Packing d'arbres et de sous-graphes rigides couvrants

Joseph Cheriyan
Olivier Durand de Gevigney
Zoltán Szigeti

ANR Matroïdes
vendredi 23 mars 2012

Sommet connexité

Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est k-sommet-connexe si

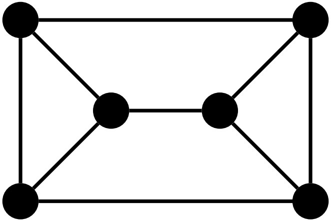
- pour tout $X \subseteq V$ tel que $|X| < k$, $G - X$ est connexe
- $|V| > k$.

Sommet connexité

Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est k-sommet-connexe si

- pour tout $X \subseteq V$ tel que $|X| < k$, $G - X$ est connexe
- $|V| > k$.



est 3-sommet-connexe.

Matroïde Graphique

Matroïde Graphique

Soit $G(V, E)$ un graphe connexe, $\mathcal{C}(G)$ est le matroïde défini sur E dont

- les indépendants sont les forêts et
- les bases sont les arbres couvrants.

Matroïde Graphique

Matroïde Graphique

Soit $G(V,E)$ un graphe connexe, $\mathcal{C}(G)$ est le matroïde défini sur E dont

- les indépendants sont les forêts et
- les bases sont les arbres couvrants.

Théorème (Tutte 1961)

Un graphe $G(V,E)$ contient ℓ arbres couvrants disjoints ssi, pour toute partition $\mathcal{P}$ de V, $e(\mathcal{P}) \geq \ell(|\mathcal{P}|-1)$.

Matroïde Graphique

Matroïde Graphique

Soit $G(V, E)$ un graphe connexe, $\mathcal{C}(G)$ est le matroïde défini sur E dont

- les indépendants sont les forêts et
- les bases sont les arbres couvrants.

Théorème (Tutte 1961)

Un graphe $G(V, E)$ contient ℓ arbres couvrants disjoints ssi, pour toute partition $\mathcal{P}$ de V, $e(\mathcal{P}) \geq \ell(|\mathcal{P}| - 1)$.

Corollaire

Tout graphe 2ℓ-sommet-connexe contient ℓ arbres couvrants disjoints.

Matroïde Graphique

Matroïde Graphique

Soit $G(V, E)$ un graphe connexe, $\mathcal{C}(G)$ est le matroïde défini sur E dont

- les indépendants sont les forêts et
- les bases sont les arbres couvrants.

Théorème (Tutte 1961)

Un graphe $G(V, E)$ contient ℓ arbres couvrants disjoints ssi, pour toute partition $\mathcal{P}$ de V, $e(\mathcal{P}) \geq \ell(|\mathcal{P}| - 1)$.

Corollaire

Tout graphe 2ℓ-sommet-connexe contient ℓ arbres couvrants disjoints.

Dans un graphe 2ℓ-sommet-connexe,

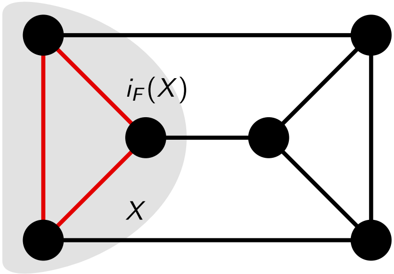
$$e(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \sum_{X \in \mathcal{P}} d(X) \geq \frac{1}{2} \sum_{X \in \mathcal{P}} 2\ell = \ell|\mathcal{P}|.$$

Matroïde de Rigidité

Matroïde de Rigidité (Crapo 1979)

Soit $G(V, E)$ un graphe, $\mathcal{R}(G)$ est le matroïde défini sur E dont

- les indépendants sont $\{F \subseteq E : i_F(X) \leq 2|X| - 3, \forall X \in V\}$,

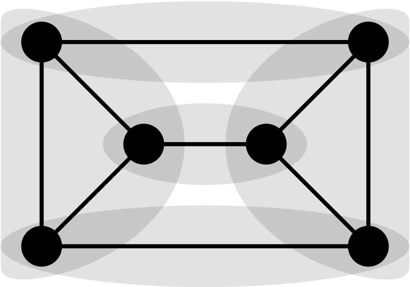


Matroïde de Rigidité

Matroïde de Rigidité (Crapo 1979)

Soit $G(V, E)$ un graphe, $\mathcal{R}(G)$ est le matroïde défini sur E dont

- les indépendants sont $\{F \subseteq E : i_F(X) \leq 2|X| - 3, \forall X \in V\}$,
- le rang est $r_{\mathcal{R}}(F) = \min\{\sum_{X \in \mathcal{H}} (2|X| - 3); \mathcal{H}$ collection de sous-ensembles de V qui couvre $F\}$. (Lovász-Yemini 1982)



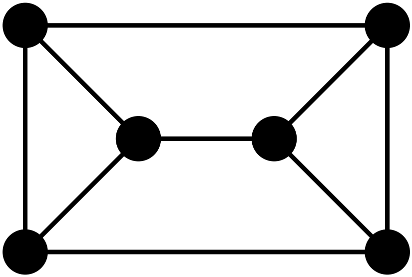
Matroïde de Rigidité

Matroïde de Rigidité (Crapo 1979)

Soit $G(V,E)$ un graphe, $\mathcal{R}(G)$ est le matroïde défini sur E dont

- les indépendants sont $\{F \subseteq E : i_F(X) \leq 2|X| - 3, \forall X \in V\}$,
- le rang est $r_{\mathcal{R}}(F) = \min\{\sum_{X \in \mathcal{H}}(2|X| - 3); \mathcal{H}$ collection de sous-ensembles de V qui couvre $F\}$. (Lovász-Yemini 1982)

G est dit rigide si $r_{\mathcal{R}}(E) = 2|V| - 3$. (Laman 1970)



Rigidité

Théorème (Lovász-Yemini 1982)

Tout graphe 6-sommet-connexe est rigide.

Rigidité

Théorème (Lovász-Yemini 1982)

Tout graphe 6-sommet-connexe est rigide.

Théorème (Jordán 2005)

Tout graphe $6k$-sommet-connexe contient k sous-graphes couvrants rigides arêtes-disjoints.

Résultat

Corollaire (Tutte 1961)

Tout graphe 2ℓ-sommet-connexe contient ℓ arbres convrants arêtes-disjoints.

Résultat

Corollaire (Tutte 1961)

Tout graphe 2ℓ-sommet-connexe contient ℓ arbres convrants arêtes-disjoints.

Théorème (Jordán 2005)

Tout graphe $6k$-sommet-connexe contient k sous-graphes couvrants rigides arêtes-disjoints.

Résultat

Corollaire (Tutte 1961)

Tout graphe 2ℓ-sommet-connexe contient ℓ arbres convrants arêtes-disjoints.

Théorème (Jordán 2005)

Tout graphe $6k$-sommet-connexe contient k sous-graphes couvrants rigides arêtes-disjoints.

Théorème (Cheriyan, Szigeti, DdG 2011)

Tout graphe $(6k + 2\ell)$-sommet-connexe contient k sous-graphes couvrants rigides et ℓ arbres couvrants arêtes-disjoints.

Somme de matroïdes

$\mathcal{M}_i = (S, r_i)$ matroïdes pour $i = 1, \ldots, p$.

Théorème (Edmonds Fulkerson 1965)

$\{F \subseteq S; \exists$ une partition $\{F_1, \ldots, F_p\}$ de F telle que chaque F_i est indépendant dans $\mathcal{M}_i\}$ forme les indépendants d'un matroïde $\mathcal{M}_\Sigma$

Somme de matroïdes

$\mathcal{M}_i = (S, r_i)$ matroïdes pour $i = 1, \ldots, p$.

Théorème (Edmonds Fulkerson 1965)

$\{F \subseteq S; \exists$ une partition $\{F_1, \ldots, F_p\}$ de F telle que chaque F_i est indépendant dans $\mathcal{M}_i\}$ forme les indépendants d'un matroïde $\mathcal{M}_\Sigma$ dont le rang est donné par

$$r_{\mathcal{M}_\Sigma}(F) = \min_{F' \subseteq F} |F \setminus F'| + \sum_i r_i(F').$$

Idée de la preuve

Idée de la preuve

- $\mathcal{M}_{k,\ell}(G) = k\mathcal{R}(G) + \ell\mathcal{C}(G)$,

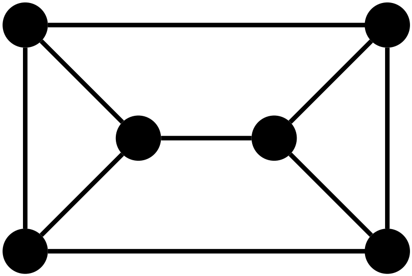
Idée de la preuve

- $\mathcal{M}_{k,\ell}(G) = k\mathcal{R}(G) + \ell\mathcal{C}(G)$,
- G contient k sous-graphes couvrants rigides et ℓ arbres couvrants arêtes-disjoints $\Leftrightarrow r_{\mathcal{M}_{k,\ell}}(E) \geq k(3|V|-2) + \ell(|V|-1)$.

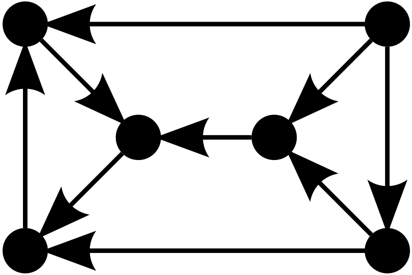
Idée de la preuve

- $\mathcal{M}_{k,\ell}(G) = k\mathcal{R}(G) + \ell\mathcal{C}(G)$,
- G contient k sous-graphes couvrants rigides et ℓ arbres couvrants arêtes-disjoints $\Leftrightarrow r_{\mathcal{M}_{k,\ell}}(E) \geq k(3|V|-2) + \ell(|V|-1)$.
- Un peu de technique ...

Orientation



Orientation



Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est :

- connexe si, $\forall u, v \in V$, il existe un chemin joignant u et v,

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est :

- connexe si, $\forall u, v \in V$, il existe un chemin joignant u et v,
- k arête-connexe si, $\forall F \subset E$ tel que $|F| < k$, $G - F$ est connexe,

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est :

- connexe si, $\forall u, v \in V$, il existe un chemin joignant u et v,
- k arête-connexe si, $\forall F \subset E$ tel que $|F| < k$, $G - F$ est connexe,
- k sommet-connexe si, $\forall X \subset V$ tel que $|X| < k$, $G - X$ est connexe.

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est :

- connexe si, $\forall u, v \in V$, il existe un chemin joignant u et v,
- k arête-connexe si, $\forall F \subset E$ tel que $|F| < k$, $G - F$ est connexe,
- k sommet-connexe si, $\forall X \subset V$ tel que $|X| < k$, $G - X$ est connexe.

Un graphe orienté $\overrightarrow{G} = (V, A)$ est :

- fortement-connexe si, $\forall (u, v) \in V^2$, il existe un chemin orienté allant de u à v

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est :

- connexe si, $\forall u, v \in V$, il existe un chemin joignant u et v,
- k arête-connexe si, $\forall F \subset E$ tel que $|F| < k$, $G - F$ est connexe,
- k sommet-connexe si, $\forall X \subset V$ tel que $|X| < k$, $G - X$ est connexe.

Un graphe orienté $\overrightarrow{G} = (V, A)$ est :

- fortement-connexe si, $\forall (u, v) \in V^2$, il existe un chemin orienté allant de u à v
- k arc-connexe si, $\forall F \subset E$ tel que $|F| < k$, $G - F$ est fortement-connexe,

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est :

- connexe si, $\forall u, v \in V$, il existe un chemin joignant u et v,
- k arête-connexe si, $\forall F \subset E$ tel que $|F| < k$, $G - F$ est connexe,
- k sommet-connexe si, $\forall X \subset V$ tel que $|X| < k$, $G - X$ est connexe.

Un graphe orienté $\overrightarrow{G} = (V, A)$ est :

- fortement-connexe si, $\forall (u, v) \in V^2$, il existe un chemin orienté allant de u à v
- k arc-connexe si, $\forall F \subset E$ tel que $|F| < k$, $G - F$ est fortement-connexe,
- k sommet-connexe si, $\forall X \subset V$ tel que $|X| < k$, $G - X$ est fortement-connexe.

Orientation k-arc-connexe

Théorème (Nash-Williams 1960)

Un graphe G admet une orientation k-arc-connexe ssi G est $2k$-arête-connexe.

Orientation k-sommet-connexe

Conjecture (Thomassen 1989)

Il existe une fonction f telle que tout graphe $f(k)$-sommet-connexe admet une orientation k-sommet-connexe.

Orientation k-sommet-connexe

Conjecture (Thomassen 1989)

Il existe une fonction f telle que tout graphe $f(k)$-sommet-connexe admet une orientation k-sommet-connexe.

Théorème (Jordán 2005)

Tout graphe 18-sommet-connexe admet une orientation 2-sommet-connexe (*i.e.* $f(2) \leq 18$).

Orientation k-sommet-connexe

Conjecture (Thomassen 1989)

Il existe une fonction f telle que tout graphe $f(k)$-sommet-connexe admet une orientation k-sommet-connexe.

Théorème (Jordán 2005)

Tout graphe 18-sommet-connexe admet une orientation 2-sommet-connexe (*i.e.* $f(2) \leq 18$).

Théorème (Cheriyan, Szigeti, DdG 2011)

Tout graphe 14-sommet-connexe admet une orientation 2-sommet-connexe (*i.e.* $f(2) \leq 14$).

Remarque

Tout graphe rigide est 2-sommet-connexe.

Remarque

Tout graphe rigide est 2-sommet-connexe.

Remarque

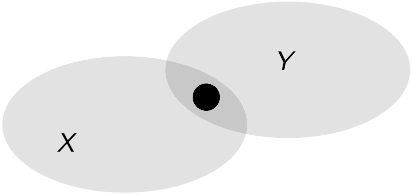
Tout graphe rigide est 2-sommet-connexe.

- Supposons que G n'est pas 2-sommet-connexe.

Remarque

Tout graphe rigide est 2-sommet-connexe.

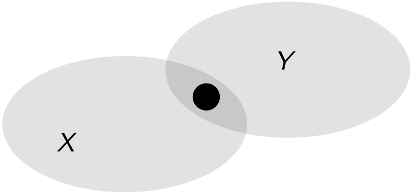
- Supposons que G n'est pas 2-sommet-connexe.
- Il existe une couverture $\{X, Y\}$ de E telle que $|X \cap Y| \leq 1$.



Remarque

Tout graphe rigide est 2-sommet-connexe.

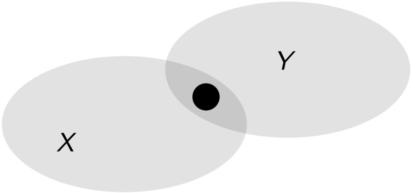
- Supposons que G n'est pas 2-sommet-connexe.
- Il existe une couverture $\{X, Y\}$ de E telle que $|X \cap Y| \leq 1$.
- $r_{\mathcal{R}}(E) \leq (2|X|-3)+(2|Y|-3) = 2|X \cup Y|+2|X \cap Y|-6 \leq 2|V|-4$.



Remarque

Tout graphe rigide est 2-sommet-connexe.

- Supposons que G n'est pas 2-sommet-connexe.
- Il existe une couverture $\{X, Y\}$ de E telle que $|X \cap Y| \leq 1$.
- $r_{\mathcal{R}}(E) \leq (2|X|-3)+(2|Y|-3) = 2|X \cup Y|+2|X \cap Y|-6 \leq 2|V|-4$.
- G n'est pas rigide.



Théorème (Berg Jordán 2005)

Tout graphe eulérien G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Théorème (Berg Jordán 2005)

Tout graphe eulérien G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Preuve de $f(2) \leq 14$

Théorème (Berg Jordán 2005)

Tout graphe eulérien G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Preuve de $f(2) \leq 14$

- Soit $G = (V, E)$ un graphe 14-sommet-connexe.

Théorème (Berg Jordán 2005)

Tout graphe eulérien G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Preuve de $f(2) \leq 14$

- Soit $G = (V, E)$ un graphe 14-sommet-connexe.
- $14 = 6k + 2\ell$ avec $k = 2$ et $\ell = 1$

Théorème (Berg Jordán 2005)

Tout graphe eulérien G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Preuve de $f(2) \leq 14$

- Soit $G = (V, E)$ un graphe 14-sommet-connexe.
- $14 = 6k + 2\ell$ avec $k = 2$ et $\ell = 1$ donc il existe R_1, R_2, A des sous-ensembles disjoints de E tels que (V, R_1) et (V, R_2) sont rigides et (V, A) est un arbre couvrant.

Théorème (Berg Jordán 2005)

Tout graphe eulérien G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Preuve de $f(2) \leq 14$

- Soit $G = (V, E)$ un graphe 14-sommet-connexe.
- $14 = 6k + 2\ell$ avec $k = 2$ et $\ell = 1$ donc il existe R_1, R_2, A des sous-ensembles disjoints de E tels que (V, R_1) et (V, R_2) sont rigides et (V, A) est un arbre couvrant.
- $G' = (V, R_1 \cup R_2)$ est 4-arête-connexe

Théorème (Berg Jordán 2005)

Tout graphe eulérien G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Preuve de $f(2) \leq 14$

- Soit $G = (V, E)$ un graphe 14-sommet-connexe.
- $14 = 6k + 2\ell$ avec $k = 2$ et $\ell = 1$ donc il existe R_1, R_2, A des sous-ensembles disjoints de E tels que (V, R_1) et (V, R_2) sont rigides et (V, A) est un arbre couvrant.
- $G' = (V, R_1 \cup R_2)$ est 4-arête-connexe et $G' - v$ est 2-arête-connexe pour tout $v \in V$.

Théorème (Berg Jordán 2005)

Tout graphe eulérien G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Preuve de $f(2) \leq 14$

- Soit $G = (V, E)$ un graphe 14-sommet-connexe.
- $14 = 6k + 2\ell$ avec $k = 2$ et $\ell = 1$ donc il existe R_1, R_2, A des sous-ensembles disjoints de E tels que (V, R_1) et (V, R_2) sont rigides et (V, A) est un arbre couvrant.
- $G' = (V, R_1 \cup R_2)$ est 4-arête-connexe et $G' - v$ est 2-arête-connexe pour tout $v \in V$.
- Ajouter à G' des arêtes de A pour obtenir un graphe eulérien.

Conjecture (Frank 1995)

Tout graphe G tel que

- G est 4-arête-connexe,
- $G - v$ est 2-arête-connexe, pour tout $v \in V$,

admet une orientation 2-sommet-connexe.

Cette conjecture impliquerait $f(2) = 4$.

Questions

- Généralisation à d'autres count matroids.

$$\mathcal{I} = \{F \subseteq E; i_F(X) \leq \alpha|X| - \beta\}.$$

Questions

- Généralisation à d'autres count matroids.

$$\mathcal{I} = \{F \subseteq E; i_F(X) \leq \alpha|X| - \beta\}.$$

- Trouver des « bons »matroïdes sur E dont les bases sont k-sommet-connexes.

Merci pour votre attention.