamma_2) - \mu(\gamma_2')\| \leq R$ et $\pi(\gamma_1, \gamma_2) = \pi(\gamma_1', \gamma_2') = \gamma_3$. On a :

$$\gamma_1 \in k_{\gamma_3} z_{\gamma_1} M \text{ et } \gamma_1' \in k_{\gamma_3} z_{\gamma_1'} M.$$

Il vient

$$\gamma_1^{-1}\gamma_1' \in M^{-1}\nu^{-1}(b(0, R))M.$$

L'ensemble $H = M^{-1}\nu^{-1}(b(0, R))M \cap \Gamma$ est fini et l'on a :

$$\gamma_2' = f_{\gamma_1',\gamma_2'}^{-1}(\gamma_1')^{-1}\gamma_3 \in F^{-1}H^{-1}F\gamma_2.$$

□

III Mesures coniques

Cette partie est indépendant de la première. Nous y traitons d'un point de vue abstrait le problème du calcul de l'exposant de convergence d'une mesure de Radon sur un espace vectoriel. Nous restreignons ensuite notre attention à certaines classes de mesures : si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G, la mesure de comptage $\sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_{\mu(\gamma)}$ vérifiera les hypothèses que nous ferons.

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie r et ν une mesure de Radon positive sur $\mathcal{E}$.

III.1 Divergence exponentielle

Dans cette section, nous abordons d'un point de vue général l'étude des exposants de convergence de ν. Nous commençons par donner des méthodes de calcul du type de la formule de Hadamard. Nous associons alors à ν une fonction homogène ψ_ν qui contient toutes les informations sur la divergence exponentielle de ν dans chacune des directions de $\mathcal{E}$. Enfin, nous introduisons un vocabulaire pour l'étude particulière des exposants de convergence associés aux formes linéaires de $\mathcal{E}$.

III.1.1 Exposants de convergence et formules de Hadamard

Étant donnée une norme N sur $\mathcal{E}$, pour tout réel t, on pose :

$$\mathcal{L}_\nu^N(t) = \int_{\mathcal{E}} e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x)$$

et :

$$\begin{aligned}\tau_\nu^N &= \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \mathcal{L}_\nu^N(t) < \infty \right\} \\ &= \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \mathcal{L}_\nu^N(t) = \infty \right\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.\end{aligned}$$

On l'appelle exposant de convergence de ν relativement à N.

Pour tous x dans $\mathcal{E}$ et $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$, on note $b^N(x,a)$ la boule de centre x et de rayon a relativement à la norme N et $C^N(a,b)$ la couronne :

$$\left\{ x \in \mathcal{E} \,\middle|\, a \leq N(x) \leq b \right\}.$$

Donnons quelques formules de Hadamard pour le calcul de τ_ν^N :

Lemme III.1.1. *Pour tous $a > 0$ et $b, c \geq 0$ avec $b + c \geq a$, on a :*

$$\tau_\nu^N = \frac{1}{a} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(C^N(na - b, na + c) \right) \right)}{n}.$$

Pour tous $0 < a < b$ et $c, d \geq 0$, on a :

$$\min \left(a\tau_\nu^N, b\tau_\nu^N \right) \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(C^N(na - c, nb + d) \right) \right)}{n} \leq \max \left(a\tau_\nu^N, b\tau_\nu^N \right).$$

Si $\tau_\nu^N > 0$, on a :

$$\tau_\nu^N = \limsup_{a \to \infty} \frac{\log \left(\nu \left(b^N(0, a) \right) \right)}{a}.$$

Démonstration. Soient $a > 0$ et $b, c \geq 0$ avec $b + c \geq a$. Il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout x dans $\mathcal{E}$,

$$0 < \mathrm{card} \left\{ n \in \mathbb{N} | x \in C^N(na - b, na + c) \right\} \leq n_0.$$

Il vient, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n_0}e^{-|t|\max(b,c)}\sum_{n=0}^{\infty}\nu\left((C^N(na-b,na+c)\right)e^{-tna} \leq \int_{\mathcal{E}} e^{-tN(x)}\mathrm{d}\nu(x)$$
$$\leq e^{|t|\max(b,c)}\sum_{n=0}^{\infty}\nu\left((C^N(na-b,na+c)\right)e^{-tna},$$

d'où la première formule.

Soient $0<a<b$ et $c,d\geq 0$. Comme $a<b$, il existe $R\geq 0$ tel que

$$\mathcal{E}-b^N(0,R)\subset\bigcup_{n>0}C^N(na-c,nb+d).$$

D'autre part, pour tout entier $n>0$, pour tout x dans $C^N(na-c,nb+d)$, pour tout $m>0$, on a :

$$\left(x\in C^N(ma-c,mb+d)\right)\Rightarrow(ma-c\leq nb+d)\Rightarrow\left(m\leq\frac{nb+c+d}{a}\right)$$

et, donc,

$$\operatorname{card}\left\{m\in\mathbb{N}^*|x\in C^N(ma-c,mb+d)\right\}\leq\frac{nb+c+d}{a}.$$

Il vient, par conséquent, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$ae^{-|t|\max(c,d)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nb+c+d}\nu\left(C^N(na-c,nb+d)\right)e^{-n\max(at,bt)}$$
$$\leq\int_{\mathcal{E}-b^N(0,R)}e^{-tN(x)}\mathrm{d}\nu(x)$$
$$\leq e^{|t|\max(c,d)}\sum_{n=1}^{\infty}\nu\left(C^N(na-c,nb+d)\right)e^{-n\min(at,bt)},$$

d'où la deuxième formule.

Enfin, on a :

$$\tau_\nu^N=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(C^N(n-1,n)\right)\right)}{n}\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(b^N(0,n)\right)\right)}{n}$$
$$\leq\limsup_{a\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(b^N(0,a)\right)\right)}{a}.$$

Supposons $\tau_\nu^N > 0$. Soient t et s avec

$$0 < t < s < \limsup_{a\to\infty} \frac{\log\left(\nu\left(b^N(0,a)\right)\right)}{a}.$$

Pour tout réel $a \geq 0$, il existe $b \geq a$ tel que, pour tout $c \geq b$, on ait :

$$e^{sc} - e^{tc} \geq \nu\left(b^N(0,a)\right)$$

et, donc, il existe $c \geq b$ tel que l'on ait :

$$\nu\left(C^N(a,c)\right) \geq \nu\left(b^N(0,c)\right) - \nu\left(b^N(0,a)\right) \geq e^{sc} - \nu\left(b^N(0,a)\right) \geq e^{tc}.$$

On peut donc construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels ≥ 0 avec, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$a_{n+1} \geq a_n + 1 \text{ et } \nu\left(C^N(a_n+1, a_{n+1})\right) \geq e^{ta_{n+1}}.$$

Il vient alors :

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \nu\left(C^N(a_n+1, a_{n+1})\right) e^{-ta_{n+1}} = \infty,$$

donc $t \leq \tau_\nu^N$, d'où la troisième formule. $\square$

De ces formules, on déduit immédiatement :

Corollaire III.1.2. *Soient ν et ν' des mesures de Radon sur $\mathcal{E}$. S'il existe une partie compacte M de $\mathcal{E}$ et un réel $\omega \geq 0$ tels que, pour tout borélien B de $\mathcal{E}$,*

$$\nu'(B) \leq \omega\nu(B+M),$$

alors, pour toute norme N sur $\mathcal{E}$, on a $\tau_{\nu'}^N \leq \tau_\nu^N$. $\square$

III.1.2 Indicateur de croissance

Soit N une norme sur $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ un cône ouvert. On note $\tau_{\mathcal{C},\nu}^N$ l'exposant de convergence relativement à N de la mesure $\nu_{|\mathcal{C}}$.

Pour tout x dans $\mathcal{E} - \{0\}$, on pose

$$\psi_\nu(x) = N(x) \inf \tau_{\mathcal{C},\nu}^N,$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ contenant x, et on pose $\psi_\nu(0) = 0$. Cette fonction ne dépend pas de N. On l'appelle indicateur de croissance de ν. Elle est positivement homogène, *i.e.* pour tous $t \geq 0$ et x dans $\mathcal{E}$, on a $\psi_\nu(tx) = t\psi_\nu(x)$.

La fonction ψ_ν permet de calculer tous les exposants de convergence de ν :

Lemme III.1.3. *Soit $\theta : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ une fonction homogène et continue.*

Si, pour tout x dans $\mathcal{E} - \{0\}$, $\theta(x) > \psi_\nu(x)$, alors on a :

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\theta(x)} \mathrm{d}\nu(x) < \infty.$$

S'il existe un x dans $\mathcal{E} - \{0\}$ tel que $\theta(x) < \psi_\nu(x)$, alors on a :

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\theta(x)} \mathrm{d}\nu(x) = \infty.$$

Démonstration. Soit N une norme sur $\mathcal{E}$.

Supposons que, pour tout x dans $\mathcal{E} - \{0\}$, $\theta(x) > \psi_\nu(x)$. En particulier, pour tout x dans $\mathcal{E}$, $\psi_\nu(x) < \infty$. Soit x dans $\mathcal{E} - \{0\}$. Il existe un cône ouvert $\mathcal{C}_x$ contenant x et un réel t_x tels que

$$N(x)\tau^N_{\mathcal{C}_x,\nu} < N(x)t_x < \theta(x).$$

Il existe un cône ouvert $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{C}_x$ contenant x et tel que, pour tout $y \neq 0$ dans $\mathcal{D}_x$, on ait :

$$N(y)t_x < \theta(y)$$

et, donc,

$$N(y)\tau^N_{\mathcal{D}_x,\nu} \leq N(y)\tau^N_{\mathcal{C}_x,\nu} < N(y)t_x < \theta(y).$$

Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathcal{E}$ tels que l'on ait :

$$\mathcal{E} - \{0\} \subset \mathcal{D}_{x_1} \cup \ldots \cup \mathcal{D}_{x_n}.$$

Il vient :

$$\int_{\mathcal{E}-\{0\}} e^{-\theta(x)} \mathrm{d}\nu(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{D}_{x_i}} e^{-t_{x_i}N(y)} \mathrm{d}\nu(y) < \infty.$$

Supposons à présent qu'il existe x dans $\mathcal{E} - \{0\}$ tel que $\theta(x) < \psi_\nu(x)$. On peut trouver un cône ouvert $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ et un réel t tels que, pour tout $y \neq 0$ dans $\mathcal{C}$,

$$\theta(y) < N(y)t < N(y)\frac{\psi_\nu(x)}{N(x)} \leq N(y)\tau^N_{\mathcal{C},\nu}.$$

Il vient :

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\theta(y)} \mathrm{d}\nu(y) \geq \int_{\mathcal{C}} e^{-tN(y)} \mathrm{d}\nu(y) = \infty.$$

□

Corollaire III.1.4. *Pour toute norme N sur $\mathcal{E}$, on a :*

$$\tau^N_\nu = \sup_{x \in \mathcal{E} - \{0\}} \frac{\psi_\nu(x)}{N(x)}.$$

□

Corollaire III.1.5. *Pour toute fonction $\theta : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ homogène et continue, on a :*

$$\psi_{e^\theta \nu} = \psi_\nu + \theta.$$

□

D'après le corollaire III.1.2, on a :

Lemme III.1.6. *Soient ν et ν' des mesures de Radon sur $\mathcal{E}$. S'il existe une partie compacte M de $\mathcal{E}$ et un réel $\omega \geq 0$ tels que, pour tout borélien B de $\mathcal{E}$,*

$$\nu'(B) \leq \omega\nu(B + M),$$

alors $\psi_{\nu'} \leq \psi_\nu$. □

On suppose dorénavant qu'il existe une norme N sur $\mathcal{E}$ pour laquelle $\tau^N_\nu < \infty$, c'est-à-dire que, pour toute norme N sur $\mathcal{E}$, $\tau^N_\nu < \infty$.

Lemme III.1.7. *La fonction $\psi_\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. Soit N une norme sur $\mathcal{E}$.

Soit $x \neq 0$ dans $\mathcal{E}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers x. Soit $\mathcal{C}$ un cône ouvert contenant x. Pour n suffisament grand, x_n appartient aussi à $\mathcal{C}$, et, donc, on a :

$$\psi_\nu(x_n) \leq N(x_n)\tau_{\mathcal{C},\nu}^N.$$

Il vient :

$$\limsup_{n\to\infty} \psi_\nu(x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \left(N(x_n)\tau_{\mathcal{C},\nu}^N\right) = N(x)\tau_{\mathcal{C},\nu}^N.$$

Par conséquent, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} \psi_\nu(x_n) \leq \psi_\nu(x)$$

et, donc, ψ_ν est semi-continue supérieurement en x.

En particulier, il existe un réel M tel que, pour tout x dans $\mathcal{E}$ avec $N(x) = 1$, $\psi_\nu(x) \leq M$. On a alors :

$$\limsup_{y\in\mathcal{E},y\to 0} \psi_\nu(y) \leq \limsup_{t\in\mathbb{R}_+,t\to 0} (tM) = 0 = \psi_\nu(0)$$

et, donc, ψ_ν est semi-continue supérieurement en 0. $\square$

III.1.3 Convergence suivant les hyperplans

Pour toute forme linéaire φ dans $\mathcal{E}^*$, on pose :

$$\mathcal{L}_\nu(\varphi) = \int_{\mathcal{E}} e^{-\varphi(x)}\mathrm{d}\nu(x).$$

D'après l'inégalité de Hölder, l'ensemble $\{\varphi \in \mathcal{E}^*, \mathcal{L}_\nu(\varphi) < \infty\}$ est convexe.

Si N est une norme sur $\mathcal{E}$, on pose

$$\sigma_\nu^N = \inf_{\substack{\varphi\in\mathcal{E}^*\\ \mathcal{L}_\nu(\varphi)<\infty}} N(\varphi).$$

Pour toute forme linéaire φ dans $\mathcal{E}^*$, on a :

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-\varphi(x)}\mathrm{d}\nu(x) \geq \int_{\mathcal{E}} e^{-N(\varphi)N(x)}\mathrm{d}\nu(x)$$

et, donc, $\sigma_\nu^N \geq \tau_\nu^N$.

Proposition III.1.8. *S'il existe une forme linéaire φ dans $\mathcal{E}^*$ telle que, pour tout x dans $\mathcal{E} - \{0\}$, $\varphi(x) > \psi_\nu(x)$, alors, pour toute norme N sur $\mathcal{E}$, on a :*

$$\sigma_\nu^N = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}^* \\ \varphi \geq \psi_\nu}} N(\varphi).$$

Démonstration. D'après le lemme III.1.3, on a toujours :

$$\sigma_\nu^N \geq \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}^* \\ \varphi \geq \psi_\nu}} N(\varphi).$$

Réciproquement, soit φ_0 une forme linéaire majorant strictement ψ_ν en dehors de 0. Alors, pour toute forme linéaire $\varphi \geq \psi_\nu$, pour tout t dans $]0, 1]$, $t\varphi_0 + (1-t)\varphi$ majore strictement ψ_ν en dehors de 0. Par conséquent, d'après le lemme III.1.3, on a :

$$\mathcal{L}_\nu(t\varphi_0 + (1-t)\varphi) < \infty$$

et, donc,

$$N(t\varphi_0 + (1-t)\varphi) \geq \sigma_\nu^N.$$

Il vient, quand $t \to 0$,

$$N(\varphi) \geq \sigma_\nu^N,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

III.2 Mesures à croissance concave

Soit toujours N une norme sur $\mathcal{E}$. Nous dirons que ν est à croissance concave si et seulement s'il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tels que, pour tous x, y dans $\mathcal{E}$,

$$\nu\left(b^N(x+y, \alpha)\right) \geq \gamma \nu\left(b^N(x, \beta)\right) \nu\left(b^N(y, \beta)\right).$$

Cette condition ne dépend pas de la norme choisie.

Dans cette section, nous allons démontrer :

Théorème III.2.1. *Si ν est à croissance concave, son indicateur de croissance est concave.*

Le lecteur non intéressé par la démonstration de ce théorème peut directement passer à la section III.3.

III.2.1 Évaluations préliminaires

Commençons par donner un lemme évident de recouvrement :

Lemme III.2.2. *Soient N une norme sur $\mathcal{E}$ et $\beta > 0$. Il existe un réel $M > 0$ telle que, pour tout x dans $\mathcal{E}$ et pour tout $a > 0$, il existe un entier*

$$p \leq M\,(1+a)^r$$

et des points $x_1, \ldots, x_p$ de $\mathcal{E}$ avec

$$b^N(x,a) \subset \bigcup_{i=1}^{p} b^N(x_i, \beta).$$

□

L'idée générale de nos preuves est d'utiliser le lemme III.2.2 pour estimer la mesure d'une couronne $C^N(a,b)$, $0 \leq a \leq b$, à un facteur $(b+1)^r$ près, à l'aide de la mesure d'une boule $b^N(x,\beta)$, pour un certain x. Le facteur $(b+1)^r$ ne jouera pas de rôle du point de vue de la divergence exponentielle.

Nous commençons par itérer la formule de définition :

Lemme III.2.3. *Supposons ν à croissance concave. Soit N une norme sur $\mathcal{E}$ et soient α, β, γ tels que, pour tous x, y dans E,*

$$\nu\left(b^N(x+y,\alpha)\right) \geq \gamma\nu\left(b^N(x,\beta)\right)\nu\left(b^N(y,\beta)\right).$$

Alors il existe des réels $\theta > 0$ et $\eta > 0$ tels que, pour tout entier $k \geq 2$ et pour tous $x_1, \ldots, x_k$ dans $\mathcal{E}$, on ait :

$$\nu\left(b^N(x_1+\ldots+x_k,(k-1)\alpha+(k-2)\beta)\right) \\ \geq \theta\eta^k\nu\left(b^N(x_1,\beta)\right)\ldots\nu\left(b^N(x_k,\beta)\right).$$

Démonstration. Soit N une norme sur $\mathcal{E}$. Donnons-nous α, β, γ comme ci-dessus et M comme dans le lemme III.2.2.

Posons

$$\eta = \frac{1}{M(\alpha+\beta+1)^r}$$

et montrons par récurrence sur $k \geq 2$ que, si l est le plus petit entier tel que $2^l \geq k$, alors, pour tous $x_1, \ldots, x_k$ dans $\mathcal{E}$, on a :

$$\nu\left(b^N(x_1 + \ldots + x_k, (k-1)\alpha + (k-2)\beta)\right) \geq \frac{\gamma^{k-1}\eta^{k-2}}{(2^{2(l-1)+4(l-2)+8(l-3)+\ldots+2^{l-1}})^r}\nu\left(b^N(x_1,\beta)\right)\ldots\nu\left(b^N(x_k,\beta)\right),$$

ce qui implique le lemme.

Pour $k = 2$, il s'agit juste de la définition de la croissance concave.

Pour $k = 3$, c'est un raisonnement analogue à celui fait ci-après.

Soit donc $k \geq 4$ et supposons la formule vraie pour tous les entiers $< k$. Soient l le plus petit entier tel que $2^l \geq k$ et $x_1, \ldots, x_k$ dans $\mathcal{E}$.

Si k est pair, on pose $h = \frac{k}{2}$; s'il est impair, on pose $h = \frac{k-1}{2}$. Dans les deux cas, on a

$$2^{l-1} \geq h > 2^{l-2} \text{ et } 2^{l-1} \geq k - h > 2^{l-2}.$$

D'après le lemme III.2.2, il existe un point y_1 dans $b^N(x_1 + \ldots + x_h, (h-1)(\alpha+\beta))$ tel que l'on ait :

$$\begin{aligned}\nu\left(b^N(x_1 + \ldots + x_h, (h-1)\alpha + (h-2)\beta)\right) &\leq M\left(1 + (h-1)\alpha + (h-2)\beta\right)^r \nu\left(b^N(y_1,\beta)\right)\\ &\leq \frac{2^{r(l-1)}}{\eta}.\end{aligned}$$

De même, il existe un point y_2 dans $b^N(x_{h+1} + \ldots + x_k, (k-h-1)(\alpha+\beta))$ tel que l'on ait :

$$\begin{aligned}\nu\left(b^N(x_{h+1} + \ldots + x_k, (k-h-1)\alpha + (k-h-2)\beta)\right) &\leq M\left(1 + (k-h-1)\alpha + (k-h-2)\beta\right)^r \nu\left(b^N(y_2,\beta)\right)\\ &\leq \frac{2^{r(l-1)}}{\eta}.\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\nu(b^N(y_1+y_2,\alpha)) &\geq \gamma\nu(b^N(y_1,\beta))\nu(b^N(y_2,\beta))\\ &\geq \frac{\gamma\eta^2}{2^{2r(l-1)}}\nu\left(b^N(x_1 + \ldots + x_h, (h-1)\alpha + (k-2)\beta)\right)\\ &\quad\nu\left(b^N(x_{h+1} + \ldots + x_k, (k-h-1)\alpha + (k-h-2)\beta)\right).\end{aligned}$$

Donc, par récurrence,

$$\nu\left(b^N(y_1+y_2,\alpha)\right)$$
$$\geq \frac{\gamma^{k-1}\eta^{k-2}}{\left(2^{2(l-1)+4(l-2)+8(l-3)+\ldots+2^{l-1}}\right)^r}\nu\left(b^N(x_1,\beta)\right)\ldots\nu\left(b^N(x_k,\beta)\right),$$

d'où le résultat, puisque l'on a :

$$b^N(y_1+y_2,\alpha)\subset b^N(x_1+\ldots+x_k,(k-1)\alpha+(k-2)\beta).$$

Par récurrence, la formule est vraie pour tout $k\geq 2$. $\square$

Rappelons que, si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels avec, pour tous n,p dans $\mathbb{N}$, $t_{n+p}\geq t_n+t_p$, alors la suite $(\frac{1}{n}t_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Les deux lemmes qui suivent s'inspirent de la démonstration de ce résultat usuel pour minorer la limite inférieure du logarithme de la mesure des couronnes.

Lemme III.2.4. *Supposons ν à croissance concave. Soit N une norme sur $\mathcal{E}$. Il existe des réels $\theta,\eta,\kappa>0$ ayant la propriété suivante : pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$, pour tout $x\neq 0$ dans $\mathcal{C}$ et pour tout $\varepsilon>0$, il existe un cône ouvert $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}$ contenant x et un réel $a_0>0$ tels que, pour tous réels $a\geq a_0$ et $b\geq 0$, pour tout entier naturel m et pour toute partition $m=n_1+\ldots+n_p$ de m, on ait :*

$$\nu\left(C^N((1-\varepsilon)ma-(p-1)\kappa,ma+pb+(p-1)\kappa)\cap\mathcal{C}\right)$$
$$\geq \frac{\theta\eta^p}{\left(\prod_{k=1}^p(1+n_ka+b)\right)^r}\prod_{k=1}^p\nu\left(C^N(n_ka,n_ka+b)\cap\mathcal{D}\right).$$

Démonstration. Il suffit de montrer la propriété pour des partitions $m=n_1+\ldots+n_p$ de l'entier m avec $p\geq 2$.

Soit N une norme sur $\mathcal{E}$, α,β,γ comme dans la définition de la croissance concave, M comme dans le lemme III.2.2 et θ,η comme dans le lemme III.2.3.

Soit $\mathcal{C}$ un cône ouvert de $\mathcal{E}$, x un vecteur unitaire de $\mathcal{C}$ et $0<\varepsilon<1$. Il existe un cône ouvert convexe $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ contenant x tel que $\overline{\mathcal{D}}-\{0\}\subset\mathcal{C}$ et que, pour tout vecteur unitaire y de $\mathcal{D}$, $N(y-x)\leq\varepsilon$.

Soient $x_1,\ldots,x_p$, des vecteurs de $\mathcal{D}$. Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, on a :

$$N(x_i-N(x_i)x)\leq\varepsilon N(x_i)$$

et, donc :

$$N((x_1 + \ldots + x_p) - (N(x_1) + \ldots + N(x_p))x) \leq \varepsilon(N(x_1) + \ldots + N(x_p)).$$

Il vient :

$$N(x_1 + \ldots + x_p) \geq (1-\varepsilon)(N(x_1) + \ldots + N(x_p)).$$

Il existe un réel $a_0 > 0$ tel que, pour tout y dans $\mathcal{D}$ avec $N(y) \geq 1-\varepsilon$, on ait :

$$b^N\left(y, \frac{\alpha + 2\beta}{a_0}\right) \subset \mathcal{C}.$$

Alors, pour tout $a \geq a_0$, pour tout $b \geq 0$ et pour tout entier n, on ait :

$$b^N\left(C^N((1-\varepsilon)na, na+b) \cap \mathcal{D}, (\alpha+2\beta)n\right) \subset \mathcal{C}.$$

Soient $a \geq a_0$ et $b \geq 0$. Pour tout entier n, choisissons un point x_n dans $b^N\left(C^N(na, na+b) \cap \mathcal{D}, \beta\right)$ tel que l'on ait :

$$\nu\left(b^N(x_n, \beta)\right) \geq \frac{1}{M(1+na+b)^r}\nu\left(C^N(na, na+b) \cap \mathcal{D}\right).$$

Soit m un entier naturel et $m = n_1 + \ldots + n_p$ une partition de m avec $p \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned}
&\nu\left(b^N(x_{n_1} + \ldots + x_{n_p}, (p-1)\alpha + (p-2)\beta)\right) \\
&\qquad\qquad \geq \theta\eta^p \prod_{k=1}^{p} \nu\left(b^N(x_{n_k}, \beta)\right) \\
&\qquad\qquad \geq \frac{\theta\eta^p}{M^p\left(\prod_{k=1}^{p}(1+n_k a+b)\right)^r} \prod_{k=1}^{p} \nu\left(C^N(n_k a, n_k a + b) \cap \mathcal{D}\right).
\end{aligned}$$

Or, on a :

$$x_{n_1} + \ldots + x_{n_p} \in b^N\left(C^N((1-\varepsilon)ma, ma+pb) \cap \mathcal{D}, p\beta\right)$$

et, donc, d'une part,

$$\begin{aligned}
&b^N(x_{n_1} + \ldots + x_{n_p}, (p-1)\alpha + (p-2)\beta) \\
&\qquad\qquad \subset b^N\left(C^N((1-\varepsilon)ma, ma+pb) \cap \mathcal{D}, (p-1)(\alpha+2\beta)\right) \subset \mathcal{C}
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$b^N(x_{n_1} + \ldots + x_{n_p}, (p-1)\alpha + (p-2)\beta) \\ \subset C^N((1-\varepsilon)ma - (p-1)(\alpha+\beta), ma + pb + (p-1)(\alpha+\beta)).$$

Il vient :

$$\nu\left(C^N((1-\varepsilon)ma - (p-1)(\alpha+\beta), ma + pb + (p-1)(\alpha+\beta)) \cap \mathcal{C}\right) \\ \geq \frac{\theta\eta^p}{M^p\left(\prod_{k=1}^p(1+n_ka+b)\right)^r} \prod_{k=1}^p \nu\left(C^N(n_ka, n_ka+b) \cap \mathcal{D}\right).$$

□

Pour les mesures à croissance concave, on a donc un complément aux formules du lemme III.1.1 :

Lemme III.2.5. *Supposons ν à croissance concave. Soit N une norme sur $\mathcal{E}$. Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$, pour tout $x \neq 0$ dans $\mathcal{C}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 > 0$ tel que, pour tout $a \geq a_0$, on ait :*

$$\frac{1}{a} \liminf_{n\to\infty} \frac{\log\left(\nu\left(C^N(n(1-\varepsilon)a, n(1+\varepsilon)a) \cap \mathcal{C}\right)\right)}{n} \geq \frac{\psi_\nu(x)}{N(x)}.$$

Démonstration. Soient N une norme sur $\mathcal{E}$ et κ, θ, η comme dans le lemme III.2.4. Soient $\mathcal{C}$ un cône ouvert de $\mathcal{E}$, x un vecteur non nul de $\mathcal{C}$ et $\varepsilon > 0$.

D'après le lemme III.2.4, on peut trouver un cône ouvert $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ contenant x et un réel $a_0 > 0$ tel que, pour tout $a \geq a_0$, pour tous m et n entiers ≥ 1, si $m = pn + q$ est la division euclidienne de m par n, alors on a :

$$\nu\left(C^N\left((1-\varepsilon)\, ma - p\kappa, (m+p+1)a + p\kappa\right) \cap \mathcal{C}\right) \\ \geq \frac{\theta\eta^{p+1}}{((1+(n+1)a)^p(1+(q+1)a))^r} \nu\left(C^N(na, (n+1)a) \cap \mathcal{D}\right)^p \\ \nu\left(C^N(qa, (q+1)a) \cap \mathcal{D}\right).$$

Soit $n_0 > 0$ tel que

$$\frac{\kappa}{a_0 n_0} \leq \varepsilon \text{ et que } \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

Soit $a \geq a_0$. Pour tous $m, n \geq n_0$, si $m = pn + q$ est la division euclidienne de m par n, on a :

$$\begin{aligned}\nu\left(C^N\left(m\left(1-3\varepsilon\right)a, m(1+3\varepsilon)a\right)\cap\mathcal{C}\right) &\geq \frac{\theta\eta^{p+1}}{((1+(n+1)a)^p(1+(q+1)a))^r}\\ &\qquad \nu\left(C^N(na,(n+1)a)\cap\mathcal{D}\right)^p\nu\left(C^N(qa,(q+1)a)\cap\mathcal{D}\right)\end{aligned}$$

et, donc, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}\liminf_{m\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(C^N(m(1-3\varepsilon)a, m(1+3\varepsilon)a)\cap\mathcal{C}\right)\right)}{m}\\ &\qquad\geq \frac{1}{na}\log\left(\frac{\eta}{(1+(n+1)a)^r}\right)+\frac{\log\left(\nu\left(C^N(na,(n+1)a)\cap\mathcal{D}\right)\right)}{na}.\end{aligned}$$

Il vient, en faisant tendre n vers ∞, d'après le lemme III.1.1,

$$\frac{1}{a}\liminf_{m\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(C^N(m(1-3\varepsilon)a, m(1+3\varepsilon)a)\cap\mathcal{C}\right)\right)}{m} \geq \tau^N_{\mathcal{D},\nu} \geq \frac{\psi_\nu(x)}{N(x)}.$$

□

III.2.2 Démonstration du théorème de concavité

Nous pouvons à présent conclure la preuve du théorème III.2.1. Puisque ψ_ν est homogène, il s'agit de prouver qu'elle est sur-additive. L'idée consiste à se donner x et y dans $\mathcal{E}$, avec $x+y \neq 0$ et à estimer le volume d'une couronne dans un cône autour de $x+y$ à l'aide de $\psi_\nu(x)+\psi_\nu(y)$, en employant le lemme III.2.5.

Démonstration du théorème III.2.1. Soit N une norme sur $\mathcal{E}$ et soient toujours $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tels que, pour tous x, y dans $\mathcal{E}$,

$$\nu\left(b^N(x+y,\alpha)\right) \geq \gamma\nu\left(b^N(x,\beta)\right)\nu\left(b^N(y,\beta)\right).$$

Soit M comme dans le lemme III.2.2.

Soient x et y des vecteurs non nuls de $\mathcal{E}$. Commençons par supposer $x + y \neq 0$. Soit $\mathcal{C}$ un cône ouvert contenant $x + y$.

Soient $0 < \omega < \frac{1}{2}$ et $\mathcal{C}_1$ un cône ouvert de $\mathcal{E}$, contenant $x+y$ et tel que $\overline{\mathcal{C}_1} - \{0\} \subset \mathcal{C}$. On peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ et des cônes ouverts $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ contenant respectivement x et y tels que l'on ait

$$\begin{aligned}\left(C^N(N(x)(1-\varepsilon), N(x)(1+\varepsilon)) \cap \mathcal{A}\right) \\ + \left(C^N(N(y)(1-\varepsilon), N(y)(1+\varepsilon)) \cap \mathcal{B}\right) \\ \subset \left(C^N(N(x+y)(1-\omega), N(x+y)(1+\omega)) \cap \mathcal{C}_1\right).\end{aligned}$$

D'après le lemme III.2.5, on peut trouver un réel $a > 0$ tel que l'on ait :

$$\frac{1}{a} \liminf_{n\to\infty} \frac{\log\left(\nu\left(C^N(n(1-\varepsilon)aN(x), n(1+\varepsilon)aN(x)) \cap \mathcal{A}\right)\right)}{n} \geq \psi_\nu(x)$$

et de même en remplaçant x par y.

D'après le lemme III.2.2, pour tout entier n, il existe un vecteur x_n de $\mathcal{E}$ tel que

$$d\left(x_n, C^N(na(1-\varepsilon)N(x), na(1+\varepsilon)N(x)) \cap \mathcal{A}\right) \leq \beta$$

et que

$$\begin{aligned}\nu\left(C^N(na(1-\varepsilon)N(x), na(1+\varepsilon)N(x)) \cap \mathcal{A}\right) \\ \leq M\left(1 + na(1+\varepsilon)N(x)\right)^r \nu\left(b^N(x_n, \beta)\right)\end{aligned}$$

et un vecteur y_n de $\mathcal{E}$ vérifiant les inégalités analogues en remplaçant x par y.

Alors, pour tout entier $n > 0$, le vecteur

$$\frac{x_n + y_n}{na}$$

est à une distance $\leq \frac{2\beta}{na}$ de l'ensemble

$$\begin{aligned}\left(C^N(N(x)(1-\varepsilon), N(x)(1+\varepsilon)) \cap \mathcal{A}\right) \\ + \left(C^N(N(y)(1-\varepsilon), N(y)(1+\varepsilon)) \cap \mathcal{B}\right).\end{aligned}$$

de sorte qu'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$b^N\left(x_n + y_n, \alpha\right) \subset C^N\left(na(1-2\omega)N(x+y), na(1+2\omega)N(x+y)\right) \cap \mathcal{C}.$$

Il vient, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\nu\left(C^N\left(na(1-2\omega)N(x+y), na(1+2\omega)N(x+y)\right) \cap \mathcal{C}\right) & \\
\geq \nu\left(b^N\left(x_n+y_n,\alpha\right)\right) & \\
\geq \gamma\nu\left(b^N\left(x_n,\beta\right)\right)\nu\left(b^N\left(y_n,\beta\right)\right) & \\
\geq \frac{\gamma}{M^2(1+na(1+\varepsilon)N(x))^r(1+na(1+\varepsilon)N(y))^r} & \\
\nu\left(C^N(na(1-\varepsilon)N(x), na(1+\varepsilon)N(x)) \cap \mathcal{A}\right) & \\
\nu\left(C^N(na(1-\varepsilon)N(y), na(1+\varepsilon)N(y)) \cap \mathcal{B}\right). &
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers ∞ on a, d'après le lemme III.1.1,

$$\max\left(N(x+y)(1+2\omega)\tau^N_{\mathcal{C},\nu}, N(x+y)(1-2\omega)\tau^N_{\mathcal{C},\nu}\right) \geq \psi_\nu(x)+\psi_\nu(y).$$

Comme l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $0<\omega<\frac{1}{2}$, il vient :

$$N(x+y)\tau^N_{\mathcal{C},\nu} \geq \psi_\nu(x)+\psi_\nu(y),$$

d'où :

$$\psi_\nu(x+y) \geq \psi_\nu(x)+\psi_\nu(y),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Supposons à présent que $y=-x$. Pour tout $t>1$, on a :

$$tx-x=(t-1)x\neq 0$$

et, donc,

$$\psi_\nu(tx)+\psi_\nu(-x) \leq \psi_\nu((t-1)x)$$

et, donc, comme ψ_ν est homogène, on a bien, même quand $\psi_\nu(x)=-\infty$,

$$\psi_\nu(x)+\psi_\nu(-x) \leq 0.$$

□

III.3 Mesures à croissance concave divergente

Nous dirons que ν est à croissance divergente (resp. strictement divergente) si et seulement si, étant donnée une norme N sur $\mathcal{E}$, on a $\tau^N_\nu \geq 0$ (resp. $\tau^N_\nu > 0$). Ces conditions sont indépendantes de la norme choisie.

III.3.1 Contrôle de la divergence

Pour les mesures à croissance concave, on peut améliorer le lemme III.1.1 :

Proposition III.3.1. *Si ν est à croissance concave strictement divergente, pour toute norme N sur $\mathcal{E}$, on a :*

$$\frac{\log\left(\nu\left(b^N(0,a)\right)\right)}{a} \xrightarrow[a\to\infty]{} \tau_\nu^N \text{ et } \nu\left(b^N(0,a)\right) \underset{a\to\infty}{=} O\left(a^{r-1}e^{a\tau_\nu^N}\right).$$

La démonstration utilise le lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle du lemme III.2.4, en employant une variante du lemme III.2.2.

Lemme III.3.2. *Supposons ν à croissance concave. Soit N une norme sur $\mathcal{E}$. Il existe des réels $\theta, \eta, \kappa > 0$ tels que, pour tout réel $a \geq 0$ et pour tous réels $a_1, \ldots, a_p$ tels que $a = a_1 + \ldots + a_p$, on ait :*

$$\begin{aligned}&\nu\left(b^N(0, a+p+(p-1)\kappa)\right)\\ &\geq \frac{\theta\eta^p}{\left((1+a_1)\ldots(1+a_p)\right)^{r-1}}\nu\left(C^N(a_1,a_1+1)\right)\ldots\nu\left(C^N(a_p,a_p+1)\right). \ \square\end{aligned}$$

Démonstration de la proposition III.3.1. Commençons par remarquer que, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, on a :

$$\limsup_{\substack{a\to\infty\\ a\in\mathbb{R}_+^*}} \frac{f(a)}{a} = \limsup_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}} \frac{f(n)}{n} \text{ et } \liminf_{\substack{a\to\infty\\ a\in\mathbb{R}_+^*}} \frac{f(a)}{a} = \liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}} \frac{f(n)}{n}.$$

Soit alors N une norme sur $\mathcal{E}$. D'après le lemme III.1.1, on a :

$$\tau_\nu^N = \limsup_{a\to\infty} \frac{\log\left(\nu\left(b^N(0,a)\right)\right)}{a}.$$

Soient $\theta, \eta, \kappa > 0$ comme dans le lemme III.3.2. Soient $m \geq n \geq 1$ des entiers naturels et $m = pn + q$ la division euclidienne de m par n. On a :

$$\begin{aligned}\nu\left(b^N\left(0, m\left(1+\frac{\kappa+2}{n}\right)\right)\right) &\geq \nu\left(b^N\left(0, m+(p+1)+p\kappa\right)\right)\\ &\geq \frac{\theta\eta^{p+1}}{\left((1+n)^p(1+q)\right)^{r-1}}\\ &\quad\ \nu\left(C^N(n,n+1)\right)^p\nu\left(C^N(q,q+1)\right).\end{aligned}$$

Il vient, pour tout $n \geq 1$, d'après la remarque ci-dessus,

$$\left(1+\frac{\kappa+2}{n}\right)\liminf_{a\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(b^N(0,a)\right)\right)}{a}$$
$$\geq \left(\frac{1}{n}\log\left(\frac{\eta}{(1+n)^{r-1}}\right)+\frac{\log\left(\nu\left(C^N(n,n+1)\right)\right)}{n}\right).$$

On en déduit, en réutilisant le lemme III.1.1 :

$$\liminf_{a\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(b^N(0,a)\right)\right)}{a}\geq \limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left(\nu\left(C^N(n,n+1)\right)\right)}{n}=\tau_\nu^N$$

et, donc,

$$\frac{\log\left(\nu\left(b^N(0,a)\right)\right)}{a}\xrightarrow[a\to\infty]{}\tau_\nu^N.$$

Mais alors, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$(n+\kappa+2)\,\tau_\nu^N \geq \log\left(\frac{\eta}{(1+n)^{r-1}}\right)+\log\left(\nu\left(C^N(n,n+1)\right)\right)$$

d'où

$$\nu\left(C^N(n,n+1)\right)\leq \frac{1}{\eta}(1+n)^{r-1}e^{(n+\kappa+2)\tau_\nu^N}.$$

En d'autres termes, il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$\nu\left(C^N(n,n+1)\right)\leq M(1+n)^{r-1}e^{n\tau_\nu^N}.$$

Il vient, comme $\tau_\nu^N > 0$,

$$\nu\left(b^N(0,n)\right)\leq M\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)^{r-1}e^{k\tau_\nu^N}\underset{n\to\infty}{=}O\left(n^{r-1}e^{n\tau_\nu^N}\right).$$

On en déduit le résultat. □

III.3.2 Propriétés de concavité

Les résultats suivants appliquent des propriétés élémentaires de concavité au calcul des exposants de convergence.

Proposition III.3.3. *Si ν est à croissance concave divergente et s'il existe une forme linéaire φ dans $\mathcal{E}^*$ telle que, pour tout x dans $\mathcal{E} - \{0\}$, $\varphi(x) > \psi_\nu(x)$, alors, pour toute norme N sur $\mathcal{E}$, on a :*

$$\sigma_\nu^N = \tau_\nu^N.$$

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire III.1.4, de la proposition III.1.8, du théorème III.2.1 et du résultat de convexité ci-après. □

Lemme III.3.4. *Soit $\psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction concave homogène semi-continue supérieurement. Soient N une norme sur $\mathcal{E}$ et*

$$\tau = \sup_{x \in \mathcal{E} - \{0\}} \frac{\psi(x)}{N(x)}.$$

Si $\tau \geq 0$, il existe une forme linéaire φ dans $\mathcal{E}^*$ telle que

$$\varphi \geq \psi \text{ et que } N(\varphi) = \tau.$$

Démonstration. Si $\tau = 0$, le résultat est clair. Supposons donc $\tau > 0$ et, pour simplifier les notations, $\tau = 1$.

Soit x dans $\mathcal{E}$ tel que $N(x) = 1$ et que $\psi(x) = 1$. Pour tout y dans $\mathcal{E}$, on a :

$$\psi(y) \leq N(y)$$

et, donc, les parties convexes fermées de $\mathbb{R} \times \mathcal{E}$

$$\{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E} | s \geq N(y)\} \text{ et } \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E} | t \leq \psi(z)\}$$

ne se rencontrent qu'en leurs bords. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un réel α et une forme linéaire φ dans $\mathcal{E}^*$ non tout deux nuls et tels que, pour tous y, z dans $\mathcal{E}$ avec $\psi(z) > -\infty$, on ait :

$$\alpha N(y) + \varphi(y) \geq \alpha \psi(z) + \varphi(z).$$

En particulier, pour tout y dans $\mathcal{E}$, on a :

$$\alpha N(y) + \varphi(y) \geq \alpha N(x) + \varphi(x).$$

Supposons $\alpha \leq 0$. Alors, pour tout y dans $\mathcal{E}$, on a :

$$\varphi(y) \geq \alpha + \varphi(x)$$

et, donc, $\varphi = 0$. Mais alors, $\alpha \neq 0$ et, pour tout y dans $\mathcal{E}$, on a :

$$N(y) \leq 1$$

ce qui est absurde. Par conséquent, $\alpha > 0$.

On peut donc supposer que $\alpha = 1$. Pour tout y dans $\mathcal{E}$, on a :

$$\varphi(x - y) \leq N(y) - N(x) \leq N(y - x)$$

donc $N(\varphi) \leq 1$. Mais, en posant $y = \frac{x}{2}$ ci-dessus, il vient :

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}$$

donc $\varphi(x) = -1$ et $N(\varphi) = 1$.

Or, pour tout z dans $\mathcal{E}$, on a :

$$\psi(z) + \varphi(z) \leq N(x) + \varphi(x) = 0$$

i.e. $-\varphi \geq \psi$. $\square$

Corollaire III.3.5. *Supposons que ν est à croissance concave strictement divergente et qu'il existe une forme linéaire majorant strictement ψ_ν en dehors de 0. Soit N la norme associée à un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur $\mathcal{E}$. Alors, il existe une unique forme linéaire $\varphi \geq \psi_\nu$ de norme τ_ν^N. Si x est l'unique vecteur unitaire de $\mathcal{E}$ tel que $\psi_\nu(x) = \tau_\nu^N$, φ est la forme $\left\langle \tau_\nu^N x, . \right\rangle$.*

Démonstration. L'existence a été prouvée au corollaire III.3.3.

Démontrons l'unicité. Soit $\varphi \geq \psi_\nu$ de norme τ_ν^N. Comme la norme euclidienne est strictement convexe, d'après le corollaire III.1.4 et le théorème III.2.1, il existe un unique vecteur unitaire x de $\mathcal{E}$ tel que $\psi_\nu(x) = \tau_\nu^N$. On a :

$$\varphi(x) \geq \psi_\nu(x) = \tau_\nu^N = N(\varphi)N(x)$$

d'où le résultat, d'après le théorème de Cauchy-Schwarz. $\square$

IV L'indicateur de croissance de Γ

Dans cette partie, nous utilisons l'existence d'un produit générique dans un sous-groupe discret Zariski dense Γ de G, démontrée à la section II.3, pour montrer que la mesure de comptage $\sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_{\mu(\gamma)}$, c'est-à-dire la mesure image de $\sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_\gamma$ par la composante de Cartan vérifie les hypothèses des énoncés de la partie III. Nous commençons par contrôler l'indicateur de croissance de l'image par la composante de Cartan d'une mesure de Haar de G. Ensuite, nous utilisons les sous-semi-groupes libres de Γ pour montrer que ses exposants de convergence sont nécessairement positifs. Enfin, nous appliquons les résultats de la partie III à l'étude de Γ.

IV.1 Préliminaires

IV.1.1 Estimations de volume dans G

Nous commençons par calculer ici l'indicateur de croissance de la mesure image par μ d'une mesure de Haar de G.

On choisit une fois pour toutes une mesure de Haar ϱ sur G. On note ν_G la mesure sur E image de ϱ par μ et

$$\psi_G = \frac{\psi_{\nu_G}}{\log q}.$$

Montrons que $\psi_G = \rho$.

Supposons que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition IV.1.1 ([11, I.5.8])**.** *La mesure ν_G est absolument continue par rapport à la classe de la mesure de Lebesgue. Si λ est une mesure de Lebesgue sur E, il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout x dans E^+, on ait :*

$$\frac{\mathrm{d}\nu_G}{\mathrm{d}\lambda}(x) = c \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \sinh\left(\alpha(x)\right)^{m_\alpha}.$$

□

Corollaire IV.1.2. *Pour tout x dans E^+, on a :*

$$\psi_G(x) = \rho(x).$$

□

Supposons que $\mathbb{K}$ est non-archimédien. Pour z dans Z^+, notons θ_z l'ensemble des α dans Π tels que $\alpha(\nu(z)) > 0$.

Proposition IV.1.3 ([13, 3.2.7]). *Il existe une famille $(q_\theta)_{\theta\subset\Pi}$ de nombres réels > 0 telle que, pour tout z dans Z^+, on ait :*

$$\frac{\varrho(KzK)}{\varrho(K)} = q_{\theta_z} q^{\rho(\nu(z))}.$$

□

Corollaire IV.1.4. *Pour tout x dans E^+, on a :*

$$\psi_G(x) = \rho(x).$$

□

IV.1.2 Exposant de convergence des semi-groupes libres

Soit Δ un semi-groupe libre de générateurs ξ et η. Pour tous éléments x et y d'un semi-groupe S, on note $\Phi^S_{x,y}$ l'unique homomorphisme de Δ dans S envoyant ξ sur x et η sur y.

Pour calculer les exposants de convergence des sous-semi-groupes fournis par la proposition II.2.7, nous utiliserons :

Lemme IV.1.5. *Pour tous réels $u, v > 1$, la série de Dirichlet*

$$\vartheta(t) = \sum_{\zeta\in\Delta} \frac{1}{\Phi^{\mathbb{R}^*_+}_{u,v}(\zeta)^t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a pour exposant de convergence l'unique réel τ tel que

$$\frac{1}{u^\tau} + \frac{1}{v^\tau} = 1.$$

On a $\tau > 0$ et, pour tout $t > \tau$,

$$\vartheta(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{u^t} + \frac{1}{v^t}\right)}.$$

Démonstration. Pour tout entier naturel n, on note Δ_n l'ensemble des éléments de Δ dont la longueur comme mot en ξ et en η est $\leq n$. On a :

$$\Delta_{n+1} = \{e\} \sqcup \xi\Delta_n \sqcup \eta\Delta_n.$$

Soit τ l'unique réel tel que

$$\frac{1}{u^\tau} + \frac{1}{v^\tau} = 1.$$

On a $\tau > 0$.

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel t,

$$\vartheta_n(t) = \sum_{\zeta \in \Delta_n} \frac{1}{\Phi_{u,v}^{\mathbb{R}_+^*}(\zeta)^t}.$$

Il vient, pour tout entier naturel n et pour tout réel t,

$$\vartheta_n(t) \leq \vartheta_{n+1}(t) = 1 + \frac{1}{u^t}\vartheta_n(t) + \frac{1}{v^t}\vartheta_n(t).$$

Donc, d'une part, pour tout réel t tel que $\vartheta(t) < \infty$, on a :

$$\frac{1}{u^t} + \frac{1}{v^t} \neq 1 \text{ et } \vartheta(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{u^t} + \frac{1}{v^t}\right)}$$

et, par conséquent, l'exposant de convergence de ϑ est $\geq \tau$. D'autre part, pour tout réel $t > \tau$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\vartheta_n(t) \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{u^t} + \frac{1}{v^t}\right)}$$

Donc $\vartheta(t) < \infty$ et l'exposant de convergence de ϑ est exactement τ. $\square$

IV.2 La fonction ψ_Γ

Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. On note ν_Γ la mesure

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\mu(\gamma)}.$$

C'est l'image de la mesure $\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma$ par μ. Nous allons appliquer à ν_Γ la théorie générale des sections III.2 et III.3.

On note

$$\psi_\Gamma = \frac{\psi_{\nu_\Gamma}}{\log q} \text{ et } \tau_\Gamma = \frac{\tau_\nu^{\|\cdot\|}}{\log q}.$$

Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de E, on note $\tau_{\mathcal{C},\Gamma} = \frac{\tau_{\mathcal{C},\nu_\Gamma}^{\|\cdot\|}}{\log q}$.

Lemme IV.2.1. *Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de E rencontrant l_Γ, on a :*

$$\tau_{\mathcal{C},\Gamma} > 0.$$

Rappelons qu'on a noté F_Γ le sous-espace vectoriel de E engendré par l_Γ : si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ et si $\mathbf{G}$ est semi-simple, $F_\Gamma = E$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ un cône ouvert de E rencontrant l_Γ. L'intérieur dans F_Γ de $l_\Gamma \cap \mathcal{C}$ est non vide. D'après la proposition II.2.7, il existe un réel $\kappa \geq 0$, des éléments γ_1 et γ_2 dans Γ et des vecteurs x_1 et x_2 dans $\mathcal{C} \cap l_\Gamma$ tels que le sous-semi-groupe Δ de Γ engendré par γ_1 et γ_2 soit libre et que, avec les notations du paragraphe précédent, pour tout γ dans Δ,

$$\mu(\gamma) \in \mathcal{C} \text{ et } \left\|\mu(\gamma) - \Phi^E_{x_1,x_2}(\gamma)\right\| \leq \Phi^{\mathbb{R}}_{\kappa,\kappa}(\gamma).$$

On a alors, pour tout γ dans Γ,

$$\|\mu(\gamma)\| \leq \Phi^{\mathbb{R}}_{\|x_1\|+\kappa,\|x_2\|+\kappa}(\gamma)$$

et, donc, pour tout réel $t \geq 0$,

$$q^{-t\|\mu(\gamma)\|} \geq q^{-t\Phi^{\mathbb{R}}_{\|x_1\|+\kappa,\|x_2\|+\kappa}(\gamma)} = \left(\Phi^{\mathbb{R}^*_+}_{q^{\|x_1\|+\kappa},q^{\|x_2\|+\kappa}}(\gamma)\right)^{-t}.$$

D'après le lemme IV.1.5, la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma\in\Delta} q^{-t\|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a un exposant de convergence > 0. Comme $\mu(\Delta) \subset \mathcal{C}$, la série de Dirichlet

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \mu(\gamma)\in\mathcal{C}}} q^{-t\|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a, elle aussi, un exposant de convergence strictement positif, ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème IV.2.2. *Pour tout x dans E^+, on a :*

$$\psi_\Gamma(x) \leq \rho(x).$$

La mesure ν_Γ est à croissance concave et, donc, la fonction ψ_Γ est concave et semi-continue supérieurement. L'ensemble

$$\{x \in E | \psi_\Gamma(x) > -\infty\}$$

est exactement le cône limite de Γ. De plus, ψ_Γ est positive sur l_Γ et strictement positive sur son intérieur relatif.

Démonstration. Comme Γ est un sous-groupe discret de G, d'après les lemmes II.2.4 et III.1.6, on a :

$$\psi_\Gamma \leq \psi_G$$

et, d'après les corollaires IV.1.2 et IV.1.4, pour tout x dans E^+,

$$\psi_G(x) = \rho(x).$$

En particulier, $\tau_\Gamma < \infty$ et, d'après le lemme III.1.7, ψ_Γ est semi-continue supérieurement.

D'après la proposition II.3.1, la mesure ν_Γ est à croissance concave et, donc, d'après le théorème III.2.1, la fonction ψ_Γ est concave.

On a clairement $\psi_\Gamma = -\infty$ en dehors de l_Γ. Réciproquement, d'après le lemme IV.2.1, ψ_Γ est positive sur l_Γ et, puisqu'on a $\tau_\Gamma = \sup_{\|x\|=1} \psi_\Gamma(x) > 0$, elle y prend des valeurs strictement positives. Comme elle est concave, elle est strictement positive sur l'intérieur relatif de l_Γ. $\square$

Corollaire IV.2.3. *On a :*

$$\frac{1}{a} \log_q (\operatorname{card} \{\gamma \in \Gamma \,| \|\mu(\gamma)\| \leq a\}) \xrightarrow[a\to\infty]{} \tau_\Gamma$$

et

$$\operatorname{card} \{\gamma \in \Gamma \,| \|\mu(\gamma)\| \leq a\} \underset{a\to\infty}{=} O\left(a^{\dim F_\Gamma - 1} q^{a\tau_\Gamma}\right).$$

Démonstration. Soit p un projecteur de E sur F_Γ. Comme, d'après le théorème II.2.6, $\mu(\Gamma)$ reste à distance bornée de F_Γ, la mesure $p_*\nu_\Gamma$ est encore à croissance concave et, d'après le lemme III.1.6, elle a même indicateur de croissance que ν_Γ. Le résultat est alors une conséquence de la proposition III.3.1 appliquée à $p_*\nu_\Gamma$. $\square$

Nous pouvons enfin généraliser un résultat obtenu par P. Albuquerque ([1]) notamment dans le cas où $l_\Gamma - \{0\}$ était inclus dans E^{++}.

Pour toute norme N sur E, notons τ_Γ^N pour $\frac{\tau_{\nu_\Gamma}^N}{\log q}$ et σ_Γ^N pour $\frac{\sigma_{\nu_\Gamma}^N}{\log q}$. Rappelons qu'un cône fermé $\mathcal{C}$ d'un espace vectoriel réel $\mathcal{E}$ de dimension finie est dit saillant si et seulement s'il ne contient pas de sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

Corollaire IV.2.4. *Si l_Γ est saillant, ce qui est toujours vrai lorsque* **G** *est semi-simple, pour toute norme N sur E, on a :*

$$\sigma_\Gamma^N = \tau_\Gamma^N.$$

En particulier, il existe alors un unique vecteur unitaire x de E^+ tel que les séries de Dirichlet

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-t\|\mu(\gamma)\|} \ \textit{et} \ \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-t(x,\mu(\gamma))} \quad (t\in\mathbb{R})$$

aient même exposant de convergence. Ce vecteur appartient à l_Γ.

Démonstration. Il s'agit de l'application à ν_Γ des corollaires III.3.3 et III.3.5. □

Références

[1] P. Albuquerque, Patterson-Sullivan theory in higher rank symmetric spaces, *Geometric and functional analysis* **9** (1999), 1-28.

[2] H. Abels, G.-A. Margulis, G.-A. Soifer, Semigroups containing proximal linear maps, *Israel journal of mathematics* **91** (1995), 1-30.

[3] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Annals of mathematics* **144** (1996), 315-347.

[4] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geometric and functional analysis* **7** (1997), 1-47.

[5] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires (II), *Advanced studies in pure mathematics* **26** (2000), 33-48.

[6] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer Verlag, New York, 1991.

[7] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre VI : Systèmes de racines, Hermann, Paris 1968.

[8] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées, *Publications mathématiques de l'IHES* **41** (1972), 5-251.

[9] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publications mathématiques de l'IHES* **60** (1984), 5-184.

[10] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics 80, Academic Press, San Diego, 1978.

[11] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure and Applied Mathematics 113, Academic Press, San Diego, 1984.

[12] J.E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Text in Mathematics 21, Springer Verlag , New York, 1981.

[13] H. Matsumoto, *Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine*, Lecture Notes in Mathematics 590, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[14] S.-J. Patterson, The limit set of a fuchsian group, *Acta mathematica* **136** (1976), 241-273.

[15] J.-F. Quint, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples réels et p-adiques*, thèse Université Paris VII.

[16] J.-F. Quint, Cônes limites des sous-groupes discrets d'un groupe réductif sur un corps local, *Transformation groups*, à paraitre.

[17] J.-F. Quint, Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur, *Geometric and functional analysis*, à paraitre.

[18] D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publications mathématiques de l'IHES* **50** (1979), 171-202.

[19] J. Tits, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **247** (1971), 196-220.

[20] J. Tits, Reductive groups over local fields, *Proceedings of the symposium in pure mathematics of the american mathematical society* **33** (1977), 29-69.

Jean-François Quint
Département de Mathématiques et Applications

École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
quint@dma.ens.fr