Géométrie tropicale des éventails de Bergman associés aux matroïdes

Daria STEPANOVA

CNRS, Université de Montpellier 2

Grenoble, 24 février 2011

Plan

- Ultramétriques des matroïdes ;
- M-ultramétriques subdominantes ;
- Projection tropicale ;
- Les perspectives et autres résultats :
  - arbres philogénétiques ;
  - généralisations.

$M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde de rang r défini par ses bases
$\omega \in \mathbb{R}^E$ une fonction poids,

$$\forall B = \{b_1, ..., b_r\} \in \mathcal{B},\ \omega_B = \sum_{i=1}^{r} \omega_{b_1}$$

$$M_\omega := \{B \in \mathcal{B} \text{ t.q. } \omega_B = \min_{B' \in \mathcal{B}} \omega_{B'}\}$$

Definition

L'*éventail de Bergman* de M :

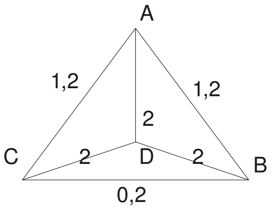
$$\tilde{\mathcal{B}}(M) := \{\omega \in \mathbb{R}^E, \forall e \in E, \exists B \in M_\omega \text{ t.q. } e \in B\}$$

$\omega \in \tilde{\mathcal{B}}(M)$ est appelé *M-ultramétrique*.

Proposition

On a l'équivalence entre

- (*i*) $\omega \in \tilde{\mathcal{B}}(M)$;
- (*ii*) Aucun circuit ne contient un unique élément de poids ω maximal ;
- (*iii*) Chaque élément de E est de poids ω minimal dans un cocircuit.



$$\omega, \omega' \in \mathbb{R}^E \ \omega \leq \omega' \text{ si } \omega_e \leq \omega'_e \ \forall e \in E$$

Proposition

Soit $\omega \in \mathbb{R}^E$

$$\exists!\, \omega^M \in \tilde{\mathcal{B}}(M) \text{ maximale, t.q. } \omega^M \leq \omega$$

ω^M est appelée la *M-ultramétrique subdominante* de ω.

Definition

REGLE BLEUE Si $e \in E$ n'est de poids ω minimal dans aucun cocircuit. On pose

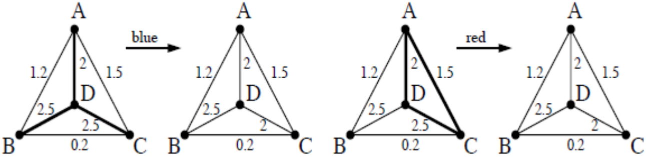
$$\omega_e := \max_{C^* \in \mathcal{C}_e^*} \min_{f \in C} \omega_f,$$

où $\mathcal{C}_e^*$ est l'ensemble des cocircuits contenant e.

REGLE ROUGE Si $e \in E$ est l'unique élément de poids ω maximal dans un circuit. On pose

$$\omega_e = \min_{C \in \mathcal{C}_e} \max_{f \in C - \{e\}} \omega_f,$$

où $\mathcal{C}_e$ est l'ensemble des circuits contenant e.


A
blue
A
A
red
A
1.2
2
1.5
D
2.5
2.5
B
0.2
C
1.2
2
1.5
D
2.5
2
B
0.2
C
1.2
2
1.5
D
2.5
2.5
B
0.2
C
1.2
2
1.5
D
2.5
2
B
0.2
C

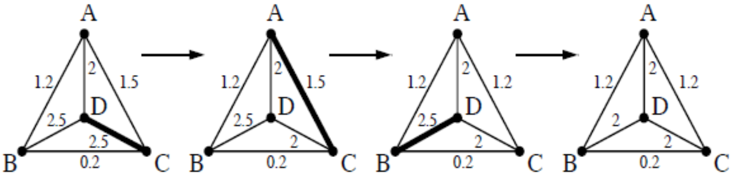
Theorem

$M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde ; $\omega \in \mathbb{R}^E$, $\forall e \in E$ on a

soit 1. *Les régles bleue et rouge appliquées à e changent son poids de ω_e à ω_e^M ;*

soit 2. *$\omega_e = \omega_e^M$.*

Donc l'ordre d'applications des régles n'étant pas important, on obtient la M-ultramétrique subdominante.


A
B
C
D
1.2
1.5
2
2.5
2.5
0.2
A
B
C
D
1.2
1.5
2
2.5
2
0.2
A
B
C
D
1.2
1.2
2
2.5
2
0.2
A
B
C
D
1.2
1.2
2
2
2
0.2

Proposition

Soit B une base de poids ω minimal.

(*i*) $\forall e \in B$, $\omega_e^M = \omega_e$.

(*ii*) $\forall e \notin B$, C_0 le circuit fondamental de B et e,

$$\omega_e^M = \max_{f \in C_0 - \{e\}} \omega_f$$

Definition

Le *semi-corps tropical* $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$:

- $a \oplus b = \max\{a, b\}$;
- $a \odot b = a + b$.

La topologie est définie par la métrique :

$$(x, y) \to |e^x - e^y|.$$

L'ensemble $\mathbb{T}^d$ est muni de la topologie produit.

Remarque

$\mathbb{TP}^{d-1} = \mathbb{R}^d/(1, 1, ..., 1)\mathbb{R}$, on le représente comme $\mathbb{R}^{d-1}$.

Definition

$S \subset \mathbb{R}^d$ est *tropicalement convexe* si

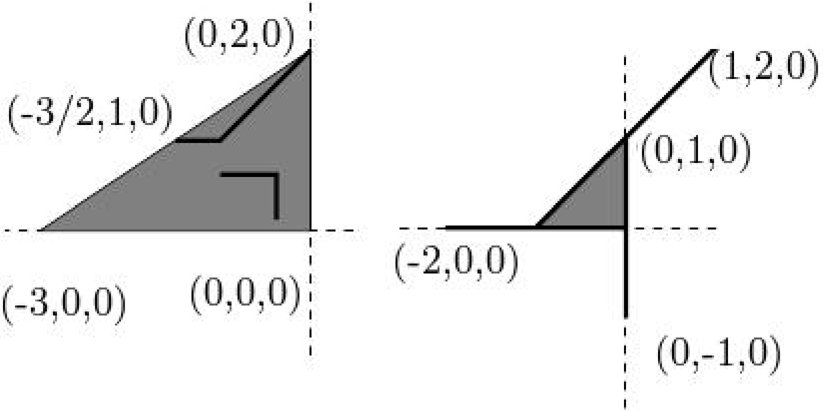
$$a \odot x \oplus b \odot y \in S \, \forall \, x, y \in S, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Definition

$V = \{v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{TP}^{d-1}$, l'*enveloppe convexe tropicale* de V :

$$tconv(V) := \{\bigoplus c_i \odot v_i / \; c_i \in \mathbb{R}\}.$$

Un *polytope tropical* est $P = tconv(V)$ avec $\sharp(V) < \infty$.


(0,2,0)
(-3/2,1,0)
(-3,0,0)
(0,0,0)
(1,2,0)
(0,1,0)
(-2,0,0)
(0,-1,0)

But : Montrer que pour $M = ([n], \mathcal{B})$ $\tilde{\mathcal{B}}(M)$ est un polytope tropical dans $\mathbb{TP}^{n-1}$.

$\forall F$ fermé de M, $v_F = \{v_F^1, ..., v_F^n\} \in \mathbb{TP}^{n-1}$
$v_F^i = -\infty$ si $i \in F$, 0 sinon

Proposition

$\forall M$ matroïde sur $[n]$

$$\tilde{\mathcal{B}}(M) = tconv(V_M = \{v_H / \, H \text{ est un hyperplan de } M\})$$

Definition

Pour $P \subset \mathbb{TP}^{n-1}$ polytope tropical, l'*application du point le plus proche tropicale*

$$\begin{array}{rccc} \pi_P : \mathbb{TP}^{n-1} & \to & P \\ x & \mapsto & \displaystyle\bigoplus_{v \text{ sommet de P}} \lambda_v \odot v \end{array}$$

où $\lambda_v = \max\limits_{v \text{ sommet de P}} \{\lambda \in \mathbb{R} / \lambda \odot v \oplus x = x\}$.

Proposition

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^n, \; \pi_{\tilde{\mathcal{B}}(M)}(\omega) = \omega^M$$

Arbres philogénétiques

Definition

Une *dissimilarité* :

$$\begin{array}{ccc} \delta : [n] \times [n] & \to & \mathbb{R} \\ \delta(i,j) = \delta(j,i) & \text{si} & i \neq j,\ 0,\ \text{sinon} \end{array}$$

Une *ultramétrique* est une dissimilarité telle que

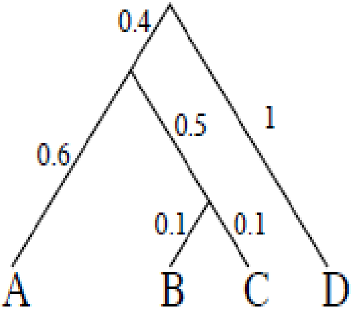
$$\forall i,j,k \in [n], \exists m,n,l \in \{i,j,k\} \text{ t.q.}$$
$$\sigma(m,n) \geq \sigma(m,l) \text{ et } \sigma(n,l) \geq \sigma(m,l).$$

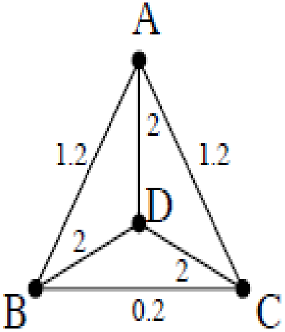
Theorem

Une dissimilarité δ est une ultramétrique ssi $\omega_\delta \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ est une $M(K_n)$-ultramétrique.

Theorem

Une dissimilarité $\delta : [n] \times [n] \to \mathbb{R}$ est une ultramétrique ssi c'est une fonction de distance sur un n-arbre équidistant.


0.4
0.6
0.5
1
0.1
0.1
A
B
C
D


A
2
1.2
1.2
D
2
2
B
0.2
C

.

Soient $\delta : [n] \times [n]$ une distance entre deux espéces, $d_T : [n] \times [n]$ une fonction de distance dans un n-arbre métrique avec une racine. La proximité entre δ et d_T est mesurée dans une métrique ℓ_∞ :

$$||\delta - d_T||_\infty = \max |\delta(i,j) - d_T(i,j)|.$$

Soit ω une fonction poids sur les arêtes de K_n, soit

$$\omega_U(x,y) = \min_{\text{chemins } P \text{ de } x \text{ à } y} \; \max_{\text{arêtes } e \text{ de } P} \omega(e)$$

ω_U est appelée l'*ultramétrique subdominante* de ω.

Remarque

$\omega_U = \omega^{M(K_n)}$.

On écrit $2\epsilon = ||\omega - \omega_U||_\infty = \min |\omega(e) - \omega_U(e)|$. On définit

$$\omega_U^{+\epsilon}(e) = \omega_U(e) + \epsilon \, \forall e \text{ arête de } K_n.$$

Theorem

Soit ω une dissimilarité sur $[n]$, une métrique ℓ_∞ optimale pour ω est l'ultramétrique $\omega_U^{+\epsilon}$.

Perspectives ?..

- Généraliser la notion de M-ultramétrique aux Δ-matroïdes (matroïdes de Coxeter ?)
- Le faire "tropicalement"

Merci de votre attention !

Questions ?