Groupes convexes cocompacts en rang supérieur

J.-F. Quint

Résumé

Nous exhibons une obstruction à la généralisation aux groupes de Lie semi-simples de rang supérieur de la notion de sous-groupe discret convexe cocompact.

1 Introduction

Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple.

Si G est de $\mathbb{R}$-rang 1, il est, à un revêtement près, la composante neutre du groupe des isométries d'une variété riemannienne X simplement connexe à courbure strictement négative pincée. Soit Γ un sous-groupe discret de G qui soit non élémentaire, c'est-à-dire qui ne stabilise pas de partie finie dans le compactifié géométrique $X \cup \partial X$ de X. On dit alors que Γ est convexe cocompact si et seulement si l'ensemble conservatif du flot géodésique de $\Gamma\backslash X$ est compact. Cette définition générale est donnée dans [9]. La terminologie provient du fait que, si X est $\mathbb{H}^n$, pour un certain $n \geq 2$, c'est-à-dire si G est localement isomorphe à $\mathrm{SO}_0(1,n)$, Γ est convexe cocompact si et seulement si l'enveloppe convexe dans X de son ensemble limite dans ∂X est Γ-cocompacte.

Dans cet article, nous exhibons une obstruction à la généralisation naïve de cette notion au rang supérieur.

Donnons-nous donc un sous-groupe discret Zariski dense Γ de G. Si $\mathcal{P}$ est la variété des drapeaux de G, c'est-à-dire la frontière de Fürstenberg de G, d'après un théorème de Y. Guivarc'h, généralisé par Y. Benoist dans [1, 3.6], Γ possède dans $\mathcal{P}$ un plus petit fermé invariant non vide. On l'appelle ensemble limite de Γ et on le note Λ_Γ. Soient A l'exponentielle d'un sous-espace de Cartan de l'algèbre de Lie de G, Z son centralisateur dans G et M le plus grand sous-groupe compact de Z, de sorte que $Z = MA$. Le groupe G possède une unique orbite ouverte dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$: c'est l'ensemble des couples de drapeaux en position générale. Le stabilisateur d'un tel couple dans G est conjugué à Z. Choisissons une fois pour toutes un tel couple (ξ, η) fixé par Z et identifions, via l'application orbitale $g \mapsto g(\xi, \eta)$, l'ensemble des couples de drapeaux en position générale à G/Z : si G est de $\mathbb{R}$-rang 1, il s'agit de la paramétrisation de Hopf de l'ensemble des géodésiques orientées de l'espace symétrique de G.

La trace sur G/Z de l'ensemble $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ est non-vide. C'est un fermé Γ-invariant de G/Z. On lui associe un fermé A-invariant E_Γ dans $\Gamma \backslash G/M$. Si A^+ et A^{++} sont les chambres de Weyl fermée et ouverte de A associée au choix de ξ, il résulte d'un résultat de Y. Benoist dans [1, 3.6] que E_Γ est l'adhérence de l'ensemble des points fixes des éléments de A^{++} dans $\Gamma \backslash G/M$.

Si G est de $\mathbb{R}$-rang 1, l'ensemble $\Gamma \backslash G/M$ est le fibré unitaire tangent de l'orbifold quotient de l'espace symétrique de G par Γ, l'action de A^{++} y induit le flot géodésique et l'ensemble E_Γ est l'adhérence de la réunion de l'ensemble des géodésiques fermées. Par définition, le groupe Γ est alors convexe cocompact si et seulement si E_Γ est compact. Dans ce cas, la classe des groupes convexes cocompacts est beaucoup plus grande que celle des sous-groupes cocompacts. Hélàs, en rang supérieur, la situation où E_Γ est compact ne produit pas beaucoup de nouveaux exemples. Plus précisément, le résultat principal de cet article s'énonce :

Théorème. *Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G tel que E_Γ soit compact. Alors, il existe des sous-groupes distingués connexes $G_0, G_1, \ldots, G_q$ de G et des sous-groupes discrets Zariski denses $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ de $G_0, G_1, \ldots, G_q$ ayant les propriétés suivantes :*

- *(i) les $G_0, G_1, \ldots, G_q$ sont deux à deux distincts et on a la décomposition en presque produit $G = G_0 G_1 \ldots G_q$.*
- *(ii) Γ_0 est un réseau cocompact de G_0.*
- *(iii) pour tout $1 \leq i \leq q$, G_i est $\mathbb{R}$-simple de $\mathbb{R}$-rang 1 et Γ_i est un sous-groupe convexe cocompact de G_i.*
- *(iv) Γ est comensurable au produit $\Gamma_0 \Gamma_1 \ldots \Gamma_q$.*

Nous prouverons également un analogue de ce théorème sur le corps $\mathbb{Q}_p$, pour tout entier premier p. Je tiens à remercier D. Ferte dont les questions m'ont permis d'en améliorer notamment la formulation.

La démonstration proprement dite de ce résultat sera donnée à la section 4. Elle passe par une étude de l'ensemble limite du groupe Γ. Cette étude utilise une propriété technique des variétés de drapeaux qui est démontrée à la section 3, en utilisant un résultat préliminaire, dont la preuve occupe la section 2.

Après la rédaction de cet article, j'ai appris l'existence de résultats anterieurs proches par B. Kleiner et B. Leeb, qui ont eu l'amabilité de me communiquer leur intéressante prépublication [6], où ils étudient les stabilisateurs des parties convexes des espaces symétriques de rang supérieur. Bien que différant beaucoup dans leur formulation, nos résultats sont à peu près équivalents, à ceci près que Kleiner et Leeb étendent certains des leurs au cas où les sous-groupes discrets qu'ils considèrent ne sont pas Zariski denses mais seulement d'adhérence de Zariski réductive. En particulier, l'énoncé [6, Theorem 3.1], qui me semble être le point clef de leur article, est à rapprocher de la proposition 3.1, autour de lasquelle s'articule le nôtre. A la section 5, nous expliquerons rapidement les liens entre nos travaux et ceux de Kleiner et Leeb. Je remercie F. Paulin de m'avoir fait remarquer ces liens.

La lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques pour un certain entier premier p. Dans tout l'article, on note $\mathbf{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe semi-simple et G le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Nous utiliserons le vocabulaire de la théorie générale des groupes affines semi-simples développé dans [2].

2 Une propriété de rang 1

Nous démontrons ici un résultat préliminaire qui sera utilisé à la section suivante.

Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des $\mathbb{K}$-sous-groupes paraboliques minimaux de $\mathbf{G}$. Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathbf{G}$ est $\mathbb{K}$-simple de $\mathbb{K}$-rang 1. Nous allons montrer la

Proposition 2.1. *Soit Λ un fermé Zariski dense de $\mathcal{P}$. On suppose que, pour tout point ξ de Λ, le groupe des éléments unipotents u de G tels que $u\xi = \xi$ et $u(\Lambda) = \Lambda$ agit transitivement sur $\Lambda \setminus \{\xi\}$. Alors $\Lambda = \mathcal{P}$.*

Remarque 2.1. Ce résultat est faux si l'on suppose que $\mathbb{K}$ est un corps local quelconque (penser à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).

Démonstration. Soit Γ le stabilisateur de Λ dans G : il agit transitivement sur Λ. Soit $\mathbf{H}$ la composante neutre de l'adhérence de Zariski de Γ. Comme $\mathbf{H}(\mathbb{K})$ contient des éléments unipotents, $\mathbf{H}$ n'est pas anisotrope. Soit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des $\mathbb{K}$-sous-groupes paraboliques minimaux de $\mathbf{H}$. Pour tout élément unipotent non trivial u de Γ, l'unique point fixe de u dans $\mathcal{P}$ appartient à $\mathcal{Q}$. Comme, par hypothèse, tout point de Λ est le point fixe d'un élément unipotent non trivial de Γ, on a $\Lambda \subset \mathcal{Q}$. Comme Λ est Zariski dense, il vient $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ et, donc, $\mathbf{H} = \mathbf{G}$. En d'autres termes, Γ est Zariski dense dans $\mathbf{G}$.

Comme Λ est fermé, Γ est fermé pour la topologie analytique. Comme $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$, pour un entier premier p, d'après [3, § 8, Th. 2], Γ est un sous-groupe $\mathbb{K}$-analytique de G. Soit $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie : comme Γ est Zariski dense dans $\mathbf{G}$, $\mathfrak{h}$ est un idéal de l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$ qui est simple et, donc, Γ est ouvert ou discret dans G.

Montrons que Γ n'est pas discret. Comme Λ est infini, il possède un point non isolé η (et donc tout point de Λ est non isolé). Soient ξ dans Λ, $\xi \neq \eta$, et (η_n) une suite d'éléments de $\Lambda \setminus \{\xi, \eta\}$ convergeant vers η. Pour tout n, on note u_n l'unique élément unipotent de G qui fixe ξ et tel que $u_n \eta = \eta_n$: il appartient à Γ. La suite (u_n) tend vers e par valeurs différentes de e et, donc, Γ n'est pas discret.

Le groupe Γ est ouvert dans G. Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, il contient la composante neutre de G, qui agit transitivement sur $\mathcal{P}$, et la proposition en découle.

Dans le cas général, donnons-nous un point ξ de Λ. Remarquons que $\Lambda = \Gamma\xi$ est ouvert dans $\mathcal{P}$. Comme ξ est non isolé, il existe une suite (u_n) d'éléments unipotents de Γ fixant ξ et tels que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ dans G. Alors, pour tout η dans $\mathcal{P}$, on a $u_n \eta \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ et, en particulier, pour n suffisament grand, $u_n \eta$ appartient à Λ. Comme u_n est dans Γ, η appartient à Λ. Il vient $\Lambda = \mathcal{P}$. $\square$

3 Une propriété de rang ≥ 2

Dans cette section, on établit un énoncé technique concernant certaines parties des variétés de drapeaux qui, appliqué aux ensembles limites des groupes que nous avons à étudier, sera l'argument clef conduisant à la démonstration de notre théorème principal.

On dit que deux drapeaux ξ et η sont en position générale si et seulement si l'intersection des sous-groupes paraboliques associés est le centralisateur d'un $\mathbb{K}$-tore déployé maximal de $\mathbf{G}$, qu'on notera alors $\mathbf{Z}_{(\xi,\eta)}$. On dit sinon qu'ils sont en position spéciale. Si $\mathbf{G}$ est de $\mathbb{K}$-rang 1, deux drapeaux sont en position générale si et seulement s'ils sont différents.

Notons $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ l'ensemble des couples de drapeaux en position générale : c'est l'unique G-orbite ouverte dans $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Soit $(\xi, \eta) \in \mathcal{Z}$. On appelle W-orbite de (ξ, η) l'ensemble (fini) des points fixes de $\mathbf{Z}_{(\xi,\eta)}$ dans $\mathcal{Z}$. On dit qu'une partie F de $\mathcal{Z}$ est W-stable si et seulement si elle contient la W-orbite de chacun de ses points. On dit qu'une partie Λ de $\mathcal{P}$ est W-stable si et seulement si l'ensemble $(\Lambda \times \Lambda) \cap \mathcal{Z}$ est W-stable. Notons que cette notion est vide si $\mathbf{G}$ est de $\mathbb{K}$-rang 1.

Dans cette section, nous démontrons la

Proposition 3.1. *Soient $\mathbf{G}_0$ le produit des facteurs de $\mathbb{K}$-rang ≥ 2 de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_q$ les facteurs $\mathbb{K}$-simples de $\mathbb{K}$-rang 1 de $\mathbf{G}$. Pour $0 \leq i \leq q$, soit $\mathcal{P}_i$ la variété des drapeaux de $\mathbf{G}_i$, de sorte que $\mathcal{P}$ s'identifie au produit $\mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_1 \times \ldots \times \mathcal{P}_q$. Alors, si Λ est une partie fermée W-stable et Zariski dense de $\mathcal{P}$, il existe des parties (fermées et Zariski denses) $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_q$ de $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_q$ telles que l'on ait :*

$$\Lambda = \mathcal{P}_0 \times \Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_q.$$

La démonstration de cette proposition nécessite l'emploi du vocabulaire des décompositions de Bruhat de $\mathbf{G}$. Pour le lecteur ne souhaitant pas s'immerger dans cet univers technique, nous commençons donc par traiter rapidement les cas où $\mathbf{G}$ est SL_3 ou Sp_4.

Démonstration dans le cas où $\mathbf{G}$ est SL_3. Ici, l'espace $\mathcal{P}$ est l'ensemble des couples (P, D) où P est un point de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ et D une droite contenant P. Deux drapeaux (P_1, D_1) et (P_2, D_2) sont en position générale si et seulement si on a $P_1 \notin D_2$ et $P_2 \notin D_1$.

La donnée de deux drapeaux en position générale détermine six drapeaux : dans la figure 1, on a représenté deux drapeaux en position générale (les deux points noirs sur les deux lignes pleines) ; le fixateur de ces deux drapeaux dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$ stabilise la ligne en pointillés et le point ajouré. Il fixe donc les six drapeaux qu'on peut construire avec ces trois droites et ces trois points. Une partie Λ de $\mathcal{P}$ est W-stable si et seulement si, pour tous ξ, η en position générale dans Λ, les six drapeaux associés appartiennent à Λ.

Donnons-nous donc Λ une partie fermée, Zariski dense et W-stable de $\mathcal{P}$ et montrons que $\Lambda = \mathcal{P}$. Notons Π (resp. Δ) la projection de Λ sur l'ensemble des points (resp. des droites) de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. On vérifie sans peine que la W-stabilité

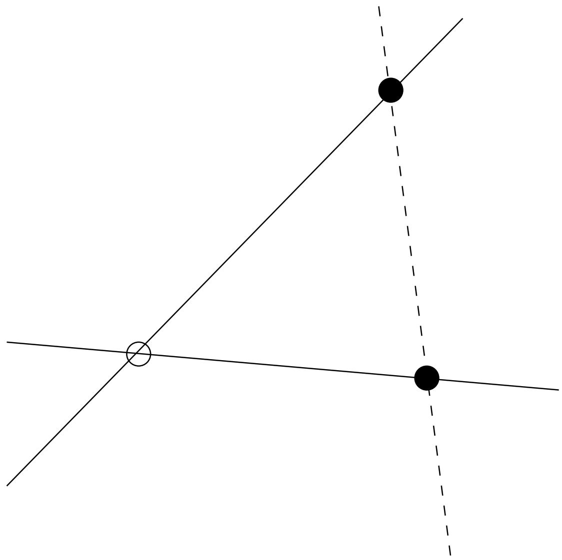

Fig. 1 – Drapeaux en position générale et W-orbite dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$

de Λ se traduit par le fait que la droite engendrée par deux points distincts de Π appartient à Δ et que le point d'intersection de deux droites distinctes de Δ appartient à Π. En particulier, si D est une droite de Δ et P un point de Π, la projection sur D issue de P envoie $\Pi\backslash\{P\}$ sur $\Pi \cap D$ et, donc, $\Pi \cap D$ est Zariski dense dans D. De même, l'ensemble des droites de Δ passant par P est Zariski dense dans l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ passant par P.

Soit D dans Δ. Nous allons montrer que $D \subset \Pi$. Par dualité, on aura aussi que toute droite passant par un point de Π appartient à Δ : la proposition découle clairement de ces deux faits. Pour ce faire, nous allons montrer que $D \cap \Pi$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.1. Soient P, P_1, P_2 dans $D \cap \Pi$, avec $P \neq P_1$ et $P \neq P_2$. Donnons nous deux droites distinctes de Δ, D_1 et D_2, passant par P et différentes de D. Enfin, choisissons un point $P_3 \neq P$ dans $D_1 \cap \Pi$, et notons P_4 (resp. P_5) le point d'intersection de (P_1P_3) (resp. de (P_2P_3)) avec D_2. On pourra se réferer à la figure 2.

Définissons une transformation de D. Soit P_0 un point de D. La droite (P_0P_4) coupe D_1 en un point P_0'. La droite $(P_0'P_5)$ coupe D en un point P_0''. La transformation $P_0 \mapsto P_0''$ est clairement une homographie de D. Elle envoie P_1 sur P_2 et on vérifie que P est son unique point fixe. Par conséquent, cette homographie est unipotente. La partie $D \cap \Pi$ de D vérifie bien les hypothèses

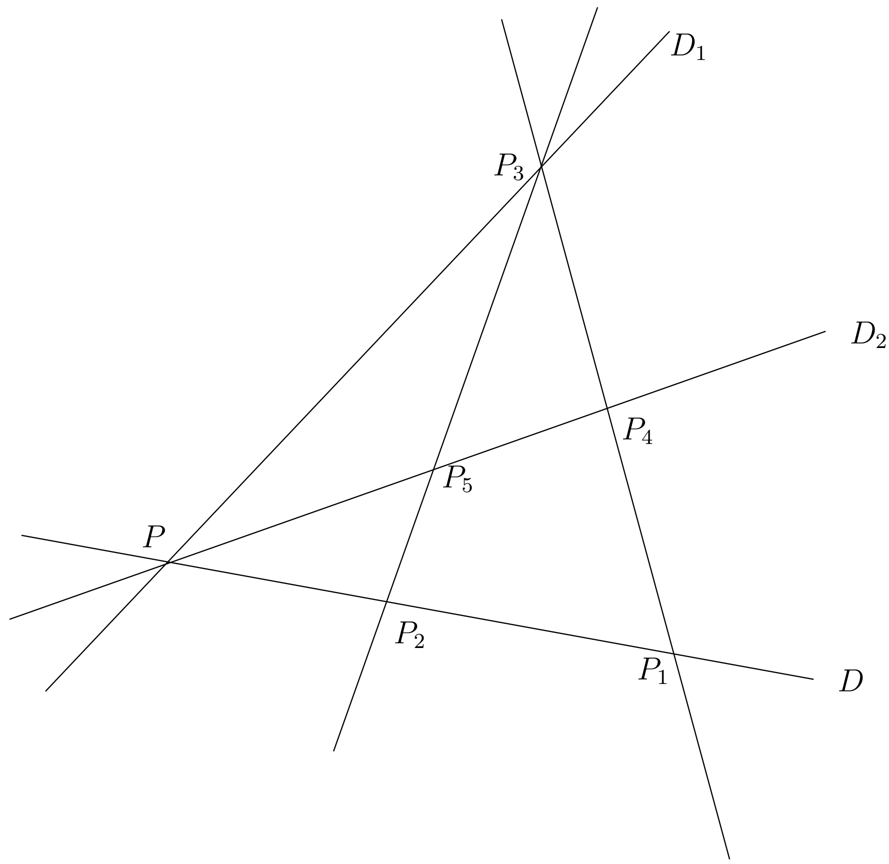

FIG. 2 – Construction d'unipotents dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{K})$

de la proposition 2.1, ce qu'il fallait démontrer. □

Passons à une situation un peu plus compliquée :

Démonstration dans le cas où **G** *est* Sp_4. L'espace $\mathbb{K}^4$ étant muni de sa forme symplectique standard, l'espace $\mathcal{P}$ est l'ensemble des couples (P, D) où P est un point de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ et D une droite contenant P et provenant d'un plan vectoriel totalement isotrope de $\mathbb{K}^4$. Dans les figures, on dessinera aussi le plan projectif provenant de l'orthogonal $P^{\perp}$ de P dans $\mathbb{K}^4$. Deux drapeaux (P_1, D_1) et (P_2, D_2) sont en position générale si et seulement si P_1 et P_2 ne sont pas orthogonaux et si D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires. Leur W-orbite consiste alors en les huit drapeaux représentés sur la figure 3.

Donnons-nous encore une partie Λ fermée, Zariski dense et W-stable de $\mathcal{P}$ et montrons que $\Lambda = \mathcal{P}$. Notons toujours Π et Δ les projections de Λ sur l'ensemble des points de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ et sur l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ qui proviennent de plans vectoriels totalement isotropes de $\mathbb{K}^4$. Comme Λ est W-stable, si P est un point de Π et D une droite de Δ ne contenant pas P, le point d'intersection de D et du plan $P^{\perp}$ appartient à Π et la droite joignant P à ce point appartient à Δ. À nouveau, on en déduit en particulier que l'ensemble des droites de Δ passant par P est Zariski dense dans l'ensemble des droites de $P^{\perp}$ passant par P et que l'ensemble des points de D appartenant à Π est Zariski dense dans D.

Soit D dans Δ. Nous allons encore prouver que l'on a $D \subset \Pi$ en montrant que $D \cap \Pi$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.1. Soient donc $P \neq P_1, P_2$ dans $D \cap \Pi$ et choisissons deux droites distinctes D_1 et D_2 de Δ passant par P (et donc contenues dans $P^{\perp}$) et différentes de D. Fixons un point $P_3 \neq P$ sur $D_1 \cap \Pi$. Soit à présent une droite de Δ passant par P_3 et différente de D_1 : elle rencontre $P_1^{\perp}$ en un point P_4 de Π qui n'appartient pas à $P^{\perp}$ et est à la fois orthogonal à P_3 et à P_1. De même, construisons un point P_5 de Π qui n'appartienne pas à $P^{\perp}$ et soit à la fois orthogonal à P_3 et à P_2. Enfin, notons D_4 (resp. D_5) la droite de Δ joignant P_4 (resp. P_5) au point d'intersection de son orthogonal et de D_2. Cette situation est représentée par la figure 4.

Définissons à nouveau une transformation de D. Soit P_0 un point de D. Notons P_0' le point d'intersection du plan $P_0^{\perp}$ et de la droite D_4, P_0'' celui de $(P_0')^{\perp}$ et de D_1, P_0''' celui de $(P_0'')^{\perp}$ et de D_5 et, enfin, P_0'''' celui de $(P_0''')^{\perp}$ et de D. Alors l'homographie $P_0 \mapsto P_0''''$ de D envoie P_1 sur P_2 et possède P commme unique point fixe. Elle est donc unipotente. Comme précédemment, la partie $D \cap \Pi$ de D vérifie les hypothèses de la proposition 2.1, ce qui prouve

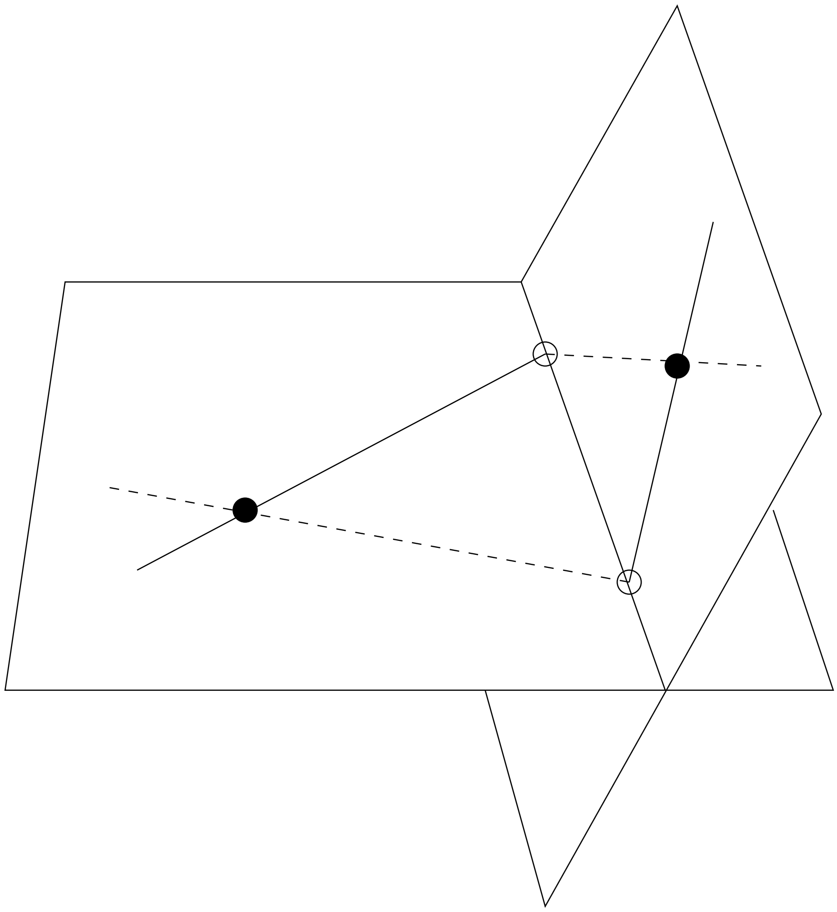

FIG. 3 – Drapeaux en position générale et W-orbite dans $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{K})$

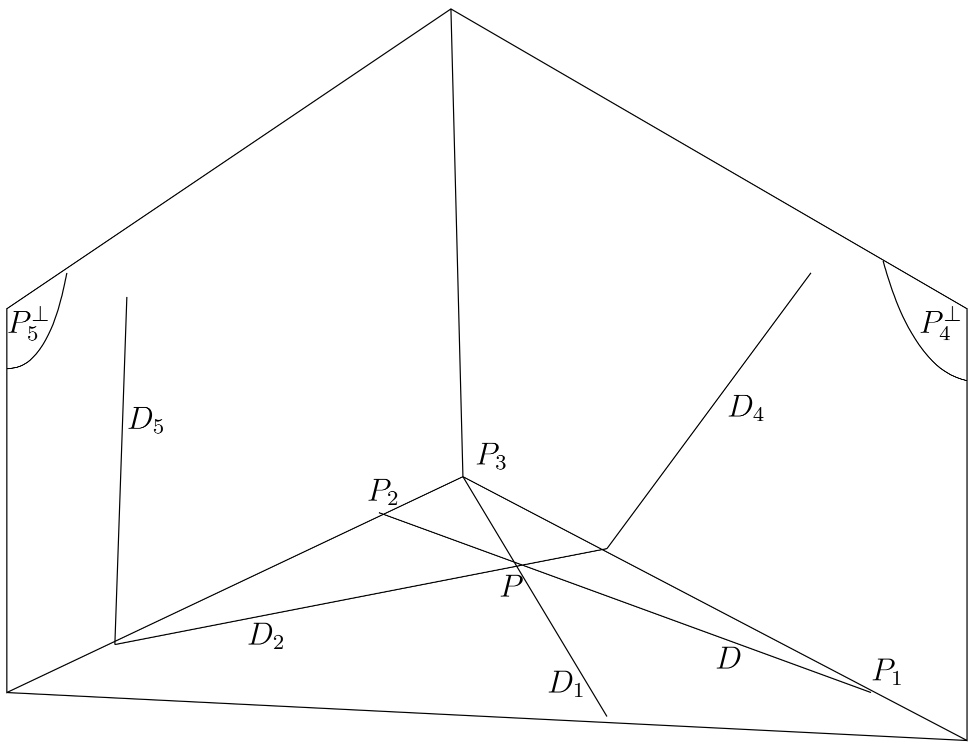

FIG. 4 – Construction d'unipotents dans $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{K})$

bien que l'on a $D \subset \Pi$.

Un raisonnement analogue permet de montrer que, pour tout point P de Π, toute les droites de $P^\perp$ passant par P appartiennent à Δ. Le résultat en découle clairement. $\square$

Venons-en au cas général. Il s'agit d'effectuer des constructions analogues à celles que l'on vient de faire dans la variété des drapeaux d'un groupe quelconque. Pour ce faire, introduisons quelques notions liées à l'existence de décompositions de Bruhat de $\mathbf{G}$, démontrée dans [2].

Notons une fois pour toutes Π l'ensemble des faces maximales d'une chambre de Weyl de $\mathbf{G}$ et $\iota : \Pi \to \Pi$ l'involution d'opposition de Π. Soit $\theta \subset \Pi$. Pour ξ dans $\mathcal{P}$, notons $\mathbf{P}_\xi^\theta$ l'unique $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ de type θ contenant le fixateur $\mathbf{P}_\xi$ de ξ (avec la convention $\mathbf{P}_\xi^\Pi = \mathbf{G}$) et $\mathbf{U}_\xi^\theta$ le radical unipotent de $\mathbf{P}_\xi^\theta$. Pour (ξ, η) dans $\mathcal{Z}$, notons $\mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta$ l'intersection de $\mathbf{P}_\xi^\theta$ et de $\mathbf{P}_\eta^{\iota(\theta)}$: c'est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}_\xi^\theta$ et de $\mathbf{P}_\eta^{\iota(\theta)}$. Les deux orbites $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$ et $\mathbf{P}_\eta^{\iota(\theta)}(\mathbb{K})\eta$ s'identifient à la variété des drapeaux de $\mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta$. En d'autres termes, il existe une unique bijection $\mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta(\mathbb{K})$-équivariante entre ces deux ensembles. On note $p_\xi^\theta(\eta)$ l'unique point de $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$ associé à η par cette bijection.

Exemple 3.1. Décrivons ces bijections équivariantes dans les cas déjà traités.

Si $\mathbf{G}$ est SL_3, étant donnés un point P et une droite D de $\mathbb{P}^2_\mathbb{K}$ avec $P \notin D$, l'application étudiée envoie une droite passant par P sur son point d'intersection avec D.

Si $\mathbf{G}$ est Sp_4, dont l'involution d'opposition est triviale, on considère deux familles d'applications. D'une part, étant donnés deux points P_1 et P_2 de $\mathbb{P}^3_\mathbb{K}$, provenant de droites non orthogonales dans $\mathbb{K}^4$, on s'intéresse à l'application qui, à une droite projective D, passant par P_1 et provenant d'un plan totalement isotrope de $\mathbb{K}^4$ (c'est-à-dire contenue dans le plan projectif $P_1^\perp$ orthogonal à P_1), associe la droite projective passant par P_2 et par le point d'intersection de D et de $P_2^\perp$. D'autre part, étant données deux droites non sécantes D_1 et D_2 de $\mathbb{P}^3_\mathbb{K}$, provenant toujours de plans totalement isotropes, on considère l'application qui, à un point P de D_1, associe le point d'intersection de $P^\perp$ et de D_2.

Par la suite, nous utiliserons les propriétés suivantes de cette construction :

Lemme 3.2. *Soient ξ dans $\mathcal{P}$ et $\theta \subset \Pi$. Notons $\mathcal{Z}_\xi$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ en position générale avec ξ.*

(i) Pour tout $\theta \subset \Pi$, l'application p_ξ^θ est un morphisme algébrique surjectif de $\mathcal{Z}_\xi$ sur l'orbite ouverte de $\mathbf{U}_\xi^\theta(\mathbb{K})$ dans $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$.

(ii) Pour tout η dans $\mathcal{Z}_\xi$, le point $p_\xi^\theta(\eta)$ appartient à la W-orbite de (ξ, η).

(iii) Pour tous η dans $\mathcal{Z}_\xi$ et ζ dans $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$, η et ζ sont en position générale si et seulement si $p_\xi^\theta(\eta)$ et ζ, vus comme des points de la variété des drapeaux du $\mathbb{K}$-groupe réductif $\mathbf{P}_\xi^\theta/\mathbf{U}_\xi^\theta$, sont en position générale.

(iv) Pour tous η_1, η_2 dans $\mathcal{Z}_\xi$, si u est l'unique élément de $\mathbf{U}_\xi^\theta(\mathbb{K})$ tel que $u\mathbf{P}_{\eta_1}^{\iota(\theta)}u^{-1} = \mathbf{P}_{\eta_2}^{\iota(\theta)}$, pour tout ζ dans $\mathbf{P}_{\eta_1}^{\iota(\theta)}(\mathbb{K})\eta_1$, on a :

$$p_{\eta_2}^{\iota(\theta)} p_\xi^\theta(\zeta) = u\zeta.$$

Démonstration. Le premier point résulte de la décomposition de Bruhat de $\mathbf{G}$. Comme on a $\mathbf{Z}_{(\xi,\eta)} \subset \mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta$, le deuxième est une conséquence de la $\mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta(\mathbb{K})$-équivariance de la bijection construite plus haut entre les ensembles $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$ et $\mathbf{P}_\eta^{\iota(\theta)}(\mathbb{K})\eta$.

Montrons le troisième point. Notons $\tau = p_\xi^\theta(\eta)$. Alors, pour ζ dans $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$, on a $\mathbf{P}_\zeta \cap \mathbf{P}_\eta \subset \mathbf{P}_\zeta^\theta \cap \mathbf{P}_\eta^{\iota(\theta)} = \mathbf{P}_\xi^\theta \cap \mathbf{P}_\eta^{\iota(\theta)} = \mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta$. Or, par construction, on a $\mathbf{P}_\eta \cap \mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta = \mathbf{P}_\tau \cap \mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta$. Il vient donc $\mathbf{P}_\zeta \cap \mathbf{P}_\eta = \mathbf{P}_\zeta \cap \mathbf{P}_\tau \cap \mathbf{L}_{(\xi,\eta)}^\theta$, d'où le résultat.

Démontrons le dernier point. L'existence et l'unicité de u résultent toujours de la décomposition de Bruhat et l'on a $u\mathbf{L}_{(\xi,\eta_1)}^\theta u^{-1} = \mathbf{L}_{(\xi,\eta_2)}^\theta$ et $u(\mathbf{P}_{\eta_1}^{\iota(\theta)}(\mathbb{K})\eta_1) = \mathbf{P}_{\eta_2}^{\iota(\theta)}(\mathbb{K})\eta_2$. Par définition des applications, on a donc, pour ζ dans $\mathbf{P}_{\eta_1}^{\iota(\theta)}(\mathbb{K})\eta_1$,

$$p_\xi^\theta(u\zeta) = up_\xi^\theta(\zeta) = p_\xi^\theta(\zeta),$$

cette dernière égalité résultant du fait que u est dans $\mathbf{U}_\xi^\theta(\mathbb{K})$. Le résultat en découle. $\square$

Déduisons-en une première propriété des ensembles W-stables.

Lemme 3.3. *Soient $\Lambda \subset \mathcal{P}$ une partie fermée W-stable et Zariski dense, ξ dans Λ et $\theta \subset \Pi$. Alors l'ensemble $\Lambda \cap \mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$, vu comme une partie de la variété des drapeaux de $\mathbf{P}_\xi^\theta/\mathbf{U}_\xi^\theta$, est une partie Zariski dense et W-stable.*

Démonstration. Comme, d'après le lemme 3.2, l'application

$$p_\xi^\theta : \mathcal{Z}_\xi \to \mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$$

est régulière et envoie $\Lambda \cap \mathcal{Z}_\xi$ dans $\Lambda \cap \mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$, l'ensemble $\Lambda \cap \mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$ est Zariski dense dans $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$.

Intéressons-nous à la W-stabilité. Donnons-nous η dans $\Lambda \cap \mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$ qui soit en position générale avec ξ dans $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$, c'est-à-dire tel que l'intersection des sous-groupes paraboliques minimaux associés à ξ et à η dans $\mathbf{G}$, quotientée par $\mathbf{U}_\xi^\theta$, soit le centralisateur d'un tore déployé maximal de $\mathbf{P}_\xi^\theta/\mathbf{U}_\xi^\theta$. Il s'agit de construire un drapeau τ de Λ, en position générale avec ξ, tel que η soit un point fixe du groupe $\mathbf{Z}_{(\xi,\tau)}$: en effet, alors, l'image de $\mathbf{Z}_{(\xi,\tau)}$ dans $\mathbf{P}_\xi^\theta/\mathbf{U}_\xi^\theta$ sera le centralisateur du tore déployé maximal de $\mathbf{P}_\xi^\theta/\mathbf{U}_\xi^\theta$ associé à ξ et à η et ses points fixes dans $\mathbf{P}_\xi^\theta(\mathbb{K})\xi$ appartiendront bien à Λ. Donnons-nous donc ζ dans Λ qui soit en position générale à la fois avec ξ et avec η. D'après le lemme 3.2, le point $\tau = p_\zeta^{\iota(\theta)}(\eta)$ appartient à Λ. Or, comme ξ et η sont en position générale comme points de la variété des drapeaux de $\mathbf{P}_\xi^\theta/\mathbf{U}_\xi^\theta$, $p_\zeta^{\iota(\theta)}(\xi)$ et τ sont en position générale comme points de la variété des drapeaux de $\mathbf{P}_\zeta^{\iota(\theta)}/\mathbf{U}_\xi^{\iota(\theta)}$ et, donc, d'après le lemme 3.2, ξ et τ sont en position générale dans $\mathcal{P}$. Par construction, on a $\eta = p_\xi^\theta(\tau)$ et, donc, à nouveau d'après le lemme 3.2, η appartient à la W-orbite de (ξ, τ), ce qu'il fallait démontrer.□

Admettons alors temporairement la proposition 3.1 dans un cas particulier :

Lemme 3.4. *Supposons que* $\mathbf{G}$ *est* $\mathbb{K}$*-simple et de* $\mathbb{K}$*-rang* 2. *Soit* $\Lambda \subset \mathcal{P}$ *une partie fermée* W*-stable et Zariski dense. Alors* $\Lambda = \mathcal{P}$.

Montrons que le cas général en découle :

Démonstration de la proposition 3.1. Soient $\mathbf{G}_1$ et $\mathbf{G}_2$ deux $\mathbb{K}$-sous-groupes distingués connexes de $\mathbf{G}$, commutant l'un à l'autre et tels qu'on ait la décomposition en presque produit $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$. Alors, si $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) est la variété des drapeaux de $\mathbf{G}_1$ (resp. de $\mathbf{G}_2$), on a $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$. De même, notons $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ la décomposition associée de Π. Alors, pour tout $(\xi, \eta) = ((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2))$ dans $\mathcal{Z}$, on a $p_\xi^{\Pi_1}(\eta) = (\xi_1, \eta_2)$ et $p_\xi^{\Pi_2}(\eta) = (\eta_1, \xi_2)$.

Déduisons-en que Λ est le produit de ses projections sur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Soient $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ dans Λ. Il s'agit de montrer que (ξ_1, η_2) appartient à Λ. Si ξ et η sont en position générale, c'est une conséquence de la remarque ci-dessus et du lemme 3.2. Dans le cas général, comme Λ est Zariski dense, il contient un élément $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ qui est à la fois en position générale avec ξ et avec η, c'est-à-dire que les couples (ξ_1, ζ_1) et (η_1, ζ_1) (resp. (ξ_2, ζ_2) et (η_2, ζ_2)) sont en position générale dans $\mathcal{P}_1$ (resp. dans $\mathcal{P}_2$). Alors, comme on vient de l'observer, Λ contient les points (ξ_1, ζ_2) et (ζ_1, η_2). Comme ces points sont en position générale dans $\mathcal{P}$, Λ contient (ξ_1, η_2), ce qui prouve bien que c'est un produit. D'après le lemme 3.3, chacune de ses composantes est W-stable.

On est donc ramené au cas où $\mathbf{G}$ est $\mathbb{K}$-simple de $\mathbb{K}$-rang ≥ 2. Il s'agit alors de montrer que $\Lambda = \mathcal{P}$. Soient α et β dans Π tels que les réflexions associées ne commutent pas. Notons $\theta = \{\alpha, \beta\}$. Alors, si $\mathbf{P}$ est un $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique de type θ de $\mathbf{G}$, le groupe dérivé du quotient de $\mathbf{P}$ par son radical unipotent est $\mathbb{K}$-simple de $\mathbb{K}$-rang 2. Soit ξ dans Λ. D'après le lemme 3.3, $\Lambda \cap \mathbf{P}^\theta_\xi(\mathbb{K})\xi$ est Zariski dense dans $\mathbf{P}^\theta_\xi(\mathbb{K})\xi$ et W-stable comme partie de la variété des drapeaux du $\mathbb{K}$-groupe réductif $\mathbf{P}^\theta_\xi/\mathbf{U}^\theta_\xi$. Par conséquent, d'après le lemme 3.4, on a $\mathbf{P}^\theta_\xi(\mathbb{K})\xi \subset \Lambda$ et, en particulier, $\mathbf{P}^\alpha_\xi(\mathbb{K})\xi \subset \Lambda$.

Soient maintenant ξ dans $\mathcal{P}$ et η dans Λ. Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans Π et $\eta = \xi_1, \dots, \xi_{k+1} = \xi$ dans $\mathcal{P}$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq k$, on ait $\xi_{i+1} \in \mathbf{P}^{\alpha_i}_{\xi_i}(\mathbb{K})\xi_i$. Comme $\mathbf{G}$ est $\mathbb{K}$-simple de $\mathbb{K}$-rang ≥ 2, pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe β_i dans Π tel que les réflexions associées à α_i et à β_i ne commutent pas. Par récurrence, on a alors $\xi \in \Lambda$, ce qu'il fallait démontrer.$\Box$

Dans la suite de la section, on suppose que $\mathbf{G}$ est $\mathbb{K}$-simple et de $\mathbb{K}$-rang 2. L'ensemble Π contient donc deux éléments.

Commençons par étudier plus précisément un phénomène qui vient d'apparaitre dans la démonstration précédente. Soient $\xi_0, \dots, \xi_k$ des points de $\mathcal{P}$. On dit que la suite $(\xi_0, \dots, \xi_k)$ est une chaine si et seulement si

(i) il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans Π tels que, pour $1 \leq i \leq k-1$, on ait $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ (en d'autres termes, un choix d'alternance entre les deux éléments de Π) et que, pour tout $1 \leq i \leq k$, on ait $\xi_i \in \mathbf{P}^{\alpha_i}_{\xi_{i-1}}(\mathbb{K})\xi_{i-1} \setminus \{\xi_{i-1}\}$.

(ii) pour tous $0 \leq i, j \leq k$ avec $\{i, j\} \neq \{0, k\}$, les points ξ_i et ξ_j ne sont pas en position générale.

On appelle l'entier k longueur de la chaine. La chaine $(\xi_0, \dots, \xi_k)$ sera dite maximale si et seulement si les points ξ_0 et ξ_k sont en position générale.

Notons w l'ordre du $\mathbb{K}$-groupe de Weyl de $\mathbf{G}$. Comme $\mathbf{G}$ est $\mathbb{K}$-simple, les réflexions associées à α et β ne commutent pas et, donc, on a $w \geq 6$ (bien sûr, par classification, on sait que l'on a $w \in \{6, 8, 12\}$).

Lemme 3.5. *Toutes les chaines maximales ont pour longueur $\frac{w}{2}$. Soit $(\xi_0, \ldots, \xi_k)$ une chaine de longueur $k < \frac{w}{2}$. Soit α_{k+1} l'élément de Π tel que $\xi_k \notin \mathbf{P}_{\xi_{k-1}}^{\alpha_{k+1}}(\mathbb{K})\xi_{k-1}$. Alors, pour tout $\xi_{k+1} \neq \xi_k$ dans $\mathbf{P}_{\xi_k}^{\alpha_{k+1}}(\mathbb{K})\xi_k$, la suite $(\xi_0, \ldots, \xi_{k+1})$ est une chaine.*

Démonstration. Soient ξ dans $\mathcal{P}$ et α dans Π. Le groupe $\mathbf{P}_\xi^\alpha/\mathbf{U}_\xi^\alpha$ est de $\mathbb{K}$-rang semi-simple 1 et, donc, deux points de $\mathbf{P}_\xi^\alpha(\mathbb{K})\xi$ sont en position générale dans la variété des drapeaux de $\mathbf{P}_\xi^\alpha/\mathbf{U}_\xi^\alpha$ si et seulement s'ils sont différents. En particulier, d'après le lemme 3.2, pour η dans $\mathcal{P}$, en position générale avec ξ, $p_\xi^\alpha(\eta)$ est le seul point de $\mathbf{P}_\xi^\alpha(\mathbb{K})\xi$ qui soit en position spéciale avec η dans $\mathcal{P}$.

Soient alors $(\xi_0, \ldots, \xi_k)$ une chaine maximale et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ comme dans la définition. Soit $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{(\xi_0,\xi_k)}$. Nous allons montrer que $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ sont des points fixes de $\mathbf{Z}$.

Comme ξ_0 et ξ_k sont en position générale et ξ_1 et ξ_k en position spéciale, d'après la remarque ci-dessus, on a $\xi_1 = p_{\xi_0}^{\alpha_1}(\xi_k)$ et, si $\alpha_{k+1} = \iota(\alpha_1)$, ξ_1 est en position générale avec tout point de $\mathbf{P}_{\xi_k}^{\alpha_{k+1}}(\mathbb{K})\xi_k$ différent de ξ_k. En particulier, comme ξ_1 est en position spéciale avec $\xi_{k-1} \in \mathbf{P}_{\xi_k}^{\alpha_k}(\mathbb{K})\xi_k \setminus \{\xi_k\}$, on a $\alpha_{k+1} \neq \alpha_k$. Soit $\xi_{k+1} = p_{\xi_k}^{\alpha_{k+1}}(\xi_0)$: les points ξ_1 et ξ_{k+1} sont en position générale. Or, d'après le lemme 3.2, ce sont des points fixes de $\mathbf{Z}$. On a donc $\mathbf{Z}_{(\xi_1,\xi_{k+1})} = \mathbf{Z}$.

Montrons que $(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1})$ est une chaine maximale. Il s'agit de montrer que, pour tout $2 \leq i \leq k-1$, ξ_i est en position spéciale avec ξ_{k+1}. Soit i le plus grand entier ≥ 1 tel que ξ_i soit en position générale avec ξ_{k+1}. La suite $(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_i)$ est une chaine maximale. D'après le raisonnement précédent, l'orbite $\mathbf{P}_{\xi_i}^{\alpha_i}(\mathbb{K})\xi_i$ contient un point en position générale avec ξ_k et, donc, tous ses points différents de ξ_i le sont. Par conséquent, ξ_{i-1} est en position générale avec ξ_k, donc $i = 1$. La suite $(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1})$ est une chaine.

Par récurrence, il existe des points $\xi_{k+2}, \ldots, \xi_{2k-1}$ de $\mathcal{P}$ tels que, pour tout $0 \leq i \leq k$, la suite $(\xi_i, \ldots, \xi_{k+i})$ soit une chaine maximale et que $\mathbf{Z}_{(\xi_i,\xi_{k+i})} = \mathbf{Z}$. Les $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ sont bien des points fixes de $\mathbf{Z}$. En particulier, ξ_1 est l'unique point fixe de $\mathbf{Z}$ différent de ξ_0 dans $\mathbf{P}_{\xi_0}^{\alpha_1}(\mathbb{K})\xi_0$ et, par récurrence, $(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})$ est l'unique suite de points de $\mathcal{P}$ telle que $(\xi_0, \ldots, \xi_k)$ soit une chaine et que ξ_1 appartienne à $\mathbf{P}_{\xi_0}^{\alpha_1}(\mathbb{K})\xi_0$. Le calcul de la longueur en découle.

Déduisons-en la seconde assertion du lemme. Donnons-nous une chaine de $(\xi_0, \ldots, \xi_k)$ de longueur $k < \frac{w}{2}$, α_{k+1} et ξ_{k+1} comme dans l'énoncé. Si tous les ξ_i, $0 \leq i \leq k$, sont en position spéciale avec ξ_{k+1}, la suite $(\xi_0, \ldots, \xi_{k+1})$

est une chaine. Sinon, soit i le plus grand entier tel que ξ_i et ξ_{k+1} soient en position générale. La suite $(\xi_i, \ldots, \xi_{k+1})$ est une chaine maximale. D'après ce qui précède, on a donc $k+1-i = \frac{w}{2}$. Comme $k < \frac{w}{2}$, il vient $i = 0$, d'où le résultat.$\square$

On note α et β les deux éléments de Π. Pour démontrer le lemme 3.4, nous allons chercher à appliquer la proposition 2.1 à des sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$. Nous utiliserons une traduction abstraite des constructions effectuées plus haut pour $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_3$ et $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}_4$:

Lemme 3.6. *Soit $\Lambda \subset \mathcal{P}$ une partie fermée W-stable et Zariski dense. Soient ξ_1, ξ_2, ζ_1 trois points distincts de Λ avec $\xi_2, \zeta_1 \in \mathbf{P}^\beta_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$. Alors, pour tous $\xi_0 \neq \xi_1$ dans $\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$ et $\xi_3 \neq \xi_2$ dans $\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}(\mathbb{K})\xi_2$, il existe un élément unipotent u de G tel que $u\zeta_1 = \zeta_1$, $u\xi_1 = \xi_2$, $u\xi_0 = \xi_3$ et que $u(\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1) = \Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}(\mathbb{K})\xi_2$.*

Exemple 3.2. Dans les démonstrations pour $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_3$ et $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}_4$, on a $\xi_1 = (P, D)$, $\xi_2 = (P, D_1)$, $\zeta_1 = (P, D_2)$, $\xi_0 = (P_1, D)$ et $\xi_3 = (P_3, D_1)$.

Démonstration. D'après le lemme 3.5, la suite $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une chaine. Comme, d'après le lemme 3.3, pour tout ξ dans Λ, les ensembles $\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_\xi(\mathbb{K})\xi$ et $\Lambda \cap \mathbf{P}^\beta_\xi(\mathbb{K})\xi$ sont Zariski denses dans $\mathbf{P}^\alpha_\xi(\mathbb{K})\xi$ et dans $\mathbf{P}^\beta_\xi(\mathbb{K})\xi$ on peut, à nouveau d'après le lemme 3.5, compléter $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ en une chaine maximale de points de Λ, $(\xi_0, \ldots, \xi_k)$. Notons η_2 (resp. η_1) le point de $\mathcal{P}$ opposé à ξ_1 (resp. ξ_2) par rapport à $\mathbf{Z}_{(\xi_0, \xi_k)}$. Enfin, notons $\zeta_2 = p^{\iota(\beta)}_{\eta_1}(\zeta_1)$. Remarquons que l'on a $p^{\iota(\beta)}_{\eta_1}(\eta_1) = \xi_1$ et $p^{\iota(\beta)}_{\eta_1}(\eta_2) = \xi_2$.

Considérons l'application $p^\alpha_{\xi_2} p^{\iota(\alpha)}_{\zeta_2} : \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1 \to \mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}(\mathbb{K})\xi_2$. D'après le lemme 3.2, elle est donnée par l'action de l'unique élément u de $\mathbf{U}^\alpha_{\zeta_2}(\mathbb{K})$ qui conjugue $\mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}$ à $\mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}$ et l'on a bien $u(\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1) = \Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}(\mathbb{K})\xi_2$. Or, le groupe $\mathbf{L}^\beta_{(\xi_1, \eta_2)}(\mathbb{K})$ agit transitivement sur $\mathbf{P}^\beta_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$ et sur $\mathbf{P}^{\iota(\beta)}_{\eta_2}(\mathbb{K})\eta_2$ et, par définition, ces actions commutent à l'application $p^\beta_{\xi_1}$. Il existe un unique élément unipotent v de $\mathbf{L}^\beta_{(\xi_1, \eta_2)}(\mathbb{K})$ tel que $v\zeta_2 = \zeta_2$ et que $v\eta_1 = \eta_2$. On a $v\zeta_1 = \zeta_1$ et $v\xi_1 = \xi_2$, et, donc, $v\mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}v^{-1} = \mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}$. Or, comme v est un élément unipotent de $\mathbf{L}^\beta_{(\xi_1, \eta_2)}(\mathbb{K})$ qui fixe ζ_2, c'est un élément de $\mathbf{U}^\alpha_{\zeta_2}(\mathbb{K})$. Donc $v = u$ et cet élément de G a les propriété requises. $\square$

Nous pouvons à présent conclure.

Démonstration du lemme 3.4. Soit ξ_1 dans Λ. D'après le lemme 3.3, Λ rencontre les orbites de ξ_1 sous $\mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})$ et $\mathbf{P}^\beta_{\xi_1}(\mathbb{K})$ en des ensembles Zariski denses dans ces orbites. Donnons-nous donc ξ_0 et ξ_4 des points distincts de ξ_1 dans $\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$. Choisissons encore ζ_1 et ξ_2, deux points distincts et différents de ξ_1 dans $\Lambda \cap \mathbf{P}^\beta_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$. Enfin, donnons-nous un point ξ_3 distinct de ξ_2 dans $\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}(\mathbb{K})\xi_2$.

D'après le lemme 3.6, il existe un élément unipotent u de G tel que $u\zeta_1 = \zeta_1$, $u\xi_1 = \xi_2$, $u\xi_0 = \xi_3$ et que $u(\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1) = \Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}(\mathbb{K})\xi_2$. À nouveau d'après ce lemme, il existe un élément unipotent v de G tel que $v\zeta_1 = \zeta_1$, $v\xi_2 = \xi_1$, $v\xi_3 = \xi_4$ et que $v(\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_2}(\mathbb{K})\xi_2) = \Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$. Alors, $w = vu$ est encore unipotent, puisque v et u fixent tous deux ζ_1, et l'on a $w\xi_1 = \xi_1$, $w\xi_0 = \xi_4$ et $u(\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1) = \Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$. On vient de montrer que la partie $\Lambda \cap \mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$ de $\mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.1. On a donc $\mathbf{P}^\alpha_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1 \subset \Lambda$ et, de même, $\mathbf{P}^\beta_{\xi_1}(\mathbb{K})\xi_1 \subset \Lambda$. Le résultat en découle, à l'aide d'un argument déjà employé plus haut. $\square$

4 Points conservatifs dans $\Gamma\backslash G$

Dans cette section, nous déduisons le théorème de la proposition 3.1.

Soient $\mathbf{A}$ un $\mathbb{K}$-tore déployé maximal de $\mathbf{G}$, $\mathbf{Z}$ son centralisateur et Z le groupe des $\mathbb{K}$-points de $\mathbf{Z}$. Soit X le groupe des caractères de $\mathbf{A}$ et E l'espace vectoriel dual de $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}} X$. Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, notons, pour x dans $\mathbb{K}$, $\omega(x) = -\log|x|$. Si $\mathbb{K}$ est $\mathbb{Q}_p$, pour un entier premier p, notons ω la valuation de $\mathbb{K}$ telle que $\omega(p) = -1$. Pour χ dans X, notons χ^ω la forme linéaire associée sur E. Alors, d'après [8], il existe une unique application ν de Z dans E telle que, si χ est un caractère de $\mathbf{Z}$ défini sur $\mathbb{K}$, pour tout z dans Z, on ait :

$$\chi^\omega(\nu(z)) = -\omega(\chi(z)).$$

Dorénavant, on considèrera les éléments de X comme des éléments du dual E^* de E. Soit Σ l'ensemble des poids de $\mathbf{A}$ dans l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. C'est un sytème de racines dans E^*. On choisit dans Σ une base Π et on note E^+ et E^{++} les chambres de Weyl positive et strictement positive associées dans E. On notera W le groupe de Weyl de Σ : il s'identifie au quotient par Z de son normalisateur dans G.

Soit $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{P}^\vee$) le $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique minimal de $\mathbf{G}$ dont l'algèbre de Lie contient les espaces poids des éléments de Σ^+ (resp. de $-\Sigma^+$).

Soient ξ_0 et $\xi_0^\vee$ les points fixes de ces deux groupes dans $\mathcal{P}$. On a $\mathbf{Z} = \mathbf{P} \cap \mathbf{P}^\vee$. En d'autres termes, l'application orbitale $g \mapsto g(\xi_0, \xi_0^\vee), G \to \mathcal{Z}$ identifie $\mathcal{Z}$ et G/Z. En particulier, le groupe W agit à droite dans $\mathcal{Z}$ et on vérifie qu'une partie de $\mathcal{Z}$ est W-stable au sens de la section 3 si et seulement si elle est stable pour cette action.

Si z est un élément de $\nu^{-1}(E^{++})$, pour tout ξ en position générale avec $\xi_0^\vee$ dans $\mathcal{P}$, on a $z^n \xi \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_0$.

On désigne par Γ un sous-groupe Zariski dense de G. Si $\mathbb{K}$ est non-archimédien, on supposera en outre, pour simplifier l'exposition, que Γ possède la propriété de contraction dans $\mathcal{P}$ (c'est toujours le cas lorsque $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, d'après [7]). D'après [1, 3.6], Γ possède alors dans $\mathcal{P}$ un plus petit fermé invariant non vide, appelé ensemble limite de Γ et noté Λ_Γ. Suivant encore [1], notons F_Γ l'ensemble $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma \cap \mathcal{Z}$. On considèrera désormais F_Γ comme un sous-ensemble Γ-invariant à gauche de G/Z. Supposons dorénavant Γ discret : on associe alors à F_Γ un sous-ensemble Z-invariant à droite E_Γ dans $\Gamma\backslash G$.

Soit $\mathcal{C}$ un cône ouvert de E. Suivant [4], nous dirons qu'un point x de $\Gamma\backslash G$ est $\mathcal{C}$-conservatif si et seulement s'il existe un compact K de $\Gamma\backslash G$ et une suite (z_n) d'éléments de Z tendant vers l'infini dans Z tels que $(\nu(z_n))$ converge en direction vers un élément de $\mathcal{C}$ et que, pour tout n, on ait $xz_n \in K$. Généralisons un résultat de [4] :

Lemme 4.1. *Soit g dans G tel que Γg soit E^{++}-conservatif (resp. $(-E^{++})$-conservatif). Alors $g\xi_0$ (resp. $g\xi_0^\vee$) appartient à Λ_Γ.*

Démonstration. Nous ne démontrons que la première partie du lemme, la seconde lui étant clairement équivalente.

Par définition, il existe des suites (k_n) bornée dans G, (z_n) tendant vers l'infini dans Z et telle que $(\nu(z_n))$ converge en direction vers un élément de E^{++} et (γ_n) dans Γ avec $gz_n = \gamma_n k_n$. Quitte à extraire, supposons que k_n converge vers un élément k de G. Alors, pour tout ξ en position générale avec $k\xi_0^\vee$ dans $\mathcal{P}$, on a $\gamma_n \xi = g z_n k_n^{-1} \xi \xrightarrow[n\to\infty]{} g\xi_0$ et, donc, $g\xi_0$ appartient à Λ_Γ.$\square$

Corollaire 4.2. *Soit x un point $(E^{++}, -E^{++})$-conservatif de $\Gamma\backslash G$. Alors x appartient à E_Γ.*

Si $\mathbf{G}$ est de $\mathbb{K}$-rang 1, on dit, suivant C. Yue dans [9], que Γ est convexe cocompact si et seulement si l'ensemble E_Γ est compact. Le résultat principal de cette section est le

Théorème 4.3. *Soit* Γ *un sous-groupe discret et Zariski dense de* G*. Supposons que l'ensemble* E_Γ *soit compact. Alors, il existe des* $\mathbb{K}$*-sous-groupes distingués connexes* $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_q$ *de* $\mathbf{G}$ *et des sous-groupes discrets Zariski denses* $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ *des groupes de* $\mathbb{K}$*-points* $G_0, G_1, \ldots, G_q$ *de* $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_q$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) les $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_q$ *sont deux à deux distincts et on a la décomposition en presque produit* $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0\mathbf{G}_1 \ldots \mathbf{G}_q$*.*

(ii) Γ_0 *est un réseau cocompact de* G_0*.*

(iii) pour tout $1 \leq i \leq q$*,* $\mathbf{G}_i$ *est* $\mathbb{K}$*-simple de* $\mathbb{K}$*-rang* 1 *et* Γ_i *est un sous-groupe convexe cocompact de* G_i*.*

(iv) Γ *est comensurable au produit* $\Gamma_0\Gamma_1 \ldots \Gamma_q$*.*

Démonstration. Commençons par remarquer que le résultat ne dépend que de la classe de commensurabilité de Γ. On peut donc en particulier remplacer $\mathbf{G}$ par un revêtement et le quotienter par ses facteurs $\mathbb{K}$-anisotropes de façon à supposer, ce que nous ferons désormais, que $\mathbf{G}$ n'a pas de facteurs $\mathbb{K}$-anisotropes et qu'il est le produit de ses sous-groupes distingués $\mathbb{K}$-simples.

Comme E_Γ est compact et Z-stable, pour tout w dans W, tout point de E_Γ est $(wE^{++}, -wE^{++})$-conservatif. D'après le corollaire 4.2, on a donc $E_\Gamma \subset E_\Gamma w$. Comme ceci est valable pour tout w, E_Γ est stable par l'action de W. En d'autres termes, la partie F_Γ est W-stable, au sens de la section 3. Comme Γ est Zariski dense, F_Γ est Zariski dense. D'après la proposition 3.1, vues les hypothèses faites sur $\mathbf{G}$, on peut donc trouver des sous-groupes distingués $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_q$ de $\mathbf{G}$, de variétés des drapeaux $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \ldots, \mathcal{P}_q$, et des fermés Zariski denses $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_q$ de $\mathcal{P}_1 \ldots, \mathcal{P}_q$ tels que :

(i) on a $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \times \mathbf{G}_1 \times \ldots \times \mathbf{G}_q$.

(ii) pour tout $1 \leq i \leq q$, $\mathbf{G}_i$ est $\mathbb{K}$-simple de $\mathbb{K}$-rang 1 et $\Lambda_i \neq \mathcal{P}_i$.

(iii) on a $\Lambda_\Gamma = \mathcal{P}_0 \times \Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_q$.

Pour tout $0 \leq i \leq q$, notons G_i le groupe des $\mathbb{K}$-points de $\mathbf{G}_i$ et Γ_i la projection de Γ sur G_i. Notons aussi $\mathbf{H}$ le groupe $\mathbf{G}_1 \times \ldots \times \mathbf{G}_q$, H le groupe de ses $\mathbb{K}$-points et Δ la projection de Γ sur H.

Montrons que, pour $1 \leq i \leq q$, Γ_i est un sous-groupe discret de G_i. Soit en effet D_i son adhérence pour la topologie analytique. D'après [3, § 8, Th. 2], D_i est un sous-groupe $\mathbb{K}$-analytique de G. Comme Δ_i est Zariski dense dans G_i, l'algèbre de Lie de D_i est un idéal de celle de G_i et, donc, D_i est ouvert ou discret dans G_i. Si D_i est ouvert, comme il stabilise Λ_i, Λ_i est ouvert dans $\mathcal{P}_i$. Comme Γ agit proximalement sur $\mathcal{P}_i$, on a alors $\Lambda_i = \mathcal{P}_i$, ce qui est faux par hypothèse. Donc Γ_i est bien discret dans $\mathcal{P}_i$ et, *a fortiori,* Δ est discret dans H.

Montrons à présent que Γ_0 est un sous-groupe discret de G_0. Pour simplifier les notations, supposons, quitte à remplacer Γ par un conjugué, que la classe x de e dans $\Gamma\backslash G$ appartient à E_Γ. Alors, comme Δ est fermé dans H, l'ensemble xG_0, qui est la fibre de x par l'application naturelle $\Gamma\backslash G \to \Delta\backslash H$, est fermé dans $\Gamma\backslash G$. Par conséquent, l'application orbitale $(\Gamma\cap G_0)\backslash G_0 \to xG_0$ est un homéomorphisme et, donc, l'ensemble $x(Z\cap G_0)$ est relativement compact dans $(\Gamma\cap G_0)\backslash G_0$. Soient $\mathbf{H}_0$ l'adhérence de Zariski de $\Gamma\cap G_0$ dans $\mathbf{G}_0$ et H_0 le groupe de ses $\mathbb{K}$-points. Comme $\Gamma\cap G_0$ est normalisé par le sous-groupe Zariski dense Γ_0 de G_0, $\mathbf{H}_0$ est distingué dans $\mathbf{G}_0$. Or $Z\cap G_0$ est le groupe des $\mathbb{K}$-points du centralisateur dans $\mathbf{G}_0$ d'un $\mathbb{K}$-tore déployé maximal de $\mathbf{G}_0$. Comme son image dans $H_0\backslash G_0$ est relativement compacte, le groupe $\mathbf{H}_0\backslash\mathbf{G}_0$ est anisotrope : comme on a supposé $\mathbf{G}$ sans facteurs anisotropes, il vient $\mathbf{H}_0 = \mathbf{G}_0$. En d'autres termes, $\Gamma\cap G_0$ est Zariski dense dans $\mathbf{G}_0$. Comme il est discret, son normalisateur est discret dans G_0, et, donc, Γ_0 est discret dans G_0.

Pour tout $0\leq i\leq q$, Γ_i est un sous-groupe discret et Zariski dense de G_i et on a clairement $\Lambda_{\Gamma_0} = \mathcal{P}_0$ et, pour $1\leq i\leq q$, $\Lambda_{\Gamma_i} = \Lambda_i$. Notons $\widetilde{E_\Gamma}$ l'image réciproque de E_Γ dans G et, pour tout $1\leq i\leq q$, $\widetilde{E_{\Gamma_i}}$ celle de E_{Γ_i} dans G_i. Alors, on a $\widetilde{E_\Gamma} = G_0\times\widetilde{E_{\Gamma_1}}\times\ldots\times\widetilde{E_{\Gamma_q}}$. Comme $E_\Gamma = \Gamma\backslash\widetilde{E_\Gamma}$ est compact et que $\Gamma\subset\Gamma_0\times\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_q$, l'ensemble $(\Gamma_0\times\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_q)\backslash\widetilde{E_\Gamma} = (\Gamma_0\backslash G_0)\times E_{\Gamma_1}\times\ldots\times E_{\Gamma_q}$ est compact, c'est-à-dire que Γ_0 est un réseau cocompact de G_0 et que, pour $1\leq i\leq q$, Γ_i est convexe cocompact dans G_i. Enfin, les fibres de l'application naturelle $E_\Gamma\to(\Gamma_0\times\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_q)\backslash\widetilde{E_\Gamma}$ sont finies, donc Γ est d'indice fini dans $\Gamma_0\times\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_q$. $\square$

5 Convexes invariants et W-stabilité

On suppose dorénavant que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ et on note X l'espace symétrique de G. Dans cette section, nous montrons comment la proposition 3.1, associée aux travaux de Y. Benoist dans [1], permet de retrouver une partie des résultats de B. Kleiner et B. Leeb dans [6]. Nous supposerons le lecteur familier avec la géométrie de X et notamment avec [5, § 4].

Notons X_1 l'espace symétrique du produit G_1 des facteurs $\mathbb{R}$-simples de $\mathbb{R}$-rang 1 de G et X_2 l'espace symétrique du produit G_2 des facteurs $\mathbb{R}$-simples de $\mathbb{R}$-rang ≥ 2 de G : on a $X = X_1 \times X_2$. Nous allons donner une preuve du

Théorème 5.1 (Kleiner-Leeb)**.** *Soit C une partie convexe fermée de X. Supposons qu'il existe un sous-groupe Zariski dense Γ de G tel que $\Gamma C \subset C$. Alors il existe une partie convexe fermée C_1 de X_1 telle que $C = C_1 \times X_2$.*

Notons que ce théorème est un cas particulier de [6, Theorem 1.1] qui, d'une part, traite aussi le cas des groupes agissant sur des produits d'espaces symétriques de type non compact et d'espaces euclidiens et, d'autre part, décrit plus précisément la structure du convexe C_1.

Choisissons un point x du plat maximal de X stable par Z et identifions ce plat maximal à E de sorte que x soit le point 0 et qu'un élément z de Z agisse sur E par une translation de vecteur $\nu(z)$. Notons K le sous-groupe compact maximal de G stabilisateur de x. Soit (ξ, η) un couple de drapeaux de $\mathcal{P}$ en position générale. Si g est un élément de G tel que $(\xi, \eta) = g(\xi_0, \xi_0^\vee)$, on notera $F(\xi, \eta) = gE$ le plat maximal défini par ξ et η et, pour tout vecteur v dans E, $v^{\xi,\eta}$ le vecteur image de v à travers l'isomorphisme induit par g entre les directions des espaces affines E et $F(\xi, \eta)$. Notons que $F(\xi, \eta)$ ne dépend que de l'orbite de (ξ, η) dans G/Z pour l'action à droite du groupe de Weyl W.

Soit g un élément de G. Nous dirons que g est loxodromique si et seulement s'il est conjugué à un élément de $\nu^{-1}(E^{++})$. Alors g (resp. g^{-1}) possède un unique point fixe attracteur dans $\mathcal{P}$, qu'on note ξ_g^+ (resp. ξ_g^-). Dans le plat maximal $F_g = F\left(\xi_g^+, \xi_g^-\right)$, l'isométrie g agit par une translation de vecteur v_g. Si h est un élément de G tel que $h\left(\xi_g^+, \xi_g^-\right) = (\xi_0, \xi_0^\vee)$, on note $\lambda(g) = \nu(h^{-1}gh)$: c'est le vecteur de la translation $h^{-1}gh$ dans le plat maximal E ; en d'autres termes, on a $\lambda(g)^{\xi_g^+,\xi_g^-} = v_g$. D'après [1, 1.2], si Γ est un sous-groupe Zariski dense de G, le cône fermé engendré dans E^+ par l'ensemble des $\lambda(\gamma)$, où γ est un élément loxodromique de Γ, est convexe et d'intérieur non vide. On l'appelle cône limite de Γ et on le note ℓ_Γ.

Nous allons montrer que, si un convexe de X est stable par un groupe Zariski dense d'isométries, il contient beaucoup de plats maximaux de X.

Lemme 5.2. *Soient C une partie convexe fermée de X et g un élément loxodromique de G tel que $gC = C$. Alors, si y est un point de C, $F_g \cap C$ contient une géodésique D de direction $\mathbb{R}v_g$ telle que $d(y, D) \leq 2d(y, F_g)$.*

Démonstration. Soit z le point de F_g le plus proche de y. Pour tout entier $n \geq 1$, considérons le segment géodésique $D_n = [g^n y, g^{-n} y] \subset C$ et notons y_n son milieu. Comme $d(g^n y, g^n z) = d(g^{-n} y, g^{-n} z) = d(y, z)$ et que z est le milieu de $[g^n z, g^{-n} z]$, on a, par comparaison avec l'espace euclidien, $d(y_n, z) \leq d(y, z)$ et, donc, $d(y, D_n) \leq d(y, z) + d(z, D_n) \leq d(y, z) + d(y_n, z) \leq 2d(y, z)$. Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, D_n converge vers une géodésique satisfaisant aux conclusions du lemme.□

Utilisons ce résultat pour construire des géodésiques dans un plat donné :

Lemme 5.3. *Soient C une partie convexe fermée de X et (ξ, η) des drapeaux en position générale tels que $F(\xi, \eta) \cap C \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe un vecteur $v \neq 0$ dans E^+ et une suite (g_n) d'isométries loxodromiques de G telle que $\lambda(g_n)$ converge vers v en direction et que $\left(\xi_{g_n}^+, \xi_{g_n}^-\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\xi, \eta)$. Alors $F(\xi, \eta) \cap C$ contient une géodésique de direction $\mathbb{R}v^{\xi,\eta}$.*

Démonstration. Soit y un point de $F(\xi, \eta) \cap C$. D'après le lemme 5.2, pour tout n, l'ensemble $F_{g_n} \cap C$ contient une géodésique D_n de direction $\mathbb{R}v_{g_n}$ telle que $d(y, D_n) \leq 2d\left(y, F_{g_n}\right)$. A nouveau, quitte à extraire une sous-suite, D_n converge vers une géodésique qui convient.□

Rappelons que, pour ξ dans $\mathcal{P}$, on note $\mathcal{Z}_\xi$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ qui sont en position générale avec ξ. Soit C une partie convexe fermée de X. Posons

$$\Lambda_C = \{\xi \in \mathcal{P} | \exists \eta \in \mathcal{Z}_\xi \quad F(\xi, \eta) \subset C\}.$$

Notons que, par convexité, si ξ et η sont deux points de Λ_C en position générale, on a $F(\xi, \eta) \subset C$. La partie Λ_C est liée au stabilisateur de Γ dans G :

Lemme 5.4. *Soient C une partie convexe fermée de X et Γ un sous-groupe Zariski dense de G tel que $\Gamma C \subset C$. L'ensemble limite de Γ vérifie $\Lambda_\Gamma \subset \Lambda_C$.*

En particulier, si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de G et s'il existe une partie convexe fermée C de X telle que $\Gamma C \subset C$ et que $\Gamma \backslash C$ soit compact, on a

$$\bigcup_{(\xi,\eta)\in F_\Gamma} F(\xi, \eta) \subset C$$

et l'ensemble E_Γ de la section 4 est compact, si bien que le théorème 4.3 s'applique à Γ. Ce résultat est un cas particulier de [6, Corollary 1.4].

Démonstration. D'après [1, 3.6], il suffit de montrer que, pour tout élément loxodromique γ de Γ, on a $\xi_\gamma^+ \in \Lambda_C$. Soit donc un tel γ. D'après le lemme 5.2, l'ensemble $F_\gamma = F\left(\xi_\gamma^+, \xi_\gamma^-\right)$ contient un point y de C. Soit v un élément non nul du cône limite ℓ_Γ. D'après [1, 4.2], il existe une suite (γ_n) d'éléments loxodromiques de Γ telle que $\lambda(\gamma_n)$ converge en direction vers v et que $(\xi_{\gamma_n}^+, \xi_{\gamma_n}^-)$ converge vers $(\xi_\gamma^+, \xi_\gamma^-)$. D'après le lemme 5.3, l'ensemble $F_\gamma \cap C$ contient une géodésique de direction $\mathbb{R}v^{\xi_\gamma^+, \xi_\gamma^-}$. Comme le cône

$$\left\{ v^{\xi_\gamma^+, \xi_\gamma^-} \middle| \, v \in \ell_\Gamma \right\}$$

est d'intérieur non vide dans F_γ et que C est convexe, on a $F_\gamma \subset C$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Démonstration du théorème 5.1. D'après le lemme 5.4, on a $\Lambda_\Gamma \subset \Lambda_C$ et, en particulier, l'ensemble Λ_C est Zariski dense dans $\mathcal{P}$. Or, on sait que, si ξ et η sont deux points de Λ_C en position générale, on a $F(\xi, \eta) \subset C$. Comme l'ensemble $F(\xi, \eta)$ ne dépend que de la W-orbite de (ξ, η) dans $\mathcal{Z}$, l'ensemble Λ_C est W-stable au sens de la section 3. D'après la proposition 3.1, si $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) est la variété des drapeaux de G_1 (resp. de G_2), il existe une partie Λ_1 de $\mathcal{P}_1$ telle que $\Lambda_C = \Lambda_1 \times \mathcal{P}_2$.

Soit alors $y = (y_1, y_2)$ dans C. Il s'agit de montrer que l'on a $\{y_1\} \times X_2 \subset C$. Or, pour tous points ξ_2 en η_2 en position générale dans $\mathcal{P}_2$, il existe un point z_1 de X_1 tel que $\{z_1\} \times F(\xi_2, \eta_2) \subset C$. Par convexité, on a $\{y_1\} \times F(\xi_2, \eta_2) \subset C$, d'où le résultat. $\square$

Références

[1] Y. Benoist, Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geometric and functional analysis* **7** (1997), 1-47.

[2] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer Verlag, New York, 1991.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre III : Groupes de Lie, Hermann, Paris 1972.

[4] J.-P. Conze, Y. Guivarc'h, Densité d'orbites d'actions de groupes linéaires et propriétés d'équidistribution de marches aléatoires, *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, Springer, Berlin, 2002, 39-76.

[5] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago lectures in mathematics, Chicago, 1996.

[6] B. Kleiner, B. Leeb, Rigidity of invariant convex sets in symmetric spaces, *preprint,* 1998.

[7] G. Prasad, $\mathbb{R}$-regular elements in Zariski dense subgroups, *Oxford quaterly journal of mathematics* **45** (1994), 541-545.

[8] J. Tits, Reductive groups over local fields, *Proceedings of the symposium in pure mathematics of the american mathematical society* **33** (1977), 29-69.

[9] C. Yue, The ergodic theory of discrete isometry groups of manifolds of variable negative curvature, *Transactions of the American Mathematical Society* **348** (1996), 4965-5005.