Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur

J.-F. Quint

Résumé

Soient G un groupe de Lie semi-simple de centre fini et Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. Nous utilisons ici l'indicateur de croissance de Γ, introduit dans [19], pour construire des analogues des mesures de Patterson-Sullivan utilisées en $\mathbb{R}$-rang 1.

1 Introduction

Soient G un groupe de Lie semi-simple de centre fini, K un sous-groupe compact maximal et Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G.

Soient X l'espace symétrique de G, muni d'une métrique riemannienne G-invariante, p le point fixe de K dans X, ∂X le bord visuel de X et $b : X \times \partial X \to \mathbb{R}$ la fonction de Buseman avec la normalisation $b(p, .) = 0$.

1.1 Mesures de Patterson sur ∂X

On note τ l'exposant de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-td(p,\gamma p)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

C'est un réel > 0.

Si G est de $\mathbb{R}$-rang 1, ∂X est un espace homogène sous G dans lequel Γ possède un plus petit fermé invariant non vide, appelé ensemble limite de Γ. Dans [16], S.-J. Patterson a construit des probabilités ν concentrées sur l'ensemble limite de Γ et telles que, pour γ dans Γ, $\gamma_* \nu = e^{-\tau b(\gamma p,.)} \nu$. Dans [20], D. Sullivan a montré que, si, pour un réel β, une probabilité ν sur ∂X vérifiait $\gamma_* \nu = e^{-\beta b(\gamma p,.)} \nu$, pour tout γ dans Γ, on avait $\beta \geq \tau$. Les mesures de Patterson sont présentes dans de nombreux problèmes liés à l'étude des propriétés asymptotiques de Γ.

Dans le cas général, ∂X n'est plus un espace homogène dès que le $\mathbb{R}$-rang de G est ≥ 2. Cependant, les G-orbites à l'infini sont compactes. Dans chacune d'elle, Γ possède un plus petit fermé invariant non vide. La réunion de ces fermés est appelée ensemble limite géométrique de Γ. Dans [1], P. Albuquerque a construit, par un procédé analogue à celui de Patterson, des probabilités ν concentrées sur l'ensemble limite géométrique de Γ et telles que, pour γ dans Γ, $\gamma_* \nu = e^{-\tau b(\gamma p,.)} \nu$. Il a montré que, si l'une de ces probabilités était concentrée sur la réunion des orbites régulière à l'infini, elle était concentrée sur une seule orbite.

1.2 Mesures de Patterson sur la variété des drapeaux

Nous allons à présent exposer nos résultats : il s'agit d'une généralisation au rang supérieur des théorèmes de Patterson et Sullivan cités ci-dessus, avec un point de vue légèrement différent de celui d'Albuquerque.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G tel que p soit contenu dans le plat maximal stable par $\exp \mathfrak{a}$ dans X. On choisit dans $\mathfrak{a}$ une chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+$. On dispose alors de la décomposition de Cartan $G = K(\exp \mathfrak{a}^+)K$ et de la projection associée $\mu : G \to \mathfrak{a}^+$.

On appelle cône limite de Γ et on note l_Γ le cône asymptote à l'ensemble $\mu(\Gamma)$ dans $\mathfrak{a}$. Dans [4, 4], Y. Benoist a montré que l_Γ était convexe et d'intérieur non vide. Intéressons-nous à présent à l'étude de la divergence exponentielle de l'ensemble $\mu(\Gamma)$. Fixons un moment une norme $\|.\|$ sur $\mathfrak{a}$. Rappelons que, si cette norme est la norme euclidienne provenant de la métrique riemannienne G-invariante de X, pour tout g dans G, on a $d(p, gp) = \|\mu(g)\|$. Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{a}$, on note $\tau_{\mathcal{C}}$ l'exposant de convergence de la série de Dirichlet :

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \mu(\gamma) \in \mathcal{C}}} q^{-t\|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et, pour x dans $\mathfrak{a}$, on pose :

$$\psi_\Gamma(x) = \|x\| \inf \tau_{\mathcal{C}},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{a}$ qui contiennent x. La fonction ψ_Γ ne dépend pas de la norme choisie. On appelle cette fonction homogène indicateur de croissance de Γ : dans notre esprit, il généralise à la situation de rang supérieur la notion d'exposant de convergence. Dans [19], on montre que cette fonction est concave semi-continue supérieurement, qu'elle est $> -\infty$ exactement sur le cône limite de Γ et qu'elle est positive sur l_Γ et strictement positive en son intérieur.

Soit $\mathcal{P}$ la variété des drapeaux de G, c'est-à-dire l'ensemble des sous-groupes paraboliques minimaux de G. C'est un espace homogène compact sur lequel K agit transitivement. Les G-orbites régulières dans ∂X sont G-isomorphes à $\mathcal{P}$. D'après [4], Γ possède dans $\mathcal{P}$ un plus petit fermé invariant non vide, qu'on appelle ensemble limite de Γ. On note P le sous-groupe parabolique minimal de G associé au choix de $\mathfrak{a}^+$. Le groupe P est le stabilisateur d'un point de ξ_0 de $\mathcal{P}$. Soit U le radical unipotent de G. Alors, $P = (\exp \mathfrak{a})U$ et on a la décomposition d'Iwasawa $G = KP = K(\exp \mathfrak{a})U$. Soient g dans G et ξ dans $\mathcal{P}$ tel que $\xi = k\xi_0$ avec k dans K. On note $\sigma(g, \xi)$ l'unique élément x de $\mathfrak{a}$ tel que $gk \in K(\exp x)U$: il ne dépend que de g et de ξ. L'application σ vérifie la relation de cocycle :

$$\forall g, h \in G \quad \forall \xi \in \mathcal{P} \quad \sigma(gh, \xi) = \sigma(g, h\xi) + \sigma(h, \xi).$$

Étant donnée une forme linéaire φ sur $\mathfrak{a}$, nous dirons qu'une probabilité ν sur $\mathcal{P}$ est une (Γ, φ)-mesure de Patterson si et seulement si, pour γ dans Γ, on a $\gamma_*\nu = e^{-\varphi(\sigma(\gamma^{-1}, .))}\nu$. Dans cet article, nous allons donner dans ce cadre des généralisations des résultats de Patterson et de Sullivan. Au paragraphe 8.1, nous prouverons :

Théorème. *Soit φ une forme linéaire de $\mathfrak{a}$. S'il existe une (Γ, φ)-mesure de Patterson sur $\mathcal{P}$, on a $\varphi \geq \psi_\Gamma$.*

Au paragraphe 8.2, la concavité de ψ_Γ nous permettra de construire des mesures de Patterson :

Théorème. *Soit φ une forme linéaire de $\mathfrak{a}$ tangente à ψ_Γ en une direction intérieure à $\mathfrak{a}^+$. Alors, il existe une (Γ, φ)-mesure de Patterson sur $\mathcal{P}$.*

Enfin, au paragraphe 8.3, nous montrerons comment la concavité de ψ_Γ permet de se passer de l'hypothèse de régularité d'Albuquerque dans son résultat sur le support des mesures de Patterson. Munissons $\mathfrak{a}$ de la norme euclidienne provenant de la métrique riemanienne G-invariante de X. On aura :

Proposition. *Soit ν une probabilité sur ∂X construite par le procédé de Patterson, comme dans [1]. Soit u le vecteur unitaire porté par l'unique direction de $\mathfrak{a}$ dans laquelle $x \mapsto \frac{\psi_\Gamma(x)}{\|x\|}$ atteint son maximum. Alors ν est concentrée sur l'orbite de* $\lim_{t\to\infty}(\exp tu)p$.

1.3 Structure des démonstration

Esquissons à présent les idées des démonstrations de nos théorèmes. Dans les deux cas on suit les plans des preuves des théorèmes de Patterson et de Sullivan.

Le premier théorème repose sur un analogue du lemme des ombres de Sullivan. On définit, pour g dans G, une partie B_g^ε de $\mathcal{P}$ telle que gB_g^ε joue le rôle de l'ombre de g. En particulier, on démontre un analogue du lemme des ombres, la proposition 5.4, qui permet de contrôler la fibre de certains recouvrement de $\mathcal{P}$ par des ombres, au lemme 8.3. Comme, pour une φ-mesure de Patterson, on a une estimation de la mesure des ombres, le lemme 8.2, on peut alors conclure en raisonnant comme Sullivan dans [20].

Pour prouver le second théorème on montre, dans le corollaire 5.2, que si ν_0 est la probabilité K-invariante de $\mathcal{P}$, si g est un élément de g tel que $\mu(g)$ soit loin des murs de $\mathfrak{a}^+$, alors la mesure $g_*\nu_0$ est proche d'une masse de Dirac. Par aileurs, si φ est une forme linéaire tangente à ψ_Γ en une direction $\mathbb{R}_+x$ intérieure à $\mathfrak{a}^+$, grâce à la concavité de ψ_Γ, le lemme 8.6 permet de trouver une fonction F sur $\mathfrak{a}$ telle que la série de Dirichlet $\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-F(\mu(\Gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}$ ait pour exposant de convergence 0 et que, pour tout cône ouvert $\mathcal{C} \ni x$, la série $\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \mu(\gamma)\notin\mathcal{C}}} q^{-F(\mu(\Gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}$ ait un exposant de convergence < 0. On forme alors des sommes de Patterson $\frac{1}{\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-F(\mu(\Gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}} \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-F(\mu(\Gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}\gamma_*\nu_0$ et on en prend des valeurs d'adhérence en 0 : alors, ne comptent dans ces sommes que les γ tels que $\mu(\gamma)$ soit proche de x en direction, ce qui permet alors de conclure avec des raisonnements analogues à ceux de Patterson dans [16].

1.4 Corps locaux

Comme cela est fait dans [4] et [19], nous démontrerons des analogues des résultats ci-dessus pour les groupes semi-simples définis sur un corps valué localement compact. Nous utiliserons les analogues des décomposition de Cartan et d'Iwasawa pour ces groupes, établis par F. Bruhat et J. Tits dans [8] et [9]. Nous renvoyons le lecteur à [22], pour un résumé de cette théorie.

Je tiens à remercier Yves Benoist : ses remarques et suggestions m'ont aidé tout au long de l'élaboration de ce travail.

2 Propriétés de contraction des endomorphismes

Soit $\mathbb{K}$ un corps local : $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, pour un entier premier p, soit le corps des fractions $\mathbb{F}_q[[T, T^{-1}]$ de l'anneau des séries formelles sur le corps fini à q éléments.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on le munit de la valeur absolue usuelle et on pose $q = e$, $u = e^{-1}$ et pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, $\omega(x) = -\log|x|$.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on note $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{K}$, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de $\mathbb{K}$, q le cardinal de k et u une uniformisante de $\mathbb{K}$, *i.e.* un élément de $\mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$; on note ω la valuation de $\mathbb{K}$ telle que $\omega(u) = 1$ et on munit $\mathbb{K}$ de la valeur absolue $x \mapsto q^{-\omega(x)}$.

Étant donnée une extension algébrique de $\mathbb{K}$, on la munit de l'unique valeur absolue prolongeant celle de $\mathbb{K}$.

Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie Y de X, on note :

$$b(Y, \varepsilon) = \{x \in X | d(x, Y) \leq \varepsilon\} \text{ et } B(Y, \varepsilon) = \{x \in X | d(x, Y) \geq \varepsilon\}.$$

Pour toutes parties Y et Z de x, on note :

$$d(Y, Z) = \inf_{(y,z) \in Y \times Z} d(y, z) \text{ et } \delta(Y, Z) = \sup_{y \in Y} d(y, Z).$$

Si t est un nombre réel, on note $[t]$ sa partie entière.

Nous allons montrer ici un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui seront ensuite réinterprétés dans les groupes réductifs à travers leurs représentations linéaires.

2.1 Bonnes normes et bonnes sommes directes

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie m. On munit $\mathbb{P}(V)$ de la topologie quotient de celle de $V \backslash \{0\}$: c'est un espace topologique compact. Une norme sur V est une application $\|.\| : V \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes usuels :

(i) $\forall v \in V \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|.$

(iii) $\forall v, w \in V \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on dit qu'une norme sur V est une bonne norme si et seulement si elle est induite par un produit scalaire euclidien (resp. un produit scalaire hermitien). Si V est muni d'une bonne norme, on dit qu'une somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ est une bonne somme directe si et seulement si elle est orthogonale pour le produit scalaire.

Si $\mathbb{K}$ est non archimédien, on dit qu'une norme sur V est une bonne norme si et seulement si elle est ultramétrique, c'est-à-dire si et seulement si, pour tous v, w dans V, on a $\|v+w\| \leq \max(\|v\|, \|w\|)$. Si V est muni d'une bonne norme, on dit qu'une somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ est une bonne somme directe si et seulement si, pour tout $v = v_1 + v_2$ dans V, avec v_1 dans V_1 et v_2 dans V_2, on a :

$$\|v\| = \max(\|v_1\|, \|v_2\|).$$

Supposons dorénavant V muni d'une bonne norme. Donnons une caractérisation des bonnes sommes directes ; c'est une généralisation d'un exercice classique de géométrie euclidienne :

Lemme 2.1. *Soit $V = V_1 \oplus V_2$ une somme directe dans V. Elle est bonne si et seulement si ses projecteurs sont de norme* 1.

Démonstration. Soit p le projecteur sur V_1 parallèlement à V_2. Si la somme directe est bonne, on a $\|p\| = 1$. Réciproquement, supposons que p est de norme 1.

Supposons que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit v dans $V_2^\perp$. Soit $w = v - p(v)$. Alors v et w sont orthogonaux et $p(v) = v - w$. Par conséquent, on a :

$$\|v\| \geq \|p(v)\| = \sqrt{\|v\|^2 + \|w\|^2} \geq \|v\|$$

et, donc, $\|p(v)\| = \|v\|$, ou encore $w = 0$. Il vient $V_2^\perp \subset V_1$ et, comme ces deux espaces ont même dimension, $V_2^\perp = V_1$, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons que $\mathbb{K}$ est non-archimédien. Remarquons que l'on a $\|1-p\| \leq \max(1, \|p\|) \leq 1$. Pour tout v dans V, il vient :

$$\|v\| = \|p(v) + (1-p)(v)\| \leq \max(\|p(v)\|, \|(1-p)(v)\| \leq \|v\|$$

et, donc, $\|v\| = \max(\|p(v)\|, \|(1-p)(v)\|)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Corollaire 2.2. *Soit p un projecteur dans une bonne somme directe. Pour tout élément g de $\mathcal{L}(V)$, on a :*

$$\|gp\| = \left\|g_{|\,\mathrm{im}\,p}\right\|.$$

Il existe une unique bonne norme sur $\wedge^2 V$ telle que, pour toute bonne somme directe $V_1 \oplus V_2 \subset V$ la somme directe $(\wedge^2 V_1) \oplus (V_1 \wedge V_2) \oplus (\wedge^2 V_2) \subset \wedge^2 V$ soit bonne et que, pour v, w dans V, si $\mathbb{K}v$ et $\mathbb{K}w$ sont en bonne somme directe, on ait $\|v \wedge w\| = \|v\| \, \|w\|$. Alors, l'application

$$\begin{aligned} (V \backslash \{0\})^2 &\to \mathbb{R}_+ \\ (v, w) &\mapsto \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\| \, \|w\|} \end{aligned}$$

factorise à travers une distance sur $\mathbb{P}(V)$, qui y induit sa topologie usuelle. C'est un résultat classique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le cas général est traité dans [17]. On munira toujours l'espace projectif d'un espace vectoriel bien normé de cette distance. Si le dual V^* de V est muni de la bonne norme duale de celle de V, pour tous $v \neq 0$ dans $\mathbb{P}(V)$ et $\varphi \neq 0$ dans $\mathbb{P}(V^*)$, on a :

$$d(\mathbb{K}v, \varphi^\perp) = \frac{|\varphi(v)|}{\|\varphi\| \, \|v\|} = d(\mathbb{K}\varphi, v^\perp).$$

Nous utiliserons :

Lemme 2.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Soient $V = V_1 \oplus V_2$ une bonne somme directe et p le projecteur sur V_1 parallèlement à V_2. Pour tout v dans $V \backslash \{0\}$ avec $d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}(V_2)) \geq \varepsilon$, on a $\|p(v)\| \geq \varepsilon \|v\|$.*

Démonstration. On peut, bien sûr, supposer $v \notin V_1$. Alors, soient v_1 et v_2 les composantes de v sur V_1 et V_2. On a $d(\mathbb{K}v, \mathbb{K}v_2) \geq \varepsilon$. Or

$$d(\mathbb{K}v, \mathbb{K}v_2) = \frac{\|v \wedge v_2\|}{\|v\| \, \|v_2\|} = \frac{\|v_1 \wedge v_2\|}{\|v\| \, \|v_2\|} = \frac{\|v_1\|}{\|v\|},$$

d'où le résultat. □

2.2 Semi-similitudes

Nous étudions ici une classe particulière d'endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel bien normé.

On dit qu'un endomorphisme f de V est une similitude si et seulement si il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que, pour tout v dans V, on ait :

$$\|f(v)\| = \lambda \|v\|.$$

On dit alors que λ est le rapport de f. On dit que f est une semi-similitude si et seulement si il existe une bonne somme directe $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ telle que, pour tout i dans $[\![1, k]\!]$, f stabilise V_i et y induise une similitude de rapport λ_i. Dans ce cas, on peut supposer que l'on a :

$$\lambda_1 > \ldots > \lambda_k.$$

On a alors, pour tout v dans V, $\lambda_l \|v\| \leq \|fv\| \leq \lambda_1 \|v\|$. En particulier, λ_1 est à la fois la norme et le rayon spectral de f.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une semi-similitude est simplement un endomorphisme normal de V.

Soit f une semi-similitude. D'après [19], il existe un plus grand sous-espace vectoriel f-stable où f induise une similitude de rapport $\|f\|$: on le note V_f^M. Il possède un unique supplémentaire f-stable, qu'on note V_f^m. La somme directe $V = V_f^M \oplus V_f^m$ est bonne. Si V_f^M est une droite, on dit que f est proximale.

Remarquons que beaucoup de vecteurs permettent d'estimer la norme d'une semi-similitude :

Lemme 2.4. *Soient f une semi-similitude de V et $\varepsilon > 0$. Pour tout vecteur non nul v de V, si $d\left(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_f^m\right)\right) \geq \varepsilon$, alors on a $\|fv\| \geq \varepsilon \|f\| \|v\|$.*

Démonstration. Écrivons $v = v_1 + v_2$ avec v_1 dans V_f^M et v_2 dans V_f^m. D'après le lemme 2.3, on a $\|v_1\| \geq \varepsilon \|v\|$ et, donc,

$$\|fv\| \geq \|fv_1\| = \|f\| \|v_1\| \geq \varepsilon \|f\| \|v\|.$$

□

Nous nous intéressons à présent à l'action d'une semi-similitude f sur $\mathbb{P}(V)$ quand la norme de f est grande devant les autres rapports de f. Les résultats que nous démontrons seront utilisés pour la construction de mesures de Patterson à la section 8, après leur réinterprétation dans les groupes réductifs aux sections 5 et 6.

Lemme 2.5. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $C \geq 1$ tel que, pour toute semi-similitude f dans $\mathcal{L}(V)$, si $\left\| f_{|V_f^m} \right\| \leq C^{-1} \|f\|$, alors on a :*

$$fB\left(\mathbb{P}\left(V_f^m\right), \varepsilon\right) \subset b\left(V_f^M, \varepsilon\right)$$

et, si f est proximale, la restriction de f à $B\left(\mathbb{P}\left(V_f^m\right), \varepsilon\right)$ est ε-lipschitzienne.

Démonstration. Soient f une semi-similitude et v dans $V \backslash V_f^m$. Écrivons $v = v_1 + v_2$ avec v_1 dans V_f^M et v_2 dans V_f^m. Alors, on a :

$$d(\mathbb{K}f(v), \mathbb{K}f(v_1)) = \frac{\|f(v_2)\|}{\|f(v)\|} \leq \frac{\left\| f_{|V_f^m} \right\| \|v_2\|}{\|f\| \|v_1\|} \leq \frac{\left\| f_{|V_f^m} \right\|}{\|f\|} d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_f^m\right))^{-1},$$

d'où la première partie du lemme. De même, on montre que, si $\dim V_f^M = 1$, pour tous v, w dans $V \backslash V_f^m$, on a :

$$d(\mathbb{K}f(v), \mathbb{K}f(w)) \leq \frac{\left\| f_{|V_f^m} \right\|}{\|f\|} d(\mathbb{K}v, \mathbb{P}\left(V_f^m\right))^{-1} d(\mathbb{K}w, \mathbb{P}\left(V_f^m\right))^{-1} d(\mathbb{K}v, \mathbb{K}w),$$

ce qui prouve la seconde partie du lemme.□

On peut aussi donner une version plus générale du corollaire 2.2 :

Lemme 2.6. *Pour tout endomorphisme g de V, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $C \geq 1$ tel que, pour toute semi-similitude $f \neq 0$, proximale dans $\mathbb{P}(V)$, si tous les rapports de f dans V_f^m sont de module $\leq C^{-1} \|f\|$, alors, pour tout v dans $V_f^M \backslash \{0\}$, on a :*

$$\frac{\|g(v)\|}{\|v\|} \leq \frac{\|gf\|}{\|f\|} \leq (1+\varepsilon) \frac{\|g(v)\|}{\|v\|}.$$

Démonstration. Pour toute semi-similitude f, notons $\tilde{f}$ l'unique endomorphisme de V tel que, pour tout v dans V_f^M, $\tilde{f}(v) = f(v)$ et que, pour tout v dans V_f^m, $\tilde{f}(v) = 0$; on a :

$$\left\| \tilde{f} \right\| = \|f\| \text{ et } \left\| f - \tilde{f} \right\| = \left\| f_{|V_f^m} \right\|$$

et, d'après le corollaire 2.2, pour tout endomorphisme g de V,

$$\left\| g\tilde{f} \right\| = \|f\| \left\| g_{|V_f^M} \right\|,$$

d'où le résultat.□

3 Groupes réductifs

Nous introduisons ici le vocabulaire général sur les groupes réductifs que nous emploierons. Le lecteur trouvera plus de précisions, pour la théorie générale des groupes réductifs, dans [6] et [14], pour la théorie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dans [12] et [13] et, pour la théorie sur des corps non-archimédiens, dans [8], [9] et [22].

On fixe un $\mathbb{K}$-groupe réductif connexe $\mathbf{G}$. On note G le groupe de ses $\mathbb{K}$-points.

3.1 Système de racines et chambre de Weyl

Pour tout $\mathbb{K}$-groupe $\mathbf{H}$, on note $\mathrm{X}(\mathbf{H})$ le groupe de ses caractères rationnels.

On note r le $\mathbb{K}$-rang de $\mathbf{G}$. On fixe un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$ et on note A le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. On note $\mathbf{Z}$ le centralisateur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$ et Z le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Le groupe $\mathrm{X}(\mathbf{A})$ est un groupe abélien libre de rang r. L'homomorphisme de restriction identifie $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$ à un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{X}(\mathbf{A})$. On note E^* le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}(\mathbf{A})$ et E son dual. Pour tout χ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, on note χ^ω la forme linéaire associée sur E.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Soit Σ l'ensemble des racines de $\mathbf{A}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors Σ^ω est un système de racines dans E^*. On choisit dans Σ un système de racines positives Σ^+ et on note Π la base de Σ associée à ce choix. On note $(\varpi_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ les poids fondamentaux de Π.

On note E^+ et E^{++} les chambres de Weyl positive et strictement positive de Σ^+ dans E^+. On munit E de l'ordre associé à E^+ : si x et y sont deux vecteurs de E, on a $x \geq y$ si et seulement si $x - y$ appartient à E^+. Plus généralement, pour tous x, y dans E, pour tout $C \geq 0$, on note $x \geq_C y$ si et seulement si

$$\forall\alpha \in \Pi \quad \alpha^\omega(x - y) \geq -C.$$

On note W le groupe de Weyl de Σ : il s'identifie au quotient du normalisateur de A dans G par Z. Pour tout α dans Σ, on note $\sigma_\alpha \in W$ la réflexion associée. On note w_0 le plus long élément de W : c'est l'unique élément de W qui envoie E^+ sur $-E^+$. On appelle $\iota = -w_0$ l'involution d'opposition de E^+. On note E_S l'unique supplémentaire W-stable de l'espace E^W des points fixes de W dans E.

Pour tout z dans Z, on note $\nu(z)$ l'unique vecteur de E tel que, pour tout χ dans $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$, on ait :

$$\chi^\omega(\nu(z)) = -\omega(\chi(z)).$$

L'application ν est un homomorphisme de groupes de Z dans E. Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application ν est surjective. Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, l'image de ν est un réseau stable par l'action de W dans E. On note $Z^+ = \nu^{-1}(E^+)$.

Pour tout α dans Σ, il existe un unique $\mathbb{K}$-sous-groupe unipotent de $\mathbf{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ normalisé par $\mathbf{A}$. On le note $\mathbf{U}_\alpha$ et on note U_α le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Il existe un isomorphisme de $\mathbb{K}$-groupes de $\mathbf{U}_\alpha/\mathbf{U}_{2\alpha}$ sur $\mathfrak{g}_\alpha$. On note m_α la dimension de $\mathfrak{g}_\alpha$. On pose $\rho = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha^{m_\alpha}$.

Dorénavant, on considèrera tout caractère rationnel de $\mathbf{Z}$ comme une forme linéaire sur E. On fixe une partie X_C de $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$ qui engendre $(E^*)^W$

On fixe un produit scalaire W-invariant $(.,.)$ sur E. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

3.2 Facettes

On note $\mathbf{P}_\Pi$ le $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique minimal de $\mathbf{G}$ associé au choix de $\mathbf{A}$ et de Σ^+.

Soit $\theta \subset \Pi$. On note θ^c le complémentaire de θ dans Π.

On note

$$E_\theta = \bigcap_{\alpha\in\theta^c} \ker\alpha,\ E_\theta^+ = E_\theta \cap E^+ \text{ et } E_\theta^{++} = E_\theta^+ \setminus \left(\bigcup_{\tau\subsetneq\theta} E_\tau^+\right).$$

Les $(E_\theta^+)_{\theta\subset\Pi}$ sont les facettes du cône polyhédral E^+.

On note W_θ le fixateur de E_θ dans W : c'est le sous-groupe de W engendré par les réflexions associées aux éléments de θ^c. On note p_θ l'unique projecteur W_θ-invariant de E dans E_θ. On note $\langle\theta\rangle$ l'ensemble des éléments de Σ^+ qui sont sommes d'éléments de θ et $\rho_\theta = \sum_{\alpha\in\langle\theta\rangle} m_\alpha\alpha$. Nous aurons à utiliser les formules :

Lemme 3.1. *On a :*

$$\rho = \rho\circ p_\theta + \rho_{\theta^c}.$$

Pour tout x dans E, pour tout y dans E_θ, on a :

$$(p_\theta(x) = y) \Leftrightarrow (\forall\chi \in X_C \cup \{\varpi_\alpha | \alpha\in\theta\} \quad \chi(x) = \chi(y)).$$

Démonstration. Nous utilisons ici librement les résultats de [7, 1.10].

Pour tout w dans W, pour tout α dans Σ, on a $m_{w\alpha} = m_\alpha$. Or, si α est dans Π, on a $\sigma_\alpha(\Sigma^+ \backslash \{\alpha, 2\alpha\}) = \Sigma^+ \backslash \{\alpha, 2\alpha\}$ et, donc,

$$\sigma_\alpha \rho = \rho - 2(m_\alpha + 2m_{2\alpha})\alpha.$$

Il vient, pour tout α dans Π,

$$\left(\rho, \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}\right) = 2(m_\alpha + 2m_{2\alpha})$$

ou encore :

$$\rho = 2 \sum_{\alpha \in \Pi} (m_\alpha + 2m_{2\alpha}) \varpi_\alpha.$$

Soient alors $q_\theta = \mathrm{Id}_E - p_\theta$ et p_θ^* et q_θ^* les adjoints de p_θ et de q_θ. Les projecteurs p_θ^* et q_θ^* sont orthogonaux et l'on a :

$$\bigoplus_{\alpha \in \theta^c} \mathbb{R}\alpha = \ker p_\theta^* = \operatorname{im} q_\theta^*.$$

D'une part, on a :

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in \theta^c} \mathbb{R}\alpha \right)^\perp = \bigoplus_{\alpha \in \theta} \mathbb{R}\varpi_\alpha \oplus (E^*)^W,$$

d'où la seconde formule. D'autre part, les $(q_\theta^* \varpi_\alpha)_{\alpha \in \theta^c}$ sont exactement les poids fondamentaux de la base θ^c du système de racines $\langle \theta^c \rangle \cup -\langle \theta^c \rangle$ et l'on a :

$$q_\theta^* \rho = 2 \sum_{\alpha \in \theta^c} (m_\alpha + 2m_{2\alpha}) q_\theta^* \varpi_\alpha = \rho_{\theta^c},$$

c'est-à-dire la première formule. □

On note $\mathbf{A}_\theta$ la composante Zariski connexe de $\bigcap_{\alpha \in \Pi \backslash \theta} \ker \alpha$ dans $\mathbf{A}$. Soit $\mathbf{L}_\theta$ le centralisateur de $\mathbf{A}_\theta$ dans $\mathbf{G}$: c'est un $\mathbb{K}$-groupe réductif connexe. On note L_θ le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. On note $\mathbf{P}_\theta$ le $\mathbb{K}$-groupe $\mathbf{L}_\theta \mathbf{P}_\Pi$ et P_θ le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. De même, on note $\mathbf{P}_\theta^\vee$ le $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ opposé à $\mathbf{P}_\theta$ par rapport à $\mathbf{A}$ et $P_\theta^\vee$ le groupe de ses $\mathbb{K}$-points.

On note $\mathbf{U}_\theta$ et $\mathbf{U}_\theta^\vee$ les radicaux unipotents de $\mathbf{P}_\theta$ et de $\mathbf{P}_\theta^\vee$ et U_θ et $U_\theta^\vee$ les groupes des $\mathbb{K}$-points de $\mathbf{U}_\theta$ et de $\mathbf{U}_\theta^\vee$. On a la décomposition de Levi $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{L}_\theta \mathbf{U}_\theta$.

3.3 Représentations de G

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$.

On appelle poids restreints de ρ les poids rationnels de la représentation $\rho_{|\mathbf{A}}$. D'après [21, 7.2], l'ensemble des poids restreints possède un plus grand élément χ pour l'ordre associé à Π sur X. On dit que χ est le plus haut poids restreint de ρ. Les autres poids restreints sont de la forme $\chi - \sum_{\alpha\in\Pi} n_\alpha \alpha$ avec, pour tout α dans Π, $n_\alpha \in \mathbb{N}$. On note V_Π^+ l'espace poids associé à χ et $V_\Pi^<$ l'unique supplémentaire A-stable de V_Π^+.

Soit θ_ρ l'ensemble des α dans Π tels que $\chi - \alpha$ soit un poids restreint de ρ : c'est le plus petit $\theta \subset \Pi$ tel que $P_\theta V_\Pi^+ \subset V_\Pi^+$. Pour tout z dans Z^+, si, pour tout α dans θ_ρ, $\alpha(\nu(z)) > 0$, alors $V_{\rho(z)}^+ = V_\Pi^+$ et $V_{\rho(z)}^< = V_\Pi^<$.

D'après [21], on a :

Proposition 3.2 (Tits)**.** *Il existe une famille de représentations rationnelles irréductibles $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ de $\mathbf{G}$ telles que, pour tout α dans Π, le plus haut poids restreint χ_α de (ρ_α, V_α) soit un multiple du poids fondamental associé à α et que* $\dim V_{\alpha,\Pi}^+ = 1$.

Dorénavant, on fixe une telle famille de représentations. D'après le lemme 3.1, on a :

Lemme 3.3. *Pour tout $\theta \subset \Pi$, pour tous x dans E et y dans E_θ, on a :*

$$(p_\theta(x) = y) \Leftrightarrow (\forall \chi \in X_C \cup \{\chi_\alpha | \alpha \in \theta\} \quad \chi(x) = \chi(y)).$$

Pour tout α dans Π, on note X_α la droite V_{α,χ_α} et $V_\alpha^<$ son unique supplémentaire A-stable. Tous les poids de $\mathbf{A}$ dans $V_\alpha^<$ sont de la forme

$$\chi_\alpha - \alpha - \sum_{\beta\in\Pi} n_\beta \beta$$

avec, pour tout β dans Π, $n_\beta \in \mathbb{N}$.

4 Composante de Cartan

Nous rappelons ici la décomposition de Cartan de G, puis nous l'interprétons en termes de représentations linéaires.

4.1 Décomposition de Cartan

Soit K un bon sous-groupe compact maximal de G relativement à A, c'est à dire tel que le normalisateur de A dans K contienne des représentants de tous les éléments de W.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, K est l'ensemble des points fixes d'une involution de Cartan τ de G telle que, pour tout a dans A, $\tau(a) = a^{-1}$.

On a $G = KZ^+K$. De plus, pour tous z_1, z_2 dans Z^+, z_2 appartient à Kz_1K si et seulement si $\nu(z_1) = \nu(z_2)$. En particulier, on a $\ker \nu = K \cap Z$. Il existe donc une unique application $\mu : G \to E^+$ telle que, pour tous g_1, g_2 dans G, g_2 appartienne à Kg_1K si et seulement si $\mu(g_1) = \mu(g_2)$ et que $\mu_{|Z^+} = \nu_{|Z^+}$. L'application μ est propre. Elle est $\mathbb{R}$-analytique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et localement constante si $\mathbb{K}$ est non-archimédien. Pour tout g dans G, on a $\mu(g^{-1}) = \iota(\mu(g))$.

4.2 Représentations et composante de Cartan

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$, de plus haut poids restreint χ.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on peut choisir un produit scalaire (resp. un produit scalaire hermitien) sur V pour lequel les éléments de $\rho(K)$ sont orthogonaux (resp. unitaires) et ceux de $\rho(A)$ symétriques (resp. hermitiens). On munit V de la norme associée. Les $(V_\kappa)_{\kappa \in \mathrm{X}(\mathbf{A})}$ sont en bonne somme directe et, pour tout z dans Z, pour tout κ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, $\rho(z)$ induit sur V_κ une similitude de rapport $e^{\kappa(\nu(z))}$.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on peut trouver, d'après [18, 6], une norme ultramétrique K-invariante sur V telle que les $(V_\kappa)_{\kappa \in \mathrm{X}(\mathbf{A})}$ sont en bonne somme directe et que, pour tout z dans Z, pour tout κ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, $\rho(z)$ induise sur V_κ une similitude de rapport $q^{\kappa(\nu(z))}$.

Dans les deux cas, on dira qu'une norme sur V ayant ces propriétés est (ρ, A, K)-bonne. Pour une norme (ρ, A, K)-bonne, les éléments de $\rho(K)$ sont des isométries et ceux de $\rho(z)$ des semi-similitudes. Pour tout g dans G, la décomposition de Cartan permet donc d'écrire $\rho(g)$ comme le produit d'une isométrie et d'une semi-similitude. En particulier, on a :

$$\|\rho(g)\| = q^{\chi(\mu(g))}.$$

Dorénavant, on munit, pour tout α dans Π, V_α d'une norme (ρ_α, A, K)-bonne et $\mathbb{P}(V_\alpha)$ de la distance associée. Rappelons un résultat de Y. Benoist :

Lemme 4.1 (Benoist, [3, 5.1])**.** *Pour toute partie compacte L de G, il existe une partie compacte M de E telle que, pour tout g dans G, on ait :*

$$\mu(LgL) \subset \mu(g) + M.$$

Démonstration. Soit L une partie compacte de G. Soient g dans G et l_1 et l_2 dans L. D'une part, pour tout α dans Π, on a :

$$\left\|\rho_\alpha(l_1)^{-1}\right\|^{-1} \|\rho_\alpha(g)\| \left\|\rho_\alpha(l_2)^{-1}\right\|^{-1} \leq \|\rho_\alpha(l_1 g l_2)\| \leq \|\rho_\alpha(l_1)\| \|\rho_\alpha(g)\| \|\rho_\alpha(l_2)\|$$

d'où, par conséquent,

$$\chi_\alpha(\mu(g)) - 2\max_{l\in L} \chi_\alpha(\mu(l^{-1})) \leq \chi_\alpha(\mu(l_1 g l_2)) \leq \chi_\alpha(\mu(g)) + 2\max_{l\in L} \chi_\alpha(\mu(l))$$

et, d'autre part, pour tout χ dans X_C, on a :

$$\chi(\mu(l_1 g l_2)) = \chi(\mu(l_1)) + \chi(\mu(g)) + \chi(\mu(l_2))$$

d'où

$$|\chi(\mu(l_1 g l_2)) - \chi(\mu(g))| \leq 2\max_{l\in L} |\chi(\mu(l))| .$$

Le résultat en découle, d'après le lemme 3.3. □

4.3 Action dans les représentations

Dorénavant, on fixe, pour tout élément g de G, un élément z_g de Z^+ et des éléments k_g et l_g de K tels que $g = k_g z_g l_g$.

Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$ munie d'une norme (ρ, A, K)-bonne. On munit $\mathbb{P}(V)$ de la distance associée. Rappelons que, pour tout z dans Z^+, si, pour tout α dans θ_ρ, $\alpha(\nu(z)) > 0$, $\rho(z)$ est une semi-similitude avec $V^M_{\rho(z)} = V^+_\Pi$ et $V^m_{\rho(z)} = V^<_\Pi$.

Par exemple, si g est un élément de G, pour tout v dans V tel que $\rho(g)v$ appartienne à $k_g V^+_\Pi$, on a :

$$\|\rho(g)v\| = \|\rho(g)\| \|v\| .$$

Pour tous $\varepsilon > 0$ et g dans G, on note :

$$V^M_{\rho,g} = k_g V^+_\Pi \text{ et } V^m_{\rho,g} = l_g^{-1} V^<_\Pi$$

ainsi que :

$$B^{\varepsilon}_{\rho,g} = B\left(\mathbb{P}\left(V^{m}_{\rho,g}\right), \varepsilon\right).$$

Pour α dans Π, on notera $V^{M}_{\alpha,g}$, $V^{m}_{\alpha,g}$ et $B^{\varepsilon}_{\alpha,g}$ pour $V^{M}_{\rho_\alpha,g}$, $V^{m}_{\rho_\alpha,g}$ et $B^{\varepsilon}_{\rho_\alpha,g}$

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si, pour tout α dans θ_ρ, $\alpha(\mu(g)) > 0$, $V^{M}_{\rho,g}$ et $V^{m}_{\rho,g}$ ne dépendent pas des k_g et l_g choisis.

En appliquant le lemme 2.4 aux représentations de $\mathbf{G}$, on obtient :

Lemme 4.2. *Soit (ρ, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$ munie d'une norme (ρ, A, K)-bonne. Pour tous $0 < \varepsilon \leq 1$, pour tout g dans G,*

$$\forall v \in V \backslash \{0\} \quad \left(\mathbb{K}v \in B^{\varepsilon}_{\rho,g}\right) \Rightarrow \left(\|gv\| \geq \varepsilon \|\rho(g)\| \, \|v\|\right).$$

Démonstration. Comme K agit par isométries sur V, il suffit de démontrer ce résultat quand g est dans Z^+. Alors, $\rho(g)$ est une semi-similitude et $V^{m}_{\rho(g)}$ est contenu dans $V^{<}_{\Pi}$. Le résultat est alors une conséquence du lemme 2.4.□

Du lemme 2.5, on déduit tout de suite :

Lemme 4.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \geq 0$ tel que, pour tout g dans G, si, pour tout α dans θ_ρ, $\alpha(\mu(g)) \geq C$, alors*

$$gB^{\varepsilon}_{\rho,g} \subset b\left(V^{M}_{\rho,g}, \varepsilon\right)$$

et, si $\dim V^{+}_{\Pi} = 1$*, la restriction de g à $B^{\varepsilon}_{\rho,g}$ est ε-lipschitzienne.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait que les éléments de $\rho(Z)$ sont des semi-similitudes et ceux de $\rho(K)$ des isométries de V et du lemme 2.5.□

5 Variétés drapeaux

Nous définissons ici les variété drapeaux : c'est sur ces espaces que nous allons construire des mesures de Patterson. Nous démontrons aussi notre généralisation du lemme des ombres.

5.1 Sous-groupes paraboliques

Soit $\theta \subset \Pi$. On note $\mathcal{P}_\theta$ l'ensemble des $\mathbb{K}$-sous-groupes paraboliques conjugués à $\mathbf{P}_\theta$ de $\mathbf{G}$. L'application

$$\begin{aligned} G &\to \mathcal{P}_\theta \\ g &\mapsto g\mathbf{P}_\theta g^{-1} \end{aligned}$$

identifie $\mathcal{P}_\theta$ et G/P_θ : on peut ainsi voir $\mathcal{P}_\theta$ comme une variété $\mathbb{K}$-analytique. Comme l'action de K sur $\mathcal{P}_\theta$ est transitive, cette variété analytique est compacte. On note ν_θ l'unique probabilité borélienne K-invariante de $\mathcal{P}_\theta$.

On note ξ_θ le sous-groupe $\mathbf{P}_\theta$ vu comme un point de $\mathcal{P}_\theta$ et $\mathcal{Q}_\theta^-$ la sous-variété fermée $\mathcal{P}_\theta \backslash P_\theta^\vee \xi_\theta = \mathcal{P}_\theta \backslash P_\Pi^\vee \xi_\theta$ de $\mathcal{P}_\theta$.

Pour tout α dans θ, GX_α est une sous-variété $\mathbb{K}$-analytique fermée de $\mathbb{P}(V_\alpha)$. En particulier, le G-entrelacement

$$\mathcal{P}_\theta \to \prod_{\alpha\in\theta} \mathbb{P}(V_\alpha)$$

qui, à un sous-groupe parabolique de type θ, associe la famille de ses uniques points fixes dans les V_α, $\alpha \in \theta$, est une immersion fermée. Il identifie ξ_θ avec $(X_\alpha)_{\alpha\in\theta}$ et $\mathcal{Q}_\theta^-$ avec le complémentaire de l'intersection de son image et de $\prod_{\alpha\in\theta} (\mathbb{P}(V_\alpha) \backslash \mathbb{P}(V_\alpha^<))$. Pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, on note $(\xi_\alpha)_{\alpha\in\theta}$ son image par cette application. On munit $\mathcal{P}_\theta$ de la distance induite par la distance produit de $\prod_{\alpha\in\theta} \mathbb{P}(V_\alpha)$. Alors, K agit par isométries et G par transformations lipschitziennes sur $\mathcal{P}_\theta$.

Soit g dans G. Alors g est θ-proximal si et seulement si il possède un point fixe attracteur dans $\mathcal{P}_\theta$. On note alors $\xi_{\theta,g}^+$ ce point fixe : il s'identifie à $\left(V_{\alpha,\rho(g)}^+\right)_{\alpha\in\theta}$.

Soit $L \subset P_\Pi$ une partie bornée. L'ensemble $\bigcup_{z\in Z^+} z^{-1}Lz$ est encore borné. De même, si $L \subset P_\Pi^\vee$ est une partie bornée, l'ensemble $\bigcup_{z\in Z^+} zLz^{-1}$ est encore borné. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$B_\theta^\varepsilon = \{\xi \in \mathcal{P}_\theta | \forall\alpha \in \theta \quad \xi_\alpha \in B(\mathbb{P}(V_\alpha^<), \varepsilon)\}.$$

Il existe une partie compacte L de $P_\Pi^\vee$ telle que $B_\theta^\varepsilon \subset L\xi_\theta$.

Pour tous g dans G et $\varepsilon > 0$, on note

$$\xi_{\theta,g}^M = k_g \xi_\theta \text{ et } B_{\theta,g}^\varepsilon = l_g^{-1} B_\theta^\varepsilon.$$

On a une généralisation du lemme 4.3 :

Lemme 5.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout g dans G, si, pour tout α dans θ, $\alpha(\mu(g)) \geq C$, alors*

$$gB^{\varepsilon}_{\theta,g} \subset b(\xi^{M}_{\theta,g}, \varepsilon)$$

et la restriction de g à $B^{\varepsilon}_{\theta,g}$ est ε-lipschitzienne.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 4.3, appliqué simultanément aux représentations $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha\in\theta}$ ou bien, plus simplement, du fait qu'il existe une partie compacte L de $P^{\vee}_{\Pi}$ avec $B^{\varepsilon}_{\theta} \subset L\xi_\theta$.$\square$

Pour tout ensemble X et pour tout x dans X, on note δ_x la mesure de Dirac en x. Si X un espace topologique compact, on identifie l'ensemble des mesures de Radon de X, $\mathcal{M}(X)$, et le dual topologique de l'espace vectoriel des fonctions continues sur X. En particulier, on munit cet ensemble de sa topologie duale faible : c'est la topologie la moins fine sur $\mathcal{M}(X)$ rendant continues les évaluations en les fonctions continues. L'ensemble des mesures de probabilité sur X est alors une partie compacte de $\mathcal{M}(X)$. Du lemme, précédent, on déduit ce corollaire qui nous sera utile pour la construction de mesures de Patterson au paragraphe 8.2 :

Corollaire 5.2. *Soit ν une probabilité borélienne sur $\mathcal{P}_\theta$ telle que, pour tout g dans G, $\nu(g\mathcal{Q}^{-}_{\theta}) = 0$. Alors,*

$$g_*\nu - \delta_{\xi^{M}_{\theta,g}} \xrightarrow[\min_{\alpha\in\theta}\alpha(\mu(g))\to\infty]{} 0.$$

5.2 Un lemme des ombres

Soit toujours $\theta \subset \Pi$. Pour tout $C \geq 0$, on note

$$E^{C}_{\theta} = \{x \in E^{+} | \forall\alpha \in \theta^{c} \quad \alpha(x) \leq C\}$$

et $Z^{C}_{\theta} = \nu^{-1}(E^{C}_{\theta})$.

Dans [1, 3.5], P. Albuquerque démontrait une généralisation du lemme des ombres de Sullivan. Le lemme suivant est la contraposée de ce résultat : à partir d'une information sur les actions d'un élément k de K et d'un élément z de Z sur une variété drapeau, il permet de contrôler la distance entre z et kz.

Lemme 5.3. *Pour tout $C \geq 0$ et pour toute partie compacte L de $P_\Pi^\vee$, il existe une partie compacte M de G telle que, pour tout z dans Z_θ^C, pour tout k dans K,*

$$(k\xi_\theta \in zL\xi_\theta) \Rightarrow \left(z^{-1}kz \in M\right).$$

Démonstration. Donnons-nous C et L comme dans l'énoncé. On peut supposer que, pour tout z dans Z^+, $zLz^{-1} \subset L$.

Pour tout z dans Z^+ et pour tout p dans L, choisissons $k(z,p)$ dans K et $q(z,p)$ dans P_Π tels que $zp = k(z,p)q(z,p)$, *i.e.* $k(z,p)q(z,p)$ est une décomposition d'Iwasawa de zp.

Pour z dans Z^+ et p dans L, on a : $q(z,p)z^{-1} = k(z,p)^{-1}zpz^{-1} \in KL$ et, donc, la partie de P_Π

$$L' = \{q(z,p)z^{-1} | z \in Z^+, p \in L\}$$

est bornée. Par conséquent,

$$L'' = \{z^{-1}q(z,p) | z \in Z^+, p \in L\} \subset \bigcup_{z \in Z^+} z^{-1}L'z$$

est bornée. Or, pour tout z dans Z^+, pour tout p dans L,

$$z^{-1}k(z,p)z = z^{-1}(zpq(z,p)^{-1})z = p(z^{-1}q(z,p))^{-1} \in L(L'')^{-1}.$$

Par ailleurs, l'ensemble

$$L''' = \bigcup_{z \in Z_\theta^C} z^{-1}K_\theta z$$

est borné.

Soient alors k dans K et z dans Z_θ^C tels que $k\xi_\theta \in zL\xi_\theta$. Écrivons $k\xi_\theta = zp\xi_\theta$ avec p dans L. On a :

$$k\xi_\theta = k(z,p)\xi_\theta$$

i.e. $k \in k(z,p)K_\theta$ et, donc,

$$z^{-1}kz \in (z^{-1}k(z,p)z)(z^{-1}K_\theta z) \subset L(L'')^{-1}L'''.$$

□

Nous en déduisons une nouvelle version généralisée du lemme des ombres, qui nous permettra de contrôler la fibre de certains recouvrement des variétés drapeaux au paragraphe 8.1 :

Proposition 5.4. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte M de G telle que, pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, si $\xi = k\xi_\theta$ avec k dans K, pour tout g dans G, on ait :*

$$\left(\xi \in gB^\varepsilon_{\theta,g}\right) \Rightarrow \left(g \in \left(kL_\theta k^{-1}\right) M\right).$$

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ et si $\mathbf{G}$ est de $\mathbb{R}$-rang 1, l'énoncé signifie que, si l'ombre d'un élément g de G contient un point ξ du bord à l'infini de G/K, gK est à distance bornée du rayon géodésique d'extrémité ξ issu de K.

Nous aurons à utiliser :

Lemme 5.5. *Pour tous g, h dans G, on a :*

$$(g\xi_\theta = h\xi_\theta) \Leftrightarrow (\exists m \in M_\theta \quad gm\xi_\Pi = h\xi_\Pi).$$

Démonstration. Soient g et h dans G tels que $g\xi_\theta = h\xi_\theta$. Écrivons

$$g^{-1}h = kp$$

avec k dans K et p dans P_Π. Alors, k appartient à K_θ et, donc, il existe m dans M_θ et u dans U_θ tels que $k = mu$. Il vient :

$$gm\xi_\Pi = h\xi_\Pi.$$

□

Démonstration de la proposition 5.4. Soit $\varepsilon > 0$. Soit M une partie compacte de $P^\vee_\Pi$ telle que l'on ait :

$$B^\varepsilon_\theta \subset M\xi_\theta.$$

D'après le lemme 5.5, pour tous k dans K et z dans Z^+, on a :

$$(k\xi_\theta \in zB^\varepsilon_\theta) \Rightarrow (\exists m \in M_\theta \quad km\xi_\Pi \in zM\xi_\Pi).$$

D'après le lemme 5.3, il existe une partie compacte M' de G, telle que, pour tous k dans K et z dans Z^+, on ait :

$$(k\xi_\Pi \in zM\xi_\Pi) \Rightarrow \left(z^{-1}kz \in M'\right).$$

Soient alors $\xi = k\xi_\theta$ dans $\mathcal{P}_\theta$, avec k dans K, et g dans G ; supposons que l'on a :

$$\xi \in gB^\varepsilon_{\theta,g}.$$

Il vient :

$$k\xi_\theta \in k_g z_g B^\varepsilon_\theta$$

ou encore :

$$k_g^{-1} k\xi_\theta \in z_g B^\varepsilon_\theta.$$

Par conséquent, il existe un élément m de M_θ tel que

$$k_g^{-1} km\xi_\Pi \in z_g M\xi_\Pi.$$

On a alors :

$$z^{-1} k_g^{-1} kmz_g \in M'$$

d'où

$$g^{-1} kmz_g \in KM'.$$

Il vient :

$$g \in kmz_g \left(M'\right)^{-1} K \subset (kL_\theta k^{-1}) K \left(M'\right)^{-1} K.$$

□

6 Cocycle de Buseman

La décomposition d'Iwasawa permet de définir un cocycle à valeurs vectorielles sur $\mathcal{P}$ qui jouera dans la suite le rôle tenu en rang 1 par la fonction de Buseman. Nous interprétons ce cocycle en termes de représentations linéaires et nous faisons le lien avec la composante de Cartan.

6.1 Décomposition d'Iwasawa

On a la décomposition d'Iwasawa $G = KZU_\Pi$. Plus précisément, pour tous z_1, z_2 dans Z, z_2 appartient à KzU_Π si et seulement si $\nu(z_1) = \nu(z_2)$.

Soient g dans G et ξ dans $\mathcal{P}_\Pi$. Soit k dans K tel que $\xi = k\xi_\Pi$. Si $gk = lzu$ avec l dans K, z dans Z et u dans U_Π, on pose $\sigma_\Pi(g, \xi) = \nu(z)$. Il ne dépend que de g et de ξ. L'application σ_Π ainsi construite est $\mathbb{R}$-analytique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et localement constante si $\mathbb{K}$ est non-archimédien.

Lemme 6.1. *Pour tout $\theta \subset \Pi$, l'application $p_\theta \circ \sigma_\Pi$ factorise à travers une application :*

$$G \times \mathcal{P}_\theta \to E_\theta.$$

On note σ_θ cette application.

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tous z dans Z, u dans U_Π et m dans M_θ on a :

$$p_\theta(\sigma_\Pi(zu, m\xi_\Pi)) = p_\theta(\nu(z)).$$

Soient donc z dans Z, u dans U_Π et m dans M_θ. Il existe u' dans $\prod_{\alpha\in\langle\theta^c\rangle} U_\alpha$ et u'' dans U_θ tels que $u = u'u''$. Comme $\mathbf{U}_\theta$ est distingué dans $\mathbf{P}_\theta$, on a $m^{-1}u''m \in U_\theta$. On a alors :

$$zum = (zu'm)(m^{-1}u''m)$$

et, donc, $p_\theta(\sigma_\Pi(zu, m\xi_\Pi))$ est exactement la composante sur E_θ de la décomposition d'Iwasawa de $zu'm$ dans L_θ. Comme $\mathbf{A}_\theta$ est la composante $\mathbb{K}$-déployée maximale du centre connexe du $\mathbb{K}$-groupe réductif connexe $\mathbf{L}_\theta$, il ne dépend pas de m, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Lemme 6.2. *Pour tout $\theta \subset \Pi$, l'application σ_θ vérifie la relation de cocycle :*

$$\forall g, h \in G \quad \forall \xi \in \mathcal{P}_\theta \quad \sigma_\theta(gh, \xi) = \sigma_\theta(g, h\xi) + \sigma_\theta(h, \xi).$$

On appelle σ_θ le θ-cocycle de Buseman. Le lien avec le cocycle géométrique sera expliqué à la section 8.3.

Démonstration. Il suffit clairement de démontrer cette relation pour $\theta = \Pi$ et $\xi = \xi_\Pi$. Soient alors g, h dans G et z, t dans Z avec

$$\sigma_\Pi(g, h\xi_\Pi) = \nu(z) \text{ et } \sigma_\Pi(h, \xi_\Pi) = \nu(t).$$

On a :

$$h \in KtU_\Pi \text{ et } g \in KhzU_\Pi h^{-1}.$$

Il vient, par conséquent,

$$g \in KtU_\Pi zU_\Pi h^{-1} \subset KtzU_\Pi h^{-1}$$

ou encore

$$gh \in KtzU_\Pi,$$

ce qu'il fallait démontrer.$\square$

Le lemme suivant permet d'établir un lien entre ce cocycle et les mesures sur $\mathcal{P}_\theta$. Il ne sera pas utilisé dans la suite du texte.

Lemme 6.3. *Soit $\theta \subset \Pi$. Pour tout g dans G, la mesure $g_*\nu_\theta$ est absolument continue par rapport à ν_θ et, pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, on a :*

$$\frac{\mathrm{d}g_*\nu_\theta}{\mathrm{d}\nu_\theta}(\xi) = q^{-\rho(\sigma_\theta(g^{-1},\xi))}.$$

Démonstration. Si $\theta = \Pi$, le résultat est la conséquence de la formule d'intégration pour la décomposition d'Iwasawa (*cf.* [13, I.5.1] si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et [22, 3.3.1] et [15, 5.3.10] si $\mathbb{K}$ est non-archimédien).

Soit donc $\theta \subset \Pi$. Soit $\pi_\theta : \mathcal{P}_\Pi \to \mathcal{P}_\theta$, la surjection canonique. On a $\pi_\theta^*\nu_\Pi = \nu_\theta$. Réciproquement, soit ν_{ξ_θ} la probabilité K_θ-invariante sur $P_\theta\xi_\Pi$. Pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, si $\xi = k\xi_\theta$, avec k dans K, notons ν_ξ la probabilité $k_*\nu_{\xi_\theta}$: elle ne dépend pas de k ; c'est la probabilité $kK_\theta k^{-1}$-invariante sur $\pi_\theta^{-1}(\xi)$. Alors, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathcal{P}_\Pi)$, on a :

$$\int_{\mathcal{P}_\Pi} \phi \mathrm{d}\nu_\Pi = \int_{\mathcal{P}_\theta} \left(\int_{\mathcal{P}_\Pi} \phi \mathrm{d}\nu_\xi \right) \mathrm{d}\nu_\theta(\xi).$$

Soient g dans G et ϕ une fonction dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{P}_\theta)$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}_\theta} \phi \mathrm{d}(g_*\nu_\theta) &= \int_{\mathcal{P}_\Pi} \phi \circ \pi_\theta \mathrm{d}(g_*\nu_\Pi) \\
&= \int_{\mathcal{P}_\Pi} \phi(\pi_\theta(\eta)) q^{-\rho(\sigma_\Pi(g^{-1},\eta))} \mathrm{d}\nu_\Pi(\eta) \\
&= \int_{\mathcal{P}_\theta} \phi(\xi) \left(\int_{\mathcal{P}_\Pi} q^{-\rho(\sigma_\Pi(g^{-1},\eta))} \mathrm{d}\nu_\xi(\eta) \right) \mathrm{d}\nu_\theta(\xi).
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que, pour tous g dans G et ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, on a :

$$\int_{\mathcal{P}_\Pi} q^{-\rho(\sigma_\Pi(g^{-1},\eta))} \mathrm{d}\nu_\xi(\eta) = q^{-\rho(\sigma_\theta(g^{-1},\xi))}.$$

On peut bien sûr supposer, dans cette dernière formule, que $\xi = \xi_\theta$. Mais alors, comme on peut multiplier g à droite par un élément de K et à gauche par un élément de U_θ, il suffit de montrer que, pour tout l dans L_θ, on a :

$$\int_{P_\theta\xi_\Pi} q^{-\rho(\sigma_\Pi(l^{-1},\eta))} \mathrm{d}\nu_{\xi_\theta}(\eta) = q^{-\rho(\sigma_\theta(l^{-1},\xi_\theta))}.$$

Soit donc l dans L_θ. Pour tout η dans $P_\theta\xi_\Pi$, on a :

$$p_\theta(\sigma_\Pi(l^{-1},\eta)) = \sigma_\theta(l^{-1},\xi_\theta)$$

et, donc, d'après le lemme 3.1,

$$\rho(\sigma_\Pi(l^{-1},\eta)) = \rho(\sigma_\theta(l^{-1},\xi_\theta)) + \rho_{\theta^c}(\sigma_\Pi(l^{-1},\eta)).$$

Il vient :

$$\int_{P_\theta\xi_\Pi} q^{-\rho(\sigma_\Pi(l^{-1},\eta))}\mathrm{d}\nu_{\xi_\theta}(\eta) = q^{-\rho(\sigma_\theta(l^{-1},\xi_\theta))}\int_{P_\theta\xi_\Pi} q^{-\rho_{\theta^c}(\sigma_\Pi(l^{-1},\eta))}\mathrm{d}\nu_{\xi_\theta}(\eta).$$

Or, comme $P_\theta\xi_\Pi$ est la variété des $\mathbb{K}$-sous-groupes paraboliques minimaux du $\mathbb{K}$-groupe réductif connexe $\mathbf{L}_\theta$ et que ν_{ξ_θ} est sa probabilité M_θ-invariante, on a :

$$\int_{P_\theta\xi_\Pi} q^{-\rho_{\theta^c}(\sigma_\Pi(l^{-1},\eta))}\mathrm{d}\nu_{\xi_\theta}(\eta) = \int_{P_\theta\xi_\Pi}\mathrm{d}(l_*\nu_{\xi_\theta}) = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

6.2 Représentations et cocycle de Buseman

Comme pour la composante de Cartan, on peut estimer le cocycle de Buseman grâce aux représentations de $\mathbf{G}$:

Lemme 6.4. *Soit g dans G.*

(i) Soit (ρ,V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$ de plus haut poids restreint χ munie d'une norme (ρ,A,K)-bonne. Alors, pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\Pi$, si W est le plus petit sous-espace vectoriel non nul de V stable par le sous-groupe parabolique associé à ξ, on a :

$$\forall v\in W\backslash\{0\}\quad \frac{\|gv\|}{\|v\|} = q^{\chi(\sigma_\Pi(g,\xi))}.$$

(ii) Soient $\theta\subset\Pi$ et $\alpha\in\theta$ Alors, pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, si X est l'unique droite de V_α stable par le sous-groupe parabolique associé à ξ, on a :

$$\forall v\in X\backslash\{0\}\quad \frac{\|gv\|}{\|v\|} = q^{\chi_\alpha(\sigma_\theta(g,\xi))}.$$

Démonstration. Démontrons la première assertion, la seconde en est une conséquence.

Soient ξ dans $\mathcal{P}_\Pi$ et k dans K tels que $\xi = k\xi_\Pi$. Soit W le plus petit sous-espace vectoriel non nul de V stable par le sous-groupe parabolique associé à ξ. Alors, on a $W = kV_\Pi^+$. Soient l dans K, z dans Z et u dans U_Π tels que $gk = lzu$: on a $\sigma_\Pi(g, \xi) = \nu(z)$. Soit alors v dans W. On a :

$$\begin{aligned} \|gv\| &= \left\|gk\left(k^{-1}v\right)\right\| \\ &= \left\|lzu\left(k^{-1}v\right)\right\| \\ &= \left\|z\left(k^{-1}v\right)\right\| \\ &= q^{\chi(\nu(z))}\left\|k^{-1}v\right\| \\ &= q^{\chi(\sigma_\Pi(g,\xi))}\|v\|, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.□

On peut alors estimer σ_θ en beaucoup de points de $\mathcal{P}_\theta$. Nous utiliserons ce résultat au paragraphe 8.1 pour estimer la valeur de la mesure des ombres pour les mesures de Patterson.

Lemme 6.5. *Pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, il existe $\kappa \geq 0$ tel que, pour tout θ dans Π, pour tout g dans G, pour tout ξ dans $B^\varepsilon_{\theta,g}$, on ait :*

$$\|\sigma_\theta(g, \xi) - p_\theta(\mu(g))\| \leq \kappa.$$

Démonstration. D'après les lemmes 3.3 et 6.4, c'est l'application aux représentations $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha\in\theta}$ du lemme 4.2.□

Grâce au lemme 2.6, on a une seconde relation entre le cocycle de Buseman et la composante de Cartan. Elle sera utilisée pour la construction des mesures de Patterson, au paragraphe 8.2.

Lemme 6.6. *Pour tout g dans G, on a :*

$$p_\theta(\mu(gh) - \mu(h)) - \sigma_\theta\left(g, \xi^M_{\theta,h}\right) \xrightarrow[\min_{\alpha\in\theta}\alpha(\mu(h))\to\infty]{} 0.$$

Ce résultat sera utilisé, en particulier, pour la construction de mesures de Patterson. C'est un analogue de la définition de la fonction de Buseman en $\mathbb{K}$-rang 1.

Démonstration. Pour tout χ dans X_C, pour tous g, h dans G et pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\Pi$, on a :

$$\chi(\mu(gh) - \mu(h)) = \chi(\mu(g)) = \chi(\sigma_\Pi(g, \xi)).$$

Par ailleurs, d'après les lemmes 2.6 et 6.4, pour tous g dans G et $\varepsilon > 0$, il existe $C \geq 0$, tel que, pour tout h dans G, si, pour tout α dans θ, $\alpha(\mu(h)) \geq C$, alors on a, pour tout α dans θ,

$$1 \leq q^{\chi_\alpha\left(\mu(gh) - \mu(h) - \sigma_\theta\left(g, \xi^M_{\theta,h}\right)\right)} \leq 1 + \varepsilon,$$

d'où le résultat, d'après le lemme 3.3. $\square$

7 Sous-groupes discrets

Nous rappelons ici une partie des résultats de [4], [5] et [19].

7.1 Cône limite, ensemble limite

Soit $P \subset E$. On appelle cône asymptote à P l'ensemble des vecteurs x dans E pour lesquels il existe une suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans P et une suite de réels positifs $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telles que $t_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G. On appelle cône limite de Γ et on note l_Γ le cône asymptote à l'ensemble $\mu(\Gamma)$.

Théorème 7.1 (Benoist, [4])**.** *Le cône l_Γ est convexe et, si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, son intersection avec E_S est d'intérieur non vide dans E_S. L'ensemble $\mu(\Gamma)$ reste à distance bornée de l_Γ.*

On appelle type de Γ et on note θ_Γ l'unique partie θ de Π telle que $l_\Gamma \subset E_\theta^+$ et que $l_\Gamma \cap E_\theta^{++} \neq \emptyset$. Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, $\theta_\Gamma = \Pi$. L'ensemble θ_Γ est stable par ι et, si Γ est discret, $\theta_\Gamma \neq \emptyset$.

Soit $\theta \subset \theta_\Gamma$. On appelle ensemble limite de Γ dans $\mathcal{P}_\theta$ et on note $\Lambda_{\theta,\Gamma}$ l'ensemble des points ξ de $\mathcal{P}_\theta$ pour lesquels il existe une suite d'éléments $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Γ telle que

$$(\gamma_n)_* \nu_\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_\xi.$$

On note Λ_Γ pour $\Lambda_{\theta_\Gamma,\Gamma}$. On a :

Théorème 7.2 (Benoist, [4, 3.6], Guivarc'h [11, 2.5])**.** *Pour tout θ inclus dans θ_Γ, l'ensemble $\Lambda_{\theta,\Gamma}$ est un fermé Zariski dense de $\mathcal{P}_\theta$. C'est le plus petit fermé Γ-stable non vide de $\mathcal{P}_\theta$.*

7.2 Indicateur de croissance

Soit ν une mesure de Radon sur E. Soit N, une norme sur E. Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de E, on note $\tau_{\mathcal{C}}$ l'exposant de convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_{\mathcal{C}} e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x) \quad (t \in \mathbb{R})$$

et, pour x dans E, on pose :

$$\psi_\nu(x) = N(x) \inf \tau_{\mathcal{C}},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts $\mathcal{C}$ de E qui contiennent x. La fonction ψ_ν ne dépend pas de la norme choisie. On l'appelle indicateur de croissance de ν.

Pour toute norme N sur E, l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_E e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x) \quad (t \in \mathbb{R})$$

a pour exposant de convergence

$$\sup_{\substack{x \in E \\ N(x)=1}} \psi_\nu(x).$$

Plus précisément, d'après [19, 5.2] :

Proposition 7.3. *Soit $\theta : E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène et continue.*

Si, pour tout x dans $E \backslash \{0\}$, $\theta(x) > \psi_\nu(x)$, alors on a :

$$\int_E e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x) < \infty.$$

S'il existe un x dans $E \backslash \{0\}$ tel que $\theta(x) < \psi_\nu(x)$, alors on a :

$$\int_E e^{-tN(x)} \mathrm{d}\nu(x) = \infty.$$

Corollaire 7.4. *Soit $\theta : E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène et continue. On a $\psi_{e^\theta \nu} = \psi_\nu + \theta$.*

Enfin, on a :

Lemme 7.5. *Soient ν et ν' des mesures de Radon sur E. S'il existe une partie compacte M de E et un réel $\omega \geq 0$ tels que, pour tout borélien B de E, $\nu'(B) \leq \omega\nu(B+M)$, alors $\psi_{\nu'} \leq \psi_\nu$.*

Si Γ est un sous-groupe fermé de G, on note ν_Γ l'image par μ d'une mesure de Haar de G et ψ_Γ la fonction $\frac{1}{\log q}\psi_{\nu_\Gamma}$. On sait calculer cette fonction pour les sous-groupes de Levi :

Lemme 7.6. *Pour tout $\theta \subset \Pi$, on a $\psi_{L_\theta} = \rho_{\theta^c}$.*

Dans le cas des sous-groupes discrets, on a le théorème suivant, qui est prouvé dans [19] :

Théorème 7.7. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. La fonction ψ_Γ est majorée par ρ. Elle est concave et semi-continue supérieurement. L'ensemble*

$$\{x \in E | \psi_\Gamma(x) > -\infty\}$$

est exactement le cône limite de Γ. De plus, ψ_Γ est positive sur le cône limite de Γ et strictement positive sur son intérieur relatif.

8 Mesures de Patterson de Γ

Soit Γ un sous-groupe de G. Soient $\theta \subset \Pi$ et φ une forme linéaire sur E_θ. On dit qu'une probabilité borélienne ν sur $\mathcal{P}_\theta$ est une (Γ, φ)-mesure de Patterson si et seulement si l'action de Γ sur $\mathcal{P}_\theta$ est absolument continue par rapport à ν et si, pour tout γ dans Γ, pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_*\nu}{\mathrm{d}\nu}(\xi) = q^{-\varphi(\sigma_\theta(\gamma^{-1},\xi))}.$$

Par exemple, d'après le lemme 6.3 pour tout $\theta \subset \Pi$, la probabilité ν_θ est une $(G, \rho_{|E_\theta})$-mesure de Patterson.

Dans cette section, on fixe dorénavant un sous-groupe discret Zariski dense Γ de G.

Nous relions les mesures de Patterson à la fonction ψ_Γ comme dans la situation de $\mathbb{K}$-rang 1. Nous commençons par montrer un analogue de la minoration de D. Sullivan dans [20], par une méthode semblable, à l'aide de notre seconde généralisation du lemme des ombres, la proposition 5.4. Grâce à la concavité de ψ_Γ, nous généralisons ensuite la construction de S.-J. Patterson dans [16]. Enfin, nous généralisons le théorème de P. Albuquerque dans [1] sur le support des mesures qu'il construit par un procédé géométrique.

8.1 Mesures de Patterson et enveloppe concave de ψ_Γ

Soit $\theta \subset \Pi$. Nous pouvons relier les mesures de Patterson et la fonction ψ_Γ :

Théorème 8.1. *Soit φ une forme linéaire sur E_θ et ν une (Γ, φ)-mesure de Patterson sur $\mathcal{P}_\theta$. Alors, on a :*

$$\psi_\Gamma \leq \varphi \circ p_\theta + \rho_{\theta^c}.$$

Remarquons, que ν_θ est une $(G, \rho_{|E_\theta})$-mesure de Patterson et que l'on a, d'après les lemmes 7.6 et 3.1, $\psi_G = \rho = \rho \circ p_\theta + \rho_{\theta^c}$.

Comme dans [20], le principe de la démonstration est d'estimer la "mesure des ombres", ce que nous ferons à l'aide, en particulier, du corollaire 6.5, puis de contrôler les fibres de recouvrements de $\mathcal{P}_\theta$ par ces mêmes ombres, en utilisant la proposition 5.4.

Lemme 8.2. *Soit φ une forme linéaire sur E_θ et ν une (Γ, φ)-mesure de Patterson. Alors il existe $\eta > 0$ ayant la propriété suivante : pour tout $0 < \varepsilon \leq \eta$, il existe $c \geq 1$ tel que, pour tout γ dans Γ, on ait :*

$$\frac{1}{c} q^{-\varphi(p_\theta(\mu(\gamma)))} \leq \nu\left(\gamma B^\varepsilon_{\theta,\gamma}\right) \leq c q^{-\varphi(p_\theta(\mu(\gamma)))}.$$

Démonstration. Soit S le support de ν. L'ensemble S est une partie Γ-invariante non vide de $\mathcal{P}_\theta$. Comme Γ est Zariski dense dans G, S est Zariski dense dans $\mathcal{P}_\theta$. En particulier, pour tout k dans K, on a :

$$\nu(\mathcal{P}_\theta \backslash k\mathcal{Q}^-_\theta) > 0$$

et, donc, il existe des réels $\eta > 0$ et $0 < c \leq 1$ tels que, pour tout g dans G,

$$\nu(B(g\mathcal{Q}_\theta, \eta)) \geq c.$$

Soit alors $0 < \varepsilon \leq \eta$. D'après le corollaire 6.5, il existe un réel $\kappa \geq 0$ tel que, pour tout g dans G avec, pour tout ξ dans $B^\varepsilon_{\theta,g}$, on ait :

$$\|\sigma_\theta(g, \xi) - p_\theta(\mu(g))\| \leq \kappa.$$

Soit γ dans Γ tel que, pour tout α dans θ, $\alpha(\mu(\gamma)) > 0$. On a :

$$\nu\left(\gamma B^\varepsilon_{\theta,\gamma}\right) = \int_{B^\varepsilon_{\theta,\gamma}} q^{-\varphi(\sigma_\theta(\gamma,\xi))} \mathrm{d}\nu(\xi)$$

et donc,

$$cq^{-\kappa\|\varphi\|}q^{-\varphi(p_\theta(\mu(\gamma)))} \leq \nu\left(\gamma B^{\varepsilon}_{\theta,\gamma}\right) \leq q^{\kappa\|\varphi\|}q^{-\varphi(p_\theta(\mu(\gamma)))}.$$

□

Choisissons une mesure de Haar ϱ_θ sur L_θ. La proposition 5.4 permet de majorer la fibre des recouvrements de $\mathcal{P}_\theta$ par des "ombres" :

Lemme 8.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte M de E et un réel $\omega \geq 0$ tels que, pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, pour toute partie B de E, on ait :*

$$\mathrm{card}\left\{\gamma \in \Gamma \,\middle|\, \mu(\gamma) \in B \text{ et } \xi \in \gamma B^{\varepsilon}_{\theta,\gamma}\right\} \leq \omega(\mu_*\varrho_\theta)(B+M).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 5.4, il existe un partie compacte L de G telle que, pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, si $\xi = k\xi_\theta$ avec k dans K, pour tout g dans G, on ait :

$$\left(\xi \in gB^{\varepsilon}_{\theta,g}\right) \Rightarrow \left(g \in \left(kL_\theta k^{-1}\right)M\right).$$

Le résultat est alors une conséquence du caractère discret de Γ et du lemme 4.1. □

Nous pouvons à présent conclure :

Démonstration du théorème 8.1. D'après le lemme 8.2, il existe $\varepsilon > 0$ et $c \geq 1$ tels que, pour tout γ dans Γ, on ait :

$$q^{-\varphi(p_\theta(\mu(\gamma)))} \leq c\nu\left(\gamma B^{\varepsilon}_{\theta,\gamma}\right).$$

D'après le lemme 8.3, il existe une partie compacte M de E et un réel $\omega \geq 0$ tels que, pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, pour toute partie B de E, on ait :

$$\mathrm{card}\left\{\gamma \in \Gamma \,\middle|\, \mu(\gamma) \in B \text{ et } \xi \in \gamma B^{\varepsilon}_{\theta,\gamma}\right\} \leq \omega(\mu_*\varrho_\theta)(B+M).$$

Or, comme $\nu(\mathcal{P}_\theta) = 1$, pour toute partie de B de E, on a :

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \mu(\gamma)\in B}} \nu\left(\gamma B^{\varepsilon}_{\theta,\gamma}\right) \leq \sup_{\xi\in\mathcal{P}_\theta} \mathrm{card}\left\{\gamma \in \Gamma \,\middle|\, \mu(\gamma) \in B \text{ et } \xi \in \gamma B^{\varepsilon}_{\theta,\gamma}\right\}$$

et, donc,

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \mu(\gamma)\in B}} q^{-\varphi(p_\theta(\mu(\gamma)))} \leq c\omega(\mu_*\varrho_\theta)(B+M).$$

D'après le corollaire 7.4 et le lemme 7.5, il vient :

$$\psi_\Gamma \leq \varphi\circ p_\theta + \frac{1}{\log q}\psi_{\mu_*\varrho_\theta}.$$

Or, d'après le lemme, on a : $\psi_{\mu_*\varrho_\theta} = (\log q)\rho_{\theta^c}$, d'où le résultat. □

8.2 Existence de mesures de Patterson

Soit $\psi : E \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ une fonction homogène concave semi-continue supérieurement et x un vecteur non nul de E. On dit qu'une forme linéaire φ de E est tangente à ψ en x si et seulement si $\varphi \geq \psi$ et si $\varphi(x) = \psi(x)$. Si x est un point intérieur du support de ψ, il existe des formes linéaires tangentes à ψ en x.

La concavité de ψ_Γ nous permet de généraliser la construction de S.-J. Patterson dans [16] et de P. Albuquerque dans [1] :

Théorème 8.4. *Soit φ dans $E^*_{\theta_\Gamma}$ une forme linéaire tangente à ψ_Γ en une direction de $E^{++}_{\theta_\Gamma}$. Alors il existe sur $\mathcal{P}_{\theta_\Gamma}$ une (Γ,φ)-mesure de Patterson concentrée sur Λ_Γ.*

L'idée de la démonstration est de choisir x dans $E^{++}_{\theta_\Gamma}$ tel que $\psi_\Gamma(x) = \varphi(x)$ est de prendre une valeur d'adhérence en 0 de la famille de mesures :

$$\left(\frac{1}{\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}}\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}\gamma_*\nu_{\theta_\Gamma}\right)_{t>0}$$

où F est une fonction homogène strictement convexe $\geq \varphi$ telle que $F(x) = \varphi(x)$, de sorte que, puisque ψ_Γ est concave, les $\gamma\in\Gamma$ qui jouent un rôle dans la sommation sont ceux pour lesquels $\mu(\gamma)$ est proche de x en direction.

Pour rendre les séries divergentes en leur exposant critique, nous utiliserons, toujours comme Patterson,

Lemme 8.5. *Soit ν une mesure de Radon sur $\mathbb{R}_+$, d'exposant de convergence $\tau\in\mathbb{R}$. Alors, il existe une fonction croissante $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^*_+$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} h(s)e^{-\tau s}\mathrm{d}\nu(s) = \infty.$$

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s_0 \geq 0$ tel que, pour tous $t \geq 0$ et $s \geq s_0$, l'on ait :

$$h(t+s) \leq e^{\varepsilon t} h(s).$$

En particulier, la mesure de Radon $h\nu$ est d'exposant de convergence τ.

Démonstration. Choisissons une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels > 0, tendant vers 0 en décroissant. Nous allons construire par récurrence une suite strictement croissante de réels $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $s_0 = 0$ et une fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, le logarithme de h soit affine de pente ε_n sur $[s_n, s_{n+1}]$ et que

$$\int_{[s_n, s_{n+1}[} h(s)e^{-\tau s}\mathrm{d}\nu(s) \geq 1.$$

Une telle fonction vérifiera clairement les conclusions du lemme.

Soit donc n dans $\mathbb{N}$ et supposons construits $s_0 < \ldots < s_n$ et $h : [s_0, s_n] \to \mathbb{R}_+^*$ comme ci-dessus. Soit $h_n : [s_n, \infty[\to \mathbb{R}_+^*$ la fonction logarithmiquement affine de pente ε_n telle que $h_n(s_n) = h(s_n)$. Comme

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-(\tau - \varepsilon_n)s}\mathrm{d}\nu(s) = \infty,$$

on a :

$$\int_{[s_n, \infty[} h_n(s)e^{-\tau s}\mathrm{d}\nu(s) = \infty$$

et, donc, il existe un réel $s_{n+1} > s_n$ tel que l'on ait :

$$\int_{[s_n, s_{n+1}[} h_n(s)e^{-\tau s}\mathrm{d}\nu(s) \geq 1.$$

On pose alors, pour tout s dans $]s_n, s_{n+1}]$, $h(s) = h_n(s)$ et la construction peut se poursuivre par récurrence.$\square$

Le lemme suivant nous permettra de trouver les fonctions F dont il a été question ci-dessus :

Lemme 8.6. *Soient x un vecteur non nul de E et φ une forme linéaire sur E. Alors il existe une fonction $F : E \to \mathbb{R}$ continue, homogène strictement convexe et $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0 telle que $F \geq \varphi$ et que $F(x) = \varphi(x)$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer ce résultat quand $\varphi = 0$. Alors, choisissons un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur E et notons N la norme associée. La fonction N est continue, homogène strictement convexe et $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0. Pour tout y dans E, on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$N(y) \geq \left\langle \frac{x}{N(x)}, y \right\rangle.$$

Par conséquent, la fonction $N - \left\langle \frac{x}{N(x)}, . \right\rangle$ convient.□

Nous utiliserons encore :

Lemme 8.7. *Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction homogène continue et $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0. Soient N une norme sur E et M une partie compacte de E.*

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $a > 0$ tel que, pour tout x dans E avec $N(x) \geq a$ et pour tout y dans M, on ait :

$$|F(x + y) - F(x) - \mathrm{d}F(x)(y)| \leq \varepsilon.$$

(ii) Il existe un réel $\kappa \geq 0$ tel que, pour tout x dans E et pour tout y dans M, on ait :

$$|F(x + y) - F(x)| \leq \kappa.$$

Démonstration. Comme F est homogène, pour tout $x \neq 0$ dans E et pour tout $t \neq 0$ dans $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{d}F(tx) = \mathrm{d}F(x)$. La première partie résulte alors de l'uniforme continuité de $\mathrm{d}F$ sur la sphère de E. La seconde partie résulte de la seconde et du fait que $\mathrm{d}F$ est uniformément bornée sur $E \backslash \{0\}$. □

Nous pouvons à présent démontrer le théorème d'existence :

Démonstration du théorème 8.4. On prolonge φ à E tout entier en posant $\varphi(x) = 0$ pour tout x dans $E_{\theta_\Gamma}^\perp$, de façon à ce que $\varphi \circ p_{\theta_\Gamma} = \varphi$.

Soit x dans $E_{\theta_\Gamma}^{++}$ tel que $\varphi(x) = \psi_\Gamma(x)$. Choisissons, comme dans le lemme 8.6, une fonction $F : E \to \mathbb{R}$ continue, homogène strictement convexe, $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0 telle que $F \geq \varphi$ et que $F(x) = \varphi(x)$. Comme, d'après le théorème 7.7, ψ_Γ est concave, pour tout y dans $E \backslash \mathbb{R}_+ x$, on a :

$$\psi_\Gamma(y) < F(y).$$

En particulier, d'après les corollaires 7.3, la série de Dirichlet

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} q^{-F(\mu(\gamma)) - t\|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a pour exposant de convergence 0 et, pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de E contenant x, la série de Dirichlet

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \mu(\gamma) \notin \mathcal{C}}} q^{-F(\mu(\gamma)) - t\|\mu(\gamma)\|} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a un exposant de convergence < 0.

En appliquant alors le lemme 8.5 à la mesure de Radon sur $\mathbb{R}_+$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} q^{-F(\mu(\gamma))} \delta_{\|\mu(\gamma)\|},$$

on peut trouver une fonction croissante $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))} = \infty$$

et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s_0 \geq 0$ tel que, pour tous $t \geq 0$ et $s \geq s_0$, l'on ait :

$$h(t+s) \leq q^{\varepsilon t} h(s).$$

Bien sûr, quand $\sum_{\gamma \in \Gamma} q^{-F(\mu(\gamma))} = \infty$, on prendra $h = 1$.

Notons, pour tout $t > 0$,

$$\Phi(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma)) - t\|\mu(\gamma)\|}.$$

Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ dans E contenant x, on a :

$$\frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \mu(\gamma) \notin \mathcal{C}}} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma)) - t\|\mu(\gamma)\|} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

et, pour tout $a \geq 0$, on a :

$$\frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \|\mu(\gamma)\|\leq a}} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

En particulier, comme x appartient à $E_{\theta_\Gamma}^{++}$, pour tout $C \geq 0$, on a :

$$\frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \exists\alpha\in\theta_\Gamma\ \alpha(\mu(\gamma))\leq C}} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Soit, pour tout $t > 0$, ν_t la probabilité sur $\mathcal{P}_{\theta_\Gamma}$:

$$\nu_t = \frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\gamma\in\Gamma} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|} \gamma_* \nu_{\theta_\Gamma}.$$

Soit γ_0 dans Γ. Montrons que l'on a :

$$(\gamma_0)_* \nu_t - q^{-\varphi(\sigma_{\theta_\Gamma}(\gamma_0^{-1},.))} \nu_t \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

En effet, on a, pour tout $t > 0$,

$$(\gamma_0)_* \nu_t = \frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{h(\left\|\mu(\gamma_0^{-1}\gamma)\right\|)}{h(\|\mu(\gamma)\|)} q^{-((F(\mu(\gamma_0^{-1}\gamma))+t\left\|\mu(\gamma_0^{-1}\gamma)\right\|)-(F(\mu(\gamma))+t\|\mu(\gamma)\|))}$$
$$h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|} \gamma_* \nu_{\theta_\Gamma}.$$

D'après le lemme 4.1, la quantité $\left\|\mu(\gamma_0^{-1}\gamma) - \mu(\gamma)\right\|$ est bornée uniformément en $\gamma \in \Gamma$. Ainsi, d'après le lemme 8.7, les quantités $F(\mu(\gamma_0^{-1}\gamma)) - F(\mu(\gamma))$ et $\left\|\mu(\gamma_0^{-1}\gamma)\right\| - \|\mu(\gamma)\|$ sont bornée uniformément en $\gamma \in \Gamma$. De même, on a :

$$\frac{h(\left\|\mu(\gamma_0^{-1}\gamma)\right\|)}{h(\|\mu(\gamma)\|)} \xrightarrow[\gamma\to\infty]{} 1.$$

Par conséquent :

$$(\gamma_0)_* \nu_t - \frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-(F(\mu(\gamma_0^{-1}\gamma))-F(\mu(\gamma)))} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|} \gamma_* \nu_{\theta_\Gamma} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Pour la même raison, d'après le lemme 8.7, on a :

$$F(\mu(\gamma_0^{-1}\gamma)) - F(\mu(\gamma)) - \mathrm{d}F(\mu(\gamma))(\mu(\gamma_0^{-1}\gamma) - \mu(\gamma)) \xrightarrow[\gamma\to\infty]{} 0$$

d'où

$$(\gamma_0)_*\nu_t - \frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\mathrm{d}F(\mu(\gamma))(\mu(\gamma_0^{-1}\gamma)-\mu(\gamma))} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}\gamma_*\nu_{\theta_\Gamma} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Mais alors, comme on peut effectuer la somme sur des cônes ouverts aussi petits que l'on veut contenant x et que $\mathrm{d}F(x) = \varphi = \varphi \circ p_{\theta_\Gamma}$, il vient :

$$(\gamma_0)_*\nu_t - \frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\varphi(p_{\theta_\Gamma}(\mu(\gamma_0^{-1}\gamma)-\mu(\gamma)))} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}\gamma_*\nu_{\theta_\Gamma} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

D'après le lemme 6.6 et le corollaire 5.2, on a :

$$p_{\theta_\Gamma}(\mu(\gamma_0^{-1}\gamma) - \mu(\gamma)) - \sigma_{\theta_\Gamma}\left(\gamma_0^{-1}, \xi^M_{\theta_\Gamma,\gamma}\right) \xrightarrow[\min_{\alpha\in\theta_\Gamma}\alpha(\mu(\gamma))\to\infty]{} 0$$

et

$$\gamma_*\nu_{\theta_\Gamma} - \delta_{\xi^M_{\theta_\Gamma,\gamma}} \xrightarrow[\min_{\alpha\in\theta_\Gamma}\alpha(\mu(\gamma))\to\infty]{} 0.$$

On en déduit :

$$(\gamma_0)_*\nu_t - \frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\varphi\left(\sigma_{\theta_\Gamma}\left(\gamma_0^{-1}, \xi^M_{\theta_\Gamma,\gamma}\right)\right)} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}\delta_{\xi^M_{\theta_\Gamma,\gamma}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

ou encore :

$$(\gamma_0)_*\nu_t - \frac{1}{\Phi(t)} q^{-\varphi(\sigma_{\theta_\Gamma}(\gamma_0^{-1},.))} \sum_{\gamma\in\Gamma} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}\delta_{\xi^M_{\theta_\Gamma,\gamma}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

De même, on montre :

$$\nu_t - \frac{1}{\Phi(t)} \sum_{\gamma\in\Gamma} h(\|\mu(\gamma)\|) q^{-F(\mu(\gamma))-t\|\mu(\gamma)\|}\delta_{\xi^M_{\theta_\Gamma,\gamma}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

On a donc bien :

$$(\gamma_0)_*\nu_t - q^{-\varphi(\sigma_{\theta_\Gamma}(\gamma_0^{-1},.))}\nu_t \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Le théorème en découle, puisque toutes les valeurs d'adhérence de $(\nu_t)_{t>0}$ quand $t \to 0$ sont des (Γ, φ)-mesures de Patterson, concentréees sur l'ensemble limite de Γ par construction. □

On a prouvé, dans la démonstration :

Corollaire 8.8. *L'ensemble limite Λ_Γ est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de*

$$\left\{\xi^M_{\theta_\Gamma,\gamma} | \gamma \in \Gamma \quad \forall \alpha \in \theta \quad \alpha(\mu(\gamma)) \geq C\right\}$$

quand $C \to \infty$.

Ce résultat pourrait, bien sûr, se démontrer directement, pour tout sous-groupe Zariski dense de G.

8.3 Support des mesures de Patterson

Nous supposons ici que $\mathbf{G}$ est semi-simple.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note X l'espace symétrique de G et x le point fixe de K dans X. On identifie E et l'unique plat maximal de X stable par A par l'unique application qui, pour tout z dans Z envoie $\nu(z)$ sur zx. On munit X de la métrique riemannienne G-invariante associée au produit scalaire W-invariant de E.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on note X l'immeuble de G et x le point fixe de K dans X. Le point x est un sommet spécial de toutes les chambres de X qui le contiennent. On identifie E et l'unique appartement de X stable par A par l'unique application affine qui, pour tout z dans Z, envoie $\nu(z)$ sur zx. On munit X de la distance G-invariante associée au produit scalaire W-invariant de E.

On note ∂X le bord visuel de X. L'espace $X \cup \partial X$ est compact. L'application qui, à un vecteur non nul u de E^+, associe $G \lim_{t\to\infty} tu \subset \partial X$ induit une bijection entre l'ensemble des directions de E^+ et les G-orbites dans ∂X. Pour tout $\emptyset \neq \theta \subset \Pi$, pour tout u dans E_θ^{++}, il existe un unique G-homéomorphisme ϕ_u de $\mathcal{P}_\theta$ dans la G-orbite de $\lim_{t\to\infty} tu$: il envoie ξ_θ sur $\lim_{t\to\infty} tu$ (*cf.* [10, 2.17] dans le cas où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit $b : X \times \partial X \to \mathbb{R}$, la fonction de Buseman, avec la normalisation $b(x, .) = 0$.

Lemme 8.9. *Soient $\emptyset \neq \theta \subset \Pi$ et u un vecteur unitaire de E_θ^{++}. Pour tout g dans G et pour tout ξ dans $\mathcal{P}_\theta$, on a :*

$$b(gx, \phi_u(\xi)) = \left(u, \sigma_\theta\left(g^{-1}, \xi\right)\right).$$

Démonstration. Remarquons que, si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, l'ensemble $\nu(Z)$ est un réseau de E et que E_θ est engendré par son intersection avec ce réseau. En particulier, par continuité, il suffit de démontrer cette formule quand la demi-droite $\mathbb{R}_+^* u$ rencontre $\nu(Z)$.

Soient alors g dans G et ξ dans $\mathcal{P}_\theta$. Soit k dans K tel que $\xi = k\xi_\theta$. On a (*cf.* [2, II.2.5]) :

$$b(gx, \phi_u(\xi)) = \lim_{t\to\infty} (d(gx, k(tu)) - t).$$

Soit z dans Z tel que $\nu(z)$ appartienne à $\mathbb{R}_+^* u$. Il vient :

$$\begin{aligned} b(gx, \phi_u(\xi)) &= \lim_{n\to\infty} (d(gx, kz^n x) - d(x, kz^n x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\left\|\mu(g^{-1}kz^n)\right\| - \|\mu(kz^n)\|) \\ &= \lim_{n\to\infty} (u, \mu(g^{-1}kz^n) - \mu(kz^n)), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence du lemme 4.1 et du lemme 8.7 appliqué à la fonction $F = \|.\|$. Par conséquent, comme p_θ est le projecteur orthogonal sur E_θ,

$$b(gx, \phi_u(\xi)) = \lim_{n\to\infty} (u, p_\theta(\mu(g^{-1}kz^n) - \mu(kz^n))).$$

On a bien, d'après le lemme 6.6,

$$b(gx, \phi_u(\xi)) = (u, \sigma_\theta(g^{-1}, \xi)).$$

□

Notons τ l'exposant de convergence $\tau_\Gamma^{\|\cdot\|}$ et supposons, pour simplifier, que l'on a :

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\tau\|\mu(\gamma)\|} = \infty.$$

Proposition 8.10. *Soit u l'unique vecteur unitaire de l_Γ tel que*

$$\psi_\Gamma(u) = \sup_{\substack{v\in l_\Gamma \\ \|v\|=1}} \psi_\Gamma(v).$$

Soit ν une valeur d'adhérence en τ de la famille de probabilités sur $X \cup \partial X$:

$$\left(\frac{1}{\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-t\|\mu(\gamma)\|}} \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-t\|\mu(\gamma)\|} \delta_{\gamma x}\right)_{t>\tau}.$$

Alors ν est concentrée sur la G-orbite associée à u dans ∂X et elle y induit une $(u, .)$-mesure de Patterson.

Ce résultat avait été établi par P. Albuquerque dans [1, 1] sous l'hypothèse supplémentaire que les valeurs d'adhérence de cette famille de mesures n'étaient pas concentrées sur l'ensemble des points singuliers de ∂X, c'est-à-dire sur la réunion des G-orbites associées à des vecteurs unitaires u de $E^+ \backslash E^{++}$.

On pourrait, bien sûr, se passer de l'hypothèse de divergence de la série de Poincaré en employant une fonction h comme dans le lemme 8.5.

Démonstration. Comme $\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\tau\|\mu(\gamma)\|} = \infty$, la mesure ν est concentrée sur ∂X. Le raisonnement usuel de [16] et de [20], analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 8.4, montre que, pour tout γ dans Γ, on a

$$\gamma_* \nu = e^{-\tau b(\gamma,.)} \nu.$$

D'après le lemme 8.9, il suffit donc de montrer que la mesure ν est concentrée sur une seule G-orbite. D'après le théorème 7.7, la fonction ψ_Γ est concave et, donc, il existe un unique vecteur unitaire u dans l_Γ tel que

$$\psi_\Gamma(u) = \sup_{\substack{v\in l_\Gamma \\ \|v\|=1}} \psi_\Gamma(v).$$

Par conséquent, d'après le corollaire 7.3, pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de E contenant u, on a :

$$\frac{\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \mu(\gamma)\notin\mathcal{C}}} q^{-t\|\mu(\gamma)\|}}{\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-t\|\mu(\gamma)\|}} \xrightarrow[t\to\tau]{} 0.$$

Donc, pour tout cône $\mathcal{C}$ de ce type,

$$\nu\left(\bigcup_{\substack{v\in E^+, \|v\|=1 \\ v\notin\mathcal{C}}} \phi_v(\mathcal{P}_{\theta_v})\right) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.□

Références

[1] P. Albuquerque, Patterson-Sullivan theory in higher rank symmetric spaces, *Geometric and functional analysis* **9** (1999), 1-28.

[2] W. Ballmann, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, DMV Seminar 25, Birkhäuser, Basel, 1995.

[3] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Annals of mathematics* **144** (1996), 315-347.

[4] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geometric and functional analysis* **7** (1997), 1-47.

[5] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires (II), *Advanced studies in pure mathematics* **26** (2000), 33-48.

[6] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer Verlag, New York, 1991.

[7] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre VI : Systèmes de racines, Hermann, Paris 1968.

[8] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées, *Publications mathématiques de l'IHES* **41** (1972), 5-251.

[9] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publications mathématiques de l'IHES* **60** (1984), 5-184.

[10] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago lectures in mathematics, Chicago, 1996.

[11] Y. Guivarc'h, Produits de matrices aléatoires et applications aus propriétés géométriques des sous-groupes discrets du groupe linéaire, *Ergodic theory and dynamical systems* **10** (1990), 483-512.

[12] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics 80, Academic Press, San Diego, 1978.

[13] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure and Applied Mathematics 113, Academic Press, San Diego, 1984.

[14] J.E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Text in Mathematics 21, Springer Verlag , New York, 1981.

[15] H. Matsumoto, *Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine*, Lecture Notes in Mathematics 590, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[16] S.-J. Patterson, The limit set of a fuchsian group, *Acta mathematica* **136** (1976), 241-273.

[17] J.-F. Quint, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples réels et p-adiques*, thèse Université Paris VII.

[18] J.-F. Quint, Cônes limites des sous-groupes discrets d'un groupe réductif sur un corps local, *Transformation groups* **7** (2002), 247-266.

[19] J.-F. Quint, Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur, *Commentarii Mathematici Helvetici*, à paraitre.

[20] D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publications mathématiques de l'IHES* **50** (1979), 171-202.

[21] J. Tits, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **247** (1971), 196-220.

[22] J. Tits, Reductive groups over local fields, *Proceedings of the symposium in pure mathematics of the american mathematical society* **33** (1977), 29-69.

Jean-François Quint
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
quint@dma.ens.fr