

Propriété de Kazhdan et sous-groupes discrets de covolume infini

J.-F. Quint

Résumé

Soient G un groupe de Lie réel presque simple, de centre fini, de rang réel ≥ 2 et $G = K(\exp \mathfrak{a}^+)K$ une décomposition de Cartan de G . Si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G , son indicateur de croissance a été défini dans [7] : c'est une fonction homogène concave d'un cône convexe de \mathfrak{a}^+ dans \mathbb{R}_+ . Si Γ est un réseau de G , ψ_Γ est la restriction à \mathfrak{a}^+ de la somme ρ des racines positives multipliées par la dimension de leurs espaces poids. Nous montrons ici qu'il existe une forme linéaire θ de \mathfrak{a} , strictement positive sur $\mathfrak{a}^+ \setminus \{0\}$, ne dépendant que de G et telle que, pour tout sous-groupe discret Γ de G qui ne soit pas un réseau de G , $\psi_\Gamma \leq \rho - \theta$.

1 Introduction

Soit G un groupe de Lie réel presque simple de centre fini.

Soient X l'espace symétrique de G , muni d'une métrique riemannienne G -invariante, x un point de X et K son stabilisateur dans G . Si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G , on note τ_Γ l'exposant de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-td(x, \gamma x)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

C'est un réel > 0 . L'exposant de convergence des réseaux de G ne dépend que de G . On le note τ_G .

Généralisant un phénomène observé par K. Corlette dans [2] pour les groupes de rang réel 1 ayant la propriété (T) de Kazhdan, E. Leuzinger a montré dans [5] que, si G avait la propriété (T), il existait un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout sous-groupe Γ discret de G qui ne soit pas un réseau, on ait $\tau_\Gamma \leq \tau_G - \varepsilon$.

Soit \mathfrak{a} un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G tel que le plat maximal de X stable par $\exp \mathfrak{a}$ contienne x . Soit $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ une chambre de Weyl. Si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G , nous avons introduit dans [7] son indicateur de croissance : c'est une fonction homogène concave positive, définie sur un cône convexe fermé de \mathfrak{a}^+ . Elle permet, par exemple, de décrire les exposants de convergence de Γ par rapport à toutes les métriques finsleriennes G -invariantes de X . Si Γ est un réseau, son indicateur de croissance est la restriction à \mathfrak{a}^+ d'une forme linéaire ρ qui ne dépend que de G .

Nous démontrons ici :

Théorème. *Supposons G de rang réel ≥ 2 . Il existe alors une forme linéaire θ , strictement positive sur $\mathfrak{a}^+ \setminus \{0\}$, telle que, pour tout sous-groupe discret Γ de G qui ne soit pas un réseau, on ait $\psi_\Gamma \leq \rho - \theta$.*

La démonstration de ce résultat repose sur une version forte de la propriété (T), établie par H. Oh dans [6] : il s'agit d'une estimation de la vitesse de décroissance dans G des coefficients matriciels associés aux vecteurs K -finis dans les représentations unitaires de G ne contenant pas de vecteurs G -invariants.

Partant de ce résultat, on utilisera le plan et les méthodes de [3], où A. Eskin et C. McMullen démontrent un résultat de comptage pour les réseaux de G . Précisément, étant donné un réseau Γ dans G , dans [3], on commence par établir, à partir du théorème de Howe-Moore un résultat d'équidistribution des translatés des K -orbites dans $\Gamma \backslash G$, puis on utilise cet énoncé pour estimer le nombre de points de Γ dans les parties K -invariantes à droite de G .

Ici, nous nous donnerons un sous-groupe discret Γ de G qui ne soit pas un réseau. Le théorème de Oh nous permettra de démontrer un résultat de disparition des translatés des K -orbites, la proposition 4.2. Nous en déduirons une majoration pour le comptage des points de Γ dans les parties K -invariantes à droite qui mènera à notre théorème.

Nous démontrerons aussi un analogue de ce résultat pour un groupe de Lie presque simple défini sur n'importe quel corps local \mathbb{K} de caractéristique $\neq 2$.

Je tiens à remercier Y. Benoist qui a attiré mon attention sur ces questions et E. Leuzinger qui m'a communiqué sa prépublication [5].

2 Notations

Soit \mathbb{K} un corps local de caractéristique différente de 2.

Si \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} , on le munit de la valeur absolue usuelle et on pose $q = e$ et, pour tout $x \neq 0$ dans \mathbb{K} , $\omega(x) = -\log|x|$.

Si \mathbb{K} est non-archimédien, on note \mathcal{O} l'anneau de valuation de \mathbb{K} , \mathfrak{m} l'idéal maximal de \mathcal{O} et q le cardinal du corps résiduel \mathcal{O}/\mathfrak{m} de \mathbb{K} ; on note ω la valuation de \mathbb{K} telle que $\omega(\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2) = 1$ et on munit \mathbb{K} de la valeur absolue $x \mapsto q^{-\omega(x)}$.

Soient \mathbf{G} un \mathbb{K} -groupe presque simple de \mathbb{K} -rang ≥ 2 et G le groupe de ses \mathbb{K} -points.

On choisit dans \mathbf{G} un tore \mathbb{K} -déployé maximal \mathbf{A} . On note A le groupe de ses \mathbb{K} -points, \mathbf{Z} le centralisateur de \mathbf{A} dans \mathbf{G} et Z le groupe des \mathbb{K} -points de \mathbf{Z} .

Soit X le groupe des caractères de \mathbf{A} . On note E l'espace vectoriel réel dual de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X$ et, pour χ dans X , on note χ^ω la forme linéaire associée sur E . On note ν l'unique homomorphisme continu de Z dans E tel que, pour tous a dans A et χ dans X , $\chi^\omega(\nu(a)) = -\omega(\chi(a))$.

Dorénavant, on identifie les éléments de X et les formes linéaires associées de E . Soit Σ l'ensemble des racines de \mathbf{A} dans l'algèbre de Lie de \mathbf{G} . Alors Σ est un système de racines dans E^* . On choisit dans Σ un système de racines positives Σ^+ . On note $E^+ \subset E$ la chambre de Weyl positive de Σ^+ et $Z^+ = \nu^{-1}(E^+)$. On note $\iota : E \rightarrow E$ l'involution d'opposition de E^+ .

Enfin, on choisit dans G un bon sous-groupe compact maximal relativement à A , qu'on note K . On a la décomposition de Cartan $G = KZ^+K$ et, pour z_1, z_2 dans Z^+ , z_1 appartient à Kz_2K si et seulement si $\nu(z_1) = \nu(z_2)$. On note μ l'unique application bi- K -invariante de G dans E^+ dont la restriction à Z^+ vaut ν . Pour g dans G , on a $\mu(g^{-1}) = \iota(\mu(g))$. On a :

Proposition 2.1 (Benoist, [1, 5.1]). *Pour toute partie compacte L de G , il existe une partie compacte M de E telle que, pour tout g dans G , on ait $\mu(LgL) \subset \mu(g) + M$.*

Nous allons appliquer à des problèmes de comptage dans G le résultat suivant de H. Oh. Il s'agit d'une quantification du fait que G possède la propriété (T) de Kazhdan :

Théorème 2.2 (Oh, [6]). *Il existe une fonction $\xi : E^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, invariante par ι , telle que*

(i) pour toute représentation de G dans un espace de Hilbert H sans vecteurs G -invariants, on ait, pour v, w K -invariants dans H et g dans G ,

$$|\langle gv, w \rangle| \leq \xi(\mu(g)) \|v\| \|w\|.$$

(ii) il existe une forme linéaire θ de E , strictement positive sur $E^+ \setminus \{0\}$, et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < c < d$ avec

$$\forall x \in E^+ \quad cq^{-\theta(x)} \leq \xi(x) \leq dq^{-(1-\varepsilon)\theta(x)}.$$

Dorénavant, on fixe de tels ξ et θ .

3 Divergence exponentielle des sous-groupes discrets

Nous rappelons ici les résultats de [7] sur le comportement de l'image par μ d'un sous-groupe discret de G .

Soient ν une mesure de Radon et N une norme sur E . Pour tout cône ouvert \mathcal{C} de E , on note $\tau_{\mathcal{C}}$ l'exposant de convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_{\mathcal{C}} e^{-tN(x)} d\nu(x) \quad (t \in \mathbb{R})$$

et, pour x dans E , on pose :

$$\psi_{\nu}(x) = N(x) \inf \tau_{\mathcal{C}},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts \mathcal{C} de E qui contiennent x . La fonction ψ_{ν} ne dépend pas de la norme choisie. On l'appelle indicateur de croissance de ν .

Les deux résultats élémentaires suivants sont prouvés dans [7, 5.2] :

Lemme 3.1. *Soit $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction homogène et continue. On a $\psi_{e^{\theta\nu}} = \psi_{\nu} + \theta$.*

Lemme 3.2. *Soient ν et ν' des mesures de Radon sur E . S'il existe une partie compacte M de E et un réel $\omega \geq 0$ tels que, pour tout borélien B de E , $\nu'(B) \leq \omega\nu(B + M)$, alors $\psi_{\nu'} \leq \psi_{\nu}$.*

Si Γ est un sous-groupe fermé de G , soit ν_Γ l'image par μ d'une mesure de Haar de Γ ; on note ψ_Γ la fonction $\frac{1}{\log q}\psi_{\nu_\Gamma}$. Soit ρ la forme linéaire sur E qui est la somme des racines positives multipliées par la dimension de leurs espaces poids. De la formule d'intégration pour la décomposition de Cartan [4, I.5.2], on déduit tout de suite :

Lemme 3.3. *On a $\psi_G = \rho$.*

Le résultat principal de [7] s'énonce :

Théorème 3.4. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G . La fonction ψ_Γ est majorée par ρ . Elle est concave, semi-continue supérieurement et positive partout où elle est $> -\infty$.*

4 Disparition des K -orbites

On fixe des mesures de Haar dg sur G et dk sur K . On suppose que $\int_K dk = 1$.

Rappelons une propriété usuelle des mesures de Haar :

Lemme 4.1. *Soient H un groupe topologique localement compact unimodulaire et K un sous-groupe fermé unimodulaire de H . Alors $K \backslash H$ possède une unique mesure de Radon H -invariante non triviale, à multiplication par un réel > 0 près. Munissons H et K de mesures de Haar à droite dh et dk . La mesure H -invariante m de K/H peut-être normalisée de façon à ce que, si ψ est une fonction mesurable sur H , ψ soit intégrable si et seulement si la fonction $\hat{\psi} : Kh \mapsto \int_K \psi(kh)dk$ est définie presque partout et intégrable sur $K \backslash H$ et que, alors, on ait :*

$$\int_{K \backslash H} \hat{\psi} dm = \int_H \psi(h)dh.$$

Soit Γ un sous-groupe discret de G . On note m la mesure G -invariante sur $\Gamma \backslash G$ associée à la mesure de Haar de G et à la mesure de comptage sur Γ . On suppose que Γ n'est pas un réseau de G , c'est-à-dire que $m(\Gamma \backslash G) = \infty$. On note p_0 l'image de e dans $\Gamma \backslash G$.

Dans cette section, nous allons prouver :

Proposition 4.2. *Soit $\varphi : \Gamma \backslash G \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction continue à support compact. Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout g dans G , on ait :*

$$\left| \int_K \varphi(p_0kg)dk \right| \leq c\xi(\mu(g)).$$

Nous commencerons par nous ramener au cas où φ est K -invariante, grâce à un raisonnement simple de topologie :

Lemme 4.3. *Soit X un espace topologique localement compact et K un groupe compact agissant continûment sur X . Si φ est une fonction continue à support compact sur X , il existe une fonction continue K -invariante, positive et à support compact ψ telle que $|\varphi| \leq \psi$.*

Nous pouvons d'ores et déjà conclure, dans le cas où \mathbb{K} est non-archimédien :

Démonstration de la proposition 4.2 quand \mathbb{K} est non-archimédien. D'après le lemme 4.3, on peut supposer que φ est K -invariante. Par ailleurs comme K est un sous-groupe ouvert de G , la mesure de Haar de K est la restriction de la mesure de Haar de G , et, d'après le lemme 4.1, pour tout g dans G , on a :

$$\int_K \varphi(p_0kg)dk = \text{card}(\Gamma \cap K) \int_{p_0K} \varphi(pg)dm(p).$$

Or, comme Γ n'est pas un réseau de G , la représentation naturelle de G dans $L^2(\Gamma \backslash G)$ ne possède pas de vecteurs G -invariants; le résultat est alors une conséquence du théorème 2.2. \square

Intéressons-nous à présent au cas où \mathbb{K} est archimédien. Nous utiliserons une décomposition de la mesure de Haar de G :

Lemme 4.4. *Il existe une base de voisinages de e dans G constituée de voisinages V pour lesquels il existe une mesure de Radon τ sur V telle que, pour toute fonction φ continue à support compact dans KV , on ait :*

$$\int_{KV} \varphi(g)dg = \int_{K \times V} \varphi(kv)dkd\tau(v).$$

Démonstration. C'est une conséquence de la formule d'intégration pour les décompositions d'Iwasawa de G (cf. [4, I.5.1]). \square

Enfin, nous utiliserons un cas particulier du théorème du front d'onde, de A. Eskin et C. McMullen :

Lemme 4.5 (Eskin, McMullen, [3]). *Pour tout voisinage U de e dans G , il existe un voisinage V de e tel que, pour tout g dans G , $KVg \subset KgU$.*

Démonstration. Remarquons que, par décomposition de Cartan, quitte à remplacer par la suite V par un voisinage plus petit normalisé par K , il suffit de démontrer ce résultat pour des g dans Z^+K .

Soient \mathbf{P} le \mathbb{K} -sous-groupe parabolique minimal de \mathbf{G} associé au choix de \mathbf{A} et de E^+ et P le groupe de ses \mathbb{K} -points. Le groupe P possède une base de voisinages de l'élément neutre stables par l'action adjointe des éléments de $(Z^+)^{-1}$. Or, on a la décomposition d'Iwasawa $G = KP$. Soient alors U un voisinage de e dans G normalisé par K et $V \subset U$ un voisinage de e dans P tel que, pour tout z dans Z^+ , $z^{-1}Vz \subset V$. L'ensemble KV est un voisinage de e dans G et, pour z dans Z^+ et k dans K , on a :

$$KVzk = Kz(z^{-1}Vz)k \subset KzVk \subset KzUk = K(zk)U,$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Nous pouvons à présent démontrer notre proposition :

Démonstration de la proposition 4.2 quand \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit U un voisinage compact de e dans G . D'après le lemme 4.3, appliqué à la fonction $p \mapsto \sup_{u \in U} |\varphi(pu^{-1})|$, il existe une fonction ψ K -invariante, positive, continue et à support compact sur $\Gamma \backslash G$ telle que, pour p dans $\Gamma \backslash G$ et u dans U , on ait $|\varphi(p)| \leq \psi(pu)$.

Soit alors, comme dans le lemme 4.5, un voisinage V borné de e dans G tel que, pour g dans G , $KVg \subset KgU$. On suppose que V vérifie la propriété du lemme 4.4 et on choisit une mesure τ sur V comme dans cet énoncé. Enfin, soit W un voisinage borné de e tel que $V \subset W$ et que W soit normalisé par K . Comme Γ n'est pas un réseau de G , la représentation naturelle de G dans $L^2(\Gamma \backslash G)$ ne possède pas de vecteurs G -invariants et, donc, le théorème 2.2 s'applique aux vecteurs K -invariants que sont la fonction ψ et la fonction caractéristique de p_0KW . En d'autres termes, il existe $c > 0$ tel que, pour tout g dans G ,

$$\int_{p_0KV} \psi(pg) dm(p) \leq \int_{p_0KW} \psi(pg) dm(p) \leq c\xi(\mu(g)).$$

Soit g dans G . D'une part, on a, d'après le lemme 4.1 :

$$\begin{aligned} \int_{KV} \psi(p_0hg)dh &= \int_{p_0KV} \text{card}(p \cap KV)\psi(pg)dm(p) \\ &\leq \text{card}(\Gamma \cap KVV^{-1}K) \int_{p_0KV} \psi(pg)dm(p) \end{aligned}$$

(où l'on a employé le même symbole pour un point de $\Gamma \backslash G$ et pour la classe à droite associée).

D'autre part, pour v dans V , il existe u dans U tel que $Kvg = Kgu$; par conséquent, on a :

$$\int_K \psi(p_0kvg)dk \geq \int_K \psi(p_0kgu)dk \geq \int_K |\varphi(p_0kg)| dk$$

et, donc,

$$\int_{KV} \psi(p_0g)dg = \int_V \left(\int_K \psi(p_0kvg)dk \right) d\tau(v) \geq \tau(V) \int_K |\varphi(p_0kg)| dk.$$

Il vient :

$$\int_K |\varphi(p_0kg)| dk \leq \frac{c \text{card}(\Gamma \cap KVV^{-1}K)}{\tau(V)} \xi(\mu(g)),$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

5 Majoration des exposants de convergence

Dans cette section, nous utilisons la majoration précédente pour démontrer :

Théorème 5.1. *Soit Γ un sous-groupe discret de G . Si Γ n'est pas un réseau de G , on a $\psi_\Gamma \leq \rho - \theta$.*

Établissons un résultat préliminaire. Pour tout borélien B de G/K , notons χ_B la fonction indicatrice de l'ensemble $B^{-1} \subset K \backslash G$ et F_B la fonction sur $\Gamma \backslash G$ telle que, pour tout g dans G , $F_B(\Gamma g) = \text{card}(\Gamma \cap gB)$. Munissons $K \backslash G$ de sa mesure G -invariante n associée au choix des mesures de Haar de G et de K . On a :

Lemme 5.2. Soit φ une fonction continue à support compact dans $\Gamma \backslash G$. Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout borélien B de mesure finie dans G/K , on ait :

$$\left| \int_{\Gamma \backslash G} \varphi F_B dm \right| \leq c \int_{B^{-1}} (\xi \circ \mu) dn.$$

Démonstration. Soit B un borélien de mesure finie dans G/K . La fonction $g \mapsto \chi_B(Kg)$ est intégrable sur G . Or, pour g dans G , on a :

$$F_B(\Gamma g) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_B(\gamma g).$$

D'après le lemme 4.1, la fonction F_B est intégrable sur $\Gamma \backslash G$ et son intégrale est égale à $n(B^{-1})$. De même, en appliquant le lemme 4.1 à $\Gamma \backslash G$ et à $K \backslash G$, pour toute fonction continue φ à support compact dans $\Gamma \backslash G$, on a :

$$\int_{\Gamma \backslash G} \varphi F_B dm = \int_G \varphi(\Gamma g) \chi_B(Kg) dg = \int_{B^{-1}} \psi dn,$$

où, pour g dans G , on a $\psi(Kg) = \int_K \varphi(\Gamma kg) dk$.

Or, d'après la proposition 4.2, si φ est une fonction continue à support compact dans $\Gamma \backslash G$, il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout g dans G , on ait $|\int_K \varphi(\Gamma kg) dk| \leq c \xi(\mu(g))$. Il vient bien, pour tout borélien B de mesure finie dans G/K ,

$$\left| \int_{\Gamma \backslash G} \varphi F_B dm \right| \leq c \int_{B^{-1}} (\xi \circ \mu) dn.$$

□

Terminons à présent :

Démonstration du théorème 5.1. Soit V un voisinage compact de e dans G . D'après la proposition 2.1, il existe une partie compacte M de E telle que, pour tout g dans G , $\mu(V^{-1}g) \subset \mu(g) + M$. Alors, pour g dans V , on a, pour tout borélien B de E , $(\Gamma \cap \mu^{-1}(B)) \subset (\Gamma \cap g\mu^{-1}(B + M))$ et, donc, $F_{\mu^{-1}(B+M)}(\Gamma g) \geq \text{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(B))$.

Donnons-nous une fonction φ positive, continue, à support compact dans p_0V , avec $\int_{\Gamma \backslash G} \varphi dm = 1$. Soit $c > 0$, comme dans le lemme 5.2. On a, pour tout borélien B de E ,

$$\text{card}(\Gamma \cap \mu^{-1}(B)) \leq \int_{\Gamma \backslash G} \varphi F_{\mu^{-1}(B+M)} dm \leq c \int_{(\mu^{-1}(B+M))^{-1}} (\xi \circ \mu) dn.$$

Or $(\mu^{-1}(B + M))^{-1} = \mu^{-1}(\iota(B + M))$ et, donc, en notant ν_G l'image par μ de la mesure de Haar de G ,

$$\int_{(\mu^{-1}(B+M))^{-1}} (\xi \circ \mu) dn = \int_{\iota(B+M)} \xi d\nu_G = \int_{B+M} \xi d\nu_G,$$

d'où le résultat, par définition de θ et d'après les lemmes 3.2 et 3.3. \square

Références

- [1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Annals of mathematics* **144** (1996), 315-347.
- [2] K. Corlette, Hausdorff dimension of limit sets I, *Inventiones mathematicæ* **102** (1990), 521-542.
- [3] A. Eskin, C. McMullen, Mixing, counting and equidistribution in Lie groups, *Duke mathematical journal* **71** (1993), 181-209.
- [4] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure and Applied Mathematics 113, Academic Press, San Diego, 1984.
- [5] E. Leuzinger, Kazhdan property (T), L^2 -spectrum and isoperimetric inequalities for locally symmetric spaces, preprint.
- [6] H. Oh, Uniform pointwise bounds for matrix coefficients of unitary representations and applications to Kazhdan constants, *Duke mathematical journal* **113** (2002), 133-192.
- [7] J.-F. Quint, Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur, *Commentarii Mathematici Helvetici* **77** (2002), 563-608.