Multi-décompositions du polytope des bases d'un matroïde

J.L. Ramírez Alfonsín

(en collaboration avec V. Chatelain)

I3M, Université Montpellier 2

ANR TEOMATRO

Définitions

Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde sur $E = \{1, \ldots, n\}$ où $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ désigne la collection de bases.

L'ensemble $\mathcal{B}$ vérifie l'axiome d'échanges de bases :

si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $e \in B_1 \setminus B_2$ alors il existe $f \in B_2 \setminus B_1$ tel que $(B_1 - e) + f \in \mathcal{B}$.

Soit $P(M)$ le polytope des bases de M définie comme l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidents des bases de M, c'est-à-dire,

$$P(M) := conv\left\{\sum_{i\in B} e_i : B \in \mathcal{B}(M)\right\}$$

où e_i désigne le vecteur de base standard de $\mathbb{R}^n$.

Remarques :

• $P(M)$ est un polytope de dimension au plus $n-1$

• $P(M)$ est une face du polytope des indépendants de M obtenu comme l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidents des ensembles indépendants de M.

Soit $P(M)$ le polytope des bases de M définie comme l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidents des bases de M, c'est-à-dire,

$$P(M) := conv\left\{\sum_{i\in B} e_i : B \in \mathcal{B}(M)\right\}$$

où e_i désigne le vecteur de base standard de $\mathbb{R}^n$.

Remarques :

• $P(M)$ est un polytope de dimension au plus $n-1$

• $P(M)$ est une face du polytope des indépendants de M obtenu comme l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidents des ensembles indépendants de M.

Une décomposition de $P(M)$ est une décomposition de la forme

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$$

où chaque $P(M_i)$ est également un polytope de base d'un matroïde, pour un certain M_i, et pour chaque $1 \leq i \neq j \leq t$, l'intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ est une face de $P(M_i)$ et de $P(M_j)$.

$P(M)$ est dis t-décomposable s'il admet une décomposition avec $t \geq 2$, et indécomposable sinon.

Une décomposition est appelée séparation par hyperplan si $t = 2$.

Une décomposition de $P(M)$ est une décomposition de la forme

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$$

où chaque $P(M_i)$ est également un polytope de base d'un matroïde, pour un certain M_i, et pour chaque $1 \leq i \neq j \leq t$, l'intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ est une face de $P(M_i)$ et de $P(M_j)$.

$P(M)$ est dis t-décomposable s'il admet une décomposition avec $t \geq 2$, et indécomposable sinon.

Une décomposition est appelée séparation par hyperplan si $t = 2$.

Applications

(Lafforge) Méthode générale de *compactification* et a montré qu'une telle compactification existe si le polyèdre de bases est indécomposable.

(Ardila, Fink et Rincon) Existe de fonctions matroïde avec une comportament de *valuation* sur la décomposition de polytope des bases.

Résultats connus

Théorème (Kapranov 1993) Toute décomposition d'un matroïde de rang 2 peut être obtenu par une suite de séparations par hyperplans.

Théorème (Billera, Jia et Reiner 2009)

• 5 matroïdes de rang 3 à 6 éléments tels que chaque polytope des bases est indécomposable.

• Un matroïde de rang 3 à 6 éléments tels que ses polytope des bases est 3-décomposable et qui n'est peut être pas obtenu par une suite de séparations par hyperplans.

Soit (E_1, E_2) une partition de E, c'est-à-dire, $E = E_1 \cup E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Soit $r_i > 1$, $i = 1, 2$ le rang de $M|_{E_i}$.

(E_1, E_2) est une bonne partition s'il existe des entières $0 < a_1 < r_1$ et $0 < a_2 < r_2$ vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) $r_1 + r_2 = r + a_1 + a_2$ et

(P2) pour tout $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ avec $|X| \leq r_1 - a_1$ et
pour tout $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ avec $|Y| \leq r_2 - a_2$
on a $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

Lemme Soit (E_1, E_2) une bonne partition de E. Soit

$$\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1 - a_1\}$$

$$\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq r_2 - a_2\}$$

où r_i est le rang de $M|_{E_i}$, $i = 1, 2$ et a_1, a_2 vérifiant les propriétés (P1) et (P2).

Alors, $\mathcal{B}(M_1)$ and $\mathcal{B}(M_2)$ sont des collections des bases de deux matroïdes, disons M_1 et M_2.

Théorème (Chatelain et R.A. 2011) Soit $M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde et soit (E_1, E_2) une bonne partition de E.

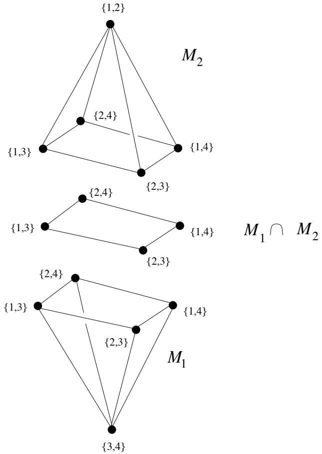
Alors, $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ est une séparation par hyperplan où M_1 et M_2 sont les matroïdes du lemme precédent.

Corollaire (Chatelain et R.A. 2011) Soit $n \geq r + 2 \geq 4$ de entières et soit $h(U_{n,r})$ le nombre de séparation par hyperplans différentes de $P(U_{n,r})$.

Alors,

$$h(U_{n,r}) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

Exemple. On considère $U_{4,2}$. Alors, $E_1 = \{1,2\}$ and $E_2 = \{3,4\}$ est une bonne partition avec $a_1 = a_2 = 1$.
$\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$,
$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ et
$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$.



Théorème (Chatelain et R.A. 2011) Soit $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ et $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ deux matroïdes.

Alors, $P(M_1 \oplus M_2)$ admet une séparation par hyperplan si et seulement si soit $P(M_1)$ ou bien $P(M_2)$ admet une séparation par hyperplan.

Multi-décompositions

Question : Peut-on trouver une t-décomposition en appliquant une suite de séparation par hyperplans ?

Attention ! L'intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ doit être un matroïde pour tout i, j

Exemple :

$\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$

$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$

mais

$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ n'est pas un matroïde.

Multi-décompositions

Question : Peut-on trouver une t-décomposition en appliquant une suite de séparation par hyperplans ?

Attention ! L'intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ doit être un matroïde pour tout i, j

Exemple :
$\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$
$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$
mais
$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ n'est pas un matroïde.

Multi-décompositions

Question : Peut-on trouver une t-décomposition en appliquant une suite de séparation par hyperplans ?

Attention ! L'intersection $P(M_i) \cap P(M_j)$ doit être un matroïde pour tout i, j

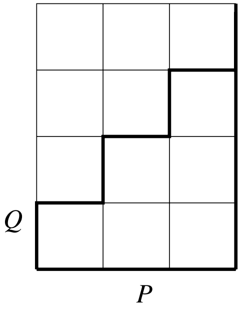
Exemple :
$\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$
$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$
mais
$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ n'est pas un matroïde.

Matroïdes chemin du réseau

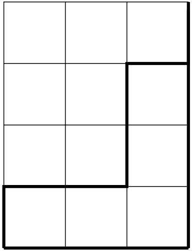
Soient $m = 3$ and $r = 4$ et soit $M[Q, P]$ le matroïde transversal sur $\{1, \ldots, 7\}$ avec comme présentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, 4\})$ où $N_1 = [1, 2, 3, 4]$, $N_2 = [3, 4, 5]$, $N_3 = [5, 6]$ et $N_4 = [7]$.

Matroïdes chemin du réseau

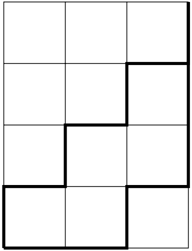
Soient $m = 3$ and $r = 4$ et soit $M[Q, P]$ le matroïde transversal sur $\{1, \ldots, 7\}$ avec comme présentation $(N_i : i \in \{1, \ldots, 4\})$ où $N_1 = [1, 2, 3, 4]$, $N_2 = [3, 4, 5]$, $N_3 = [5, 6]$ et $N_4 = [7]$.



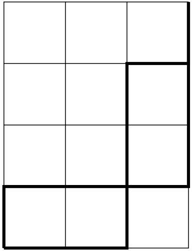
Exemple. Matroïde transversaux (a) M_1, (b) M_2 et (c) $M_1 \cap M_2$.



(a)

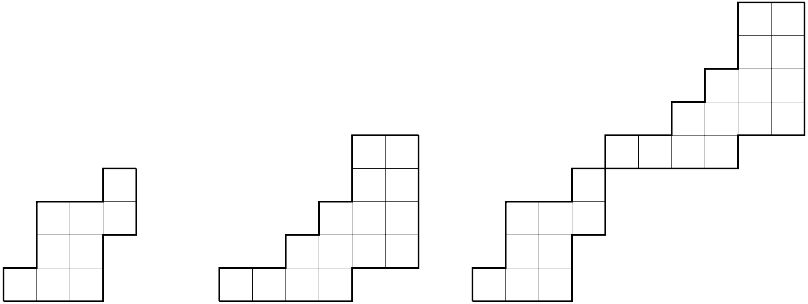


(b)



(c)

Remarque : La classe des matroïdes chemin du réseau est fermé par l'intersection et par la somme direct.



Soit $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ une partition et soit $r_i = r(M|_{E_i}) > 1$, $i = 1, \ldots, t$.

$E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ est une bonne partition s'il existe des entières $0 < a_i < r_i$ vérifiant les propriétés suivantes :

(P1') $r = \sum_{i=1}^{t} r_i$ et

(P2') Pour tout $2 \leq j \leq k \leq t$

$$X \in \mathcal{I}(M|_{E_1 \cup \cdots \cup E_j}) \text{ avec } |X| \leq \sum_{i=1}^{j} r_i,$$

$$Y \in \mathcal{I}(M|_{E_{j+1} \cup \cdots \cup E_k}) \text{ avec } |Y| \leq \sum_{i=j+1}^{k} r_i,$$

$$Z \in \mathcal{I}(M|_{E_{k+1} \cup \cdots \cup E_t}) \text{ avec } |Z| \leq \sum_{i=k+1}^{t} r_i$$

on a $X \cup Y \cup Z \in \mathcal{I}(M)$.

Lemme Soit $\bigcup_{i=1}^{t} E_i$ une bonne partition. Soit
$\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1\}$
et pour chaque $j = 2, \ldots, t$

$$\mathcal{B}(M_j) = \left\{B \in \mathcal{B}(M) : \begin{array}{l} |B \cap E_1| \geq r_1 \\ \vdots \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{j-1} r_i \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{j} E_i| \leq \sum_{i=1}^{j} r_i \end{array}\right\}$$

où $r_i = r(M|_{E_i})$, $i = 1, \ldots, t$ et a_i vérifiant les propriétés (P1') et (P2'). Alors, $\mathcal{B}(M_i)$ est une collections des bases d'un matroïde pour chaque i.

Démonstration Par induction sur j.

Lemme Soit $\bigcup_{i=1}^{t} E_i$ une bonne partition. Soit
$\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1\}$
et pour chaque $j = 2, \ldots, t$

$$\mathcal{B}(M_j) \;\; = \left\{ B \in \mathcal{B}(M) : \;\; \begin{array}{l} |B \cap E_1| \geq r_1 \\ \vdots \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{j-1} r_i \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{j} E_i| \leq \sum_{i=1}^{j} r_i \end{array} \right\}$$

où $r_i = r(M|_{E_i})$, $i = 1, \ldots, t$ et a_i vérifiant les propriétés (P1') et (P2'). Alors, $\mathcal{B}(M_i)$ est une collections des bases d'un matroïde pour chaque i.
Démonstration Par induction sur j.

Théorème (Chatelain et R.A. 2012) Soit $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ une bonne partition. Alors, $P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$ est une t-décomposition où M_i est le matroïde du lemme precédent.

Démonstration (idée)
$\mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{B}(M_j)$ est bien la collection de bases d'un matroïde

Théorème (Chatelain et R.A. 2012) Soit $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ une bonne partition. Alors, $P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$ est une t-décomposition où M_i est le matroïde du lemme precédent.

Démonstration (idée)
$\mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{B}(M_j)$ est bien la collection de bases d'un matroïde

$$\mathcal{B}(M_j) \cap \mathcal{B}(M_j) = \{B \in \mathcal{B}(M) : \begin{array}{l} |B \cap E_1| \geq r_1 \\ \vdots \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{j-1} r_i \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{j} E_i| = \sum_{i=1}^{j} r_i \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{j+1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{j+1} r_i \\ \vdots \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{k-1} r_i \\ |B \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i| \leq \sum_{i=1}^{k} r_i \end{array} \}$$

$$
\mathcal{B}(M_j) \cap \mathcal{B}(M_j) = \{ B \in \mathcal{B}(M) : \begin{array}{l}
|B \cap E_1| \geq r_1 \\
\quad \vdots \\
|B \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{j-1} r_i \\
|B \cap \bigcup_{i=1}^{j} E_i| = \sum_{i=1}^{j} r_i \\
|B \cap \bigcup_{i=1}^{j+1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{j+1} r_i \\
\quad \vdots \\
|B \cap \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{k-1} r_i \\
|B \cap \bigcup_{i=1}^{k} E_i| \leq \sum_{i=1}^{k} r_i \, \}
\end{array}
$$

Théorème (Chatelain et R.A. 2012) Soit $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ et $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ deux matroïdes où $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Si $P(M_1)$ (ou bien $P(M_2)$) est t-décomposable alors $P(M_1 \oplus M_2)$ est t-décomposable.