

Groupes de Schottky et comptage

J.-F. Quint

Résumé

Soient X un espace symétrique de type non compact et Γ un groupe discret d'isométries de X du type de Schottky. Dans cet article, nous donnons des équivalents des fonction orbitales de comptage pour l'action de Γ sur X .

1 Introduction

1.1 Comptage

Soient X un espace symétrique de type non compact et G un groupe de Lie semi-simple linéaire dont X soit l'espace symétrique. Soit Γ un sous-groupe discret de G du type de Schottky, au sens de Benoist (*cf.* [3]). Pour x dans X et $a \geq 0$, posons

$$N_{\Gamma}(x, a) = \text{card}\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma x) \leq a\}.$$

Si X est de rang 1, Γ est convexe cocompact et le comportement asymptotique de cette quantité est bien compris : sa description résulte de la théorie générale des flots d'Anosov. En rang quelconque, le résultat principal de cet article s'écrit :

Théorème. *Il existe $\tau > 0$ tel que, pour tout x dans X , il existe $C > 0$ avec :*

$$N_{\Gamma}(x, a) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} C e^{\tau a}.$$

Traduisons cet énoncé en termes de théorie des groupes. Soient x un point de X et K son stabilisateur dans G . Soit F un plat maximal de X contenant x , et soient \mathfrak{a} le sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G associé à F et $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ une chambre de Weyl. On a la décomposition de Cartan $G = K \exp(\mathfrak{a}^+)K$. Pour g dans G , on note $\mu(g)$ l'unique élément de

\mathfrak{a}^+ dont l'exponentielle appartient à KgK . Alors, si \mathfrak{a} est muni de la norme euclidienne provenant de la métrique riemannienne de X , pour tout g dans G , on a $d(x, gx) = \|\mu(g)\|$.

Exemple 1.1. Supposons que G est $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, pour un $n \geq 2$, et que K est le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$. Choisissons pour \mathfrak{a} l'espace des matrices diagonalisables de trace nulle, que nous identifions de manière naturelle à l'ensemble des $a = (a_1, \dots, a_n)$ dans \mathbb{R}^n avec $a_1 + \dots + a_n = 0$, et prenons pour \mathfrak{a}^+ l'ensemble des a dans \mathfrak{a} tels que $a_1 \geq \dots \geq a_n$. La décomposition de Cartan $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n) \exp(\mathfrak{a}^+) \mathrm{SO}(n)$ est alors une traduction de la décomposition polaire dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. La norme euclidienne définie, pour a dans \mathfrak{a} , par $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ est invariante par permutation des coordonnées (en d'autres termes, par l'action du groupe de Weyl de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$); on en déduit que la fonction définie par $d(g\mathrm{SO}(n), h\mathrm{SO}(n)) = \|\mu(g^{-1}h)\|$, pour g, h dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, induit une distance riemannienne $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ -invariante sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$.

Le théorème ci-dessus s'écrit à présent :

Théorème. *Il existe $\tau, C > 0$ tels que*

$$\mathrm{card}\{\gamma \in \Gamma \mid \|\mu(\gamma)\| \leq a\} \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} C e^{\tau a}.$$

1.2 Position du problème et méthodes

Le problème de comptage orbital pour les groupes discrets d'isométries des variétés riemanniennes à courbure strictement négative a fait l'objet de nombreux travaux, dans des cadres de plus en plus généraux, notamment par S. J. Patterson, D. Sullivan, S. Lalley, ... Les résultats les plus larges possibles ont été établis par des méthodes de géométrie et de dynamique par Th. Roblin dans [18]. Il montre notamment que, pour de très grandes classes de groupes, incluant en particulier les groupes de Schottky, les fonctions orbitales se comportent en $e^{\tau a}$, pour un $\tau > 0$.

Dans les espaces symétriques de rang supérieur, à notre connaissance, les seules estimations connues ont été faites pour les réseaux par A. Eskin et C. McMullen dans [7]. Leurs résultats donnent des équivalents du type $a^{\frac{r-1}{2}} e^{\tau a}$, où r est le rang de l'espace symétrique. En rang supérieur, notre théorème fait donc apparaître une différence de comportement entre les groupes de Schottky et les réseaux, puisque l'équivalent que nous donnons ne comporte pas de terme polynomial. Peut-être peut-on voir là un rapport avec le fait

qu'un réseau contient beaucoup de sous-groupes isomorphes à \mathbb{Z}^r constitués d'éléments semi-simples, tandis que, dans un groupe de Schottky, le centralisateur d'un élément non trivial est toujours isomorphe à \mathbb{Z} .

Intéressons-nous aux méthodes que nous mettons en œuvre et qui proviennent de techniques utilisées en rang 1. Dans [10], S. Lalley résout le problème de comptage pour les groupes convexes cocompacts d'isométries du plan hyperbolique par des méthodes de dynamique symbolique, reposant sur les codages effectués par C. Series dans [19]. Dans le cas particulier des actions de groupes libres, on peut étendre ces méthodes de codage au cadre des actions sur des espaces symétriques de rang supérieur, comme cela a été fait par J.-P. Conze et Y. Guivarc'h dans [5]. L'objet de cet article est d'utiliser ces codages et les méthodes de Lalley pour établir des équivalents des fonctions orbitales de comptage en rang supérieur.

Ce type de démarche a déjà été entrepris par M. Pollicott et R. Sharp dans [13], où, étant donné un groupe libre de matrices Γ vérifiant des hypothèses du type Schottky, les auteurs donnent notamment des encadrements asymptotiques du nombre d'éléments de Γ de norme matricielle bornée. Dans notre langage, avec les notations du paragraphe 1.1, ceci revient essentiellement, étant donnée une représentation linéaire irréductible ρ de G dans un espace vectoriel V , muni d'une norme euclidienne N , à estimer $\text{card}\{\gamma \in \Gamma | N(\rho(\gamma)) \leq e^a\}$ quand a tend vers l'infini, ou encore, si χ est le plus haut poids restreint de la représentation ρ , à déterminer le comportement de $\text{card}\{\gamma \in \Gamma | \chi(\mu(\gamma)) \leq a\}$ (rappelons que χ est une forme linéaire de \mathfrak{a}).

Exemple 1.2. Quand G est $\text{SL}_n(\mathbb{R})$, en reprenant les notations introduites ci-dessus, pour un élément g , notons $(\mu_1(g), \dots, \mu_n(g))$ les coordonnées de $\mu(g)$. On a alors $\mu_1(g) = \log N(g)$, où $N(g)$ désigne la norme de g comme opérateur linéaire de \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire canonique. Pollicott et Sharp s'intéressent donc à l'estimation de $\text{card}\{\gamma \in \Gamma | \mu_1(\gamma) \leq a\}$.

Remarquons par ailleurs que la méthode de Lalley, dans la formulation que nous en donnons, appliquée au problème étudié par ces auteurs, permet de donner un équivalent asymptotique des quantités qu'ils cherchent à estimer, et pas seulement une estimation. Plus généralement, cette méthode permet de donner un équivalent de $\text{card}\{\gamma \in \Gamma | \varphi(\mu(\gamma)) \leq a\}$ quand a tend vers l'infini, pour toute forme linéaire φ de \mathfrak{a} qui soit > 0 sur le cône asymptote à $\mu(\Gamma)$ (c'est-à-dire le cône limite de Γ , introduit et étudié par Y. Benoist dans [3]). Cet équivalent sera de la forme $C_\varphi e^{\tau_\varphi a}$, avec $\tau_\varphi, C_\varphi > 0$. Les

liens entre le groupe Γ et le taux de croissance exponentiel τ_φ des quantités $\text{card}\{\gamma \in \Gamma \mid \varphi(\mu(\gamma)) \leq a\}$, pour une forme φ donnée, ont été étudiés dans [15], dans le cadre général des sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples, et précisés dans [17] pour les groupes de Schottky.

Dans notre problème de comptage relativement à une norme euclidienne, une forme φ intervient : c'est l'élément de norme minimale de l'adhérence de l'ensemble des θ dans \mathfrak{a}^* tels que $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\theta(\mu(\gamma))} < \infty$. Dans le corpus de l'article, cet élément sera défini de manière différente. Le lien entre ces deux formulations a été fait dans [17]. Pour cette forme φ , on a $\tau_\varphi = 1$ et l'exposant τ apparaissant dans le théorème est égal à $\|\varphi\| = \tau_{\frac{\varphi}{\|\varphi\|}}$; par contre, la constante C est $< C_\varphi$. Nous discuterons plus précisément de ce point dans l'introduction de la section 6.

Enfin, si les problèmes de comptage relativement aux formes linéaires peuvent se résoudre par l'utilisation du théorème taubérien classique d'Ikehara-Wiener, le comptage relativement à la norme euclidienne nous a conduits à introduire une version multi-dimensionnelle de ce résultat qui, à notre connaissance, est nouvelle. Sa démonstration occupe la section 6, au début de laquelle nous en donnons l'énoncé précis et où nous expliquons pourquoi il nous a paru nécessaire d'établir cette généralisation. Nous renvoyons le lecteur uniquement intéressé par ce théorème à cette section, qui est indépendante du reste du texte. Notons simplement ici que certaines des difficultés qui surgissent en rang supérieur présentent des analogies avec celles qu'on rencontre en rang 1 lorsqu'il s'agit de compter les géodésiques fermées d'une variété compacte à courbure strictement négative, à classe d'homologie donnée, comme le font A. Katsuda et T. Sunada dans [9], M. Babillot et F. Ledrappier dans [2], N. Anantharaman dans [1] et M. Pollicott et R. Sharp dans [14].

1.3 Densité des vecteurs de translation

Comme c'est aussi le cas dans [1] et [14], la vérification des hypothèses de notre théorème taubérien nécessite de posséder des bornes sur la norme de certains opérateurs symboliques. Nous utiliserons pour cela un théorème de D. Dolgopyat dans [6]. Ce résultat relie la propriété qui nous est nécessaire à un phénomène de bonne répartition des valeurs propres des éléments de notre groupe Γ . Pour valider les hypothèses du théorème de Dolgopyat, nous serons donc amenés à démontrer, à la section 3, un résultat technique, valable dans n'importe quel sous-semi-groupe Zariski dense de G , qui précise certains des

énoncés de Y. Benoist dans [3] et [4]. En particulier, en rang 1, il implique que le sous-groupe de \mathbb{R} engendré par les longueurs de translation des éléments hyperboliques de Γ (c'est-à-dire les longueurs des géodésiques fermées de $\Gamma \backslash X$) est dense, hypothèse qui intervient fréquemment dans les problèmes de comptage (voir [18]).

Notons $\lambda : G \rightarrow \mathfrak{a}^+$ la projection de Jordan, $\Pi \subset \mathfrak{a}^*$ la base du système de racines de \mathfrak{a} associée à \mathfrak{a}^+ et $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ les poids fondamentaux de Π . Nous aurons la

Proposition. *Soient Γ un sous-semi-groupe Zariski dense de G et g un élément loxodromique de Γ . Alors, quitte à remplacer g par une puissance convenable, il existe un entier p , un élément h et des suites (g_n) et (h_n) dans Γ tels que*

(i) *pour tout n , les éléments g_n et h_n sont des mots de longueur $\leq pn$ en g et h .*

(ii) *si G est déployé, pour tout α dans Π , il existe $c_\alpha \neq 0$ et $0 < \eta_\alpha < e^{-2\alpha(\lambda(g))}$ tels que*

$$\varpi_\alpha(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_n) - \lambda(h_n)) = c_\alpha e^{-2n\alpha(\lambda(g))} + O(\eta_\alpha^n).$$

(iii) *dans le cas général, pour tout α dans Π , on a :*

$$|\varpi_\alpha(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_n) - \lambda(h_n))| \asymp e^{-2n\alpha(\lambda(g))}.$$

Exemple 1.3. Si G est $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, pour un élément g , le vecteur $\lambda(g) = (\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g))$ est la suite des logarithmes des modules des racines complexes du polynôme caractéristique de g , comptés avec multiplicité et rangés par ordre décroissant. En particulier, $\lambda_1(g)$ est le logarithme du rayon spectral de g comme automorphisme de \mathbb{R}^n . L'ensemble Π est constitué des formes linéaires $\alpha_i : a \mapsto a_i - a_{i+1}$, pour $1 \leq i \leq n - 1$, et, pour un tel i , la forme ϖ_{α_i} est $a \mapsto a_1 + \dots + a_i$; en d'autres termes, le nombre $\varpi_{\alpha_i}(\lambda(g))$ est le logarithme du rayon spectral de g pour son action naturelle sur $\wedge^i \mathbb{R}^n$.

1.4 Plan de l'article

Les sections 2 et 3 seront consacrées à la démonstration de la proposition : à la section 2, nous effectuerons des estimations d'algèbre linéaire que nous interpréterons dans les groupes semi-simples à la section 3, à l'aide de la

théorie des représentations. Dans la section 4, nous rappellerons rapidement la terminologie de [17] et nous appliquerons la proposition pour valider les hypothèses du théorème de D. Dolgopyat dans [6]. La démonstration du théorème de comptage s'effectuera à la section 5, à l'aide de notre théorème taubérien, dont la preuve occupera la section 6.

Je tiens à remercier N. Anantharaman, qui m'a fait connaître les travaux de D. Dolgopyat, Y. Benoist, qui a bien voulu prêter attention à l'exposé de ce travail, et le referee, pour sa relecture attentive et ses remarques qui m'ont permis d'améliorer considérablement la présentation de cet article.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. On note $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\asymp} y_n$ si et seulement si on a $x_n = O(y_n)$ et $y_n = O(x_n)$, en d'autres termes s'il existe des réels $c, d > 0$ tels que, pour n suffisamment grand, $c|x_n| \leq |y_n| \leq d|x_n|$. Si X est un espace métrique et a un réel positif, pour x dans X et $Y \subset X$, on note $b(x, a)$ la boule fermée de centre x et de rayon a et $B(Y, a) = \{x \in X | d(x, Y) \geq a\}$. Pour tout \mathbb{R} -espace vectoriel E , on note E^* son dual, $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié et $E_{\mathbb{C}}^*$ le \mathbb{C} -dual de $E_{\mathbb{C}}$.

2 Endomorphismes proximaux

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Dans [4], Y. Benoist a donné un équivalent quand n et m tendent vers l'infini du rayon spectral du produit $f^n g^m$ de puissances de deux endomorphismes proximaux (voir la définition ci-après) f et g de V . Cet équivalent exprime asymptotiquement ce rayon spectral comme le produit du rayon spectral de f^n , de celui de g^m et d'un terme constant ne dépendant que de f et de g . Dans cette section, nous allons dans un premier temps estimer les termes de reste dans l'équivalent de Benoist et, dans un deuxième temps, construire des endomorphismes pour lesquels on connaît bien le terme constant dont il vient d'être question.

Le contrôle des restes se fera pour des produits d'endomorphismes proximaux semi-simples, c'est-à-dire diagonalisables sur \mathbb{C} . Pour des raisons techniques, nous serons amenés à considérer non pas seulement des endomorphismes semi-simples f , mais des couples (f, z) où z est la donnée, sur chaque

sous-espace vectoriel f -stable où toutes les valeurs propres de f sont de même module, d'une norme pour laquelle f agit comme une similitude. Cette complication serait inutile si nous nous intéressions seulement à des endomorphismes proximaux diagonalisables sur \mathbb{R} , ce que le lecteur pourra garder à l'esprit dans la suite. La nécessité d'avoir traité le cas des endomorphismes semi-simples apparaîtra à la section 3, car ceci nous permettra d'établir des résultats pour un groupe de Lie semi-simple général et pas seulement déployé.

2.1 Produit d'endomorphismes proximaux

Si f est un endomorphisme de V on note $\lambda_1(f) > \lambda_2(f) > \dots$ les modules des valeurs propres de f comptés sans multiplicité et rangés par ordre strictement décroissant. En particulier, $\lambda_1(f)$ est le rayon spectral de f . Si f a deux valeurs propres de modules distincts, on note

$$\alpha_1(f) = \frac{\lambda_1(f)}{\lambda_2(f)}.$$

(avec la convention que $\alpha_1(f) = \infty$ si toutes les valeurs propres de f ont même module). On note V_f^+ le plus grand sous-espace vectoriel f -stable de V où toutes les valeurs propres de f sont de module $\lambda_1(f)$ et $V_f^<$ son unique supplémentaire f -stable. On dit que f est proximal si et seulement si V_f^+ est une droite ; en d'autres termes, f est proximal si et seulement s'il possède un point fixe attracteur dans $\mathbb{P}(V)$. Alors, f possède une valeur propre réelle de module $\lambda_1(f)$. Si f est proximal, alors f^* est proximal et $V_{f^*}^{*,+} = (V_f^<)^{\perp}$.

On dit qu'un endomorphisme de V est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable sur \mathbb{C} . On dit qu'il est hyperbolique si et seulement s'il est diagonalisable à valeurs propres > 0 et qu'il est elliptique si et seulement s'il appartient à un sous-groupe compact de $GL(V)$. Tout automorphisme semi-simple f de V s'écrit de manière unique comme produit $f_e f_h$ d'un automorphisme elliptique et d'un automorphisme hyperbolique qui commutent : c'est la décomposition de Jordan de f . En particulier, si f est un endomorphisme semi-simple de V dont toutes les valeurs propres ont le même module, il existe une norme euclidienne sur V pour laquelle f est une similitude de rapport $\lambda_1(f)$.

Supposons dorénavant V muni d'une norme $\|\cdot\|$. Étant donnée une norme $\|\cdot\|_1$ sur V , il existe une unique norme $\|\cdot\|_2$ homothétique à $\|\cdot\|_1$ telle que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|$ et qu'il existe $v \neq 0$ dans V avec $\|v\|_2 = \|v\|$. Dorénavant, pour

simplifier les notations, on identifiera par ce biais une classe de normes à homothétie près sur V à l'unique élément de cette classe ainsi défini.

Soit $\pi = (r_1, \dots, r_k)$ une partition de la dimension r de V . On appellera croix normée de V de paramètre π un k -uplet $((V_1, \|\cdot\|_1), \dots, (V_k, \|\cdot\|_k))$ où, pour tout $1 \leq i \leq k$, l'ensemble V_i est un sous-espace vectoriel de dimension r_i de V et $\|\cdot\|_i$ une classe de normes euclidiennes à homothéties près sur V_i , de sorte qu'on ait $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$. On note alors $V_z^+ = V_1$, $V_z^- = V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ et $\|\cdot\|_z$ la norme sur V qui est la somme euclidienne des normes $\|\cdot\|_i$, $1 \leq i \leq k$. L'ensemble des croix normées de paramètre π est un espace homogène sous $\text{GL}(V)$. On le note $\mathcal{Z}_\pi(V)$ et on le munit de la topologie quotient de celle de $\text{GL}(V)$. On appellera endomorphisme normé de V un couple (f, z) où f est un endomorphisme semi-simple de V et z une croix normée $((V_1, \|\cdot\|_1), \dots, (V_k, \|\cdot\|_k))$ vérifiant que, pour tout $1 \leq i \leq k$, on a $fV_i \subset V_i$, que f induit une similitude de rapport λ_i sur V_i relativement à la norme $\|\cdot\|_i$ et que $\lambda_1 > \max_{2 \leq i \leq k} \lambda_i$. Notons qu'alors on a $\|f\|_z = \lambda_1(f) = \lambda_1$ et $\lambda_2(f) = \max_{2 \leq i \leq k} \lambda_i$ ainsi que $V_z^+ = V_f^+$ et $V_z^- = V_f^-$. En particulier, f est proximal si et seulement si on a $r_1 = 1$. Par décomposition de Jordan, pour tout endomorphisme semi-simple f , il existe une croix normée z telle que (f^n, z) soit un endomorphisme normé, pour tout entier $n \geq 1$.

Donnons une première application de cette notion à l'établissement de contrôle uniformes de normes d'endomorphismes :

Lemme 2.1. *Soient π une partition de r et K une partie compacte de $\mathcal{Z}_\pi(V)$. Alors, on a $\|f\| = O(\lambda_1(f))$ uniformément pour (f, z) endomorphisme normé de V avec z dans K . En particulier, si f est un endomorphisme semi-simple de V , on a $\|f^n\| = O(\lambda_1(f)^n)$.*

Démonstration. La première assertion découle du fait que l'ensemble

$$\{\|\cdot\|_z \mid z \in K\}$$

est compact dans l'ensemble des normes euclidiennes de V . La seconde en est une conséquence immédiate, vue la remarque faite juste avant le lemme.

□

On identifie les hyperplans de V et les points de $\mathbb{P}(V^*)$. Soient X dans $\mathbb{P}(V)$ et Y dans $\mathbb{P}(V^*)$ et soient $v \neq 0$ dans X et $\varphi \neq 0$ dans Y . On note

$$P_1(X, Y) = \frac{|\varphi(v)|}{\|\varphi\| \|v\|}.$$

Soit f un endomorphisme de V avec $f(X) \neq \{0\}$, on note

$$\sigma_1(f, X) = \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}.$$

Si f est proximal, on a $\sigma_1(f, V_f^+) = \lambda_1(f)$.

Estimons ces quantités. Pour X, Y dans $\mathbb{P}(V)$, on note

$$d(X, Y) = \min_{\substack{v \in X, w \in Y \\ \|v\| = \|w\| = 1}} \|v - w\|$$

leur distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Lemme 2.2. *Soit $\pi = (1, r_2, \dots, r_n)$ une partition de r et soit K une partie compacte de $\mathcal{Z}_\pi(V)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, uniformément pour tout endomorphisme normé (f, z) avec z dans K ,*

(i) *uniformément pour tout X dans $\mathbb{P}(V)$ avec $d(X, \mathbb{P}(V_f^<)) \geq \varepsilon$,*

$$d(fX, V_f^+) = O(\alpha_1(f)^{-1})$$

et

$$\sigma_1(f, X) = \lambda_1(f) \frac{P_1(X, V_f^<)}{P_1(V_f^+, V_f^<)} (1 + O(\alpha_1(f))^{-1}).$$

(ii) *la restriction de f à $B(\mathbb{P}(V_f^<), \varepsilon)$ est $O(\alpha_1(f)^{-1})$ -lipschitzienne.*

Démonstration. Pour f comme dans l'énoncé, notons λ_f la valeur propre de f de module $\lambda_1(f)$ et p_f le projecteur d'image V_f^+ et de noyau $V_f^<$. D'après le lemme 2.1, on a $\|f - \lambda_f p_f\| = O(\lambda_2(f))$, uniformément dans l'ensemble considéré, d'où le résultat. \square

Soient X et Z dans $\mathbb{P}(V)$ et Y et T dans $\mathbb{P}(V^*)$. Choisissons des vecteurs non nuls v et w dans X et Z et des formes linéaires non nulles φ et ψ dans Y et T et supposons que l'on a $\varphi(v) \neq 0$ et $\psi(w) \neq 0$. Alors, le nombre

$$\left| \frac{\varphi(w) \psi(v)}{\varphi(v) \psi(w)} \right| = \frac{P_1(Z, Y) P_1(X, T)}{P_1(X, Y) P_1(Z, T)}$$

ne dépend que de X, Y, Z, T . On le note $B_1(X, Y, Z, T)$.

L'introduction de la notion technique de croix normée nous permet de donner une domination des termes de reste dans la formule de Y. Benoist dans [4] :

Lemme 2.3. Soient $\pi = (1, r_2, \dots, r_n)$ une partition de r et K une partie compacte de l'ensemble des couples (z, t) dans $\mathcal{Z}_\pi(V)^2$ avec $V_z^+ \not\subset V_t^<$ et $V_t^+ \not\subset V_z^<$. Alors, il existe un réel $a \geq 1$ tel que, pour tous endomorphismes normés (f, z) et (g, t) avec z et t dans K et $\alpha_1(f)$ et $\alpha_1(g)$ supérieurs à a , le produit fg soit proximal et que l'on ait, uniformément dans l'ensemble considéré,

$$\lambda_1(fg) = \lambda_1(f) \lambda_1(g) B_1(V_f^+, V_f^<, V_g^+, V_g^<) (1 + O(\alpha_1(f)^{-1} + \alpha_1(g)^{-1}))$$

ainsi que

$$\begin{aligned} d(V_{fg}^+, V_f^+) &= O(\alpha_1(f)^{-1}) & d(V_{fg}^+, fV_g^+) &= O(\alpha_1(f)^{-1} \alpha_1(g)^{-1}) \\ d(V_{fg}^<, V_g^<) &= O(\alpha_1(g)^{-1}) & d(V_{fg}^<, g^{-1}V_f^<) &= O(\alpha_1(f)^{-1} \alpha_1(g)^{-1}). \end{aligned}$$

Démonstration. Il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que l'on ait, pour tous f et g comme dans l'énoncé,

$$\begin{aligned} d(V_f^+, \mathbb{P}(V_f^<)) &\geq 4\varepsilon & d(V_g^+, \mathbb{P}(V_g^<)) &\geq 4\varepsilon \\ d(V_f^+, \mathbb{P}(V_g^<)) &\geq 4\varepsilon & d(V_g^+, \mathbb{P}(V_f^<)) &\geq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2, pour $\alpha_1(f)$ et $\alpha_1(g)$ suffisamment grands, on a

$$fB(\mathbb{P}(V_f^<), \varepsilon) \subset b(V_f^+, \varepsilon) \text{ et } gB(\mathbb{P}(V_g^<), \varepsilon) \subset b(V_g^+, \varepsilon)$$

et les restrictions de f et de g à $B(\mathbb{P}(V_f^<), \varepsilon)$ et à $B(\mathbb{P}(V_g^<), \varepsilon)$ sont ε -lipschitziennes. Alors, $b(V_f^+, \varepsilon)$ est stable par fg qui y est ε -lipschitzien et, donc, qui y possède un point fixe attracteur. Par conséquent, fg est proximal et $d(V_{fg}^+, V_f^+) \leq \varepsilon$. Les contrôles de distance dans $\mathbb{P}(V)$ sont des conséquences du lemme 2.2. Ceux concernant les hyperplans découlent des premiers car on a la formule de dualité $V_{fg}^< = (V_{g^*f^*}^{*,+})^\perp$.

Il nous reste à calculer le rayon spectral de fg . Comme $d(V_{fg}^+, V_g^<) \geq \varepsilon$, on a, toujours d'après le lemme 2.2,

$$\sigma_1(g, V_{fg}^+) = \lambda_1(g) \frac{P_1(V_{fg}^+, V_g^<)}{P_1(V_f^+, V_g^<)} (1 + O(\alpha_1(g)^{-1}))$$

et, comme $d(V_f^+, V_{fg}^+) = O(\alpha_1(f))^{-1}$, on a $P(V_{fg}^+, V_g^<) = P(V_f^+, V_g^<) (1 + O(\alpha_1(f)^{-1}))$. De même, on a :

$$\sigma_1(f, gV_{fg}^+) = \lambda_1(f) \frac{P_1(gV_{fg}^+, V_f^<)}{P_1(V_f^+, V_f^<)} (1 + O(\alpha_1(f)^{-1}))$$

et $P_1(gV_{fg}^+, V_f^<) = P_1(V_g^+, V_f^<)(1 + O(\alpha_1(g)^{-1}))$. Le résultat en découle. \square

De même, on montre le

Lemme 2.4. *Soient f et g des endomorphismes semi-simples proximaux de V . Supposons que $V_f^+ \not\subset V_g^<$ et que $V_g^+ \not\subset V_f^<$. Alors, pour n et m suffisamment grands, $f^n g^m f^n$ est proximal et on a :*

$$d(V_{f^n g^m f^n}^+, f^n V_g^+) = O(\alpha_1(f)^{-n} \alpha_1(g)^{-m})$$

et

$$\lambda_1(f^n g^m f^n) = \lambda_1(f)^{2n} \lambda_1(g)^m (1 + O(1)).$$

2.2 Un calcul de coefficient B_1

Nous allons à présent chercher à construire des endomorphismes proximaux de V pour lesquels on connaît bien le coefficient B_1 qui apparaît dans le lemme 2.3.

Soit f un endomorphisme de V . On note $V_f^{<+}$ le plus grand sous-espace vectoriel f -stable de $V_f^<$ où toutes les valeurs propres de f sont de module $\lambda_2(f)$. On note $V_f^{<<}$ son unique supplémentaire f -stable dans $V_f^<$.

Lemme 2.5. *Soient f et g des endomorphismes semi-simples proximaux de V . Soit q le projecteur f -invariant sur $V_f^{<+}$. Supposons que $V_f^+ \not\subset V_g^<$, que $V_g^+ \not\subset V_f^<$ et que $q(V_g^+) \not\subset V_g^<$. Alors*

(i) *si f est diagonalisable à valeurs propres positives, il existe des réels $c \neq 0$ et $\eta < \alpha_1(f)^{-1}$ et un entier p_0 tels que, pour $p \geq p_0$,*

$$B_1(V_f^+, V_f^<, V_{f^n g^{pn} f^n}^+, V_{f^n g^{pn} f^n}^<) - 1 = c\alpha_1(f)^{-2n} + O(\eta^{2n}).$$

(ii) *dans le cas général, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des réels $c, d > 0$ et un entier p_0 tels que, pour tout n tel que $d(f^{2n}q(V_g^+), \psi^\perp) \geq \varepsilon$, et pour $p \geq p_0$,*

$$c\alpha_1(f)^{-2n} \leq |B_1(V_f^+, V_f^<, V_{f^n g^{pn} f^n}^+, V_{f^n g^{pn} f^n}^<) - 1| \leq d\alpha_1(f)^{-2n}.$$

Démonstration. Comme la fonction $B_1(V_f^+, V_f^<, \dots)$ est lipschitzienne sur un voisinage de $(V_f^+, V_f^<)$ dans $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$, on a, en appliquant le lemme 2.4 à la fois dans V et dans V^* , pour n et m suffisamment grands,

$$\begin{aligned} B_1(V_f^+, V_f^<, V_{f^n g^m f^n}^+, V_{f^n g^m f^n}^<) - B_1(V_f^+, V_f^<, f^n V_g^+, f^{-n} V_g^<) \\ = O(\alpha_1(f)^{-n} \alpha_1(g)^{-m}). \end{aligned}$$

Soient $v \neq 0$ dans V_f^+ et $\varphi \neq 0$ dans $(V_f^<)^{\perp}$. Soient $w \neq 0$ dans V_g^+ , $\psi \neq 0$ dans $(V_g^<)^{\perp}$ et soit $w_0 = q(w)$. Par hypothèse, $\psi(w_0) \neq 0$. D'après le lemme 2.1, on a :

$$f^{2n}(w) = \lambda_1(f)^{2n} \frac{\varphi(w)}{\varphi(v)} v + f^{2n}(w_0) + O(\lambda_3(f)^{2n})$$

et, donc,

$$\begin{aligned} B_1(V_f^+, V_f^<, f^n V_g^+, f^{-n} V_g^<) &= \left| \frac{\varphi(f^n w)}{\varphi(v)} \frac{((f^*)^n(\psi))(v)}{((f^*)^n(\psi))(f^n(w))} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda_1(f)^{2n} \varphi(w) \psi(v)}{\varphi(v) \psi(f^{2n}(w))} \right| \\ &= \left| 1 + \lambda_1(f)^{-2n} \frac{\varphi(v)}{\varphi(w) \psi(v)} \psi(f^{2n} w_0) \right|^{-1} \\ &\quad + O\left(\left(\frac{\lambda_3(f)}{\lambda_1(f)}\right)^{2n}\right). \end{aligned}$$

Si f est diagonalisable à valeurs propres positives, on a

$$f^{2n}(w_0) = \lambda_2(f)^{2n} w_0$$

et le résultat en découle.

Si f est semi-simple, la restriction de f à $V_f^{<+}$ est le produit d'une homothétie de rapport $\lambda_2(f)$ par un automorphisme elliptique de $V_f^{<+}$ et, donc, il existe des réels $0 < c \leq d$ tels que, pour tout n ,

$$c\lambda^2(f)^n \leq \|f^n(w_0)\| \leq d\lambda_2(f)^n,$$

d'où le résultat. \square

3 Sous-groupes Zariski denses

Nous déduisons ici des calculs de la section 2 un résultat concernant l'ensemble des valeurs propres des éléments d'un sous-groupe Zariski dense d'un groupe semi-simple. Dans la suite de l'article, il nous servira, grâce à un résultat de Dolgopyat, à valider une hypothèse technique du théorème taubérien de la section 6.

3.1 Groupes semi-simples

Commençons par fixer quelques notations de théorie des groupes. On pourra se référer à [8] pour la théorie générale des groupes de Lie semi-simple et à [3] où sont définies les principales notions concernant les éléments loxodromiques de G .

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini. On choisit un sous-espace de Cartan \mathfrak{a} de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G et une chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$. On note \mathfrak{a}^{++} l'intérieur de \mathfrak{a}^+ et r le \mathbb{R} -rang de G , c'est-à-dire la dimension de \mathfrak{a} . On note Σ l'ensemble des racines de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} et Π la base de Σ associée au choix de \mathfrak{a}^+ . Soient A le groupe $\exp \mathfrak{a}$ et M le plus grand sous-groupe compact du centralisateur Z de A dans G : on a $Z = MA$.

On dit qu'un élément g de G est hyperbolique si et seulement s'il est conjugué à un élément de A . On dit qu'il est elliptique si et seulement s'il appartient à un sous-groupe compact de G . Tout élément g de G peut s'écrire de manière unique $g = g_e g_h g_u$ avec g_e elliptique, g_h hyperbolique et g_u unipotent qui commutent deux à deux. On note alors $\lambda(g)$ l'unique élément x de \mathfrak{a}^+ tel que $\exp x$ soit conjugué à g_h . On dit que g est loxodromique si et seulement si $\lambda(g)$ appartient à \mathfrak{a}^{++} . Alors, g est conjugué à un élément de $M \exp(\mathfrak{a}^{++})$ et, en particulier, g est semi-simple.

Rappelons un résultat de Y. Benoist :

Théorème 3.1 (Benoist, [3]). *Soit Γ un sous-semi-groupe Zariski dense de G . Le cône fermé engendré dans \mathfrak{a}^+ par l'ensemble $\lambda(\Gamma)$ est convexe. On dit que ce cône est le cône limite de Γ .*

Soit (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de G . On appelle poids restreints de (ρ, V) les poids de \mathfrak{a} dans V à travers la différentielle de ρ , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires χ de \mathfrak{a} pour lesquelles l'espace $V_\chi = \{v \in V \mid \forall X \in \mathfrak{a} \quad d\rho(X)v = \chi(X)v\}$ n'est pas nul. Supposons ρ irréductible ; alors, l'ensemble des poids restreints possède un plus grand

élément χ pour l'ordre associé à \mathfrak{a}^+ sur \mathfrak{a}^* . On dit que χ est le plus haut poids restreint de ρ . Les autres poids sont de la forme $\chi - \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$, $n_\alpha \in \mathbb{N}$. En particulier, pour g dans G , on a $\lambda_1(\rho(g)) = e^{\chi(\lambda(g))}$. On dit que ρ est proximale si et seulement si $\dim V_\chi = 1$.

Si G est déployé, le groupe $\rho(G)$ est un groupe linéaire semi-simple déployé, donc, $\rho(Z)$ est constitué d'endomorphismes diagonalisables et, par conséquent, l'image par ρ d'un élément loxodromique de G est diagonalisable.

Choisissons une indexation χ_1, \dots, χ_k des poids restreints de ρ de façon à ce que χ_1 soit le plus haut poids restreint et, pour tout $1 \leq i \leq k$, fixons une classe à homothétie près de normes euclidiennes $\|\cdot\|_i$ invariante par $\rho(M)$ sur V_{χ_i} : la suite $z = ((V_{\chi_1}, \|\cdot\|_1), \dots, (V_{\chi_k}, \|\cdot\|_k))$ est une croix normée au sens de la section 2 et, pour tout g dans $M \exp(\mathfrak{a}^{++})$, le couple $(\rho(g), z)$ est un endomorphisme normé de V . Plus généralement, si g est un élément loxodromique de G et si h est un élément de g tel que $h^{-1}gh$ appartienne à $M \exp(\mathfrak{a}^{++})$, le couple $(\rho(g), \rho(h)z)$ est un endomorphisme normé. On dira qu'une telle croix normée z est adaptée à ρ .

Rappelons un résultat de la théorie des représentations de G :

Proposition 3.2 (Tits, [20]). *Il existe une famille de représentations de dimension finie irréductibles et proximales $(\rho_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ de G telle que, pour tout α dans Π le plus haut poids restreint χ_α de ρ_α soit un multiple du poids fondamental associé à α . Pour α dans Π , les poids restreints de ρ_α sont χ_α , $\chi_\alpha - \alpha$ et des poids de la forme $\chi_\alpha - \alpha - \sum_{\beta \in \Pi} n_\beta \beta$, $n_\beta \in \mathbb{N}$.*

Dorénavant, on fixe une telle famille de représentations. Pour α dans Π et g dans G , l'endomorphisme $\rho_\alpha(g)$ est proximal si et seulement si $\alpha(\lambda(g)) \neq 0$ et, alors, on a $\alpha_1(\rho_\alpha(g)) = e^{\alpha(\lambda(g))}$. On note V_α^+ la droite V_{χ_α} et $V_\alpha^<$ son unique supplémentaire A -stable. Par définition, on a le

Lemme 3.3. *Soient g dans G et X dans \mathfrak{a} . Alors $\lambda(g) = X$ si et seulement si, pour tout α dans Π , on a $\lambda_1(\rho_\alpha(g)) = e^{\chi_\alpha(X)}$.*

Soit \mathcal{P} la variété des drapeaux de G , c'est-à-dire l'ensemble des sous-groupes paraboliques minimaux de G . C'est un G -espace homogène compact qui s'identifie au quotient G/P où P est le sous-groupe parabolique minimal engendré par M , A et les exponentielles des sous-espaces poids associés aux éléments de Π dans \mathfrak{g} . Pour tout α dans Π , on a $\rho_\alpha(P)V_\alpha^+ = V_\alpha^+$ et l'application $g \mapsto (\rho_\alpha(g)V_\alpha^+)_{\alpha \in \Pi}$ factorise à travers une immersion de \mathcal{P} dans $\prod_{\alpha \in \Pi} \mathbb{P}(V_\alpha)$. Un élément g de G est loxodromique si et seulement s'il possède

un point fixe attracteur ξ_g^+ dans \mathcal{P} . On note alors ξ_g^- le point fixe attracteur de g^{-1} .

Soit P^\vee le sous-groupe parabolique opposé à P par rapport à A , c'est-à-dire le sous-groupe de G engendré par M , A et les exponentielles des sous-espaces poids associés aux éléments de $-\Pi$. On a $P \cap P^\vee = Z$ et, à travers l'application $g \mapsto (gP, gP^\vee)$, on peut voir G/Z comme l'unique G -orbite ouverte \mathcal{Z} dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Pour tout a dans $\exp(\mathfrak{a}^{++})$, on a $(\xi_a^+, \xi_a^-) = (P, P^\vee) \in \mathcal{Z}$. Plus généralement, si g est un élément loxodromique de G , le couple (ξ_g^+, ξ_g^-) appartient à \mathcal{Z} : vu comme élément de G/Z , c'est la classe à droite suivant Z de l'ensemble des h dans G tels que $h^{-1}gh$ appartienne à $M \exp(\mathfrak{a}^{++})$.

Le lemme suivant nous permettra d'appliquer les résultats du paragraphe 2.1 aux images des éléments de G dans les espaces de représentations :

Lemme 3.4. *Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G . Alors, si g est un élément loxodromique de G et (g_n) une suite d'éléments loxodromiques telle que $(\xi_{g_n}^+, \xi_{g_n}^-) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\xi_g^+, \xi_g^-)$, il existe des croix normées de même paramètre z et (z_n) dans V telles que $(\rho(g), z)$ et les $(\rho(g_n), z_n)$ soient des endomorphismes normés et que l'on ait $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z$.*

Démonstration. Donnons-nous h et (h_n) dans G tels que $h^{-1}gh$ et les $(h_n^{-1}g_nh_n)$ appartiennent à $M \exp(\mathfrak{a}^{++})$. Dans G/Z , on a $h_n Z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} hZ$. Choisissons une croix normée adaptée z dans V . Alors les couples $(\rho(g), \rho(h)z)$ et $(\rho(g_n), \rho(h_n)z)$ sont des endomorphismes normés de V et, comme $\rho(Z)$ fixe z , on a bien $h_n z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} hz$. \square

3.2 Un résultat de densité

Soit Γ un sous-semi-groupe Zariski dense de G . Rappelons que, d'après [11], Γ contient des éléments loxodromiques. Dans ce paragraphe, nous utilisons le lemme 2.5 pour démontrer le résultat suivant, qui permet notamment d'étudier le sous-groupe de \mathfrak{a} engendré par $\lambda(\Gamma)$:

Proposition 3.5. *Soit g un élément loxodromique de Γ . Alors, quitte à remplacer g par une puissance convenable, il existe un entier p , un élément h et des suites (g_n) et (h_n) dans Γ tels que*

- (i) *pour tout n , les éléments g_n et h_n sont des mots de longueur $\leq pn$ en g et h .*

(ii) si G est déployé, pour tout α dans Π , il existe $c_\alpha \neq 0$ et $0 < \eta_\alpha < e^{-2\alpha(\lambda(g))}$ tels que

$$\chi_\alpha(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_n) - \lambda(h_n)) = c_\alpha e^{-2n\alpha(\lambda(g))} + O(\eta_\alpha^n).$$

(iii) dans le cas général, pour tout α dans Π , on a :

$$|\chi_\alpha(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_n) - \lambda(h_n))| \asymp e^{-2n\alpha(\lambda(g))}.$$

Si G est déployé, les images de ses éléments loxodromiques dans ses espaces de représentations sont diagonalisables, ce qui explique l'analogie entre les énoncés de la proposition 3.5 et du lemme 2.5.

La démonstration utilise le

Lemme 3.6. Soit $(\rho_i, V_i)_{i \in I}$ une famille finie de représentations irréductibles proximales de G . Soit, pour tout i , un projecteur non nul p_i de V_i . Alors, il existe γ dans Γ , tel que, pour tout i , l'endomorphisme $\rho_i(\gamma)$ soit proximal et que $p_i \left(V_{i, \rho_i(\gamma)}^+ \right) \not\subset V_{i, \rho_i(\gamma)}^<$.

Démonstration. Soit g un élément loxodromique de Γ . Pour tout i , notons $V_i^+ = V_{i, \rho_i(g)}^+$ et $V_i^< = V_{i, \rho_i(g)}^<$. Comme les représentations sont irréductibles, il existe h dans Γ tel que, pour tout i , on ait $p_i(V_i) \not\subset h^{-1}V_i^<$. De même, il existe k dans Γ tel que, pour tout i , on ait $kV_i^+ \not\subset p_i^{-1}(h^{-1}V_i^<)$ et $kV_i^+ \not\subset h^{-1}V_i^<$. Alors, en raisonnant comme dans le lemme 2.3, pour n suffisamment grand, pour tout i , l'élément $kg^n h$ agit de façon proximale sur V_i et l'on a

$$V_{i, \rho_i(kg^n h)}^+ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} kV_i^+ \text{ et } V_{i, \rho_i(kg^n h)}^< \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h^{-1}V_i^<.$$

En particulier, pour n suffisamment grand, $p_i \left(V_{i, \rho_i(kg^n h)}^+ \right) \not\subset V_{i, \rho_i(kg^n h)}^<$. \square

Démonstration de la proposition 3.5. Pour α dans Π , notons p_α et q_α les projecteurs $\rho_\alpha(g)$ -invariants sur $V_{\alpha, \rho_\alpha(g)}^{<+}$ et $V_{\alpha, \rho_\alpha(g)}^+$ dans V_α et p_α^* le projecteur $\rho_\alpha(g)^*$ -invariant sur $V_{\alpha, \rho_\alpha(g)^*}^+$ dans V_α^* . Alors, d'après le lemme 3.6 appliqué aux projecteurs $(p_\alpha, p_\alpha^*, q_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$, il existe un élément loxodromique h de Γ tel que, pour tout α dans Π , on ait $V_{\alpha, \rho_\alpha(g)}^+ \not\subset V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^<$, $V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^+ \not\subset V_{\alpha, \rho_\alpha(g)}^<$ et $q_\alpha \left(V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^+ \right) \not\subset V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^<$. En d'autres termes, $\rho_\alpha(g)$ et $\rho_\alpha(h)$ vérifient les hypothèses du lemme 2.5.

Si G est déployé, les $\rho_\alpha(g)$, $\alpha \in \Pi$, sont diagonalisables donc, quitte à remplacer g par une puissance, on peut les supposer à valeurs propres positives. Il existe alors, d'après le lemme 2.5, un entier p_0 tel que, pour tout α dans Π , il existe $c_\alpha \neq 0$ et $0 < \eta_\alpha < e^{-2\alpha(\lambda(g))}$ avec, pour $p \geq p_0$,

$$B_1(V_{\alpha, \rho_\alpha(g)}^+, V_{\alpha, \rho_\alpha(g)}^<, V_{\alpha, \rho_\alpha(g^n h^{pn} g^n)}^+, V_{\alpha, \rho_\alpha(g^n h^{pn} g^n)}^<) - 1 = c_\alpha e^{-2n\alpha(\lambda(g))} + O(\eta_\alpha^n).$$

Posons $g_n = g^{qn}$, pour un certain entier q , et $h_n = g^n h^{pn} g^n$, pour un certain $p \geq p_0$. D'après le lemme 2.4, on a, pour tout α dans Π ,

$$V_{\alpha, \rho_\alpha(h_n)}^+ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V_{\alpha, \rho_\alpha(g)}^+ \text{ et } V_{\alpha, \rho_\alpha(h_n^{-1})}^+ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} V_{\alpha, \rho_\alpha(g^{-1})}^+$$

et, donc, dans \mathcal{P} , on a $\xi_{h_n}^+ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_g^+$ et $\xi_{h_n}^- \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_g^-$. D'après le lemme 3.4, pour tout α dans Π , il existe des croix normées z^α et (z_n^α) dans V_α telles que $z_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z^\alpha$ et que les couples $(\rho_\alpha(g), z^\alpha)$ et $(\rho_\alpha(h_n), z_n^\alpha)$ soient des endomorphismes normés de V_α . D'après le lemme 2.3, on a alors, pour tout α dans Π ,

$$\begin{aligned} \chi_\alpha(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_n) - \lambda(h_n)) \\ = c_\alpha e^{-2n\alpha(\lambda(g))} + O(\eta_\alpha^n) + O(e^{-qn\alpha(\lambda(g))}) + O(e^{-\alpha(\lambda(h_n))}). \end{aligned}$$

Or, à nouveau d'après le lemme 2.4, appliqué simultanément dans toutes les représentations V_α , $\alpha \in \Pi$, et d'après le lemme 3.3, la quantité $2n\lambda(g) + pn\lambda(h) - \lambda(h_n)$ est bornée dans \mathfrak{a} et, donc, pour tout α dans Π , on a $e^{-\alpha(\lambda(h_n))} = O(e^{-2n\alpha(\lambda(g)) - pn\alpha(\lambda(h))})$. Le résultat en découle, en prenant p et q suffisamment grands.

Dans le cas général, notons g_e la composante elliptique de g . Quitte à remplacer g par une puissance, on peut supposer, que, pour α dans Π , l'endomorphisme $\rho_\alpha(g_e)$ est soit l'identité, soit d'ordre infini. Il existe alors une suite de puissances de g_e tendant vers e dans G . En particulier, il existe un entier m et un réel $\varepsilon > 0$ tels que, pour α dans Π et n entier, si $d\left(g^n \left(p_\alpha V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^+\right), \mathbb{P}\left(V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^<\right)\right) \leq \varepsilon$, alors, pour $1 \leq i \leq r$, on a $d\left(g^{n+im} \left(p_\alpha V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^+\right), \mathbb{P}\left(V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^<\right)\right) \geq \varepsilon$ (rappelons que r désigne le cardinal de Π). Alors, pour tout entier n , il existe $0 \leq i \leq r$ tel que, pour tout α dans Π , on ait $d\left(g^{(n+i)m} \left(p_\alpha V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^+\right), \mathbb{P}\left(V_{\alpha, \rho_\alpha(h)}^<\right)\right) \geq \varepsilon$. On peut à présent appliquer la même méthode que dans le cas déployé pour obtenir l'estimation souhaitée. \square

Comme première application de cet énoncé technique, retrouvons des résultats de Y. Benoist dans [3] et [4]. Rappelons qu'on a appelé cône limite de Γ le cône convexe apparaissant dans le théorème 3.1.

Théorème 3.7 (Benoist, [3], [4]). *Le cône limite de Γ est d'intérieur non vide. Le sous-groupe de \mathfrak{a} engendré par $\lambda(\Gamma)$ est dense.*

Démonstration. Comme on sait que le cône limite de Γ est convexe, il suffit de prouver que, pour φ dans \mathfrak{a}^* , si $\varphi(\lambda(\Gamma)) \subset \mathbb{Z}$, on a $\varphi = 0$.

D'après [11], il existe g dans Γ , loxodromique, tel que les réels strictement positifs $\alpha(\lambda(g))$, $\alpha \in \Pi$, soient deux à deux disjoints. Soient (g_n) et (h_n) comme dans la proposition 3.5. Soient $\varphi = \sum_{\alpha \in \Pi} \varphi_\alpha \chi_\alpha$ dans \mathfrak{a}^* un élément non nul et α dans Π tel que φ_α soit non nul et que $\alpha(\lambda(g))$ soit le plus grand possible. Pour n suffisamment grand, on a :

$$|\varphi(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_m) - \lambda(h_m))| \asymp e^{-2n\alpha(\lambda(g))}$$

et, donc, $\varphi(\lambda(\Gamma)) \not\subset \mathbb{Z}$. \square

4 Groupes de Schottky et calcul symbolique

Nous allons à présent nous concentrer sur l'étude d'une classe particulière de sous-groupes de G , étude reliée à la dynamique symbolique et au formalisme thermodynamique. En particulier, nous allons utiliser la proposition 3.5 pour contrôler, grâce à un résultat de D. Dolgopyat dans [6], la norme de certains opérateurs de Ruelle. Nous commençons par des rappels de théorie des groupes.

4.1 Décompositions de Cartan et d'Iwasawa

On fixe un sous-groupe compact K maximal de G tel que le point fixe de K dans l'espace symétrique de G appartienne au plat maximal stable par A . On a alors la décomposition de Cartan $G = K(\exp \mathfrak{a}^+)K$. Plus précisément, pour g dans G , il existe un unique x dans \mathfrak{a}^+ tel que $\exp x$ appartienne à KgK . On pose $x = \mu(g)$. L'application $\mu : G \rightarrow \mathfrak{a}^+$ est analytique et propre.

Soit (ρ, V) une représentation irréductible de dimension finie de G de plus haut poids restreint χ . Il existe un produit scalaire sur V pour lequel les éléments de $\rho(A)$ sont symétriques et ceux de $\rho(K)$ sont orthogonaux. On

dit que la norme associée à un tel produit scalaire est (ρ, A, K) -bonne. Si V est muni d'une norme (ρ, A, K) -bonne, pour g dans G , on a $\|\rho(g)\| = e^{\chi(\mu(g))}$. Dorénavant, on munit chaque V_α d'une norme (ρ, A, K) -bonne.

On a la

Proposition 4.1 (Benoist, [3]). *Soit Γ un sous-semi-groupe Zariski dense de G . Le cône asymptote à l'ensemble $\mu(\Gamma)$ dans \mathfrak{a} est le cône limite de Γ .*

Rappelons qu'on a noté ξ_g^+ le point fixe attracteur d'un élément loxodromique g de G dans la variété des drapeaux \mathcal{P} .

Théorème 4.2 (Benoist, [3]). *Soit Γ un sous-semi-groupe Zariski dense de G . L'adhérence de l'ensemble des ξ_γ^+ , où γ est un élément loxodromique de Γ , est le plus petit fermé Γ -invariant non vide de \mathcal{P} . On l'appelle ensemble limite de Γ . Il est Zariski dense dans \mathcal{P} .*

Rappelons les propriétés du cocycle d'Iwasawa-Busemann qui proviennent de [16].

On a la décomposition d'Iwasawa $G = KP$. En d'autres termes K agit transitivement sur \mathcal{P} . Soient ξ_0 le point fixe de P dans \mathcal{P} et U le radical unipotent de P . On a $P = MAU$ et $M = K \cap Z$. Pour g dans G , on note $\sigma(g, \xi_0)$ l'unique élément x de \mathfrak{a} tel que g appartienne à $K(\exp x)U$. Plus généralement, pour ξ dans \mathcal{P} , si $\xi = k\xi_0$ avec k dans K , on note $\sigma(g, \xi) = \sigma(gk, \xi_0)$. L'application $\sigma : G \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}$ est analytique et vérifie la relation de cocycle :

$$\forall g, h \in G \quad \forall \xi \in \mathcal{P} \quad \sigma(gh, \xi) = \sigma(g, h\xi) + \sigma(h, \xi).$$

Si g est un élément loxodromique de G , on a $\sigma(g, \xi_g^+) = \lambda(g)$.

Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G de plus haut poids restreint χ , munie d'une norme (ρ, A, K) -bonne. Soit ξ dans \mathcal{P} et soit W le plus petit sous-espace vectoriel de V qui soit stable par le sous-groupe parabolique associé à ξ . D'après [16, § 6.2], pour X dans $\mathbb{P}(W)$ et g dans G , on a $\sigma_1(\rho(g), X) = e^{\chi(\sigma(g, \xi))}$.

Soit g dans G tel que $\mu(g) \in \mathfrak{a}^{++}$. Soit k dans K tel que $g \in k(\exp \mu(g))K$. Le point $k\xi_0$ ne dépend que de g ; on le note ξ_g^M . Nous pouvons préciser [16, § 6.6] :

Lemme 4.3. *On a :*

$$\mu(gh) - \mu(h) = \sigma(g, \xi_h^M) + O(e^{-\min_{\alpha \in \Pi} \alpha(\mu(h))}),$$

uniformément pour g dans tout compact de G .

Démonstration. Il suffit de démontrer ce résultat pour $h = a$ dans $\exp(\mathfrak{a}^+)$. Alors, par un raisonnement analogue à celui du lemme 2.2, pour α dans Π , on a :

$$\frac{\|\rho_\alpha(ga)\|}{\|\rho_\alpha(a)\|} = \sigma_1(\rho_\alpha(g), V_\alpha^+) (1 + O(\alpha_1(\rho_\alpha(a))^{-1})),$$

uniformément pour g dans un compact de G , c'est-à-dire

$$\chi_\alpha(\mu(ga) - \mu(a) - \sigma(g, \xi_0)) = O(e^{-\alpha(\log a)}),$$

d'où le résultat. \square

4.2 Groupes de Schottky

Les groupes de Schottky généralisés, objets de notre étude, ont été introduits par Benoist dans [3]. Dans [17], nous les avons reliés à la dynamique symbolique, avec le vocabulaire de [12]. Rappelons ici brièvement certaines de leurs propriétés.

À la section 3, on a noté \mathcal{Z} la G -orbite ouverte dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. On dit que deux points ξ et η de \mathcal{P} sont en position générale si et seulement si le couple (ξ, η) appartient à \mathcal{Z} .

On se donne des éléments loxodromiques $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ de G ($p \geq 2$). Pour $1 \leq i \leq p$, on note $\xi_i^+ = \xi_{\gamma_i}^+$ et $\xi_i^- = \xi_{\gamma_i^{-1}}^+$ et on suppose que les couples $(\xi_i^\omega, \xi_j^\varpi)$, $1 \leq i \neq j \leq p$, $\omega, \varpi \in \{-1, 1\}$, sont en position générale. Quitte à remplacer γ_1 et γ_2 par des éléments proches, on peut supposer que le sous-groupe Γ de G engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ est Zariski dense dans G . Quitte à remplacer les γ_i par des puissances, on peut supposer qu'il existe des parties $(b_i^+, b_i^-, B_i^+, B_i^-)_{1 \leq i \leq p}$ de \mathcal{P} et un réel $0 < \varepsilon < 1$ tels que

- (i) pour tous $1 \leq i \leq p$ et $\omega \in \{-1, 1\}$, ξ_i^ω est un point intérieur de b_i^ω et $\gamma_i^\omega B_i^\omega \subset b_i^\omega \subset B_i^\omega$ et la restriction de γ_i à B_i^ω est ε -lipschitzienne.
- (ii) pour tous $1 \leq i \neq j \leq p$ et $\omega, \varpi \in \{-1, 1\}$, on a $b_i^\omega \subset B_j^\varpi$.
- (iii) l'ensemble

$$B = \bigcap_{\substack{1 \leq i \leq p \\ \omega \in \{-1, 1\}}} B_i^\omega$$

est non vide.

Le résultat suivant provient de [3] et de [17, § 3.1].

Proposition 4.4. *Le groupe Γ est le groupe libre engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. Il est discret dans G et tous ses éléments sont loxodromiques. Le cône limite de Γ est inclus dans \mathfrak{a}^{++} . Il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout γ dans Γ , on ait $\|\lambda(\gamma) - \mu(\gamma)\| \leq M$ et que, si γ_i^ω est le dernier terme de l'écriture de γ comme mot en les γ_j^ω , pour tout ξ dans B_i^ω , on ait $\|\sigma(\gamma, \xi) - \mu(\gamma)\| \leq M$.*

On note S l'ensemble $\{\gamma_i, \gamma_i^{-1} \mid 1 \leq i \leq p\}$, U_0 l'ensemble des suites finies éventuellement vides (u_0, \dots, u_n) d'éléments de S telles que, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on ait $u_{k+1} \neq u_k^{-1}$, et $\ell : U_0 \rightarrow \mathbb{N}$ la longueur des mots. On identifie un élément de Γ et le mot associé dans U_0 . De même, on note U l'espace compact des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S avec $u_{n+1} \neq u_n^{-1}$, pour n dans \mathbb{N} . On dira que U_0 est l'ensemble des suites finies admissibles et U celui des suites infinies admissibles. On munit U de la métrique définie par

$$\forall u \neq v \in U \quad d(u, v) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n\}}.$$

Rappelons la description de l'ensemble limite de Γ , comme dans [5, § 5.11] et dans [17, § 3.2] :

Proposition 4.5. *Soit u dans U . Pour tout ξ dans \mathcal{P} , la suite $(u_0 \dots u_n \xi)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathcal{P} et sa limite ne dépend pas de ξ . L'application ainsi construite $U \rightarrow \mathcal{P}$ induit un homéomorphisme bi-höldérien de U sur l'ensemble limite Λ_Γ de Γ .*

Dorénavant, on identifie U et l'ensemble limite de Γ . Nous allons étudier l'action de Γ sur Λ_Γ à l'aide du formalisme thermodynamique développé dans [12].

On note $s : U \rightarrow U$ l'opérateur de décalage défini par $s(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Soit f une fonction continue de U dans un espace vectoriel V . Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\Sigma_n f$ la fonction $\sum_{k=0}^{n-1} f \circ s^k$. Si f est à valeurs complexes, on note L_f l'opérateur de Ruelle associé, c'est-à-dire que, pour toute fonction continue h sur U , et pour tout u dans U , on a $L_f(h)(u) = \sum_{sv=u} e^{f(v)} h(v)$. On a alors $L_f^n(h)(u) = \sum_{s^n v=u} e^{\Sigma_n f(v)} h(v)$, pour tout n dans \mathbb{N} .

Enfin, si f est à valeurs réelles, on note $p(f)$ sa pression, c'est-à-dire la quantité $\sup (h_m(s) + \int_S f dm)$, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des probabilités boréliennes m de U qui sont invariantes par s et où, pour une telle probabilité m , on a noté $h_m(s)$ l'entropie de s relativement à m . La pression est une fonction convexe $\mathcal{C}^0(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour $a > 0$, on note H_a l'espace des fonctions à valeurs complexes sur U qui sont höldériennes d'exposant a . Pour h dans H_a , on note $C_a(h)$ sa constante de Hölder et $\|h\|_a = \|h\|_\infty + C_a(h)$ sa norme naturelle dans H_a .

Si f est une fonction à valeurs réelles dans H_a , d'après le théorème de Ruelle, l'opérateur L_f possède une valeur propre dominante dans $\mathcal{C}^0(U)$ qui est égale à $e^{p(f)}$. Les vecteurs propres correspondants sont dans H_a et ce sont des fonctions proportionnelles à des fonctions réelles de signe constant. De même, l'adjoint de L_f admet $e^{p(f)}$ comme valeur propre dominante dans l'espace des mesures boréliennes complexes de U et admet en particulier une unique mesure positive de probabilité comme vecteur propre de valeur propre $e^{p(f)}$.

Dorénavant, pour u dans U , on notera $f(u) = \sigma(u_0, s(u))$. On fixe une fois pour toutes un réel $a > 0$ tel que f soit höldérienne d'exposant a . Pour tout $n \geq 1$, pour u dans U , on a $\Sigma_n f(u) = \sigma(u_0 \dots u_{n-1}, s^n(u))$. En particulier, si u est un mot périodique dans U qui est le point fixe attracteur d'un élément γ de longueur n dans Γ , on a $\Sigma_n f(u) = \lambda(\gamma)$. Pour θ dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, on note L_θ l'opérateur $L_{-\theta \circ f}$. Si θ est dans \mathfrak{a}^* , on note m_θ la probabilité vecteur propre principal de L_θ^* et h_θ le vecteur propre principal de L_θ tel que $\int_U h_\theta dm_\theta = 1$: c'est une fonction réelle strictement positive. L'application $\theta \mapsto L_\theta, \mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \rightarrow \text{End}(H_a)$ est analytique.

Du théorème 3.7 et de [12, § 4], on déduit la

Proposition 4.6. *Pour tous φ, θ dans \mathfrak{a}^* avec $\theta \neq 0$, le rayon spectral de $L_{\varphi+i\theta}$ est $< e^{p(-\varphi \circ f)}$.*

On note désormais P la fonction $\varphi \mapsto p(-\varphi \circ f), \mathfrak{a}^* \rightarrow \mathbb{R}$. D'après [17, § 3.3 et LEMME 4.4], on a le

Lemme 4.7. *La fonction P est analytique strictement convexe. On a $P(0) > 0$ et P prend des valeurs strictement négatives sur \mathfrak{a}^* . Soit φ dans \mathfrak{a}^* . Le vecteur $dP(\varphi)$ est non nul et, si $P(\varphi) = 0$, on a $dP(\varphi)(\varphi) < 0$. Enfin, la forme bilinéaire $d^2P(\varphi)$ est définie positive sur $\ker dP(\varphi)$.*

4.3 Norme des opérateurs de Ruelle

Nous utilisons ici un résultat de D. Dolgopyat pour contrôler, quand $\theta \rightarrow \infty$, la norme des opérateurs $(L_{\varphi+i\theta} - e^{P(\varphi)})^{-1}$: la proposition 3.5 nous permet en effet de valider les hypothèses du théorème principal de [6]. Grâce à ces

contrôles de normes nous pourrions appliquer au problème de comptage le résultat taubérien de la section 6.

Soit θ dans \mathfrak{a}^* . On note $(\theta_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ ses coordonnées dans la base $(\chi_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$, ainsi que $|\theta| = \max_{\alpha \in \Pi} |\theta_\alpha|$ et $|\theta|^k = \max_{\alpha \in \Pi} |\theta_\alpha|^{k_\alpha}$, pour $k \in (\mathbb{R}_+^*)^\Pi$. Remarquons que, pour $k, k' \in (\mathbb{R}_+^*)^\Pi$, il existe $k'' \in (\mathbb{R}_+^*)^\Pi$ tel que, si $|\theta| \geq 1$, on a $|\theta|^k |\theta|^{k'} \leq |\theta|^{k''}$. Enfin, on désigne par V_θ l'opérateur qui, à une fonction k , associe la fonction $e^{i\theta \circ f}(k \circ s)$.

Le résultat suivant, qui précise la proposition 4.6, est une généralisation directe de [6]. L'alternative qui y est présentée explicite dans notre situation celle qui règne dans [6, § 1] entre la condition (v) du théorème 1 et la condition (v) du théorème 2. Nous avons étendu ce résultat au cas où, avec les notations de Dolgopyat, d'une part la fonction f peut varier dans un compact et, d'autre part, la fonction τ prend ses valeurs dans un espace vectoriel. La démonstration de cette généralisation est immédiate, avec les méthodes de [6, § 7 et 8].

Théorème 4.8 (Dolgopyat, [6]). *Une et une seule des deux alternatives suivantes est possible :*

- (i) *pour tout compact L de \mathfrak{a}^* , il existe $M > 0$ et k dans $(\mathbb{R}_+^*)^\Pi$ tels que, pour tout φ dans L , pour tout θ avec $|\theta| \geq 1$, on ait :*

$$\left\| (L_{\varphi+i\theta} - e^{P(\varphi)})^{-1} \right\|_a \leq M |\theta|^k.$$

- (ii) *il existe l dans $(\mathbb{R}_+^*)^\Pi$ tel que, étant donné k dans $(\mathbb{R}_+^*)^\Pi$, il existe $h > 0$ et des suites (θ_m) tendant vers l'infini dans \mathfrak{a}^* et (h_m) de module 1 dans H_a avec, pour tout m ,*

$$1 \leq \|h_m\|_a \leq |\theta_m|^l \quad \text{et} \quad \left\| V_{\theta_m}^{[h \log |\theta_m|]} h_m - h_m \right\|_\infty \leq |\theta_m|^{-k}.$$

Expliquons le sens de cet énoncé. Étant données deux fonctions höldériennes u et v sur U , on montre dans [12, § 4] que soit l'opérateur de Ruelle L_{u+iv} a un rayon spectral $< e^{p(u)}$, soit l'ensemble des valeurs de v aux points périodiques de U engendre un sous-groupe discret de \mathbb{R} . La proposition 4.6 utilise un résultat de Benoist, le théorème 3.7, pour montrer que, dans notre situation, c'est la première de ces deux alternatives qui est réalisée. Le théorème de Dolgopyat, quant à lui, constitue une quantification

de celui de Pollicott. La proposition 3.5, elle, quantifie le théorème de Benoist. Nous allons donc utiliser cette dernière pour montrer que, dans notre cas, c'est la première des deux assertions du théorème 4.8 qui est vérifiée.

Dans cet esprit, le résultat d'analyse élémentaire suivant précise la démonstration du théorème 3.7 que nous avons donnée.

Lemme 4.9. *Soient $0 < a_1 < \dots < a_r$. Soit, pour tout $1 \leq i \leq r$, une suite $(u_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels. On suppose que, pour $1 \leq i \leq r$, on a $|u_i^n| \asymp e^{-a_i n}$. Pour tout x dans \mathbb{R}^r , pour tout entier naturel n , notons*

$$u_n(x) = x_1 u_1^n + \dots + x_r u_r^n.$$

Alors il existe des nombres réels $k_1, \dots, k_r > 0$ et $t_1, \dots, t_r > 0$ ayant les propriétés suivantes :

- (i) *pour tout $1 \leq i \leq r$, on a $t_i a_i > 1$.*
- (ii) *pour tout $1 \leq i \leq r$, notons E_i l'ensemble des x dans \mathbb{R}^r tels que $|x_i|^{k_i} = \max_{1 \leq j \leq r} |x_j|^{k_j}$ et, pour x dans E_i , notons $n_i(x) = [t_i \log |x_i|]$; alors quand x tend vers ∞ dans E_i , on a*

$$|u_{n_i(x)}(x)| \asymp |x_i|^{1-a_i t_i}.$$

Démonstration. Soient $k_1, \dots, k_r > 0$ et $t_1, \dots, t_r > 0$. Définissons E_1, \dots, E_r comme dans l'énoncé. Soit $1 \leq i \leq r$. Pour x dans E_i , le nombre $|x_i u_i^{[t_i \log |x_i|]}|$ est de l'ordre de $|x_i|^{1-t_i a_i}$ tandis que, pour $j \neq i$, la quantité $|x_j u_j^{[t_i \log |x_i|]}|$ est majorée par un terme de l'ordre de $|x_i|^{\frac{k_i}{k_j} - t_i a_j}$. Le lemme est alors une conséquence du calcul suivant. \square

Lemme 4.10. *Soient $0 < a_1 < \dots < a_r$ des réels. Il existe $k_1, \dots, k_r > 0$ et $t_1, \dots, t_r > 0$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq r$, on ait $t_i a_i > 1$ et que, pour tous $1 \leq i \neq j \leq r$, on ait $\frac{k_i}{k_j} - t_i a_j < 1 - t_i a_i$.*

Démonstration. Pour $1 \leq i \leq r$, nous allons chercher t_i sous la forme $\frac{1+\varepsilon^i}{a_i}$ où $\varepsilon > 0$ sera suffisamment petit. On doit alors avoir, pour tous $1 \leq i < j \leq r$,

$$\frac{k_i}{k_j} < \frac{a_j}{a_i} + \varepsilon^i \left(\frac{a_j}{a_i} - 1 \right) \text{ et } \frac{k_j}{k_i} < \frac{a_i}{a_j} - \varepsilon^j \left(1 - \frac{a_i}{a_j} \right).$$

Écrivons, pour tout i , $k_i = \frac{u_i}{a_i}$. Il faut, pour $i < j$,

$$\left(1 - \varepsilon^j \left(\frac{a_j}{a_i} - 1\right)\right)^{-1} < \frac{u_i}{u_j} < 1 + \varepsilon^i \left(1 - \frac{a_i}{a_j}\right). \quad (4.1)$$

Commençons par remarquer que, si ε est suffisamment petit, on a, pour tout i ,

$$\left(1 + \varepsilon^i \left(1 - \frac{a_i}{a_{i+1}}\right)\right) \left(1 - \varepsilon^{i+1} \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} - 1\right)\right) > 1$$

et, donc, que l'on peut alors choisir des réels $u_1, \dots, u_r > 0$ tels que, pour $1 \leq i \leq r - 1$,

$$\left(1 - \varepsilon^{i+1} \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} - 1\right)\right)^{-1} < \frac{u_i}{u_{i+1}} < 1 + \varepsilon^i \left(1 - \frac{a_i}{a_{i+1}}\right).$$

Alors, pour $i < j$, on a :

$$\prod_{k=i+1}^j \left(1 - \varepsilon^k \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} - 1\right)\right)^{-1} < \frac{u_i}{u_j} < \prod_{l=i}^{j-1} \left(1 + \varepsilon^l \left(1 - \frac{a_l}{a_{l+1}}\right)\right)$$

et, donc, il suffit pour valider (4.1) que ε vérifie, pour $i + 1 < j$,

$$\prod_{k=i+1}^j \left(1 - \varepsilon^k \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} - 1\right)\right) < 1 - \varepsilon^j \left(\frac{a_j}{a_i} - 1\right) \quad (4.2)$$

et

$$\prod_{l=i}^{j-1} \left(1 + \varepsilon^l \left(1 - \frac{a_l}{a_{l+1}}\right)\right) < 1 + \varepsilon^i \left(1 - \frac{a_i}{a_j}\right). \quad (4.3)$$

Dans (4.2), le membre de gauche s'écrit $1 - \varepsilon^{i+1} \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} - 1\right) + O(\varepsilon^{i+2})$ tandis que le membre de droite s'écrit $1 + O(\varepsilon^{i+2})$. Donc cette inégalité est vraie pour ε suffisamment petit. De même, dans (4.3), le membre de gauche s'écrit $1 + \varepsilon^i \left(1 - \frac{a_i}{a_{i+1}}\right) + O(\varepsilon^{i+1})$. Or on a $a_{i+1} < a_j$, donc $1 - \frac{a_i}{a_{i+1}} < 1 - \frac{a_i}{a_j}$ et, par conséquent, cette seconde inégalité est aussi vérifiée pour ε suffisamment petit, ce qu'il fallait démontrer. \square

Nous sommes à présent en mesure d'utiliser la proposition 3.5 et le théorème 4.8 pour prouver la

Proposition 4.11. *Soit φ dans \mathfrak{a}^* avec $P(\varphi) = 0$ et soit $t_0 \geq 0$. Il existe k dans $(\mathbb{R}_+^*)^\Pi$ et $M \geq 0$ tels que, pour tout θ dans \mathfrak{a}^* avec $|\theta| \geq 1$ et pour tout $0 \leq t \leq t_0$, on ait $\left\| (L_{(1+t)\varphi+i\theta} - 1)^{-1} \right\|_a \leq M |\theta|^k$.*

Nous utiliserons ce résultat sous la forme du

Corollaire 4.12. *Soit h dans H_a . Pour toute fonction à décroissance rapide ρ sur \mathfrak{a}^* qui soit nulle au voisinage de 0, les fonctions*

$$\theta \mapsto (1 - L_{(1+t)\varphi+i\theta})^{-1} (h)(u)\rho(\theta) \quad t \in \mathbb{R}_+, u \in U$$

forment une famille continue en (t, u) de fonctions à décroissance rapide sur \mathfrak{a}^ .*

Démonstration de la proposition 4.11. Comme, d'après le lemme 4.7, pour $t \geq 0$, on a $P((1+t)\varphi) \leq 0$, il s'agit de montrer que, dans le théorème 4.8, c'est la première alternative qui est vraie.

Comme dans la démonstration du théorème 3.7, choisissons g dans Γ , loxodromique, tel que les réels strictement positifs $\alpha(\lambda(g))$, $\alpha \in \Pi$, soient deux à deux distincts et h , (g_n) , (h_n) et p comme dans la proposition 3.5. On peut alors appliquer le lemme 4.9 aux nombres $2\alpha(g)$ et aux suites $(\chi_\alpha(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_n) - \lambda(h_n)))$, $\alpha \in \Pi$: on note $(k_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ et $(t_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ les réels > 0 donnés par les conclusions du lemme. On note k_0 le plus petit des $(k_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$.

Soient θ dans \mathfrak{a}^* , q un entier, $\varepsilon > 0$ et h une fonction continue de module 1 telle que $\|V_\theta^q(h) - h\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors, si γ est un élément de Γ , comme $V_\theta^{q\ell(\gamma)}(h)(\xi_\gamma^+) = e^{iq\theta(\lambda(\gamma))}$, on a $|e^{iq\theta(\lambda(\gamma))} - 1| \leq \varepsilon\ell(\gamma)$. En particulier, on a donc, pour tout n ,

$$|e^{iq\theta(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_n) - \lambda(h_n))} - 1| \leq \varepsilon(\ell(g_n h_n) + \ell(g_n) + \ell(h_n)) \leq \varepsilon 4pn.$$

Supposons donc que la seconde alternative du théorème 4.8 est vérifiée et donnons-nous alors $h > 0$ et, pour tout α dans Π , un nombre réel $l_\alpha > 2t_\alpha\alpha(g) - 1$. Il existe une suite (θ_m) tendant vers ∞ dans \mathfrak{a}^* et une suite de fonctions continues (h_m) de module 1 telles que, pour tout m , on ait

$$\left\| V_{\theta_m}^{[h \log|\theta_p|]}(h_m) - h_m \right\|_\infty \leq |\theta_m|^{-l}$$

et, donc, pour tous m et n ,

$$|e^{i[h \log|\theta_m|]\theta_m(\lambda(g_n h_n) - \lambda(g_n) - \lambda(h_n))} - 1| \leq 4|\theta_m|^{-l} pn.$$

Quitte à remplacer (θ_m) par une sous-suite, on peut supposer qu'il existe α dans Π , tel que, pour tout m , on ait $|\theta_{m,\alpha}|^{k_\alpha} = \max_{\beta \in \Pi} |\theta_{m,\beta}|^{k_\beta}$. Il vient alors, d'après le lemme 4.9,

$$\theta_m \left(\lambda \left(g_{[t_\alpha|\theta_{m,\alpha}]} h_{[t_\alpha|\theta_{m,\alpha}]} \right) - \lambda \left(g_{[t_\alpha|\theta_{m,\alpha}]} \right) - \lambda \left(h_{[t_\alpha|\theta_{m,\alpha}]} \right) \right) \asymp |\theta_{m,\alpha}|^{1-2\alpha(g)t_\alpha}.$$

Or, pour m suffisamment grand, on a $|\theta_{m,\alpha}| \leq |\theta_m| \leq |\theta_{m,\alpha}|^{\frac{k_\alpha}{k_0}}$ et, donc,

$$\left| e^{i[h \log |\theta_m|] \theta_m \left(\lambda \left(g_{[t_\alpha|\theta_{m,\alpha}]} h_{[t_\alpha|\theta_{m,\alpha}]} \right) - \lambda \left(g_{[t_\alpha|\theta_{m,\alpha}]} \right) - \lambda \left(h_{[t_\alpha|\theta_{m,\alpha}]} \right) \right) - 1} \right| \asymp (\log |\theta_{m,\alpha}|) |\theta_{m,\alpha}|^{1-2\alpha(g)t_\alpha}.$$

Il vient, pour m suffisamment grand, d'après la proposition 3.5,

$$(\log |\theta_{m,\alpha}|) |\theta_{m,\alpha}|^{1-2\alpha(g)t_\alpha} = O \left((\log |\theta_{m,\alpha}|) |\theta_{m,\alpha}|^{-l_\alpha} \right),$$

ce qui contredit $l_\alpha > 2t_\alpha\alpha(g) - 1$.

C'est donc la première alternative du théorème 4.8 qui est vraie et la proposition en découle. \square

5 Dénombrement asymptotique pour les groupes de Schottky

Conservons les notations de la section 4. Munissons \mathfrak{a} d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme associée. Nous allons prouver le

Théorème 5.1. *Il existe des réels $\tau, C > 0$ tels que*

$$\text{card}\{\gamma \in \Gamma \mid \|\mu(\gamma)\| \leq a\} \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} C e^{\tau a}.$$

Pour démontrer ce résultat, nous allons suivre la méthode de Lalley dans [10]. Elle consiste dans un premier temps à démontrer un analogue de ce théorème en termes de cocycle f sur l'ensemble limite de Γ , à l'aide des propriétés des opérateurs de Ruelle et d'un théorème taubérien, puis à utiliser les estimations obtenues sur l'ensemble limite et des résultats du type du lemme 4.3 pour revenir au résultat du théorème.

Dans le cadre qui nous intéresse ici, nous allons utiliser le théorème taubérien qui sera démontré à la section 6. Notons que la même méthode

permettrait de donner des équivalents asymptotiques des quantités $\text{card}\{\gamma \in \Gamma \mid \varphi(\mu(\gamma)) \leq a\}$, pour certaines formes linéaires φ , en raisonnant simplement en termes du cocycle scalaire $\varphi \circ f$ et en utilisant le théorème classique d'Ikehara-Wiener.

5.1 Le problème aux limites

D'après le lemme 4.7, l'ensemble $\{\theta \in \mathfrak{a}^* \mid P(\theta) \leq 0\}$ est convexe, non vide et ne contient pas 0. On note φ l'élément de cet ensemble qui est le plus proche de 0 : on a $P(\varphi) = 0$ et $dP(\varphi)$ est le produit scalaire par un vecteur colinéaire à φ . On note τ la norme de φ et x le vecteur unitaire de $\mathbb{R}_+^* dP(\varphi)$.

Pour y dans \mathfrak{a} , u dans U et $a \geq 0$, on pose :

$$N_y(u, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{card}\{v \in s^{-n}u \mid \Sigma_n f(v) \in b(y, a)\}.$$

Nous commençons par prouver un analogue du théorème 5.1 sur l'ensemble limite de Γ . Sa démonstration utilise le théorème taubérien démontré à la section 6.

Proposition 5.2. *Il existe un réel $C > 0$ tel que*

$$N_y(u, a) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} Ch_\varphi(u) e^{\tau a + \varphi(y)}$$

uniformément pour u dans U et y dans un compact de \mathfrak{a} .

Démonstration. Pour u dans U , notons ν_u la mesure sur \mathfrak{a}

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s^n v = u} \delta_{\Sigma_n f(v)}$$

où, pour y dans \mathfrak{a} , δ_y désigne la mesure de Dirac en y . Nous allons montrer que la fonction P et la famille $(\nu_u)_{u \in U}$ vérifient les hypothèses du théorème 6.1. Nous utilisons le vocabulaire du paragraphe 6.2.

D'après le lemme 4.7, la fonction P est 2-non dégénérée. Relions la divergence des transformées de Laplace des mesures $(\nu_u)_{u \in U}$ à la fonction P : c'est un raisonnement analogue à celui de [17, LEMME 4.4]. Soient u dans U et θ dans \mathfrak{a}^* . Pour n dans \mathbb{N} , on a :

$$e^{nP(\theta)} h_\theta(u) = (L_\theta^n h_\theta)(u) = \sum_{s^n v = u} e^{-\theta(\Sigma_n f(v))} h_\theta(v)$$

et, donc,

$$\frac{\inf h_\theta}{\sup h_\theta} e^{nP(\theta)} \leq \sum_{s^n v = u} e^{-\theta(\Sigma_n f(v))} \leq \frac{\sup h_\theta}{\inf h_\theta} e^{nP(\theta)}.$$

Il vient :

$$\frac{\inf h_\theta}{\sup h_\theta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{nP(\theta)} \leq \widehat{\nu}_u(\theta) \leq \frac{\sup h_\theta}{\inf h_\theta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{nP(\theta)},$$

et l'on a $\widehat{\nu}_u(\theta) < \infty$ si et seulement si $P(\theta) < 0$; en particulier, il existe θ dans \mathfrak{a}^* tel que $\widehat{\nu}_u(\theta) < \infty$, si bien que la mesure ν_u est finie sur les compacts.

Soient θ, ξ dans \mathfrak{a}^* . Si $P(\theta) < 0$, on a :

$$\widehat{\nu}_u(\theta + i\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (L_{\theta+i\xi}^n \mathbf{1})(u) = (1 - L_{\theta+i\xi})^{-1}(\mathbf{1})(u),$$

en notant $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 sur U . Par conséquent, si $P(\theta) = 0$ et $\xi \neq 0$, comme, d'après, la proposition 4.6, le rayon spectral de $L_{\theta+i\xi}$ est < 1 , la fonction $\widehat{\nu}_u$ se prolonge en une fonction analytique au voisinage de $\theta+i\xi$ qui dépend continûment de u . De même, si $P(\theta) = 0$ d'après le théorème de perturbation des opérateurs linéaires (*cf.* [12, Appendix V]), il existe des fonctions holomorphes v_u et w_u , définies au voisinage de 0 dans $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, dépendant continûment de u , telles que, pour tout ξ avec $P(\theta + \xi) \neq 0$, on ait :

$$\widehat{\nu}_u(\theta + \xi) = -\frac{v_u(\xi)}{P(\theta + \xi)} + w_u(\xi)$$

et que $v_u(0) = h_\theta(u)$. Ainsi, la famille $(\nu_u)_{u \in U}$ est une famille de mesures de Radon à divergence P -contrôlée uniforme, de P -résidu h_θ en θ . Enfin, le corollaire 4.12 valide exactement la dernière hypothèse du théorème 6.1.

Les hypothèses du théorème 6.1 sont satisfaites ; la proposition en découle.

□

5.2 Descente à Γ

Nous allons à présent utiliser le résultat de la proposition 5.2 pour prouver le théorème 5.1 : nous reprenons pour cela la méthode de [10, § I.6]. Rappelons qu'on a noté U_0 l'ensemble des mots finis en les éléments de S permettant de coder le groupe libre Γ .

On choisit un symbole \bullet n'appartenant pas à l'ensemble S et on considère désormais tout élément de U_0 comme une suite infinie d'éléments de $S \cup \{\bullet\}$

dont tous les termes sont égaux à \bullet à partir d'un certain rang. On note encore s le décalage sur l'ensemble $U \cup U_0$ et on munit $U \cup U_0$ de la distance définie par :

$$\forall u \neq v \in U \cup U_0 \quad d(u, v) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n\}}.$$

Cette distance munit $U \cup U_0$ d'une topologie d'espace compact. Dorénavant, on identifiera $U \cup U_0$ à $\Lambda_\Gamma \cup \Gamma$; l'ensemble $U = \Lambda_\Gamma$ en est une partie fermée et $U_0 = \Gamma$ une partie discrète et dense. Plus précisément, pour tout u dans U_0 , pour tout $v \neq u$ dans $U \cup U_0$, on a $d(u, v) \geq 2^{-\ell(u)}$ (où $\ell(u)$ désigne la longueur du mot u).

On prolonge f à U_0 en posant, pour u dans U_0 , $f(u) = \mu(u) - \mu(s(u))$. On a le

Lemme 5.3. *L'application $f : U \cup U_0 \rightarrow \mathfrak{a}$ est höldérienne.*

Démonstration. On sait déjà que la restriction de f à U est höldérienne.

Avec les notations du paragraphe 4.2, pour u dans S , posons $B_u = B_i^\omega$ si $u = \gamma_i^\omega$ pour $1 \leq i \leq p$, $\omega \in \{-1, 1\}$. Alors, d'après [17, § 3.1], pour $u = (u_0, \dots, u_n)$ dans U_0 , on a $\xi_u^M \in uB_{u_n}$ et, en particulier, l'application $u \mapsto \xi_u^M, U_0 \rightarrow \mathcal{P}$ est höldérienne. Par conséquent, d'après le lemme 4.3, il existe $a, C > 0$ tel que, pour u dans U_0 on ait $\|f(u) - \sigma(u_0, \xi_{s(u)}^M)\| \leq Ce^{-a\ell(u)}$. Il vient, pour $v \neq u$ dans $U \cup U_0$, $\|f(u) - \sigma(u_0, \xi_{s(u)}^M)\| \leq Cd(u, v)^a$, d'où le résultat, en utilisant le caractère lipschitzien des applications $\sigma(\gamma, \cdot) : \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{a}$, $\gamma \in S$. \square

Soient u, u' dans $U \cup U_0$ avec $u_0 = u'_0$. Pour n dans \mathbb{N} , on note $\pi_{u, u'}^n$ la bijection $s^{-n}u \rightarrow s^{-n}u'$ qui, à la suite $(v_0, \dots, v_{n-1}) \sqcup u$, associe la suite $(v_0, \dots, v_{n-1}) \sqcup u'$. On a $s\pi_{u, u'}^n = \pi_{u, u'}^{n-1}s$.

Comme S. Lalley dans [10, § I.6], nous utiliserons le

Lemme 5.4. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous u, u' dans $U \cup U_0$ avec $d(u, u') \leq \eta$, pour tout n dans \mathbb{N} et pour tout v dans $s^{-n}u$, on ait*

$$\|\Sigma_n f(v) - \Sigma_n f(\pi_{u, u'}^n(v))\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Soient $a, c > 0$ tels que, pour u, u' dans $U \cup U_0$, on ait :

$$\|f(u) - f(u')\| \leq cd(u, u')^a.$$

Soient u, u' dans $U \cup U_0$ et supposons que les p premiers termes de u et de u' sont identiques. Alors, pour n dans \mathbb{N} et v dans s^{-nu} , les $p+n$ premiers termes de v et de $\pi_{u,u'}^n(v)$ sont identiques et, donc, $\|f(v) - f(\pi_{u,u'}^n(v))\| \leq c2^{-a(p+n)}$. Il vient :

$$\|\Sigma_n f(v) - \Sigma_n f(\pi_{u,u'}^n(v))\| \leq c \sum_{k=1}^n 2^{-a(p+k)} \leq c2^{-ap} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-ak},$$

d'où le résultat. \square

D'après [10, § I.6], il existe une unique fonction continue $h : U \cup U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout u dans $U \cup U_0$, on ait $h(u) = \sum_{\substack{v \neq e \\ sv=u}} e^{-\varphi(f(v))} h(v)$ et que $h|_U = h_\varphi$. On la note encore h_φ . Cette fonction est à valeurs > 0 .

Pour y dans \mathfrak{a} , u dans $U \cup U_0$ et $a \geq 0$, on note encore :

$$N_y(u, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{card}\{v \in s^{-n}u \setminus \{e\} \mid \Sigma_n f(v) \in b(y, a)\}.$$

En particulier, $N_0(e, a) = \text{card}\{\gamma \in \Gamma \mid \|\mu(\gamma)\| \leq a\} - 1$. À nouveau comme dans [10, § I.6], le théorème 5.1 est alors une conséquence de la

Proposition 5.5. *Il existe un réel $C > 0$ tel que*

$$N_y(u, a) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} Ch_\varphi(u)e^{\tau a + \varphi(y)}$$

uniformément pour u dans $U \cup U_0$ et y dans un compact de \mathfrak{a} .

Le caractère uniforme de l'estimation ci-dessus apparait naturellement dans sa démonstration mais n'est bien sûr pas nécessaire pour en déduire le théorème 5.1.

Démonstration. Soit $C > 0$ comme dans la proposition 5.2.

Soit n dans \mathbb{N} . Remarquons que

$$N_y(u, a) = \sum_{\substack{v \neq e \\ s^n v = u}} N_{y - \Sigma_n f(v)}(v, a) + \sum_{k=0}^{n-1} \text{card}\{v \in s^{-k}u \setminus \{e\} \mid \Sigma_k f(v) \in b(y, a)\}, \quad (5.1)$$

le second terme de cette somme étant uniformément borné par une constante K_n pour u dans $U \cup U_0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit η comme dans le lemme 5.4. Alors, pour u, u' dans $U \cup U_0$ avec $d(u, u') \leq \eta$, on a :

$$N_y(u', a - \varepsilon) \leq N_y(u, a) \leq N_y(u', a + \varepsilon).$$

Quitte à diminuer η , comme $\log h_\varphi$ est uniformément continue, on peut supposer que, pour u, u' dans $U \cup U_0$, si $d(u, u') \leq \eta$, on a $1 - \varepsilon \leq \frac{h_\varphi(u)}{h_\varphi(u')} \leq 1 + \varepsilon$. Choisissons n suffisamment grand pour que tout élément de U_0 de longueur $\geq n$ soit à distance $\leq \eta$ de U . Alors, d'après la proposition 5.2, pour a suffisamment grand et y dans un compact de \mathfrak{a} , pour tout mot u dans U_0 de longueur $\geq n$, en choisissant un élément u' de U qui soit à distance $\leq \eta$ de u , il vient :

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)Ch_\varphi(u')e^{\tau(a-\varepsilon)+\varphi(y)} &\leq N_y(u', a - \varepsilon) \leq N_y(u, a) \leq N_y(u', a + \varepsilon) \\ &\leq (1 + \varepsilon)Ch_\varphi(u')e^{\tau(a+\varepsilon)+\varphi(y)}, \end{aligned}$$

d'où

$$(1 - \varepsilon)^2Ch_\varphi(u)e^{\tau(a-\varepsilon)+\varphi(y)} \leq N_y(u, a) \leq (1 + \varepsilon)^2Ch_\varphi(u)e^{\tau(a+\varepsilon)+\varphi(y)},$$

et, donc, pour a suffisamment grand, pour tout u dans $U \cup U_0$ comme $h_\varphi(u) = \sum_{\substack{v \neq e \\ s^n v = u}} e^{-\varphi(\Sigma_n f(v))} h_\varphi(v)$, d'après 5.1,

$$(1 - \varepsilon)^2 e^{-\tau\varepsilon} Ch_\varphi(u) e^{\tau a + \varphi(y)} \leq N_y(u, a) \leq (1 + \varepsilon)^2 e^{\tau\varepsilon} Ch_\varphi(u) e^{\tau a + \varphi(y)} + K_n,$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

6 Un théorème taubérien

Cette section est indépendante des précédentes. Nous y démontrons le théorème taubérien utilisé dans la preuve de la proposition 5.2. C'est un analogue multi-dimensionnel du résultat classique d'Ikehara-Wiener (*cf.* [12, Appendix I]).

Dans toute la suite, on note E un espace vectoriel euclidien de dimension m .

6.1 Introduction

Soit ν une mesure de Radon sur E . On note $\widehat{\nu}$ sa transformée de Laplace : en d'autres termes, pour φ dans E^* , on a

$$\widehat{\nu}(\varphi) = \int_E e^{-\varphi(x)} d\nu(x).$$

Nous allons donner des conditions sur $\widehat{\nu}$ pour qu'il existe des réels $\tau, C > 0$ avec $\nu(b(0, a)) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} Ce^{\tau a}$. Ces conditions concernent principalement la géométrie du domaine convexe

$$E_\nu^* = \{\varphi \in E^* \mid \widehat{\nu}(\varphi) < \infty\}$$

et l'existence d'un prolongement analytique de $\widehat{\nu}$ à un voisinage de l'ensemble

$$\{\varphi \in E_{\mathbb{C}}^* \mid \operatorname{re} \varphi \in \overline{E_\nu^*}\} \setminus \partial E_\nu^*.$$

Notons que notre résultat comporte en outre une hypothèse plus forte que celle du théorème classique. Dans la situation classique où l'on cherche à estimer des quantités du type $\mu([-\infty, a])$, où μ est une mesure de Radon sur \mathbb{R} , on arrive à s'affranchir des problèmes liés au comportement asymptotique du prolongement analytique de $\widehat{\mu}$ sur l'axe $s_0 + it$, $t \in \mathbb{R}$, où s_0 est l'abscisse de convergence $\widehat{\mu}$. Il nous a été impossible d'arriver à généraliser en dimension supérieure la technique employée à cet effet, ce qui nous a conduits à introduire une hypothèse supplémentaire concernant la croissance en l'infini du prolongement analytique de $\widehat{\nu}$ sur les espaces $\varphi + i\theta$, $\theta \in E^*$, avec φ dans ∂E_ν^* . Dans notre problème de comptage des fonctions orbitales, c'est pour vérifier cette hypothèse que nous utilisons le résultat de Dolgopyat dans [6], dont nous avons validé les hypothèses grâce à la proposition citée en introduction.

Remarquons par ailleurs que certaines des difficultés que nous avons rencontrées dans cette démonstration présentent des analogies avec celles qui apparaissent dans l'article de A. Katsuda et T. Sunada [9], où ces auteurs donnent des estimations au premier ordre du nombre de géodésiques fermées à classe d'homologie fixée dans une variété compacte à courbure strictement négative. Le paragraphe 6.7, en particulier, est très fortement inspiré par cet article.

Enfin, comme nous l'avons déjà fait remarquer dans l'introduction de l'article, si nous cherchions plutôt à estimer des quantités du type $\nu(\{x \in E \mid \varphi(x) \leq a\})$ quand a tend vers l'infini, où φ est une forme linéaire de E , l'utilisation de ce théorème ne serait pas nécessaire : nous pourrions alors étudier la mesure $\varphi_*\nu$ sur \mathbb{R} , dont la transformée de Laplace est $s \mapsto \widehat{\nu}(s\varphi)$, et nous serions dans le cadre naturel d'application du théorème d'Ikehara-Wiener. C'est la situation dans laquelle se trouvent M. Pollicott et R. Sharp dans [13]. Dans notre cas, nous n'avons aucune information directe sur la

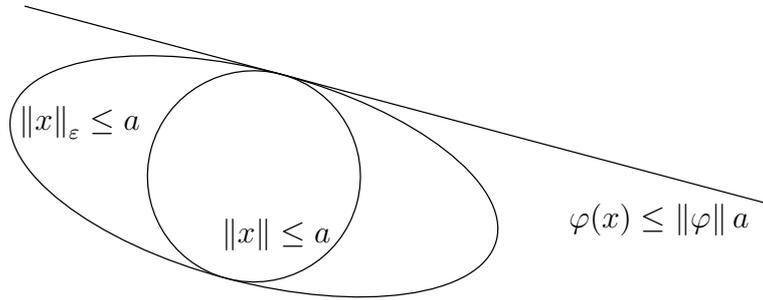


FIG. 1 – Différents problèmes de comptage

transformée de Laplace de l'image par la norme de la mesure ν et nous nous voyons obligés de mener l'analyse dans l'espace E lui-même.

Dans les conclusions du théorème une forme linéaire φ joue néanmoins un rôle important : il s'agit de l'élément de norme minimale du convexe fermé $\overline{E_\nu^*}$ (dont on suppose qu'il ne contient pas 0). Sous certaines hypothèses, notre théorème assurera que l'on a $\nu(b(0, a)) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} C e^{\|\varphi\|^a}$ pour un certain $C > 0$ tandis que le théorème d'Ikehara-Wiener donnera $\nu(\{x \in E | \varphi(x) \leq \|\varphi\| a\}) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} C_\varphi e^{\|\varphi\|^a}$, avec $C_\varphi > 0$. Le calcul explicite de C que nous donnerons montrera que l'on a $C < C_\varphi$. Plus précisément, pour $0 < \varepsilon \leq 1$, notons $\|\cdot\|_\varepsilon$ la norme euclidienne définie sur E par $\|x\|_\varepsilon^2 = \left(\frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|}\right)^2 + \varepsilon \|p(x)\|^2$, où p désigne le projecteur $\|\cdot\|$ -orthogonal sur le noyau de φ , de sorte que φ est toujours l'élément de $\|\cdot\|_\varepsilon$ -norme minimale de l'ensemble $\overline{E_\nu^*}$. Alors, quand les hypothèses du théorème seront satisfaites, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, il existera $C^\varepsilon > 0$ tel que $\nu(b^\varepsilon(0, a)) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} C^\varepsilon e^{\|\varphi\|^a}$ et l'on aura $C^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varphi$, en croissant strictement.

6.2 Mesures à divergence contrôlée

Soit P une fonction analytique convexe sur E^* . On dit que P est 2-non dégénérée si et seulement si la différentielle de P ne s'annule jamais et si, pour tout φ dans E^* , la restriction de la dérivée seconde de P au noyau de sa différentielle en φ est définie positive. Supposons que P soit 2-non dégénérée. Étant donnée une mesure de Radon ν sur E , nous dirons que ν est à divergence P -contrôlée si et seulement si

- (i) pour tout φ dans E^* , on a $\widehat{\nu}(\varphi) < \infty$ si et seulement si $P(\varphi) < 0$.
- (ii) pour tous φ, θ dans E^* avec $P(\varphi) = 0$ et $\theta \neq 0$, la fonction $\widehat{\nu}$ se prolonge en une fonction analytique sur un voisinage de $\varphi + i\theta$ dans $E_{\mathbb{C}}^*$.
- (iii) pour tout φ dans E^* avec $P(\varphi) = 0$, il existe des fonctions analytiques v et w définies au voisinage de 0 dans $E_{\mathbb{C}}^*$ telles que, pour θ dans $E_{\mathbb{C}}^*$ avec $P(\varphi + \theta) \neq 0$, on ait :

$$\widehat{\nu}(\varphi + \theta) = -\frac{v(\theta)}{P(\varphi + \theta)} + w(\theta).$$

Alors, on dit que le nombre $\nu(0)$ est le P -résidu de ν en φ .

Soit U un espace topologique compact. Étant donnée une famille continue $(\nu_u)_{u \in U}$ de mesures de Radon sur E , nous dirons qu'elle est à divergence P -contrôlée uniforme si et seulement si, pour tout u dans U , ν_u est à divergence P -contrôlée et si

- (i) pour tous φ, θ dans E^* avec $P(\varphi) = 0$ et $\theta \neq 0$, il existe un voisinage Ω de $\varphi + i\theta$ dans $E_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\widehat{\nu}_u$ soit définie sur Ω pour tout u dans U et que l'application $u \mapsto \widehat{\nu}_u, U \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ soit continue.
- (ii) pour tout φ dans E^* avec $P(\varphi) = 0$, il existe un voisinage Ω de 0 dans $E_{\mathbb{C}}^*$ et des applications continues $v, w : U \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ telles que, pour θ dans $E_{\mathbb{C}}^*$ avec $P(\varphi + \theta) \neq 0$, on ait :

$$\widehat{\nu}_u(\varphi + \theta) = -\frac{v_u(\theta)}{P(\varphi + \theta)} + w_u(\theta).$$

Pour φ dans E^* avec $P(\varphi) = 0$, on dit alors que la fonction continue qui, à u dans U , associe le P -résidu de ν_u en φ est le P -résidu de la famille $(\nu_u)_{u \in U}$ en φ .

Nous allons prouver le

Théorème 6.1. *Soit P une fonction analytique, convexe et 2-non dégénérée sur E^* avec $P(0) > 0$ et prenant des valeurs < 0 . Soit $(\nu_u)_{u \in U}$ une famille de mesures de Radon sur E à divergence P -contrôlée uniforme. Soient φ l'unique élément de norme minimale de l'ensemble $\{\theta \in E^* | P(\theta) \leq 0\}$ et h le P -résidu de la famille $(\nu_u)_{u \in U}$ en φ . Supposons que, pour toute fonction à décroissance rapide ρ sur E^* qui soit nulle au voisinage de 0, les fonctions*

$$\theta \mapsto \rho(\theta)\widehat{\nu}_u((1+t)\varphi + i\theta) \quad t \in \mathbb{R}_+, u \in U$$

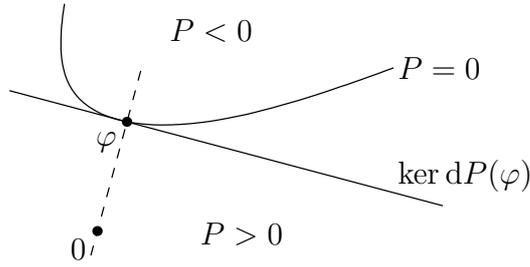


FIG. 2 – La géométrie des objets du théorème 6.1

forment une famille continue en (t, u) de fonctions à décroissance rapide sur E^* . Alors, on a :

$$\nu_u(b(y, a)) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} Ch(u) e^{\|\varphi\|a + \varphi(y)}$$

uniformément pour u dans U et y dans un compact de E , avec

$$C = -\frac{1}{dP(\varphi)(\varphi)} \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(1 - \frac{\lambda \|\varphi\|^2}{2dP(\varphi)(\varphi)} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

où Λ désigne l'ensemble des valeurs propres de la restriction de la forme quadratique $d^2P(\varphi)$ à l'espace euclidien $\ker dP(\varphi)$ (notons que le nombre $dP(\varphi)(\varphi)$ est < 0).

6.3 Démonstration

Comme pour le théorème d'Ikehara-Wiener, la démonstration du théorème 6.1 passe par une interprétation des quantités à estimer en termes de transformée de Fourier. Commençons donc par fixer nos notations pour l'analyse de Fourier.

On munit E de la mesure de Lebesgue pour laquelle les cubes unité sont de volume 1. Si f est une fonction dans $L^1(E)$, on note $\mathcal{F}(f)$ sa transformée de Fourier avec la convention que, pour θ dans E^* ,

$$\mathcal{F}(f)(\theta) = \int_E f(x) e^{-i\theta(x)} dx.$$

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, on a $\mathcal{F}(f)(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} 0$. Par ailleurs, pour tous f dans $L^1(E)$ et g dans $L^1(E^*)$, on a :

$$\int_{E^*} \mathcal{F}(f)(\theta)g(\theta)d\theta = \int_E f(x)\mathcal{F}(g)(x)dx.$$

Enfin, on note $\mathcal{S}(E)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur E . On a $\mathcal{F}(\mathcal{S}(E)) = \mathcal{S}(E^*)$ et la formule de Parseval s'écrit :

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(E) \quad \int_E \overline{f(x)}g(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{E^*} \overline{\mathcal{F}(f)(\theta)}\mathcal{F}(g)(\theta)d\theta.$$

Dans la démonstration du théorème 6.1, nous serons amenés à utiliser un certain nombre de lemmes techniques qui seront démontrés dans les paragraphes suivants. Par ailleurs, pour alléger la démonstration, nous prouverons le théorème dans le cas d'une seule mesure, cette démonstration s'étendant naturellement au cas des familles. De même, on peut remarquer que, si, pour y dans E , on note τ_y la translation par y et si M est une partie compacte de E , alors, avec les notations de l'énoncé du théorème, la famille $((\tau_y)_*\nu_u)_{\substack{y \in M \\ u \in U}}$ est à divergence P -contrôlée uniforme et son P -résidu en φ est la fonction $(y, u) \mapsto e^{-\varphi(y)}h(u)$. Par conséquent, dans la démonstration, nous ne cherchons à estimer que les mesures des boules de centre 0.

Pour tout ensemble X et pour tout $Y \subset X$, on note $\mathbf{1}_Y$ la fonction indicatrice de Y .

Démonstration du théorème 6.1. Donnons-nous donc une fonction P et une mesure de Radon ν vérifiant les hypothèses du théorème. Notons toujours φ l'élément de norme minimale de $\{\theta \in E^* | P(\theta) \leq 0\}$. On a $P(\varphi) = 0$ et $dP(\varphi)$ est le produit scalaire par un vecteur colinéaire à φ . On note τ la norme de φ et x le vecteur unitaire associé à $\frac{1}{\tau}\varphi$ par l'isomorphisme canonique entre E et E^* .

Pour $a \geq 0$, on pose $N(a) = \nu(b(0, a))$. Il s'agit de comparer cette quantité à $e^{\tau a}$. Pour des raisons techniques, il est nécessaire de régulariser la situation. Plus précisément, soient κ une fonction réelle \mathcal{C}^∞ à support compact sur E et $a \geq 0$: nous allons chercher à comparer à $e^{\tau a}$ le nombre

$$N_\kappa(a) = \int_E \kappa * \mathbf{1}_{b(0, a)}d\nu.$$

Commençons par écrire, par convergence dominée,

$$N_\kappa(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_E ((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi) e^{-(1+t)\varphi} d\nu.$$

Alors, par la formule de Parseval, le dernier terme est égal à

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{E^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(-\theta) \widehat{\nu}((1+t)\varphi + i\theta) d\theta.$$

Nous allons écrire cette intégrale comme la somme d'un terme principal et de termes négligeables devant $e^{\tau a}$ quand a tend vers l'infini.

Éliminons les problèmes liés au comportement en l'infini des quantités sous l'intégrale. Soit ρ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans E^* , égale à 1 au voisinage de 0. Par l'hypothèse faite sur la décroissance en l'infini de la transformée de Laplace de ν , comme $\mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi) = \mathcal{F}(\kappa e^\varphi) \mathcal{F}(\mathbf{1}_{b(0,a)} e^\varphi)$, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{E^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(-\theta) (1 - \rho)(\theta) \widehat{\nu}((1+t)\varphi + i\theta) d\theta \\ &= \int_{E^*} \mathcal{F}(\mathbf{1}_{b(0,a)} e^\varphi)(-\theta) \mathcal{F}(\kappa e^\varphi)(-\theta) (1 - \rho)(\theta) \widehat{\nu}((1+t)\varphi + i\theta) d\theta \\ & \xrightarrow{t \rightarrow 0} \int_{E^*} \mathcal{F}(\mathbf{1}_{b(0,a)} e^\varphi)(-\theta) \mathcal{F}(\kappa e^\varphi)(-\theta) (1 - \rho)(\theta) \widehat{\nu}(\varphi + i\theta) d\theta \end{aligned}$$

et la fonction $\omega : \theta \mapsto \mathcal{F}(\kappa e^\varphi)(\theta) (1 - \rho)(-\theta) \widehat{\nu}(\varphi - i\theta)$ est à décroissance rapide. D'après la formule $\int_{E^*} \mathcal{F}(f)g = \int_E f \mathcal{F}(g)$ et le lemme 6.7, il vient donc

$$\begin{aligned} e^{-\tau a} \int_{E^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(-\theta) (1 - \rho)(\theta) \widehat{\nu}(\varphi + i\theta) d\theta \\ = e^{-\tau a} \int_{b(0,a)} e^{\varphi(x)} \mathcal{F}(\omega)(x) dx \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

et on est ramené à estimer les termes :

$$\int_{E^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(-\theta) \rho(\theta) \widehat{\nu}((1+t)\varphi + i\theta) d\theta$$

où le support de ρ est aussi petit que l'on veut.

Ramenons à présent le problème à l'étude de la singularité de $\frac{1}{P}$ en φ . Il existe des fonctions holomorphes v et w définies sur un voisinage de 0 dans $E_{\mathbb{C}}^*$ telles que, pour $P(\varphi + \theta) \neq 0$, on ait :

$$\widehat{v}(\varphi + \theta) = -\frac{v(\theta)}{P(\varphi + \theta)} + w(\theta).$$

Comme, encore d'après le lemme 6.7,

$$e^{-\tau a} \int_{E^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(-\theta)w(i\theta)\rho(\theta)d\theta \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0,$$

on est ramené à considérer des termes de la forme :

$$\int_{E^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(-\theta) \frac{-v(t\varphi + i\theta)}{P((1+t)\varphi + i\theta)} \rho(\theta)d\theta.$$

Utilisons maintenant le développement limité de P en φ pour mieux comprendre la singularité de $\frac{1}{P}$. On note $F \subset E$ l'orthogonal de x . On identifie F^* à l'orthogonal de φ dans E^* . Alors, comme φ est l'élément de plus petite norme de l'ensemble $\{\theta \in E^* | P(\theta) \leq 0\}$, l'espace F^* est aussi le noyau de la différentielle de P en φ . Pour η suffisamment proche de 0 dans F^* , la fonction holomorphe définie au voisinage de 0 dans \mathbb{C} par

$$P_\eta : z \mapsto P((1+z)\varphi + i\eta)$$

possède un unique zéro simple proche de 0. On le note $z(\eta)$ et on note $r(\eta)$ le nombre complexe $-\left(\frac{dP_\eta}{dz}(z(\eta))\right)^{-1}$: c'est le résidu en $z(\eta)$ de $-P_\eta^{-1}$. On a $z(0) = 0$ et $r(0) = -dP(\varphi)(\varphi)^{-1}$ (rappelons que, par construction, on a $dP(\varphi)(\varphi) < 0$). En différentiant l'équation $P((1+z(\eta))\varphi + i\eta) = 0$, on obtient que $dz(0) = 0$ et que $d^2z(0) = (dP(\varphi)(\varphi))^{-1}d^2P(\varphi)$, si bien que la forme quadratique Φ obtenue en restreignant $-\frac{1}{2}d^2z(0)$ à F^* est réelle définie positive. Notons Q_η la fonction holomorphe définie au voisinage de 0 dans \mathbb{C} par

$$Q_\eta(z) = -\frac{1}{P_\eta(z)} - \frac{r(\eta)}{z - z(\eta)}.$$

D'après le lemme 6.7, on a :

$$e^{-\tau a} \int_{\mathbb{R}} \int_{F^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(-\xi\varphi - \eta)v(i(\xi\varphi + \eta))Q_\eta(i\xi)\rho(\xi\varphi + \eta)d\eta d\xi \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

et, donc, on est à présent ramené à étudier le comportement des termes :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{F^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(-\xi\varphi - \eta) \frac{v((t+i\xi)\varphi + i\eta)r(\eta)}{t+i\xi - z(\eta)} \rho(\xi\varphi + \eta) d\eta d\xi.$$

Au paragraphe 6.7, nous prouverons le

Lemme 6.2. *Supposons le support de ρ suffisamment petit pour que, pour ξ dans \mathbb{R} et η dans F^* avec $\rho(\xi\varphi + \eta) \neq 0$, la partie réelle de $z(\eta)$ soit < 0 . Alors, quand $t \rightarrow 0$, la fonction*

$$\theta = \xi\varphi + \eta \mapsto \mathcal{F}(\kappa e^\varphi)(-\xi\varphi - \eta) \rho(\xi\varphi + \eta) \left(\frac{v((t+i\xi)\varphi + i\eta)r(\eta)}{t+i\xi - z(\eta)} \rho(\xi\varphi + \eta) - \frac{v(0)r(0)}{t+i\xi + \Phi(\eta, \eta)} \right)$$

converge dans $L^1(E^*)$ vers une fonction dont la transformée de Fourier g vérifie

$$e^{-\tau a} \int_{b(0,a)} g(z) e^{\varphi(z)} dz \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

On est donc ramené à étudier le comportement de la quantité :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{F^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0,a)})e^\varphi)(\xi\varphi + \eta) \frac{d\eta d\xi}{t+i\xi + \Phi(\eta, \eta)}.$$

Il s'agit là du terme principal de notre développement : comparons-le à $e^{\tau a}$.

Rappelons qu'on a noté m la dimension de E . Soit Ψ la forme quadratique définie positive sur F telle que, pour toute base Φ -orthonormée $(\eta_1, \dots, \eta_{m-1})$ de F^* , de base duale (y_1, \dots, y_{m-1}) , la base $(\sqrt{2}y_1, \dots, \sqrt{2}y_{m-1})$ de F soit Ψ -orthonormée. On a :

Lemme 6.3. *Pour tout $t > 0$, la fonction sur E^**

$$\theta = \xi\varphi + \eta \mapsto \frac{1}{t+i\xi + \Phi(\eta, \eta)}$$

est la transformée de Fourier de la fonction sur E

$$u = sx + y \mapsto \frac{\tau \sqrt{\det \Psi}}{(\sqrt{\tau s \pi})^{m-1}} e^{-\frac{1}{\tau s} \Psi(y,y) - \tau t s} \mathbf{1}_{s>0}.$$

Démonstration. Soient ξ dans \mathbb{R} et η dans F . On a

$$\frac{1}{t + i\xi + \Phi(\eta, \eta)} = \int_0^\infty e^{-s(t+\Phi(\eta, \eta))} e^{-is\xi} ds = \tau \int_0^\infty e^{-\tau s(t+\Phi(\eta, \eta))} e^{-i\tau s\xi} ds.$$

Par un calcul usuel de transformée de Fourier, on a, dans $L^1(F)$, $\mathcal{F}(e^{-\Psi}) = \frac{(\sqrt{\pi})^{m-1}}{\sqrt{\det \Psi}} e^{-\Phi}$ et, donc, pour $s > 0$,

$$e^{-\tau s\Phi(\eta, \eta)} = \frac{\sqrt{\det \Psi}}{(\sqrt{\tau s\pi})^{m-1}} \int_F e^{-\frac{1}{\tau s}\Psi(y, y)} e^{-i\eta(y)} dy,$$

d'où le résultat. \square

Terminons donc la démonstration. Par la formule de Parseval, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{F^*} \mathcal{F}((\kappa * \mathbf{1}_{b(0, a)})e^\varphi)(-\xi\varphi - \eta) \frac{d\eta d\xi}{t + i\xi + \Phi(\eta, \eta)} = \\ (2\pi)^m \int_0^\infty \int_F \frac{\tau \sqrt{\det \Psi}}{(\sqrt{\tau s\pi})^{m-1}} e^{\tau(1-t)s - \frac{1}{\tau s}\Psi(y, y)} (\kappa * \mathbf{1}_{s^2 + \|y\|^2 \leq a^2}) dy ds, \end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre t vers 0, par convergence monotone,

$$\begin{aligned} N_\kappa(a) - \frac{r(0)\tau\sqrt{\det \Psi}}{(\sqrt{\tau\pi})^{m-1}} v(0) \int_0^\infty \int_F \frac{1}{(\sqrt{s})^{m-1}} e^{\tau s - \frac{1}{\tau s}\Psi(y, y)} (\kappa * \mathbf{1}_{s^2 + \|y\|^2 \leq a^2}) dy ds \\ = o(e^{\tau a}). \end{aligned}$$

D'après le lemme 6.4, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_F \frac{1}{(\sqrt{s})^{m-1}} e^{\tau s - \frac{1}{\tau s}\Psi(y, y)} \mathbf{1}_{\|(sx+y)-z\| \leq a} dy ds \\ \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\tau a + \varphi(z)}}{\tau} \int_F e^{-\frac{1}{\tau}\Psi(y, y) - \frac{\tau}{2}\|y\|^2} dy, \end{aligned}$$

uniformément pour z dans un compact de E , et, donc, on a :

$$N_\kappa(a) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} C v(0) e^{\tau a} \int_E \kappa(z) e^{\varphi(z)} dz,$$

avec

$$C = \frac{r(0)\sqrt{\det \Psi}}{(\sqrt{\tau\pi})^{m-1}} \int_F e^{-\frac{1}{\tau}\Psi(y, y) - \frac{\tau}{2}\|y\|^2} dy,$$

qui peut se calculer explicitement en fonction des dérivées de P en φ . On en déduit alors, par des procédés usuels,

$$N(a) \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} Cv(0)e^{\tau a},$$

ce qui achève la démonstration du théorème. \square

6.4 Termes principaux

Nous calculons ici le terme principal du développement de $N(a)$ dans la démonstration du théorème 6.1. Soient $\tau > 0$, φ dans E^* de norme 1, F son noyau et p la projection orthogonale sur F . Soit Ψ une forme bilinéaire définie positive sur F . Pour x dans E , on note

$$\Theta(x) = \frac{1}{(\sqrt{\varphi(x)})^{m-1}} e^{\tau\varphi(x) - \frac{1}{\varphi(x)}\Psi(p(x),p(x))} \mathbf{1}_{\varphi(x) > 0}.$$

Lemme 6.4. *On a :*

$$\int_{b(z,a)} \Theta(x) dx \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\tau(a+\varphi(z))}}{\tau} \int_F e^{-\Psi(y,y) - \frac{\tau}{2}\|y\|^2} dy,$$

uniformément pour z dans un compact de E .

Commençons par effectuer le calcul dans le cas où $z = 0$:

Lemme 6.5. *On a :*

$$\int_{b(0,a)} \Theta(x) dx \underset{a \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\tau a}}{\tau} \int_F e^{-\Psi(y,y) - \frac{\tau}{2}\|y\|^2} dy$$

et

$$e^{-\tau a} \int_{\substack{x \in b(0,a) \\ \|p(x)\|^2 \geq c\varphi(x)}} \Theta(x) dx \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0,$$

uniformément pour $a \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Déterminons tout d'abord l'équivalent. Le terme à estimer s'écrit :

$$\int_0^\infty \int_F \frac{1}{(\sqrt{t})^{m-1}} e^{\tau t - \frac{1}{t}\Psi(y,y)} \mathbf{1}_{t^2 + \|y\|^2 \leq a^2} dy dt.$$

Faisons le changement de variable $y = \sqrt{t}u$ et notons u^2 pour $\|u\|^2$. Les conditions $t > 0$ et $t^2 + tu^2 \leq a^2$ s'écrivent $0 < t \leq \frac{1}{2}(\sqrt{u^4 + 4a^2} - u^2)$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} e^{-\tau a} \int_0^\infty \int_F \frac{1}{(\sqrt{t})^{m-1}} e^{\tau t - \frac{1}{t}\Psi(y,y)} \mathbf{1}_{t^2 + \|y\|^2 \leq a^2} dy dt \\ = e^{-\tau a} \int_F e^{-\Psi(u,u)} \left(\int_0^{\frac{1}{2}(\sqrt{u^4 + 4a^2} - u^2)} e^{\tau t} dt \right) du \\ = \frac{1}{\tau} \int_F e^{-\Psi(u,u) + \frac{\tau}{2}(\sqrt{u^4 + 4a^2} - u^2 - 2a)} du - \frac{e^{-\tau a}}{\tau} \int_F e^{-\Psi(u,u)} du. \end{aligned}$$

On remarque alors que, pour u dans F ,

$$\sqrt{u^4 + 4a^2} - u^2 - 2a = \frac{-4au^2}{\sqrt{u^4 + 4a^2} + u^2 + 2a} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} -u^2.$$

Le calcul de l'équivalent en découle, d'après le théorème de convergence dominée.

De même, on a, pour $a, c \geq 0$,

$$\begin{aligned} e^{-\tau a} \int_{\substack{x \in b(0,a) \\ \|p(x)\|^2 \geq c\varphi(x)}} \Theta(x) dx &\leq \frac{1}{\tau} \int_{\substack{u \in F \\ \|u\| \geq c}} e^{-\Psi(u,u) + \frac{\tau}{2}(\sqrt{u^4 + 4a^2} - u^2 - 2a)} du \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_{\substack{u \in F \\ \|u\| \geq c}} e^{-\Psi(u,u)} du, \end{aligned}$$

d'où la deuxième assertion. \square

Effectuons un calcul de géométrie euclidienne :

Lemme 6.6. *Soit $c \geq 0$. On a :*

$$\|x - z\| - \|x\| \xrightarrow[\|p(x)\|^2 \leq c\varphi(x)]{x \rightarrow \infty} -\varphi(z),$$

uniformément pour z dans un compact de E .

Démonstration. Soit u l'unique vecteur de E tel que, pour y dans E , $\varphi(y) = (u, y)$. On a :

$$\frac{x}{\|x\|} \xrightarrow[\|p(x)\|^2 \leq c\varphi(x)]{x \rightarrow \infty} u$$

et, puisque,

$$\|x - z\| - \|x\| = \frac{-2(x, z) + \|z\|^2}{\|x - z\| + \|x\|} = \frac{-2\left(\frac{x}{\|x\|}, z\right) + \frac{\|z\|^2}{\|x\|}}{\frac{\|x - z\|}{\|x\|} + 1},$$

le résultat en découle. \square

Démonstration du lemme 6.4. C'est la conséquence des lemmes 6.5 et 6.6. \square

6.5 Termes négligeables : calculs directs

Dans la démonstration du théorème 6.1, nous utilisons essentiellement deux résultats pour éliminer les termes négligeables devant $e^{\tau a}$: il s'agit des lemmes 6.7 et 6.2. Le premier, utilisé à plusieurs reprises, repose sur un raisonnement simple, tout à fait analogue à celui qu'on fait en dimension 1 dans la preuve du théorème d'Ikehara-Wiener. Le second, par contre, n'est utilisé qu'une fois, lors de l'étude de la singularité de la fonction $\frac{1}{p}$, et ne sert qu'en dimension > 1 . La preuve que nous en donnons est très technique et occupera toute la fin de l'article.

Commençons donc par un résultat élémentaire :

Lemme 6.7. *Soit $\varphi \neq 0$ dans E^* . Pour tout f dans $\mathcal{S}(E)$, on a :*

$$e^{-\|\varphi\|a} \int_{b(0,a)} f(u) e^{\varphi(u)} du \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Soient F le noyau de φ et x le vecteur de E tel que, pour tout y dans E , $\varphi(y) = \|\varphi\| (x, y)$. Pour t dans \mathbb{R} , on note

$$g(t) = \sup_{y \in F} (1 + \|y\|^m) |f(tx + y)|.$$

La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bornée et tend vers 0 en ∞ . Pour $a \geq 0$, on a :

$$\left| \int_{b(0,a)} f(u) e^{\varphi(u)} du \right| \leq \int_F \frac{dy}{1 + \|y\|^m} \int_{-\infty}^a g(t) e^{t\|\varphi\|} dt.$$

Le lemme suivant permet de conclure. \square

Lemme 6.8. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne bornée et tendant vers 0 en ∞ . Alors, pour tout $\tau > 0$,

$$e^{-\tau a} \int_{-\infty}^a g(t) e^{\tau t} dt \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Pour a dans \mathbb{R} et $b \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a g(t) e^{\tau t} dt &\leq \int_{-\infty}^{a-b} g(t) e^{\tau t} dt + \int_{a-b}^a g(t) e^{\tau t} dt \\ &\leq (\sup g) \int_{-\infty}^{a-b} e^{\tau t} dt + \left(\sup_{t \geq a-b} g(t) \right) \int_{a-b}^a e^{\tau t} dt \\ &\leq \frac{e^{\tau a}}{\tau} \left((\sup g) e^{-\tau b} + \left(\sup_{t \geq a-b} g(t) \right) \right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Passons à présent à la démonstration du lemme 6.2. La première étape en est le

Lemme 6.9. Soient $\varphi \neq 0$ dans E^* , F son noyau et x le vecteur de E tel que, pour tout y dans E , on ait $\varphi(y) = \|\varphi\| (x, y)$. Soit f une fonction borélienne bornée sur E telle que

$$\int_{\substack{y \in F \\ \|y\| \leq b}} f(tx + y) dy \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0,$$

uniformément pour $t \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$e^{-\|\varphi\|a} \int_{b(0,a)} f(u) e^{\varphi(u)} du \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Pour $a \geq 0$, on a :

$$\int_{b(0,a)} f(u) e^{\varphi(x)} du = \int_{-a}^a \int_{\substack{y \in F \\ \|y\| \leq \sqrt{a^2 - t^2}}} f(y + tx) e^{\|\varphi\|t} dy dt.$$

Or, pour $0 \leq b \leq a$, on a, d'une part :

$$\left| \int_{-a}^{-\sqrt{a^2-b^2}} \int_{y \in b(0, \sqrt{a^2-t^2})} f(y+tx) e^{\|\varphi\|t} dy dt \right| \leq \left(a - \sqrt{a^2-b^2} \right) \|f\|_\infty \int_{b(0,b)} dy,$$

d'autre part :

$$\left| \int_{-\sqrt{a^2-b^2}}^{\sqrt{a^2-b^2}} \int_{y \in b(0, \sqrt{a^2-t^2})} f(y+tx) e^{\|\varphi\|t} dy dt \right| \leq \frac{e^{\|\varphi\|a}}{\|\varphi\|} \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ c \geq b}} \left| \int_{b(0,c)} f(y+tx) dy \right|$$

et, enfin :

$$\left| \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^a \int_{y \in b(0, \sqrt{a^2-t^2})} f(y+tx) e^{\|\varphi\|t} dy dt \right| \leq \frac{e^{\|\varphi\|a}}{\|\varphi\|} \left(1 - e^{\sqrt{a^2-b^2}-a} \right) \|f\|_\infty \int_{b(0,b)} dy,$$

d'où le résultat puisque $a - \sqrt{a^2-b^2} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$. \square

6.6 Termes négligeables : calculs par transformation de Fourier

Dans ce paragraphe, nous établissons un deuxième résultat préliminaire en vue de la démonstration du lemme 6.2.

Rappelons une notion de théorie des distributions. Si f est une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$, la dérivée f' de f au sens des distributions est la distribution définie par $\theta \mapsto -\int_{\mathbb{R}} f(x)\theta'(x)dx$, pour θ fonction \mathcal{C}^∞ à support compact. En particulier, on a $f' \in L^1(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une fonction g dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que, pour toute fonction \mathcal{C}^∞ à support compact θ , on ait $\int_{\mathbb{R}} f(x)\theta'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\theta(x)dx$ et, alors, $f' = g$. Par conséquent, si (f_n) est une suite de fonctions convergeant vers f dans $L^1(\mathbb{R})$, si, pour tout n , on a $f'_n \in L^1(\mathbb{R})$ et si (f'_n) converge dans $L^1(\mathbb{R})$, on a $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Enfin, quand $f' \in L^1(\mathbb{R})$, pour φ dans \mathbb{R} , on a $\mathcal{F}(f')(\varphi) = -i\varphi\mathcal{F}(f)(\varphi)$.

Nous allons trouver des conditions en termes de transformée de Fourier pour qu'une fonction satisfasse les hypothèses du lemme 6.9. On note S (resp. S^*) la sphère unité de E (resp. de E^*) que l'on munit de sa mesure usuelle.

Lemme 6.10. Soient f dans $L^1(E^*)$ et F la fonction sur \mathbb{R}

$$\rho \mapsto \frac{1}{\rho} \int_{S^*} f(\rho\xi) d\xi \mathbf{1}_{\rho>0}.$$

Supposons que, pour tout $0 \leq k \leq m$, la fonction $\rho \mapsto \rho^k F(\rho)$ et toutes ses dérivées d'ordre $\leq k$ au sens des distributions soient dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors, on a :

$$\int_{b(0,a)} \mathcal{F}(f)(x) dx \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Nous utiliserons le

Lemme 6.11. Soit m un entier ≥ 1 . Soit F une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$. Supposons que, pour tout $0 \leq k \leq m$, la fonction $\rho \mapsto \rho^k F(\rho)$ et toutes ses dérivées d'ordre $\leq k$ au sens des distributions soient dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tous entiers p et q avec $p + q = m - 1$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) \int_{-a}^a t^p \left(\sqrt{a^2 - t^2}\right)^q e^{-i\rho t} dt d\rho \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Nous démontrons cet énoncé par récurrence sur m . Pour $m = 1$, l'intégrale s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}} \rho F(\rho) \int_{-a}^a e^{-i\rho t} dt d\rho = i \int_{\mathbb{R}} F(\rho) (e^{-i\rho a} - e^{i\rho a}) d\rho = \mathcal{F}(F)(a) - \mathcal{F}(F)(-a)$$

et cette quantité tend vers 0 quand a tend vers ∞ , d'après le lemme de Riemann-Lebesgue.

Supposons donc l'énoncé vrai pour un entier $m \geq 1$.

Commençons par traiter le cas $q = 0$. Alors, en effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho^{m+1} F(\rho) \int_{-a}^a t^m e^{-i\rho t} dt d\rho &= i \int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) (a^m e^{-i\rho a} - (-a)^m e^{i\rho a}) d\rho \\ &\quad - i(m-1) \int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) \int_{-a}^a t^{m-1} e^{-i\rho t} dt d\rho. \end{aligned}$$

Par récurrence le second terme tend vers 0 quand a tend vers ∞ . Par ailleurs, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) a^m e^{-i\rho a} d\rho = \frac{1}{i^m} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^m}{d\rho^m} (\rho^m F(\rho)) e^{-i\rho a} d\rho \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0,$$

d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. De même, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) (-a)^m e^{i\rho a} d\rho \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

et, donc, on a bien :

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^{m+1} F(\rho) \int_{-a}^a t^m e^{-i\rho t} dt d\rho \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Vérifions à présent l'énoncé pour $q = 1$. L'intégration par parties donne maintenant :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho^{m+1} F(\rho) \int_{-a}^a t^{m-1} \sqrt{a^2 - t^2} e^{-i\rho t} dt d\rho \\ = \frac{m-1}{i} \int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) \int_{-a}^a t^{m-2} \sqrt{a^2 - t^2} e^{-i\rho t} dt d\rho \\ - \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) \int_{-a}^a \frac{t^m}{\sqrt{a^2 - t^2}} e^{-i\rho t} dt d\rho. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 quand a tend vers ∞ par récurrence. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) \int_{-a}^a \frac{t^m}{\sqrt{a^2 - t^2}} e^{-i\rho t} dt d\rho &= \frac{1}{i^m} \int_{-a}^a \mathcal{F} \left(\frac{d^m}{d\rho^m} \rho^m F \right) (t) \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} \\ &= \frac{1}{i^m} \int_{-1}^1 \mathcal{F} \left(\frac{d^m}{d\rho^m} \rho^m F \right) (as) \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}}. \end{aligned}$$

Comme, pour tout $s \neq 0$, $\mathcal{F} \left(\frac{d^m}{d\rho^m} \rho^m F \right) (as) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$, l'intégrale tend vers 0, d'après le théorème de convergence dominée.

Enfin, pour $q \geq 2$, on a, toujours par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho^{m+1} F(\rho) \int_{-a}^a t^p \left(\sqrt{a^2 - t^2} \right)^q e^{-i\rho t} dt d\rho \\ = \frac{p}{i} \int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) \int_{-a}^a t^{p-1} \left(\sqrt{a^2 - t^2} \right)^q e^{-i\rho t} dt d\rho \\ - \frac{q}{i} \int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) \int_{-a}^a t^{p+1} \left(\sqrt{a^2 - t^2} \right)^{q-2} e^{-i\rho t} dt d\rho \end{aligned}$$

et ces termes tendent vers 0 quand a tend vers ∞ par récurrence. \square

Démonstration du lemme 6.10. Pour $a \geq 0$, on a :

$$\int_{b(0,a)} \mathcal{F}(f)(x) dx = \int_{E^*} f(\varphi) \int_{b(0,a)} e^{-i\varphi(x)} dx d\varphi.$$

Choisissons une fois pour toutes η dans S^* . Comme la fonction

$$\varphi \mapsto \int_{b(0,a)} e^{-i\varphi(x)} dx$$

est invariante par le groupe orthogonal de E^* , on a, pour φ dans E^* ,

$$\int_{b(0,a)} e^{-i\varphi(x)} dx = \int_{b(0,a)} e^{-i\|\varphi\|\eta(x)} dx$$

et, donc, en effectuant un changement de variable en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \int_{b(0,a)} \mathcal{F}(f)(x) dx &= \int_{b(0,a)} \int_{E^*} f(\varphi) e^{-i\|\varphi\|\eta(x)} d\varphi dx \\ &= \int_{b(0,a)} \int_{\mathbb{R}} \rho^m F(\rho) e^{-i\rho\eta(x)} d\rho dx. \end{aligned}$$

Or, pour ρ dans \mathbb{R} , on a :

$$\int_{b(0,a)} e^{-i\rho\eta(x)} dx = V_{m-1} \int_{-a}^a \left(\sqrt{a^2 - t^2} \right)^{m-1} e^{-i\rho t} dt,$$

où V_{m-1} désigne le volume de la boule unité en dimension $m - 1$. Vu l'hypothèse faite sur F , le résultat est une conséquence du lemme 6.11. \square

En notant $S(H)$ la sphère unité d'un sous-espace vectoriel H de E , une démonstration analogue donne le

Corollaire 6.12. *Soit $E = G \oplus H$ une somme directe orthogonale. On note $E^* = G^* \oplus H^*$ la décomposition de E^* associée. Soient f dans $L^1(E^*)$ et F la fonction sur $G^* \times \mathbb{R}$*

$$(\eta, \rho) \mapsto \frac{1}{\rho} \int_{S(H^*)} f(\eta + \rho\xi) d\xi \mathbf{1}_{\rho > 0}.$$

Supposons que, pour tout $0 \leq k \leq \dim H$, la fonction $(\eta, \rho) \mapsto \rho^k F(\eta, \rho)$ et toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$ par rapport à ρ au sens des distributions soient dans $L^1(G^* \times \mathbb{R})$. Alors, on a :

$$\int_{\substack{y \in H \\ \|y\| \leq a}} \mathcal{F}(f)(x+y) dy \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0,$$

uniformément pour $x \in G$.

6.7 Termes négligeables : application

Dans ce paragraphe, nous allons terminer la démonstration du lemme 6.2. Il s'agit de montrer que les fonctions dont il est question dans ce lemme vérifient les hypothèses du corollaire 6.12. Une grande partie des idées utilisées ici provient de [9].

On choisit un vecteur unitaire x de E et on note F l'orthogonal de x .

Lemme 6.13. *Soit Z une fonction C^∞ définie au voisinage de 0 dans F telle que $dZ(0) = 0$ et que $\Phi = \frac{1}{2}d^2Z(0)$ soit réelle définie positive. Soit θ une fonction C^∞ à support compact dans E telle que, pour tout $u = sx + y$ dans E , si $\theta(u) \neq 0$, la partie réelle de $Z(y)$ soit > 0 . Pour tout $t > 0$, on note f_t la fonction*

$$u = sx + y \mapsto \theta(u) \left(\frac{1}{t + is + \Phi(y, y)} - \frac{1}{t + is + Z(y)} \right).$$

Alors, quand t tend vers 0, la fonction f_t converge dans $L^1(E)$ vers une fonction f dont la transformée de Fourier vérifie, pour tout $\tau > 0$,

$$e^{-\tau a} \int_{b(0, a)} e^{-\tau \varphi(x)} \mathcal{F}(f)(\varphi) d\varphi \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Nous utiliserons à plusieurs reprises le raisonnement suivant, analogue à celui de [9, § 3.3] :

Lemme 6.14. *Soit $a \geq 0$ un réel. Alors, quand $r \rightarrow 0$,*

$$\int_{-a}^a \int_{S(F)} \frac{dy ds}{|t + is + Z(ry)|} = O(\log r),$$

et, pour tous entiers naturels p, q avec $p + q \geq 2$,

$$\int_{-a}^a \int_{S(F)} \frac{dy ds}{|t + is + \Phi(ry, ry)|^p |t + is + Z(ry)|^q} = O\left(\frac{1}{r^{2(p+q-1)}}\right),$$

uniformément pour $t \geq 0$.

Démonstration. Vérifions la première estimation, le raisonnement est analogue pour la seconde.

Soient X et Y les parties réelles et imaginaires de Z . Au voisinage de 0 dans F , on a $X(y) = \Phi(y, y) + O(\|y\|^3)$. L'intégrale s'écrit :

$$\int_{S(F)} \int_{-a}^a ((s + Y(ry))^2 + (t + X(ry))^2)^{-\frac{1}{2}} ds dy.$$

Pour r suffisamment petit, X ne prend que des valeurs positives sur la sphère de rayon r et ce terme est alors majoré par

$$\int_{S(F)} \int_{-a}^a ((s + Y(ry))^2 + X(ry)^2)^{-\frac{1}{2}} ds dy.$$

Cette quantité s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \int_{S(F)} \int_{-a}^a \left(\left(\frac{s}{r^2} + \frac{Y(ry)}{r^2} \right)^2 + \Phi(y, y)^2 + O(r) \right)^{-\frac{1}{2}} ds dy$$

et, en faisant le changement de variable $s = r^2 t$, ce dernier terme devient :

$$\int_{S(F)} \int_{-\frac{a}{r^2}}^{\frac{a}{r^2}} \left(\left(t + \frac{Y(ry)}{r^2} \right)^2 + \Phi(y, y)^2 + O(r) \right)^{-\frac{1}{2}} dt dy,$$

d'où le résultat, par un calcul élémentaire. \square

Remarquons encore :

Lemme 6.15. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction \mathcal{C}^∞ telle que $u(0) = 0$. Alors la fonction $r \mapsto u(r)\mathbf{1}_{r>0}$ admet pour dérivée au sens des distributions la fonction $r \mapsto u'(r)\mathbf{1}_{r>0}$.

Démonstration. C'est une simple conséquence de la formule d'intégration par parties. \square

Nous pouvons à présent conclure :

Démonstration du lemme 6.13. Pour $t > 0$, notons F_t la fonction à support compact :

$$(s, r) \mapsto \frac{1}{r} \int_{S(F)} f_t(sx + ry) dy \mathbf{1}_{r>0}.$$

Pour k dans \mathbb{N} , la fonction $(s, r) \mapsto r^k F_t(s, r)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ et, d'après le lemme 6.15, toutes ses dérivées d'ordre $\leq k$ par rapport à r sont dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Écrivons, pour $u = sx + y$ dans E ,

$$f_t(u) = \frac{\theta(u)(Z(y) - \Phi(y, y))}{(t + is + \Phi(y, y))(t + is + Z(y))};$$

comme toutes les dérivées d'ordre ≤ 2 de la fonction $y \mapsto Z(y) - \Phi(y, y)$ sont nulles en 0, le lemme 6.14 montre que, pour k dans \mathbb{N} , quand r tend vers 0, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k F_t}{\partial r^k}(s, r) \right| ds = O\left(\frac{1}{r^k}\right),$$

uniformément pour $t > 0$. Par conséquent, pour tout k dans \mathbb{N} , les fonctions $(s, r) \mapsto r^k F_t(s, r)$, $t > 0$, et toutes leurs dérivées d'ordre $\leq k$ forment une famille bornée de $L^1(\mathbb{R}^2)$. Enfin, pour (s, r) dans \mathbb{R}^2 avec $s \neq 0$, pour tout k dans \mathbb{N} et pour tout $l \leq k$, la quantité $\frac{\partial^l (r^k F_t)}{\partial r^l}(s, r)$ possède une limite quand $t \rightarrow 0$. Ces majorations montrent donc que f_t converge dans $L^1(E)$ vers une fonction f et que, si pour (s, r) dans \mathbb{R}^2 , on pose $F(s, r) = \frac{1}{r} \int_{S(F)} f(s + ry) dy \mathbf{1}_{r>0}$, alors, pour tout k dans \mathbb{N} , la fonction $(s, r) \mapsto r^k F(s, r)$ et toutes ses dérivées d'ordre $\leq k$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. Par conséquent, d'après le corollaire 6.12, si φ est la forme linéaire produit scalaire par x , on a :

$$\int_{\substack{\eta \in F^* \\ \|\eta\| \leq a}} \mathcal{F}(f)(\xi\varphi + \eta) d\eta \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0,$$

uniformément pour ξ dans \mathbb{R} , d'où la conclusion, d'après le lemme 6.9. \square

De même, on a le

Lemme 6.16. Soit Z une fonction \mathcal{C}^∞ définie au voisinage de 0 dans F telle que $dZ(0) = 0$ et que $\Phi = \frac{1}{2}d^2Z(0)$ soit réelle définie positive. Soit V une fonction holomorphe définie sur un voisinage de 0 dans $E_{\mathbb{C}}$. Soit θ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans E telle que, pour tout $u = sx + y$ dans E , si $\theta(u) \neq 0$, la partie réelle de $Z(y)$ soit > 0 . Pour tout $t > 0$, on note f_t la fonction

$$u = sx + y \mapsto \theta(u) \frac{V((t + is)x + iy) - V(0)}{t + is + Z(y)}.$$

Alors, quand t tend vers 0, la fonction f_t converge dans $L^1(E)$ vers une fonction f dont la transformée de Fourier vérifie, pour tout $\tau > 0$,

$$e^{-\tau a} \int_{b(0,a)} e^{-\tau\varphi(x)} \mathcal{F}(f)(\varphi) d\varphi \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Soient W_1 et W_2 les fonctions analytiques définies au voisinage de 0 dans $E_{\mathbb{C}}$ telles que $\frac{\partial W_2}{\partial x} = 0$ et que, pour $u = sx + y$, avec s dans \mathbb{C} et y dans $F_{\mathbb{C}}$, on ait $V(u) = V(0) + sW_1(u) + W_2(y)$. Alors, pour $t > 0$ et $u = sx + y$, avec s dans \mathbb{R} et y dans F , on a :

$$\begin{aligned} f_t(u) &= \theta(u) \frac{(t + is)W_1((t + is)x + iy) + W_2(iy)}{t + is + Z(y)} \\ &= \theta(u)W_1((t + is)x + iy) + \theta(u) \frac{W_2(iy) - Z(y)W_1((t + is)x + iy)}{t + is + Z(y)}. \end{aligned}$$

Notons $g_t(u)$ et $h_t(u)$ le premier et le second terme de cette dernière somme.

Quand t tend vers 0, g_t converge vers une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact g et, d'après le lemme 6.7, on a $e^{-\tau a} \int_{b(0,a)} e^{-\tau\varphi(x)} \mathcal{F}(g)(\varphi) d\varphi \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$.

Pour $u = sx + y$, $h_t(u)$ s'écrit $\theta(u) \frac{W_3((t+is)x+iy)}{t+is+Z(y)}$ où W_3 est une fonction analytique définie au voisinage de 0 dans $E_{\mathbb{C}}$ avec $W_3(0) = 0$ et $\frac{\partial W_3}{\partial x}(0) = 0$. Si, pour $t > 0$, on note H_t la fonction

$$(s, r) \mapsto \frac{1}{r} \int_{S(F)} h_t(sx + ry) dy \mathbf{1}_{r>0},$$

le lemme 6.14 montre à présent que, pour k dans \mathbb{N} , quand r tend vers 0, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k H_t}{\partial r^k}(s, r) \right| ds = O\left(\frac{\log r}{r^k}\right),$$

uniformément pour $t > 0$. En raisonnant alors comme dans la démonstration du lemme 6.13, on voit que h_t converge vers une fonction h dans $L^1(E)$ dont la transformée de Fourier vérifie $e^{-\tau a} \int_{b(0,a)} e^{-\tau\varphi(x)} \mathcal{F}(h)(\varphi) d\varphi \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$. \square

Nous pouvons à présent conclure :

Démonstration du lemme 6.2. On applique successivement les lemmes 6.13 et 6.16. \square

Références

- [1] N. Anantharaman, Precise counting results for closed orbits of Anosov flows, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **33** (2000), 33-56.
- [2] M. Babillot, F. Ledrappier, Lalley's theorem on periodic orbits of hyperbolic flows, *Ergodic theory and dynamical systems* **18** (1998), 17-39.
- [3] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geometric and functional analysis* **7** (1997), 1-47.
- [4] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires (II), *Advanced studies in pure mathematics* **26** (2000), 33-48.
- [5] J.-P. Conze, Y. Guivarc'h, Limit sets of groups of linear transformations, *Sankhyā Series A* **62** (2000), 367-385.
- [6] D. Dolgopyat, Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows, *Ergodic theory and dynamical systems* **18** (1998), 1097-1114.
- [7] A. Eskin, C. McMullen, Mixing, counting and equidistribution in Lie groups, *Duke mathematical journal* **71** (1993), 181-209.
- [8] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics 80, Academic Press, San Diego, 1978.
- [9] A. Katsuda, T. Sunada, Closed orbits in homology classes, *Publications mathématiques de l'IHES* **71** (1990), 5-32.
- [10] S. P. Lalley, Renewal theorems in symbolic dynamics, with application to geodesic flows, noneuclidean tessellations and their fractal limits, *Acta mathematica* **163** (1989), 1-55.
- [11] G. Prasad, \mathbb{R} -regular elements in Zariski dense subgroups, *Oxford quarterly journal of mathematics* **45** (1994), 541-545.

- [12] W. Parry, M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure for hyperbolic dynamics*, Astérisque 187-188, Société Mathématique de France, Paris, 1990.
- [13] M. Pollicott, R. Sharp, Linear actions of free groups, *Annales de l'institut Fourier* **51** (2001), 131-150.
- [14] M. Pollicott, R. Sharp, Asymptotic expansions for closed orbits in homology classes, *Geometriæ Dedicata* **87** (2001), 123-160.
- [15] J.-F. Quint, Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **77** (2002), 563-608.
- [16] J.-F. Quint, Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur, *Geometric and functional analysis* **12** (2002), 776-809.
- [17] J.-F. Quint, L'indicateur de croissance des groupes de Schottky, *Ergodic theory and dynamical systems* **23** (2003), 249-272.
- [18] Th. Roblin, Ergodicité et équidistribution en courbure négative, *Mémoires de la Société Mathématique de France* **95** (2003).
- [19] C. Series, The infinite word problem and limit sets in Fuchsian groups, *Ergodic theory and dynamical systems* **1** (1981), 337-360.
- [20] J. Tits, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **247** (1971), 196-220.