L'indicateur de croissance des groupes de Schottky

J.-F. Quint

Résumé

Soient G un groupe de Lie semi-simple de centre fini et Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. Dans [18], nous avons défini l'indicateur de croissance de Γ et, dans [19], nous avons associé à Γ des généralisations des mesures de Patterson-Sullivan. Dans cet article, nous donnons des précisions sur ces objets quand Γ est un sous-groupe du type de Schottky, en les reliant au formalisme thermodynamique.

1 Introduction

En géométrie hyperbolique, les groupes discrets du type de Schottky fournissent un exemple maniable de groupes convexes cocompacts. Par exemple, si Γ est un sous-groupe du type de Schottky de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, le flot géodésique de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ possède un codage explicite.

Dans l'étude générale des sous-groupes discrets des groupes semi-simples, les groupes de Schottky ont été utilisés par Y. Benoist dans [1], [2] et [3].

Introduisons quelques notations. Soient G un groupe de Lie semi-simple de centre fini, $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ une chambre de Weyl. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G. Dans [2], Y. Benoist a défini le cône limite l_Γ de Γ : c'est un cône convexe fermé d'intérieur non vide dans $\mathfrak{a}^+$. Supposons Γ discret. Dans [18], nous avons défini l'indicateur de croissance ψ_Γ de Γ. C'est une fonction homogène concave $l_\Gamma \to \mathbb{R}_+$, strictement positive à l'intérieur de l_Γ. Elle joue, en rang supérieur, le rôle tenu par l'exposant de convergence de Γ en $\mathbb{R}$-rang 1.

Supposons que Γ soit du type de Schottky. On peut alors généraliser, comme dans [7], les techniques de codage utilisées en $\mathbb{R}$-rang 1 et préciser la description de ψ_Γ :

Théorème. *Soit Γ un sous-groupe du type de Schottky de G. Alors la fonction homogène ψ_Γ est strictement concave, analytique sur l'intérieur de l_Γ et de pente infinie en son bord.*

Soit $\mathcal{P}$ la variété des drapeaux de G. Soit toujours Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. D'après [2], Γ possède dans $\mathcal{P}$ un plus petit fermé invariant non vide, Λ_Γ, appelé ensemble limite de Γ. Dans [19], nous avons défini, pour une forme linéaire φ de $\mathfrak{a}$, la notion de (Γ, φ)-mesure de Patterson sur $\mathcal{P}$. Nous avons montré que, si φ est tangente à ψ_Γ en une direction intérieure à $\mathfrak{a}^+$, il existe une (Γ, φ)-mesure de Patterson concentrée sur Λ_Γ.

Si Γ est du type de Schottky, le formalisme thermodynamique nous permet d'obtenir une version plus fine de ce résultat :

Théorème. *Soit Γ un sous-groupe du type de Schottky de G. Pour toute forme linéaire φ tangente à ψ_Γ, il existe une unique (Γ, φ)-mesure de Patterson concentrée sur Λ_Γ. Elle est Γ-ergodique.*

Donnons une conséquence géométrique de ce théorème, par analogie avec les constructions de mesures de [14]. Soient X l'espace symétrique de G, ∂X le bord visuel de X, x un point du plat maximal de X stable par le groupe $\exp \mathfrak{a}$ et K le stabilisateur de x dans G. Pour tout point y de X, notons $m(y)$ l'unique vecteur de $\mathfrak{a}^+$ tel que y appartienne à $K \exp(m(y))x$. Soit enfin $\mathfrak{a}^*_\Gamma$ l'ensemble des formes linéaires φ de $\mathfrak{a}$ telles que $\varphi \geq \psi_\Gamma$.

Pour toute φ intérieure à $\mathfrak{a}^*_\Gamma$, on a $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\varphi(m(\gamma x))} < \infty$. On pose :

$$\nu(\varphi) = \frac{1}{\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\varphi(m(\gamma x))}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\varphi(m(\gamma x))} \delta_{\gamma x}.$$

On a :

Proposition. *Soit Γ un sous-groupe du type de Schottky de G. L'application ν se prolonge de manière unique en une application continue de $\mathfrak{a}^*_\Gamma$ dans l'espace des mesures de probabilités de $X \cup \partial X$. Pour toute φ tangente à ψ_Γ, c'est-à-dire dans le bord de $\mathfrak{a}^*_\Gamma$, $\nu(\varphi)$ est concentrée sur la G-orbite à l'infini du point limite du rayon géodésique $t \mapsto \exp(tu)x$ où u est l'unique vecteur unitaire de $\mathfrak{a}$ tel que $\psi_\Gamma(u) = \varphi(u)$.*

Nous démontrons des analogues de ces résultats sur les corps locaux.

Cet article a bénéficié, durant son élaboration, des nombreuses remarques et suggestions d'Yves Benoist. Je tiens ici à l'en remercier.

2 Groupes semi-simples

Soit $\mathbb{K}$ un corps local : $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, pour un entier premier p, soit le corps des fractions $\mathbb{F}_q[[T,T^{-1}]$ de l'anneau des séries formelles sur le corps fini à q éléments.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on le munit de la valeur absolue usuelle et on pose $q = e$ et pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, $\omega(x) = -\log|x|$. .

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on note q le cardinal du corps résiduel de $\mathbb{K}$, ω la valuation de $\mathbb{K}$ telle que $\omega(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}$ et on munit $\mathbb{K}$ de la valeur absolue $x \mapsto q^{-\omega(x)}$.

Étant donnée une extension algébrique de $\mathbb{K}$, on la munit de l'unique valeur absolue prolongeant celle de $\mathbb{K}$.

Soit (X,d) un espace métrique. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie Y de X, on note :

$$b(Y,\varepsilon) = \{x \in X | d(x,Y) \leq \varepsilon\} \text{ et } B(Y,\varepsilon) = \{x \in X | d(x,Y) \geq \varepsilon\}.$$

Nous introduisons ici le vocabulaire général sur les groupes semi-simples que nous emploierons. Le lecteur trouvera plus de précisions, pour la théorie générale des groupes réductifs, dans [4] et [12], pour la théorie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dans [10] et [11] et, pour la théorie sur des corps non-archimédiens, dans [5], [6] et [24].

On fixe un $\mathbb{K}$-groupe semi-simple connexe $\mathbf{G}$. On note G le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Bien que nos résultats s'étendent immédiatement au cas réductif, nous nous contentons de traiter le cas semi-simple pour éviter d'encore alourdir certaines notations.

2.1 Système de racines et chambre de Weyl

Pour tout $\mathbb{K}$-groupe $\mathbf{H}$, on note $\mathrm{X}(\mathbf{H})$ le groupe de ses caractères rationnels.

On fixe un tore $\mathbb{K}$-déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$ et on note A le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. On note $\mathbf{Z}$ le centralisateur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$ et Z le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Le groupe $\mathrm{X}(\mathbf{A})$ est un groupe abélien libre de rang fini. L'homomorphisme de restriction identifie $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$ à un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{X}(\mathbf{A})$. On note E^* le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{X}(\mathbf{A})$ et E son dual. Pour tout χ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, on note χ^ω la forme linéaire associée sur E.

Soit Σ l'ensemble des racines de $\mathbf{A}$ dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Alors Σ^ω est un système de racines dans E^*. On choisit dans Σ un système de racines positives Σ^+ et on note Π la base de Σ associée à ce choix. On note $(\varpi_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ les poids fondamentaux de Π.

On note E^+ la chambres de Weyl fermée de Σ^+ dans E.

Pour tout z dans Z, on note $\nu(z)$ l'unique vecteur de E tel que, pour tout χ dans $\mathrm{X}(\mathbf{Z})$, on ait :

$$\chi^\omega(\nu(z)) = -\omega(\chi(z)).$$

L'application ν est un homomorphisme de groupes de Z dans E. Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application ν est surjective. Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, l'image de ν est un réseau stable par l'action de W dans E. On note $Z^+ = \nu^{-1}(E^+)$.

Dorénavant, on considèrera tout caractère rationnel de $\mathbf{Z}$ comme une forme linéaire sur E. On note ρ la forme linéaire qui est la somme des racines positives multipliées par la dimension de leurs espaces poids dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$.

On fixe une norme euclidienne $\|.\|$ sur E qui soit invariante par le groupe de Weyl de Σ.

2.2 Décomposition de Jordan

Un élément de G est dit elliptique si et seulement si il est semi-simple et contenu dans un sous-groupe compact de G. Un élément de G est dit hyperbolique si et seulement si il est conjugué à un élément de A. On dit qu'un élément g de G admet une décomposition de Jordan si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $g = g_e g_h g_u$ avec g_e elliptique, g_h hyperbolique et g_u unipotent qui commutent deux à deux. Dans ce cas, on note $\lambda(g)$ l'image par ν d'un élément de A^+ conjugué à g_h : il ne dépend que de g.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tous les éléments de G admettent une décomposition de Jordan.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, pour tout g dans G, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que g^n admette une décomposition de Jordan. On note encore $\lambda(g) = \frac{1}{n}\lambda(g^n)$: il ne dépend pas de n.

L'application $\lambda : G \to E^+$ est $\mathbb{R}$-analytique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et localement constante si $\mathbb{K}$ est non-archimédien. On dit qu'un élément g de G est loxodromique si et seulement si $\lambda(g)$ appartient à l'intérieur de E^+.

2.3 Décomposition de Cartan

Soit K un bon sous-groupe compact maximal de G relativement à A, c'est à dire tel que le normalisateur de A dans K contienne des représentants de tous les éléments de W.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, K est l'ensemble des points fixes d'une involution de Cartan τ de G telle que, pour tout a dans A, $\tau(a) = a^{-1}$.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, l'existence de bon sous-groupes compacts maximaux et la suite de ce paragraphe résultent de la théorie de Bruhat-Tits (*cf.* [5], [6] et [24]).

On a $G = KZ^+K$. De plus, pour tous z_1, z_2 dans Z^+, z_2 appartient à Kz_1K si et seulement si $\nu(z_1) = \nu(z_2)$. En particulier, on a $\ker \nu = K \cap Z$. Il existe donc une unique application $\mu : G \to E^+$ telle que, pour tous g_1, g_2 dans G, g_2 appartienne à Kg_1K si et seulement si $\mu(g_1) = \mu(g_2)$ et que $\mu_{|Z^+} = \nu_{|Z^+}$. L'application μ est propre. Elle est $\mathbb{R}$-analytique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et localement constante si $\mathbb{K}$ est non-archimédien. Pour tout g dans G, on a la formule du rayon spectral :

$$\frac{1}{n}\mu(g^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(g).$$

Dorénavant, on fixe, pour tout élément g de G, un élément z_g de Z^+ et des éléments k_g et l_g de K tels que $g = k_g z_g l_g$.

2.4 Représentations de G

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On munit $\mathbb{P}(V)$ de sa topologie usuelle d'espace compact.

Si f est un endomorphisme de V, on note $\lambda_1(f)$ son rayon spectral, c'est à dire le plus grand des modules de ses valeurs propres. Rappelons qu'un endomorphisme f de V est dit proximal si et seulement si il possède une unique valeur propre de module $\lambda_1(f)$ et que cette valeur propre est de multiplicité 1. En particulier, cette valeur propre appartient à $\mathbb{K}$. On note alors V_f^+ sa droite propre de valeur propre dominante et $V_f^<$ l'unique supplémentaire f-stable de V_f^+ : l'hyperplan $V_f^<$ est l'orthogonal de la droite propre dominante de f^* dans V^*. Un endomorphisme f est proximal si et seulement si il possède un point fixe attracteur dans $\mathbb{P}(V)$ et ce point fixe est alors V_f^+.

Soit (π, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$.

On appelle poids restreints de π les poids rationnels de la représentation $\pi_{|\mathbf{A}}$. D'après [22, 7.2], l'ensemble des poids restreints possède un plus grand élément χ pour l'ordre associé à Π sur X. On dit que χ est le plus haut poids restreint de π. Les autres poids restreints sont de la forme $\chi - \sum_{\alpha\in\Pi} n_\alpha \alpha$

avec, pour tout α dans Π, $n_\alpha \in \mathbb{N}$. On note V_Π^+ l'espace poids associé à χ et $V_\Pi^<$ l'unique supplémentaire A-stable de V_Π^+. On dit que π est proximale si et seulement si $\dim V_\Pi^+ = 1$.

Pour tout g dans G, on a $\lambda_1(\pi(g)) = q^{\chi(\lambda(g))}$ et, si π est proximale, pour tout élément loxodromique g de G, $\pi(g)$ est proximal.

D'après [22], on a :

Proposition 2.1 (Tits)**.** *Il existe une famille de représentations rationnelles irréductibles proximales* $(\pi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ *de* $\mathbf{G}$ *telles que, pour tout* α *dans* Π*, le plus haut poids restreint* χ_α *de* (π_α, V_α) *soit un multiple du poids fondamental associé à* α*.*

Dorénavant, on fixe une telle famille de représentations. L'ensemble de formes linéaires $\{\chi_\alpha | \alpha \in \Pi\}$ engendre E^*.

Pour tout α dans Π, on note X_α la droite V_{α,χ_α} et $V_\alpha^<$ son unique supplémentaire A-stable. Tous les poids de $\mathbf{A}$ dans $V_\alpha^<$ sont de la forme

$$\chi_\alpha - \alpha - \sum_{\beta\in\Pi} n_\beta \beta$$

avec, pour tout β dans Π, $n_\beta \in \mathbb{N}$.

2.5 Bonnes normes

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on dit qu'une norme sur V est une bonne norme si et seulement si elle est induite par un produit scalaire euclidien (resp. un produit scalaire hermitien). Si V est muni d'une bonne norme, on dit qu'une somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ est une bonne somme directe si et seulement si elle est orthogonale pour le produit scalaire.

Si $\mathbb{K}$ est non archimédien, on dit qu'une norme sur V est une bonne norme si et seulement si elle est ultramétrique, c'est-à-dire si et seulement si, pour tous v, w dans V, on a $\|v + w\| \leq \max(\|v\|, \|w\|)$. Si V est muni d'une bonne norme, on dit qu'une somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ est une bonne somme directe si et seulement si, pour tout $v = v_1 + v_2$ dans V, avec v_1 dans V_1 et v_2 dans V_2, on a :

$$\|v\| = \max(\|v_1\|, \|v_2\|).$$

Si V est muni d'une bonne norme, il existe une unique bonne norme sur $\wedge^2 V$ telle que, pour toute bonne somme directe $V_1 \oplus V_2 \subset V$ la somme directe

$(\wedge^2 V_1) \oplus (V_1 \wedge V_2) \oplus (\wedge^2 V_2) \subset \wedge^2 V$ soit bonne et que, pour v, w dans V, si $\mathbb{K}v$ et $\mathbb{K}w$ sont en bonne somme directe, on ait $\|v \wedge w\| = \|v\| \, \|w\|$. Alors, l'application

$$\begin{aligned}(V \backslash \{0\})^2 &\to \mathbb{R}_+ \\ (v, w) &\mapsto \frac{\|v \wedge w\|}{\|v\| \, \|w\|}\end{aligned}$$

factorise à travers une distance sur $\mathbb{P}(V)$, qui y induit sa topologie usuelle. C'est un résultat classique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le cas général est traité dans [16]. On munira toujours l'espace projectif d'un espace vectoriel bien normé de cette distance. Si le dual V^* de V est muni de la bonne norme duale de celle de V, pour tous $v \neq 0$ dans $\mathbb{P}(V)$ et $\varphi \neq 0$ dans $\mathbb{P}(V^*)$, on a :

$$d(\mathbb{K}v, \varphi^\perp) = \frac{|\varphi(v)|}{\|\varphi\| \, \|v\|} = d(\mathbb{K}\varphi, v^\perp)$$

et, pour tous $\varphi, \psi \neq 0$ dans V^*, $d(\mathbb{K}\varphi, \mathbb{K}\psi)$ est la distance de Hausdorff entre les hyperplans projectifs $\varphi^\perp$ et $\psi^\perp$.

Soit (π, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$. Pour tout κ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, on note V_κ l'espace poids associé à κ.

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on peut choisir un produit scalaire (resp. un produit scalaire hermitien) sur V pour lequel les éléments de $\pi(K)$ sont orthogonaux (resp. unitaires) et ceux de $\pi(A)$ symétriques (resp. hermitiens). On munit V de la norme associée. Les $(V_\kappa)_{\kappa \in \mathrm{X}(\mathbf{A})}$ sont en bonne somme directe et, pour tout z dans Z, pour tout κ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, $\pi(z)$ induit sur V_κ une similitude de rapport $e^{\kappa(\nu(z))}$.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on peut trouver, d'après [17, 6], une norme ultramétrique K-invariante sur V telle que les $(V_\kappa)_{\kappa \in \mathrm{X}(\mathbf{A})}$ sont en bonne somme directe et que, pour tout z dans Z, pour tout κ dans $\mathrm{X}(\mathbf{A})$, $\pi(z)$ induise sur V_κ une similitude de rapport $q^{\kappa(\nu(z))}$.

Dans les deux cas, on dira qu'une norme sur V ayant ces propriétés est (π, A, K)-bonne.

Munissons donc V d'une norme (π, A, K)-bonne et $\mathbb{P}(V)$ de la distance associée. Pour g dans G, on a $\|\pi(g)\| = q^{\chi(\mu(g))}$. Pour tous $\varepsilon > 0$ et g dans G, on note :

$$V_{\pi,g}^M = k_g V_\Pi^+ \text{ et } V_{\pi,g}^m = l_g^{-1} V_\Pi^<$$

ainsi que :

$$B_{\pi,g}^\varepsilon = B\left(\mathbb{P}\left(V_{\pi,g}^m\right), \varepsilon\right).$$

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si, pour tout α dans Π, $\alpha(\mu(g)) > 0$, $V^M_{\pi,g}$ et $V^m_{\pi,g}$ ne dépendent pas des k_g et l_g choisis.

Le lemme suivant provient de [18, 4.1] :

Lemme 2.2. *Soient g dans G et $\varepsilon > 0$. Pour tout $v \neq 0$ dans V, si $\mathbb{K}v \in B^\varepsilon_{\pi,g}$, on a $\|gv\| \geq \varepsilon \|\pi(g)\| \|v\|$.*

D'après [19, 4.3], on a :

Lemme 2.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \geq 0$ tel que, pour tout g dans G, si, pour tout α dans Π, $\alpha(\mu(g)) \geq C$, alors*

$$gB^\varepsilon_{\pi,g} \subset b\left(V^M_{\pi,g}, \varepsilon\right)$$

et, si π est proximale, la restriction de g à $B^\varepsilon_{\pi,g}$ est ε-lipschitzienne.

Dorénavant, on munit, pour tout α dans Π, V_α d'une norme (π_α, A, K)-bonne et $\mathbb{P}(V_\alpha)$ de la distance associée. Pour simplifier, on note $V^M_{\alpha,g}$, $V^m_{\alpha,g}$ et $B^\varepsilon_{\alpha,g}$ pour $V^M_{\pi_\alpha,g}$, $V^m_{\pi_\alpha,g}$ et $B^\varepsilon_{\pi_\alpha,g}$

2.6 Sous-groupes paraboliques et variétés drapeaux

Soit $\mathbf{P}$ le $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique minimal de $\mathbf{G}$ associé au choix de $\mathbf{A}$ et de Σ^+ et P le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. De même, on note $\mathbf{P}^\vee$ le $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique minimal opposé à $\mathbf{P}$ par rapport à $\mathbf{A}$ et $P^\vee$ le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des $\mathbb{K}$-sous-groupes paraboliques minimaux de $\mathbf{G}$. L'application

$$\begin{aligned} G &\to \mathcal{P} \\ g &\mapsto g\mathbf{P}g^{-1} \end{aligned}$$

identifie $\mathcal{P}$ et G/P : on peut ainsi voir $\mathcal{P}$ comme une variété $\mathbb{K}$-analytique. Comme l'action de K sur $\mathcal{P}$ est transitive, cette variété analytique est compacte.

On note ξ_0 le sous-groupe $\mathbf{P}$ vu comme un point de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}^-$ la sous-variété fermée $\mathcal{P} \setminus P^\vee \xi_0$ de $\mathcal{P}$.

Pour tout α dans Π, GX_α est une sous-variété $\mathbb{K}$-analytique fermée de $\mathbb{P}(V_\alpha)$. En particulier, le G-entrelacement

$$\mathcal{P} \to \prod_{\alpha \in \Pi} \mathbb{P}(V_\alpha)$$

qui, à un sous-groupe parabolique minimal, associe la famille de ses uniques points fixes dans les V_α, $\alpha \in \Pi$, est une immersion fermée. Il identifie ξ_0 avec $(X_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ et $\mathcal{Q}^-$ avec le complémentaire de l'intersection de son image et de $\prod_{\alpha\in\Pi} (\mathbb{P}(V_\alpha) \setminus \mathbb{P}(V_\alpha^<))$. Pour tout ξ dans $\mathcal{P}$, on note $(\xi_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ son image par cette application. On munit $\mathcal{P}$ de la distance induite par la distance produit de $\prod_{\alpha\in\Pi} \mathbb{P}(V_\alpha)$. Alors, K agit par isométries et G par transformations lipschitziennes sur $\mathcal{P}$.

Soit g dans G. Alors g est loxodromique si et seulement si il possède un point fixe attracteur dans $\mathcal{P}$. Dans ce cas, on note ξ_g^+ ce point fixe : il s'identifie à $\left(V^+_{\alpha,\pi(g)}\right)_{\alpha\in\Pi}$.

Pour tous g dans G et $\varepsilon > 0$, on pose :

$$\xi_g^M = k_g\xi_0 \text{ et } B_g^\varepsilon = \left\{\xi \in \mathcal{P} \,\middle|\, \forall\alpha \in \Pi \quad \xi_\alpha \in B^\varepsilon_{\alpha,g}\right\}.$$

Comme dans [19, 5.1], on a, d'après le lemme 2.3 :

Lemme 2.4. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \geq 0$ tel que, pour tout g dans G, si, pour tout α dans Π, $\alpha(\mu(g)) \geq C$, alors*

$$gB_g^\varepsilon \subset b\left(\xi_g^M, \varepsilon\right)$$

et la restriction de g à B_g^ε est ε-lipschitzienne.

2.7 Cocycle de Buseman

On a la décomposition d'Iwasawa $G = KZU_\Pi$. Plus précisément, pour tous z_1, z_2 dans Z, z_2 appartient à Kz_1U_Π si et seulement si $\nu(z_1) = \nu(z_2)$.

Soient g dans G et ξ dans $\mathcal{P}$. Soit k dans K tel que $\xi = k\xi_0$. Si $gk = lzu$ avec l dans K, z dans Z et u dans U_Π, on pose $\sigma(g, \xi) = \nu(z)$. Il ne dépend que de g et de ξ. L'application σ ainsi construite est $\mathbb{R}$-analytique si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et localement constante si $\mathbb{K}$ est non-archimédien. On a la relation :

$$\forall g, h \in G \quad \forall\xi \in \mathcal{P} \quad \sigma(gh, \xi) = \sigma(g, h\xi) + \sigma(h, \xi).$$

Interprétons ce cocycle en termes de mesures sur la variété des drapeaux. Rappelons qu'on a noté ρ la forme linéaire sur E qui est la somme des racines positives multipliées par la dimension de leur espace poids dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Alors, si ν_K est la probabilité K-invariante de $\mathcal{P}$, l'action de G sur

$\mathcal{P}$ est absolument continue par rapport à ν_K et, d'après [19, 6.3], on a, pour g dans G et ξ dans $\mathcal{P}$,

$$\frac{\mathrm{d}g_*\nu_K}{\mathrm{d}\nu_K} = q^{-\rho(\sigma(g^{-1},\xi))}.$$

Soit (π, V) une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de $\mathbf{G}$ de plus haut poids restreint χ munie d'une norme (π, A, K)-bonne. Alors, pour tout ξ dans $\mathcal{P}$, si W est le plus petit sous-espace vectoriel non nul de V stable par le sous-groupe parabolique associé à ξ, on a :

$$\forall v \in W \backslash \{0\} \quad \frac{\|gv\|}{\|v\|} = q^{\chi(\sigma(g,\xi))}.$$

En particulier, si g est un élément loxodromique de G, on a $\sigma(g, \xi_g^+) = \lambda(g)$.

D'après le lemme 2.2, on en déduit, comme dans [19, 6.2],

Lemme 2.5. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\kappa \geq 0$ tel que, pour tout θ dans Π, pour tout g dans G, pour tout ξ dans B_g^ε, on ait :*

$$\|\sigma(g, \xi) - \mu(g)\| \leq \kappa.$$

2.8 Sous-groupes discrets

Nous rappelons ici une partie des résultats de [2], [18] et [19].

Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G. On appelle cône limite de Γ et on note l_Γ le cône fermé engendré par $\lambda(\Gamma)$ dans E^+. Par la formule du rayon spectral, l_Γ est contenu dans le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$.

Théorème 2.6 (Benoist, [2])**.** *Le cône l_Γ est exactement le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$ et l'ensemble $\mu(\Gamma)$ reste à distance bornée de l_Γ. Le cône l_Γ est convexe et, si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.*

On appelle type de Γ et on note θ_Γ l'ensemble des racines de Π qui ne sont pas nulles sur l_Γ : si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, $\theta_\Gamma = \Pi$. S Γ est discret, on a $\theta_\Gamma \neq \emptyset$. On note F_Γ le sous-espace vectoriel de E engendré par l_Γ. À nouveau, si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, $F_\Gamma = E$.

Supposons, dorénavant, pour simplifier le cas non-archimédien, qu'on a $\theta_\Gamma = \Pi$. Il vient :

Théorème 2.7 (Benoist, [2, 3.6], Guivarc'h [9, 2.5])**.** *Le groupe Γ agit sur $\mathcal{P}$ de manière proximale. Le plus petit fermé Γ-invariant non vide de $\mathcal{P}$ est l'adhérence de l'ensemble des points fixes attracteurs des éléments loxodromiques de Γ.*

On dit que cet ensemble est l'ensemble limite de Γ dans $\mathcal{P}$.

Supposons dorénavant Γ discret. Soit N une norme sur E. Pour tout cône ouvert $\mathcal{C}$ de E, on note $\tau_{\mathcal{C}}$ l'exposant de convergence de la série de Dirichlet :

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \mu(\gamma)\in\mathcal{C}}} q^{-tN(\mu(\gamma))} \quad (t\in\mathbb{R})$$

et, pour x dans E, on pose :

$$\psi_\Gamma(x) = N(x)\inf \tau_{\mathcal{C}},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des cônes ouverts $\mathcal{C}$ de E qui contiennent x. La fonction ψ_Γ ne dépend pas de la norme choisie. Elle est positivement homogène et vaut $-\infty$ en dehors de l_Γ. On l'appelle indicateur de croissance de Γ. Pour toute norme N sur E, la série de Dirichlet :

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-tN(\mu(\gamma))} \quad (t\in\mathbb{R})$$

a pour exposant de convergence

$$\sup_{\substack{x\in E \\ N(x)=1}} \psi_\Gamma(x).$$

Plus précisément, d'après [18, 5.2] :

Proposition 2.8. *Soit $\theta : E\to\mathbb{R}$ une fonction homogène et continue.*

Si, pour tout x dans $E\backslash\{0\}$, $\theta(x) > \psi_\Gamma(x)$, alors on a :

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\theta(\mu(\gamma))} < \infty.$$

S'il existe un x dans $E\backslash\{0\}$ tel que $\theta(x) < \psi_\Gamma(x)$, alors on a :

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\theta(\mu(\gamma))} = \infty.$$

Le théorème suivant est prouvé dans [18] :

Théorème 2.9. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G. La fonction ψ_Γ est majorée par ρ. Elle est concave et semi-continue supérieurement. L'ensemble*

$$\{x \in E | \psi_\Gamma(x) > -\infty\}$$

est exactement le cône limite de Γ. De plus, ψ_Γ est positive sur le cône limite de Γ et strictement positive sur son intérieur relatif.

Soient ν une probabilité borélienne sur $\mathcal{P}$ et φ une forme linéaire de E. On dit que ν est une (Γ, φ)-mesure de Patterson si et seulement si l'action de Γ sur $\mathcal{P}$ est absolument continue par rapport à ν et si, pour tout γ dans Γ, pour tout ξ dans $\mathcal{P}$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_* \nu}{\mathrm{d}\nu}(\xi) = q^{-\varphi(\sigma(\gamma^{-1}, \xi))}.$$

D'après [19], on a :

Théorème 2.10. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G avec $\theta_\Gamma = \Pi$. Soit φ une forme linéaire de E.*

- *(i) S'il existe une (Γ, φ)-mesure de Patterson, on a $\varphi \geq \psi_\Gamma$.*
- *(ii) Si φ est tangente à ψ_Γ en une direction intérieure à E^+, alors il existe une (Γ, φ)-mesure de Patterson concentrée sur Λ_Γ.*

3 Groupes de Schottky

Dans cette section, nous construisons des sous-groupes discrets du type de Schottky, semblables à ceux de [2], et nous procédons au codage de leur ensemble limite. Nous rappelons alors des éléments de formalisme thermodynamique, en particulier des propriétés de la pression.

3.1 Notations

Soit p un entier ≥ 2. Nous allons introduire un sous-groupe discret de G, engendré par des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$. Nous construisons $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ et $\gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_p^{-1}$ à partir de leurs points attracteurs et de leurs hyperplans répulsifs dans les $\mathbb{P}(V_\alpha)$, $\alpha \in \Pi$.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Étant donné un point X de $\mathbb{P}(V)$, pour alléger les notations, on notera $\mathbb{P}(X)$ pour l'hyperplan projectif $\mathbb{P}\left(X^\perp\right)$ dans

$\mathbb{P}(V^*)$. Rappelons que, si V est muni d'une bonne norme, si X est un point de $\mathbb{P}(V)$ et Y un point de $\mathbb{P}(V^*)$, on a $d(X, \mathbb{P}(Y)) = d(Y, \mathbb{P}(X))$.

Pour ξ dans $\mathcal{P}$, on a noté $(\xi_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ la famille des points fixes du sous-groupe parabolique associé à ξ dans les $(V_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$. On note encore $(\xi^*_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ la famille des points fixes du sous-groupe parabolique associé à ξ dans les représentations duales $(V^*_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$.

On se donne des points $\xi_1^+, \ldots, \xi_p^+$ et $\xi_1^-, \ldots, \xi_p^-$ de $\mathcal{P}$. Pour tous $1 \leq i \leq p$ et α dans Π, on note $X^+_{\alpha,i} = (\xi_i^+)_\alpha$ (resp. $X^+_{\alpha,i} = (\xi_i^+)_\alpha$) et, de même, $Y^+_{\alpha,i} = (\xi_i^+)^*_\alpha$ (resp. $Y^-_{\alpha,i} = (\xi_i^-)^*_\alpha$). Pour $\varepsilon > 0$, on note $B_i^{\varepsilon,+}$ (resp. $B_i^{\varepsilon,-}$) l'ensemble des ξ dans $\mathcal{P}$ tels que, pour tout α dans Π, $d(\xi_\alpha, \mathbb{P}\left(Y^-_{\alpha,i}\right)) \geq \varepsilon$ (resp. $d(\xi_\alpha, \mathbb{P}\left(Y^+_{\alpha,i}\right)) \geq \varepsilon$).

On suppose qu'il existe un réel $0 < \varepsilon < 1$ tel que, pour tout α dans Π, on ait :

(i) pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, $d\left(X^+_{\alpha,i}, \mathbb{P}\left(Y^-_{\alpha,i}\right)\right) > 6\varepsilon$ et $d\left(X^-_{\alpha,i}, \mathbb{P}\left(Y^+_{\alpha,i}\right)\right) > 6\varepsilon$.

(ii) pour tous $i \neq j$ dans $[\![1,p]\!]$, $d\left(X^+_{\alpha,i}, \mathbb{P}\left(Y^+_{\alpha,j}\right) \cup \mathbb{P}\left(Y^-_{\alpha,j}\right)\right) > 4\varepsilon$ et $d\left(X^-_{\alpha,i}, \mathbb{P}\left(Y^+_{\alpha,j}\right) \cup \mathbb{P}\left(Y^-_{\alpha,j}\right)\right) > 4\varepsilon$.

(iii) pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ et pour tout X dans $\mathbb{P}(V_\alpha)$, $B(\mathbb{P}(X), \varepsilon) \cap B(\mathbb{P}\left(X^+_{\alpha,i}\right), \varepsilon) \neq \emptyset$ et $B(\mathbb{P}(X), \varepsilon) \cap B(\mathbb{P}\left(X^-_{\alpha,i}\right), \varepsilon) \neq \emptyset$.

(iv) l'ensemble

$$B = \bigcap_{i=1}^{p} \left(B_i^{3\varepsilon,+} \cap B_i^{3\varepsilon,-}\right)$$

est non vide.

D'après le lemme 2.3, il existe un réel $C \geq 0$ tel que, pour tout g dans G, si, pour tout α dans Π, on a $\alpha(\mu(g)) \geq C$, alors, pour α dans Π, on a :

$$gB^\varepsilon_{\alpha,g} \subset b\left(V^M_{\alpha,g}, \varepsilon\right) \text{ et } gB^{*,\varepsilon}_{\alpha,g} \subset b\left(V^{*,M}_{\alpha,g}, \varepsilon\right)$$

et la restriction de g à $B^\varepsilon_{\alpha,g}$ et à $B^{*,\varepsilon}_{\alpha,g}$ est ε-lipschitzienne.

Le résultat suivant permet de calculer la composante de Cartan de beaucoup de mots dans G :

Lemme 3.1. *Il existe un réel $\kappa > 0$ vérifiant la propriété suivante : soit l un entier ≥ 1 ; soient $g_1, \ldots, g_l$ dans G tels que, pour tous i dans $[\![2,l]\!]$ et α dans Π, on ait $\alpha(\mu(g_i)) \geq C$ et*

$$d\left(V^M_{\alpha,g_{i-1}}, \mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,g_i}\right)\right) \geq 2\varepsilon,$$

alors, on a :

$$\|\mu(g_l \dots g_1) - \mu(g_l) - \dots - \mu(g_1)\| \leq (l-1)\kappa.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.2, pour tout g dans G, pour tout α dans Π, pour tout v dans V_α, on a :

$$\left(\mathbb{K}v \in B^\varepsilon_{\alpha,g}\right) \Rightarrow \left(\|gv\| \geq \varepsilon q^{\chi_\alpha(\mu(g))} \|v\|\right).$$

Soient alors $l \geq 1$ et $g_1, \dots, g_l$ dans G tels que, pour tous i dans $[\![2, l]\!]$ et α dans Π, on ait $\alpha(\mu(g_i)) \geq C$ et

$$d\left(V^M_{\alpha,g_{i-1}}, \mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,g_i}\right)\right) \geq 2\varepsilon,$$

Soit α dans Π. On a :

$$\|\pi_\alpha(g_l \dots g_1)\| \leq \|\pi_\alpha(g_l)\| \dots \|\pi_\alpha(g_1)\|$$

donc

$$\chi_\alpha(\mu(g_l \dots g_1)) \leq \chi_\alpha(\mu(g_l)) + \dots + \chi_\alpha(\mu(g_1)).$$

Soit $v \neq 0$ dans V_α avec $g_1 v \in V^M_{\alpha,g_1}$. On a

$$\|g_1 v\| = q^{\chi_\alpha(\mu(g_1))} \|v\|.$$

Pour tout i dans $[\![2, l]\!]$, on a :

$$\mathbb{K}g_{i-1} \dots g_1 v \in b\left(V^M_{\alpha,g_i}, \varepsilon\right) \subset B^\varepsilon_{\alpha,g_i}$$

et, donc,

$$\|g_i \dots g_1 v\| \geq \varepsilon q^{\chi_\alpha(\mu(g_i))} \|g_{i-1} \dots g_1 v\|.$$

Il vient :

$$\|g_l \dots g_1 v\| \geq \varepsilon^{l-1} q^{\chi_\alpha(\mu(g_l)) + \dots + \chi_\alpha(\mu(g_1))} \|v\|$$

et, donc,

$$\chi_\alpha(\mu(g_l \dots g_1)) \geq (l-1)\log_q \varepsilon + \chi_\alpha(\mu(g_l)) + \dots + \chi_\alpha(\mu(g_1)),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

On fixe un réel κ comme dans l'énoncé du lemme. On peut trouver un réel $D \geq C$ tel que, pour tous x, y dans E avec $\|y\| \leq \kappa$, pour tout α dans Π, on ait :

$$\alpha(x) \geq D \Rightarrow \alpha(x+y) \geq C.$$

On se donne à présent des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ de G tels que l'on ait, pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, $\xi^M_{\gamma_i} = \xi^+_i$ et $\xi^M_{\gamma_i^{-1}} = \xi^-_i$ ainsi que, pour tout α dans Π, $\alpha(\mu(\gamma_i)) \geq D$. Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, γ_i (resp. γ_i^{-1}) envoie $B_i^{\varepsilon,-}$ dans $b\left(\xi_i^+, \varepsilon\right)$ (resp. $B_i^{\varepsilon,+}$ dans $b\left(\xi_i^-, \varepsilon\right)$) et sa restriction à $B_i^{\varepsilon,-}$ (resp. à $B_i^{\varepsilon,+}$) est ε-lipschitzienne. En particulier, d'après [1, 6.1], γ_i et γ_i^{-1} sont Π-proximaux et leurs points fixes attracteurs dans $\mathcal{P}$, ξ^+_{Π,γ_i} et $\xi^+_{\Pi,\gamma_i^{-1}}$, appartiennent respectivement à $b\left(\xi_i^+, \varepsilon\right)$ et $b\left(\xi_i^-, \varepsilon\right)$.

On note Γ le sous-groupe de G engendré par $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$. D'après [23, 4.4], quitte à remplacer γ_1 et γ_2 par des éléments proches et à diminuer ε, on peut supposer que Γ est Zariski dense dans G.

On note W l'ensemble

$$\left\{\gamma_i, \gamma_i^{-1} \,|1 \leq i \leq p\right\}.$$

Pour tout u dans W, on note $b_u = b\left(\xi_i^+, \varepsilon\right)$ (resp. $b_u = b\left(\xi_i^-, \varepsilon\right)$) et $B_u = B_i^{3\varepsilon,-}$ (resp. $B_u = B_i^{3\varepsilon,-}$) si $u = \gamma_i$ (resp. γ_i^{-1}) avec $1 \leq i \leq p$.

On note U_0 l'ensemble des suites finies (éventuellement vides) $(u_0, \ldots, u_n)$ d'éléments de W telles que, pour tout i dans $[\![0, n-1]\!]$, on ait $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$ et on note Θ_0 l'application de U_0 dans Γ qui, à une suite $(u_0, \ldots, u_n)$, associe $u_0 \ldots u_n$. Pour tout mot non trivial $u = (u_0, \ldots, u_n)$ dans U_0, on a $\Theta_0(u)B_{u_n} \subset b_{u_0}$ et la restriction de $\Theta_0(u)$ à B_{u_n} est ε^{n+1}-lipschitzienne.

On note $l : U_0 \to \mathbb{N}$ la longueur des mots. On dit qu'un mot non trivial $(u_0, \ldots, u_n)$ dans U_0 est très réduit si et seulement si l'on a $u_n \neq u_0^{-1}$.

On connait bien la structure du groupe Γ :

Proposition 3.2. *Le groupe Γ est le groupe libre engendré par $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$. Il est discret dans G et tous ses éléments non triviaux sont Π-proximaux ; plus précisément, pour tout mot très réduit $u = (u_0, \ldots, u_n)$ dans U_0, pour tout ξ dans B, on a :*

$$\Theta_0(u)^n \xi \xrightarrow[n \to \infty]{} \xi^+_{\Theta_0(u)}.$$

Le cône limite l_Γ de Γ est saillant et ne contient que des directions intérieures à E^+. Pour tout $u = (u_0, \ldots, u_n)$ dans U_0, on a :

$$\xi^M_{\Theta(u)} \in u B_{u_n}.$$

Enfin, il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout $u = (u_0, \dots, u_n)$ dans U_0, pour tout ξ dans B_{u_n}, on ait :

$$\|\sigma_\Pi(\Theta_0(u), \xi) - \mu(\Theta_0(u))\| \leq M.$$

Démonstration. Le fait que Γ soit libre et discret dans G provient d'un raisonnement de tennis de table sur $\mathcal{P}$. Ceci et les propriétés de proximalité des éléments très réduits de Γ est démontré dans [1, 7.2].

Démontrons les autres assertions. Pour u dans W et α dans Π, notons $X_{\alpha,u} = X^+_{\alpha,i}$ et $Y_{\alpha,u} = Y^+_{\alpha,i}$ (resp. $X_{\alpha,u} = X^+_{\alpha,i}$ et $Y_{\alpha,u} = Y^+_{\alpha,i}$) si $u = \gamma_i$ (resp. γ_i^{-1}) avec $1 \leq i \leq p$.

Soit $u = (u_0, \dots, u_n)$ un élément non trivial de U_0. On a, d'après le lemme 3.1 :

$$\|\mu(u_0 \dots u_n) - \mu(u_0) - \dots - \mu(u_n)\| \leq n\kappa$$

et, donc, pour tout α dans Π,

$$\alpha(\mu(u_0 \dots u_n)) \geq (n+1)C.$$

En particulier, le cône limite de Γ ne contient que des directions intérieures à E^+.

Par ailleurs, on sait que l'ensemble $B(\mathbb{P}(X_{\alpha,u_n}), \varepsilon) \cap B^\varepsilon_{\pi^*_\alpha, \Theta_0(u)}$ n'est pas vide. Soit donc Y dans $B(\mathbb{P}(X_{\alpha,u_n}), \varepsilon) \cap B^\varepsilon_{\pi^*_\alpha, \Theta_0(u)}$. On a :

$$u_0 \dots u_n Y \in b(Y_{\alpha,u_0}, \varepsilon)$$

et, comme, pour tout α dans Π, $\alpha(\mu(\Theta_0(u))) \geq C$,

$$u_0 \dots u_n Y \in b\left(V^{*,M}_{\alpha,\Theta_0(u)}, \varepsilon\right).$$

Il vient :

$$d\left(V^{*,M}_{\alpha,\Theta_0(u)}, Y_{\alpha,u_0}\right) \leq 2\varepsilon$$

et, donc, en appliquant ce résultat à u^{-1},

$$d\left(V^{*,M}_{\alpha,\Theta_0(u)^{-1}}, Y_{\alpha,u_n^{-1}}\right) \leq 2\varepsilon.$$

Comme $V^m_{\alpha,\Theta_0(u)} = (V^{*,M}_{\alpha,\Theta_0(u)^{-1}})^\perp$, cela signifie, d'après les propriétés de la distance d vues au paragraphe 2.5, que la distance de Hausdorff entre les hyperplans projectifs $\mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,\Theta_0(u)}\right)$ et $\mathbb{P}\left(Y_{\alpha,u_n^{-1}}\right)$ est $\leq 2\varepsilon$. D'une part, comme $d\left(u^{-1}V^M_{\alpha,\Theta(u)}, \mathbb{P}\left(V^m_{\alpha,\Theta_0(u)}\right)\right) = 1$, on a :

$$d\left(u^{-1}V^M_{\alpha,\Theta(u)}, \mathbb{P}\left(Y_{\alpha,u_n^{-1}}\right)\right) \geq 1 - 2\varepsilon \geq 3\varepsilon$$

et, donc, $\xi^M_{\Theta(u)} \in uB_{u_n}$. D'autre part, on a

$$B_{u_n} \subset B^\varepsilon_{\Pi,\Theta_0(u)},$$

d'où la dernière assertion, d'après le corollaire 2.5. □

Dans la suite, nous dirons que Γ est un groupe du type de Schottky.

3.2 Codage de l'ensemble limite

On note U l'ensemble des suites infinies $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de W telles que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait $u_n \neq u_{n+1}^{-1}$. On note s le décalage dans U. On munit U de la distance définie par :

$$\forall u \neq v \in U \quad d(u,v) = 2^{-\min\{n\in\mathbb{N} | u_n \neq v_n\}}.$$

Alors U est un espace métrique compact.

Nous pouvons à présent décrire précisément l'ensemble limite de Γ comme dans [7, III] et [13, 2.9]. Rappelons qu'on a supposé que l'ensemble $B = \cap_{u\in W} B_u$ était non vide.

Proposition 3.3. *Pour tout u dans U, pour tout ξ dans B, la suite*

$$(u_0 \dots u_n \xi)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge dans $\mathcal{P}$ et sa limite ne dépend pas de ξ. L'application

$$\begin{aligned} U &\to \mathcal{P} \\ u &\mapsto \lim_{n\to\infty} u_0 \dots u_n B \end{aligned}$$

induit un homéomorphisme bi-höldérien Θ de U sur Λ_Γ.

Démonstration. Soit u dans U. Pour tout ξ dans B, pour tout n dans $\mathbb{N}$, comme $u_{n+1} \neq u_n^{-1}$, on a

$$u_{n+1}\xi \in b_{u_{n+1}} \subset B_{u_n}$$

et, donc,

$$d(u_0 \dots u_n\xi, u_0 \dots u_{n+1}\xi) \leq \varepsilon^{n+1} d(\xi, u_{n+1}\xi).$$

Par conséquent, la suite $(u_0 \dots u_n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{P}$. Par ailleurs, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\forall \xi, \eta \in B \quad d(u_0 \dots u_n\xi, u_0 \dots u_n\eta) \leq \varepsilon^{n+1} d(\xi, \eta),$$

d'où l'indépendance de la limite par rapport au point de B choisi et le caractère höldérien de l'application $U \to \mathcal{P}$.

Pour tout ξ dans B, pour tous u, v dans U_0 non triviaux avec $u_0 \neq v_0$, on a :

$$\Theta_0(u)\xi \in b_{u_0} \text{ et } \Theta_0(v)\xi \in b_{v_0}$$

donc

$$d(\Theta_0(u)\xi, \Theta_0(v)\xi) \geq 4\varepsilon.$$

Soit $\varpi > 0$ tel que, pour tout u_0 dans W, pour tous ξ, η dans $\mathcal{P}$, on ait :

$$d(u_0\xi, u_0\eta) \geq \varpi d(\xi, \eta).$$

Soient alors $u \neq v$ dans U et n le plus petit entier naturel tel que $u_n \neq v_n$. Pour tout ξ dans B, pour tout $m \geq n$, on a :

$$d(u_0 \dots u_m\xi, v_0 \dots v_m\xi) \geq \varpi^n d(u_n \dots u_m\xi, v_n \dots v_m\xi) \geq 4\varepsilon\varpi^n$$

d'où l'injectivité de Θ et le caractère höldérien de sa réciproque.

Enfin, soit u un élément périodique de U. Soit $n > 0$ avec $s^n(u) = u$. Alors, d'après la proposition 3.2, on a $\Theta(u) = \xi^+_{u_0 \dots u_{n-1}}$. Comme l'ensemble des suites périodiques est dense dans U, l'ensemble fermé $\Theta(U)$ contient un ensemble dense de points fixes attracteurs d'éléments de Γ. Comme $\Theta(U)$ est clairement stable par Γ, on a bien $\Theta(U) = \Lambda_\Gamma$. $\square$

3.3 Pression des formes linéaires

Rappelons qu'on a noté F_Γ le sous-espace vectoriel de E, éventuellement différent de E quand $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{R}$, engendré par le cône limite l_Γ. Après quelques rappels sur le formalisme thermodynamique nous introduisons ici une fonction analytique P sur le dual de F_Γ qui nous permettra de décrire la fonction ψ_Γ à la section 4.

Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : U \to \mathcal{E}$ une application mesurable. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout u dans U, on note

$$\Sigma_n f(u) = f(u) + f(su) + \ldots + f(s^{n-1}u).$$

Si f est continue à valeurs réelles, on note $p(f)$ sa pression. L'application pression $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est convexe.

Soit $\varpi > 0$. On note H_ϖ l'espace des fonctions complexes höldériennes d'exposant ϖ sur U, muni de sa topologie usuelle d'espace de Banach. Soit f dans H_ϖ, une fonction à valeurs réelles. On note L_f l'opérateur de Ruelle de f ; c'est l'application linéaire qui à toute fonction continue h sur U associe la fonction :

$$\begin{aligned} L_f h : u \mapsto \sum_{\substack{v \in U \\ sv = u}} e^{f(v)} h(v) \\ U \to \mathbb{C}. \end{aligned}$$

C'est un endomorphisme continu de $\mathcal{C}^0(U)$ et de H_ϖ.

D'après le théorème de Ruelle-Perron-Frobenius ([15, 2.2]) et d'après [15, 3.5], pour tout f dans H_ϖ à valeurs réelles, L_f possède dans $\mathcal{C}^0(U)$ une unique droite propre de valeur propre $e^{p(f)}$ et cette droite est engendrée par une fonction > 0, höldérienne d'exposant ϖ. Le reste du spectre de L_f dans H_ϖ est contenu dans un disque de rayon $< e^{p(f)}$. En particulier, d'après le théorème de perturbation des opérateurs linéaires continus, la pression induit une application analytique de H_ϖ dans $\mathbb{R}$.

De même, l'adjoint de L_f possède une unique droite propre de valeur propre $e^{p(f)}$ dans $\mathcal{M}(U)$ et cette droite est engendrée par une mesure de probabilité positive ν. Si h est une fonction propre de valeur propre $e^{p(f)}$ de L_f avec $\int_U h \mathrm{d}\nu = 1$, la probabilité $m = h\nu$ est s-invariante et mélangeante. En particulier, ν est ergodique. On appelle m l'état d'équilibre de f.

Revenons à présent à la description de Γ.

On note f l'application de U dans E telle que, pour tout u dans U, on ait :

$$f(u) = -\sigma(u_0^{-1}, \Theta(u)) = \sigma(u_0, \Theta(s(u))).$$

Comme, pour tout g dans G, l'application $\sigma(g, .) : \mathcal{P} \to E$ est lipschitzienne, l'application f est höldérienne. On fixe une fois pour toutes un réel $\varpi > 0$ tel que f soit höldérienne d'exposant ϖ. En utilisant la relation de cocycle vérifiée par σ, on obtient, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout u dans U,

$$\Sigma_n f(u) = -\sigma\left((u_0 \dots u_{n-1})^{-1}, \Theta(u)\right) = \sigma\left(u_0 \dots u_{n-1}, \Theta(s^n(u))\right).$$

En particulier, pour tout u s-périodique de période n dans U, on a :

$$\Sigma_n f(u) = \lambda(u_0 \dots u_{n-1})$$

et, d'après la proposition 3.2, on a :

Lemme 3.4. *Il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout u dans U, on ait :*

$$\|\Sigma_n f(u) - \mu(u_0 \dots u_{n-1})\| \leq M.$$

On note $\tilde{P}$ la fonction analytique convexe

$$\begin{aligned} \varphi &\mapsto p(-(\log q)\varphi \circ f) \\ E^* &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pour toute φ dans E^*, on note ν_φ la probabilité vecteur propre principal de $L_{-(\log q)\varphi\circ f}$ et m_φ l'état d'équilibre de $-(\log q)\varphi \circ f$. Comme, pour tout borélien $X \subset U$, $\Gamma X \subset X$ implique $sX \subset X$, les mesures ν_φ et m_φ sont Γ-ergodiques.

On note F_Γ° l'orthogonal de F_Γ dans E^*.

Lemme 3.5. *Pour toutes φ_1, φ_2 dans E^*, on a :*

$$(\varphi_1 - \varphi_2 \in F_\Gamma^\circ) \Rightarrow (\tilde{P}(\varphi_1) = \tilde{P}(\varphi_2)).$$

Démonstration. Soit φ dans F_Γ°. Pour tout u s-périodique de période n dans U, on a :

$$\Sigma_n(\varphi \circ f)(u) = \varphi(\lambda(u_0 \dots u_{n-1})) = 0$$

et, donc, d'après [15, 3.7], il existe une fonction h dans H_ϖ telle que l'on ait :

$$\varphi \circ f = h \circ s - h.$$

Par conséquent, si φ_1 et φ_2 sont deux formes linéaires sur E avec $\varphi_1-\varphi_2 \in F_\Gamma^\circ$, il existe h dans H_ϖ telle que, pour tout k dans $\mathcal{C}^\circ(U)$, on ait :

$$L_{-(\log q)\varphi_1\circ f}(k) = e^{-h}L_{-(\log q)\varphi_2\circ f}(e^h k),$$

et, donc, $\tilde{P}(\varphi_1) = \tilde{P}(\varphi_2)$.□

La fonction $\tilde{P}$ factorise à travers une fonction analytique convexe :

$$F_\Gamma^* \cong E^*/F_\Gamma^\circ \to \mathbb{R}.$$

On la note P.

D'après le principe variationnel ([15, 3.5]), pour toutes φ_0, φ dans E^*, on a :

$$\mathrm{d}\tilde{P}(\varphi_0)\varphi = -(\log q)\int_U \varphi \circ f \mathrm{d}m_{\varphi_0}.$$

Pour φ dans F_Γ^*, on note encore m_φ l'état d'équilibre d'un prolongement linéaire de φ à E : il ne dépend que de φ.

On a aussi des renseignements sur la dérivée seconde de P :

Lemme 3.6. *Soit φ_0 dans E^*. Soit φ dans E^* avec $\mathrm{d}\tilde{P}(\varphi_0)\varphi = 0$. Alors, on a :*

$$\mathrm{d}^2\tilde{P}(\varphi_0)(\varphi,\varphi) \geq 0 \text{ et, si } \mathrm{d}^2\tilde{P}(\varphi_0)(\varphi,\varphi) = 0, \text{ alors } \varphi \in F_\Gamma^\circ.$$

En particulier, pour toute φ_0 dans F_Γ^*, $\mathrm{d}^2P(\varphi_0)$ est définie positive sur le noyau de $\mathrm{d}P(\varphi_0)$.

Démonstration. Soient φ_0 et φ dans F_Γ^*. Comme $\tilde{P}$ est convexe, on a :

$$\mathrm{d}^2\tilde{P}(\varphi_0)(\varphi,\varphi) \geq 0.$$

Soit φ dans $\ker \mathrm{d}\tilde{P}(\varphi_0)$ avec $\mathrm{d}^2\tilde{P}(\varphi_0)(\varphi,\varphi) = 0$. D'après [15, 4.12], il existe une fonction h dans H_ϖ et un réel k tels que l'on ait :

$$\varphi \circ f = h \circ s - h + k.$$

Mais alors, comme m_{φ_0} est s-invariante, on a :

$$k = \int_U \varphi \circ f \mathrm{d}m_{\varphi_0} = 0$$

et, donc, pour tout u dans U, s-périodique de période n, on a :

$$\varphi(\lambda(u_0 \dots u_{n-1})) = \Sigma_n(\varphi \circ f)(u) = 0.$$

Comme $\lambda(\Gamma)$ engendre F_Γ, $\varphi_{|F_\Gamma} = 0$.

La dernière assertion est alors triviale. □

4 Comportement asymptotique des groupes de Schottky

Le codage effectué à la section précédente nous permet d'établir ici qu'une forme linéaire φ dans F_Γ^* est $\geq \psi_\Gamma$ si et seulement si $P(\varphi) \leq 0$. Le lemme de convexité ci-après nous donne alors des précisions sur la régularité de ψ_Γ. Par ailleurs, nous montrons que, pour les groupes de Schottky, on peut améliorer le théorème 2.10, puisque, pour toute forme linéaire φ dans E^*, tangente à ψ_Γ, la probabilité vecteur propre principal de l'opérateur de Ruelle associé à φ est l'unique φ-mesure de Patterson sur Λ_Γ. Enfin, nous utilisons ces résultats pour généraliser à ces groupes la construction de Patterson des mesures conformes dans [14].

4.1 Un résultat de convexité

Ce paragraphe est indépendant des précédents. Nous y prouvons le résultat général de convexité qui nous permettra de faire le lien entre la fonction P et ψ_Γ.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\psi : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction concave homogène semi-continue supérieurement (ce qui implique $\psi(0) = 0$). On note :

$$l_\psi = \{x \in \mathcal{E} | \psi(x) > -\infty\} \text{ et } \mathcal{E}_\psi^* = \{\varphi \in \mathcal{E}^* | \varphi \geq \psi\} \ (\neq \emptyset).$$

Alors l_ψ est un cône convexe de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_\psi$ une partie convexe fermée de $\mathcal{E}^*$.

La fonction ψ est entièrement déterminée par l'ensemble $\mathcal{E}_\psi^*$:

Lemme 4.1. *Pour tout x dans $\mathcal{E}$, on a :*

$$\psi(x) = \inf_{\varphi \in \mathcal{E}_\psi^*} \varphi(x).$$

Démonstration. Comme la fonction ψ est concave, on a, pour tout x dans $\mathcal{E}$,

$$\psi(x) = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}^* \\ a \in \mathbb{R} \\ \varphi + a \geq \psi}} (\varphi(x) + a).$$

Soient φ une forme linéaire de $\mathcal{E}$ et a un réel tels que $\varphi + a \geq \psi$. Comme $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, on a $a \geq 0$. Par ailleurs, pour tout $x \neq 0$ dans $\mathcal{E}$, pour tout $t > 0$, on a $\varphi(tx) + a \geq \psi(tx)$ et, donc, en faisant tendre t vers ∞, $\varphi(x) \geq \psi(x)$. Le résultat est alors clair.□

Soit x dans l_ψ. On dit que ψ est de pente finie en x si et seulement si il existe une forme linéaire φ dans $\mathcal{E}^*_\psi$ avec $\varphi(x) = \psi(x)$. On dit sinon que ψ est de pente infinie en x. La fonction ψ est de pente finie en tout point intérieur de l_ψ et les formes tangentes à ψ en ses points de pente finie sont exactement les éléments du bord de $\mathcal{E}^*_\psi$.

Soit $\mathcal{F}$ l'intersection d'une sous-variété affine de $\mathcal{E}^*$ et de $\partial\mathcal{E}^*_\psi$. On dit qu'une forme affine θ sur $\mathcal{E}^*$ est une forme d'appui de $\mathcal{E}^*_\psi$ en $\mathcal{F}$ si et seulement si θ est positive sur $\mathcal{E}^*_\psi$ et nulle sur $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{E}^*_\psi$ est fermé dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^*_\psi$ possède au moins une forme d'appui en $\mathcal{F}$.

Le lemme 4.1 nous permet de caractériser les formes d'appui de $\mathcal{E}^*_\psi$:

Lemme 4.2. *Les formes affines d'appui de $\mathcal{E}^*_\psi$ sont exactement les formes*

$$\begin{array}{c} \varphi \mapsto \varphi(x) - \psi(x) \\ \mathcal{E}^* \to \mathbb{R} \end{array}$$

où $x \in l_\psi$ est de pente finie pour ψ.

Démonstration. Soient x dans $\mathcal{E}$ et α dans $\mathbb{R}$ tels que la forme affine

$$\begin{array}{c} \varphi \mapsto \varphi(x) - \alpha \\ \mathcal{E}^* \to \mathbb{R} \end{array}$$

soit une forme d'appui de $\mathcal{E}^*_\psi$ en $\varphi_0 \in \partial\mathcal{E}^*_\psi$. D'après le lemme 4.1, on a :

$$\varphi_0(x) = \alpha = \inf_{\varphi \in \mathcal{E}^*_\psi} \varphi(x) = \psi(x)$$

et x est bien un point de pente finie pour ψ.

Réciproquement, si x est un point de pente finie pour ψ, la forme affine

$$\begin{array}{c} \varphi \mapsto \varphi(x) - \psi(x) \\ \mathcal{E}^* \to \mathbb{R} \end{array}$$

est bien une forme d'appui de $\mathcal{E}^*_\psi$. □

Nous pouvons alors établir un critère de régularité pour ψ :

Lemme 4.3. *On suppose les ensembles l_ψ et $\mathcal{E}^*_\psi$ d'intérieur non vide. Alors* *(i) l'ensemble $\mathcal{E}_\psi^*$ est strictement convexe si et seulement si la fonction ψ est dérivable en tout point intérieur de l_ψ et de pente infinie en tout point non intérieur de l_ψ.*

(ii) le bord de l'ensemble $\mathcal{E}_\psi^*$ est dérivable si et seulement si la fonction homogène ψ est strictement concave.

Quand ces deux conditions sont réalisées, les applications tangentes induisent des bijections entre $\overset{\circ}{l_\psi}/\mathbb{R}_+^*$ et $\partial\mathcal{E}_\psi^*$.

Démonstration. Démontrons la première assertion.

Commençons par supposer $\mathcal{E}_\psi^*$ strictement convexe. Soit x un vecteur intérieur de l_ψ. Comme x est intérieur à l'ensemble de définition de ψ, il existe une forme linéaire φ dans $\mathcal{E}_\psi^*$ telle que $\varphi(x) = \psi(x)$. Une telle forme est un point de l'intersection de $\mathcal{E}_\psi^*$ et de son hyperplan d'appui associé à x. Comme $\mathcal{E}_\psi^*$ est strictement convexe, il n'en existe qu'une, et ψ est dérivable en x, de dérivée φ. Soit à présent x un vecteur non intérieur de l_ψ. Il existe une forme linéaire θ telle que $\theta(x) = 0$ et que, pour tout y dans l_ψ, on ait $\theta(y) \geq 0$. Supposons alors qu'il existe φ dans $\mathcal{E}_\psi^*$ telle que $\varphi(x) = \psi(x)$. Alors, pour tout $t \geq 0$, on a $\varphi + t\theta \in \partial\mathcal{E}_\psi^*$, ce qui contredit la stricte convexité de $\mathcal{E}_\psi^*$.

Supposons à présent φ dérivable en tout point intérieur de l_ψ et de pente infinie en tout point non intérieur. Soient φ_1, φ_2 dans $\partial\mathcal{E}_\psi^*$ telles que $[\varphi_1, \varphi_2] \subset \partial\mathcal{E}_\psi^*$. D'après le lemme 4.2, il existe x dans l_ψ avec $\varphi_1(x) = \psi(x) = \varphi_2(x)$. Alors x est de pente finie, donc intérieur à l_ψ. Il vient : $\varphi_1 = \varphi_2 = \mathrm{d}\psi(x)$.

On procède de même pour la seconde assertion en remarquant que, comme $\mathcal{E}_\psi^*$ est d'intérieur non vide, l'ensemble $\partial\mathcal{E}_\psi^*$ est dérivable si et seulement si en tout point de $\partial\mathcal{E}_\psi^*$ il ne passe qu'un seul hyperplan d'appui de $\mathcal{E}_\psi^*$.

La troisième assertion est claire. □

4.2 Indicateur de croissance

Revenons aux notations de 3. Après avoir fait le lien entre la fonction P et ψ_Γ, nous appliquons les résultats de 4.1 à l'étude de ψ_Γ.

On note $l_\Gamma^* \subset F_\Gamma^*$ le cône dual de l_Γ dans F_Γ. On note E_Γ^* et $\tilde{E}_\Gamma^*$ les ensembles convexes

$$\begin{aligned} E_\Gamma^* &= \{\varphi \in F_\Gamma^* \,|\, \varphi \geq \psi_\Gamma\} \\ \text{et } \tilde{E}_\Gamma^* &= \{\varphi \in E^* \,|\, \varphi \geq \psi_\Gamma\} = \left\{\varphi \in E^* \,\middle|\, \varphi_{|F_\Gamma} \in E_\Gamma^*\right\}. \end{aligned}$$

Comme l_Γ est inclus dans E^+, l'ensemble E_Γ^* est d'intérieur non vide. La fonction P permet de déterminer l'ensemble E_Γ^* :

Lemme 4.4. *On a :*

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{E_\Gamma^*} &= \{\varphi \in F_\Gamma^* \,|P(\varphi) < 0\} \\ F_\Gamma^* \backslash E_\Gamma^* &= \{\varphi \in F_\Gamma^* \,|P(\varphi) > 0\} \\ \partial E_\Gamma^* &= \{\varphi \in F_\Gamma^* \,|P(\varphi) = 0\}\end{aligned}$$

et, pour toute φ_0 dans $\partial \tilde{E}_\Gamma^*$,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} \xrightarrow[\substack{\varphi \to \varphi_0 \\ \varphi \in \overset{\circ}{\tilde{E}_\Gamma^*}}]{} \infty.$$

Démonstration. Estimons les séries de Poincarré de Γ. Soit M comme dans le lemme 3.4. Soient φ dans E^*, $\lambda = e^{\tilde{P}(\varphi)}$ et $h > 0$ un vecteur propre de valeur propre λ de $L_{-(\log q)\varphi \circ f}$ dans H_ϖ. Pour tous n dans $\mathbb{N}$ et u dans U, on a :

$$\sum_{\substack{v \in U \\ s^n v = u}} q^{-\varphi(\Sigma_n f(v))} h(v) = \lambda^n h(u)$$

et, donc, d'après le lemme 3.4,

$$q^{-M\|\varphi\|} \inf h \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ l(\gamma)=n \\ \gamma_n \neq u_0^{-1}}} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} \leq \lambda^n h(u) \leq q^{M\|\varphi\|} \sup h \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ l(\gamma)=n \\ \gamma_n \neq u_0^{-1}}} q^{-\varphi(\mu(\gamma))},$$

où, pour γ dans Γ de longueur n, on a noté $(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ pour $\Theta_0^{-1}(\gamma)$. D'une part, on a :

$$\lambda^n \leq q^{M\|\varphi\|} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ l(\gamma)=n}} q^{-\varphi(\mu(\gamma))}.$$

D'autre part, pour tout u_0 dans W,

$$q^{-M\|\varphi\|} \inf h \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ l(\gamma)=n \\ \gamma_n \neq u_0^{-1}}} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} \leq \lambda^n \sup h$$

et, donc, en sommant ces inégalités sur $u_0 \in W$:

$$(2p-1)q^{-M\|\varphi\|} \inf h \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ l(\gamma)=n}} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} \leq 2p\lambda^n \sup h.$$

Il vient, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$q^{-M\|\varphi\|}\frac{2p-1}{2p}\frac{\inf h}{\sup h} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ l(\gamma)=n}} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} \leq \lambda^n \leq q^{M\|\varphi\|} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ l(\gamma)=n}} q^{-\varphi(\mu(\gamma))},$$

d'où

$$q^{-M\|\varphi\|}\frac{2p-1}{2p}\frac{\inf h}{\sup h} \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\tilde{P}(\varphi)} \leq q^{M\|\varphi\|} \sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\varphi(\mu(\gamma))}.$$

La première partie du lemme est alors une conséquence du lemme 2.8 ; la seconde s'obtient en écrivant, pour $\varphi > \psi_\Gamma$ en dehors de 0,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} \geq \frac{q^{-M\|\varphi\|}}{1-e^{\tilde{P}(\varphi)}}.$$

□

Nous aurons encore à utiliser :

Lemme 4.5. *Soit φ dans E^* telle que $\varphi_{|F_\Gamma}$ appartienne à l'intérieur de l_Γ^*. Alors il existe un entier n tel que la fonction $\Sigma_n(\varphi \circ f)$ soit strictement positive.*

Démonstration. D'après le théorème 2.6, $\mu(\Gamma)$ est à distance borné de l_Γ, et, donc, il existe un entier n_0 tel que, pour tout γ dans Γ de longueur $\geq n_0$, on ait $\varphi(\mu(\gamma)) > 0$. On conclut alors en utilisant le lemme 3.4. □

Les propriétés de la fonction P vues au paragraphe 3.3 permettent de décrire l'ensemble E_Γ^* et sa frontière :

Lemme 4.6. *L'ensemble E_Γ^* est strictement convexe. L'ensemble ∂E_Γ^* est une hypersurface analytique régulière.*

Démonstration. D'après le lemme 4.4, l'ensemble ∂E_Γ^* est une hypersurface analytique.

Soit φ_0 dans $\partial \tilde{E}_\Gamma^*$. On a :

$$\mathrm{d}\tilde{P}(\varphi_0) = -(\log q) \int_U f \mathrm{d}m_{\varphi_0}.$$

Donc, comme m_{φ_0} est s-invariante, d'après le lemme 4.5, pour toute φ dans E^*, dont la restriction à F_Γ est un élément de $\overset{\circ}{l}{}_\Gamma^*$,

$$\varphi(\mathrm{d}\tilde{P}(\varphi_0)) = -(\log q) \int_U \varphi \circ f \mathrm{d}m_{\varphi_0} < 0.$$

L'hypersurface ∂E_Γ^* est bien régulière en φ_0. $\square$

Comme, d'après le théorème 2.9, la fonction ψ_Γ est concave, le principe de dualité du lemme 4.3 permet de conclure :

Théorème 4.7. *La fonction ψ_Γ est homogène strictement concave, analytique sur $\overset{\circ}{l}_\Gamma$, mais de pente infinie en tout point du bord de l_Γ.*

Démonstration. D'après le lemme 2.9, la fonction ψ_Γ est concave. D'après le lemme 4.3 et le théorème 4.6, ψ_Γ est homogène strictement concave, dérivable sur l'intérieur de l_Γ, mais de pente infinie au bord de l_Γ. Comme ∂E_Γ^* est analytique et que, d'après le lemme 3.6, la dérivée de la bijection $\partial E_\Gamma^* \to \overset{\circ}{l}_\Gamma/\mathbb{R}_+^*$ est partout inversible, la dérivée de ψ_Γ est analytique, donc ψ_Γ est analytique sur l'intérieur de l_Γ. $\square$

4.3 Opérateur de Ruelle et mesures de Patterson

Nous décrivons ici les mesures de Patterson d'un groupe de Schottky. En $\mathbb{K}$-rang 1, ces résultats sont, bien sûr, classiques (*cf.*, par exemple [20, 5.9]).

Rappelons qu'on a noté W l'ensembles de générateurs de Γ construit en 3.1. Pour γ dans W, on note $\langle\gamma\rangle$ l'ensemble des u dans U tels que $u_0 = \gamma$.

Lemme 4.8. *Soient φ dans E^* et γ dans W.*

(i) Pour tout h dans $\mathcal{C}^0(U)$ avec $\operatorname{supp} h \subset \langle\gamma\rangle$, *pour tout u dans U, on a :*

$$L_{-(\log q)\varphi\circ f}(h)(u) = q^{-\varphi(\sigma(\gamma,u))} h(\gamma u).$$

(ii) Pour tout h dans $\mathcal{C}^0(U)$ avec $\operatorname{supp} h \cap \langle\gamma\rangle = \emptyset$*, pour tout u dans U, on a :*

$$L_{-(\log q)\varphi\circ f}(h \circ \gamma)(u) = q^{-\varphi(\sigma(\gamma^{-1},u))}h(u).$$

Démonstration. Démontrons la première formule. Soit h dans $\mathcal{C}^0(U)$ avec $\operatorname{supp} h \subset \langle\gamma\rangle$.

Soit u dans $\langle\gamma^{-1}\rangle$. Pour tout $\gamma' \neq \gamma$ dans W, on a $h(\gamma' u) = 0$. Mais, comme $u_1 \neq \gamma$, on a $\gamma u \notin \langle\gamma\rangle$, et, donc, $h(\gamma u) = 0$.

Pour tout u dans U, on a donc :

$$\begin{aligned} L_{-(\log q)\varphi\circ f}(h)(u) &= \sum_{\substack{\gamma'\in W \\ \gamma'\neq u_0^{-1}}} q^{-\varphi(\sigma(\gamma',u))}h(\gamma' u) \\ &= q^{-\varphi(\sigma(\gamma,u))}h(\gamma u) \text{ si } u \notin \langle\gamma^{-1}\rangle \\ &= 0 \text{ si } u \in \langle\gamma^{-1}\rangle, \end{aligned}$$

d'où la première formule.

Démontrons la seconde formule. Soit h dans $\mathcal{C}^0(U)$ avec $\operatorname{supp} h \cap \langle\gamma\rangle = \emptyset$. Pour tout u dans $U \backslash \langle\gamma^{-1}\rangle$ on a $\gamma u \in \langle\gamma\rangle$, et, donc, $h(\gamma u) = 0$. Par conséquent, on a $\operatorname{supp}(h \circ \gamma) \subset \langle\gamma^{-1}\rangle$, et, pour tout u dans U, on a, d'après la première formule :

$$L_{-(\log q)\varphi\circ f}(h \circ \gamma)(u) = q^{-\varphi(\sigma(\gamma^{-1},u))}h(u),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Les formules précédentes permettent d'établir un lien entre les mesures de Patterson et les opérateurs de Ruelle :

Lemme 4.9. *Soit ν une probabilité sur Λ_Γ et φ dans E^*. Alors ν est une φ-mesure de Patterson si et seulement si $L^*_{-(\log q)\varphi\circ f}(\nu) = \nu$.*

Démonstration. Commençons par supposer que ν est une φ-mesure de Patterson. Soit γ dans W et h dans $\mathcal{C}^0(U)$ avec $\operatorname{supp} h \subset \langle\gamma\rangle$. On a, d'après le lemme 4.8,

$$\int_U L_{-(\log q)\varphi\circ f}(h)\mathrm{d}\nu = \int_U q^{-\varphi(\sigma(\gamma,u))}h(\gamma u)\mathrm{d}\nu(u) = \int_U h\mathrm{d}\nu.$$

Par conséquent pour tout h dans $\mathcal{C}^0(U)$, on a

$$\int_U L_{-(\log q)\varphi\circ f}(h)\mathrm{d}\nu = \int_U h\mathrm{d}\nu$$

i.e. $L^*_{-(\log q)\varphi\circ f}(\nu) = \nu$.

Réciproquement, supposons que l'on a $L^*_{-(\log q)\varphi\circ f}(\nu) = \nu$. Soit γ dans W. D'après le lemme 4.8, pour tout h dans $\mathcal{C}^0(U)$, on a :

$$\operatorname{supp} h \subset \langle\gamma\rangle \Rightarrow \int_U q^{-\varphi(\sigma(\gamma,u))} h(\gamma u) \mathrm{d}\nu(u) = \int_U h \mathrm{d}\nu$$
$$\operatorname{supp} h \cap \langle\gamma\rangle = \emptyset \Rightarrow \int_U h\circ\gamma \mathrm{d}\nu = \int_U q^{-\varphi(\sigma(\gamma^{-1},u))} h(u) \mathrm{d}\nu$$

et, donc, $\gamma_*\nu = q^{-\varphi(\sigma(\gamma^{-1},.))}\nu$. Comme W engendre Γ, cette relation est vraie pour tout γ dans Γ et ν est une φ-mesure de Patterson. □

Dans le cas des groupes de Schottky, on peut donc améliorer le théorème d'existence de [19] :

Théorème 4.10. *Soit φ dans E^*, une forme linéaire tangente à ψ_Γ. Alors Γ possède sur $\mathcal{P}$ une unique φ-mesure de Patterson concentrée sur Λ_Γ. Elle est Γ-ergodique.*

Démonstration. Comme, d'après le lemme 4.4, $\tilde{P}(\varphi) = 0$, on a :

$$L^*_{-(\log q)\varphi\circ f}(\nu_\varphi) = \nu_\varphi$$

et, donc, d'après le lemme 4.9, ν_φ est une φ-mesure de Patterson concentrée sur Λ_Γ. D'après le même lemme, comme ν_φ est l'unique mesure propre de valeur propre 1 de $L^*_{-(\log q)\varphi\circ f}$, elle est l'unique φ-mesure de Patterson concentrée sur Λ_Γ. Nous avons déjà remarqué que ν_φ était Γ-ergodique. Cela peut aussi être vu plus simplement comme une conséquence de l'unicité.□

4.4 Construction géométrique des mesures de Patterson

Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note X l'espace symétrique de G et x le point fixe de K dans X. On note Exp_x l'unique application de E dans le plat maximal de X stable par A qui, pour tout z dans Z envoie $\nu(z)$ sur zx.

Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on note X l'immeuble de G et x le point fixe de K dans X. Le point x est un sommet spécial de toutes les chambres de X qui le contiennent. On note Exp_x l'unique application affine de E dans l'appartement de X stable par A qui, pour tout z dans Z, envoie $\nu(z)$ sur zx.

On note ∂X le bord visuel de X : l'espace $X \cup \partial X$ est compact. L'application qui, à un vecteur non nul u de E^+, associe $G \lim_{t\to\infty} \mathrm{Exp}_x(tu) \subset \partial X$ induit une bijection entre l'ensemble des directions de E^+ et les G-orbites dans ∂X.

Pour φ dans E^* telle que $\varphi > \psi_\Gamma$ en dehors de 0, c'est-à-dire telle que φ soit intérieure à $\tilde{E}^*_\Gamma$, notons

$$\nu(\varphi) = \frac{1}{\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\varphi(\mu(\gamma))}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\varphi(\mu(\gamma))} \delta_{\gamma x}.$$

Il vient :

Proposition 4.11. *L'application ν se prolonge de manière unique en une application continue de $\tilde{E}^*_\Gamma$ dans l'espace des mesures de probabilités de $X \cup \partial X$. Pour toute φ tangente à ψ_Γ, $\nu(\varphi)$ est concentrée sur la G-orbite à l'infini du point limite du rayon géodésique $t \mapsto \mathrm{Exp}_x(tu)$ où u est l'unique vecteur unitaire de E tel que $\psi_\Gamma(u) = \varphi(u)$.*

Démonstration. Soit φ_0 tangente à ψ_Γ, c'est-à-dire appartenant à $\partial\tilde{E}^*_\Gamma$. Montrons que l'application ν possède une unique valeur d'adhérence en φ et qu'elle possède les propriétés de l'énoncé. Soit ν_0 une telle valeur d'adhérence. Comme, d'après le lemme 4.4,

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} \xrightarrow[\substack{\varphi\to\varphi_0 \\ \varphi>\psi_\Gamma}]{} \infty,$$

on a $\nu_0(\partial X) = 1$. Par ailleurs, d'après le théorème 4.7, il existe un unique vecteur unitaire u_0 de E tel que $\psi_\Gamma(u_0) = \varphi(u_0)$. Alors, u_0 appartient à l_Γ et, donc, d'après la proposition 3.2, à l'intérieur de E^+. Soit $\mathcal{C}$ un cône ouvert de E contenant u_0. Pour tout $u \neq 0$ dans $E \backslash \mathcal{C}$, on a $\psi_\Gamma(u) < \varphi_0(u)$, et, donc, pour φ suffisament proche de φ_0, on a :

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \mu(\gamma)\notin\mathcal{C}}} q^{-\varphi(\mu(\gamma))} < \infty.$$

Il vient, à nouveau comme les séries globales tendent vers l'infini,

$$\nu(\varphi)(K\mathrm{Exp}_x(E^+\backslash\mathcal{C})) \xrightarrow[\substack{\varphi\to\varphi_0 \\ \varphi>\psi_\Gamma}]{} 0$$

et, par conséquent, ν_0 est concentrée sur la G-orbite de $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Exp}_x(tu_0)$. Pour tout vecteur unitaire u dans l'intérieur de E^+, il existe un unique G-homéomorphisme θ_u de $\mathcal{P}$ dans la G-orbite de $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Exp}_x(tu)$: il envoie ξ_0 sur $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Exp}_x(tu_0)$ (*cf.* [8, 2.17] dans le cas où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors, en raisonnant comme dans [19, 8.2], on montre que $(\theta_{u_0}^{-1})_*\nu_0$ est une φ_0-mesure de Patterson concentrée sur Λ_Γ, d'où l'unicité, d'après le théorème 4.10.

Pour φ dans $\partial\tilde{E}^*_\Gamma$, notons donc $\nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$ l'unique φ-mesure de Patterson de $\mathcal{P}$ concentrée sur Λ_Γ, u_φ le vecteur unitaire de E tel que $\varphi(u_\varphi) = \psi_\Gamma(u_\varphi)$ et $\nu(\varphi)$ la mesure de probabilité sur ∂X $(\theta_{u_\varphi})_*\nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$. Par unicité, l'application $\varphi \mapsto \nu_{\mathcal{P}}(\varphi)$ est continue et, donc, l'application $\varphi \mapsto \nu(\varphi)$ est continue sur $\partial\tilde{E}^*_\Gamma$. On a bien construit un prolongement continu de ν. $\square$

Références

[1] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs, *Annals of mathematics* **144** (1996), 315-347.

[2] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geometric and functional analysis* **7** (1997), 1-47.

[3] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires (II), *Advanced studies in pure mathematics* **26** (2000), 33-48.

[4] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer Verlag, New York, 1991.

[5] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées, *Publications mathématiques de l'IHES* **41** (1972), 5-251.

[6] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publications mathématiques de l'IHES* **60** (1984), 5-184.

[7] J.-P. Conze, Y. Guivarc'h, Ensembles limites pour des groupes d'applications linéaires, *Prépublication de l'IRMAR* 99-63.

[8] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago lectures in mathematics, Chicago, 1996.

[9] Y. Guivarc'h, Produits de matrices aléatoires et applications aus propriétés géométriques des sous-groupes discrets du groupe linéaire, *Ergodic theory and dynamical systems* **10** (1990), 483-512.

[10] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics 80, Academic Press, San Diego, 1978.

[11] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure and Applied Mathematics 113, Academic Press, San Diego, 1984.

[12] J.E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Text in Mathematics 21, Springer Verlag , New York, 1981.

[13] S. P. Lalley, Renewal theorems in symbolic dynamics, with application to geodesic flows, noneuclidean tessellations and their fractal limits, *Acta mathematica* **163** (1989), 1-55.

[14] S.-J. Patterson, The limit set of a fuchsian group, *Acta mathematica* **136** (1976), 241-273.

[15] W. Parry, M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure for hyperbolic dynamics*, Astérisque 187-188, Société Mathématique de France, Paris, 1990.

[16] J.-F. Quint, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples réels et p-adiques*, thèse Université Paris VII.

[17] J.-F. Quint, Cônes limites des sous-groupes discrets d'un groupe réductif sur un corps local, *Transformation groups*, à paraitre.

[18] J.-F. Quint, Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur, *Commentarii Mathematicii Helvetici*, à paraitre.

[19] J.-F. Quint, Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur, preprint.

[20] C. Series, The infinite word problem and limit sets in Fuchsian groups, *Ergodic theory and dynamical systems* **1** (1981), 337-360.

[21] D. Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publications mathématiques de l'IHES* **50** (1979), 171-202.

[22] J. Tits, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **247** (1971), 196-220.

[23] J. Tits, Free subgroups in linear groups, *Journal of algebra* **20** (1972), 250-270.

[24] J. Tits, Reductive groups over local fields, *Proceedings of the symposium in pure mathematics of the american mathematical society* **33** (1977), 29-69.

Jean-François Quint
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
quint@dma.ens.fr