Géométrie tropicale des Delta-matroïdes

Daria STEPANOVA

CNRS, Université de Montpellier 2

Montpellier, 22 mars 2012

Plan

- Notions de base sur les matroïdes ;
- Delta-matroïdes et matroïdes symétriques ;
- Espaces isotropiques ;
- Les perspectives et autres résultats.

Definition

Un *matroïde* $\mathcal{M} := (E, \mathcal{I})$: $|E| < \infty$ et $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(E)$ t.q. :

M1 $\varnothing \in \mathcal{I}$;

M2 Si $I_1 \in \mathcal{I}$ et $I_2 \subset I_1$, alors $I_2 \in \mathcal{I}$;

M3 Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ et $|I_1| < |I_2|$, alors $\exists e \in I_2 \backslash I_1$ t.q. $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Definition

Un *matroïde* $\mathcal{M} := (E, \mathcal{C})$: $|E| < \infty$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ t.q. :

M1 $\varnothing \notin \mathcal{C}$;

M2 Si C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$ et $C_2 \subset C_1$, alors $C_1 = C_2$;

M3 Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ et $e \in C_1 \cap C_2$, alors $\exists C_3 \in \mathcal{C}$ t.q. $C_3 \subset \{C_1 \cup C_2\} - \{e\}$.

Definition

Une *base* d'un matroïde est un indépendant maximal pour l'inclusion.

Proposition

Si $\mathcal{B} = \{\text{bases de } \mathcal{M}\}$.

- $\mathcal{B} \neq \varnothing$;
- $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \backslash B_2 \Rightarrow \exists y \in B_2 \backslash (B_1 \backslash x)$ t.q. $B_1 \backslash x \cup y \in \mathcal{B}$.

Definition

Soient B une base et $x \notin B$, $y \in B$

- $\exists!\ C_B^x \in \mathcal{C}$ t.q. $C \subset B \cup x$ et $x \in C_B^x$. C_B^x est le *circuit fondamental* de B et de x.
- $\exists!\ C_B^{y*}$ t.q. $C_B^{y*} \cap B - y = \varnothing$ et $y \in C_B^{y*}$. C_B^{y*} est le *cocircuit fondamental* de B et de y.

Proposition

B une base de $\mathcal{M}$, $x \notin B$, $y \in B$ on a l'équivalence entre :

(*i*) $B \cup x - \{y\}$ est une base ;

(*ii*) $y \in C_B^x$;

(*iii*) $x \in C_B^{y*}$.

Definition

Un Δ-*matroïde* $M = (E, \mathcal{B})$: $|E| < \infty$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ tels que :

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \text{ et } \forall a \in A \Delta B, \exists b \in A \Delta B \text{ tel que } A \Delta \{a, b\} \in \mathcal{B}$$

Un Δ-matroïde M est dit *pair* si $b \neq a$.

$$[n] = \{1, ..., n\},\ [n]^* = \{1^*, ..., n^*\},\ \mathbf{2n} = [n] \cup [n]^*$$

$J \subseteq \mathbf{2n}$

- est *admissible* si $J \cap J^* = \varnothing$;
- est *transversal* si J est admissible et $|J| = n$;

Soit $S \subseteq [n]$, *l'extension* de S est $\bar{S} := S \cup ([n] \setminus S)^*$.

Definition

Soit $M = ([n], \mathcal{B})$ un Δ-matroïde, le *matroïde symétrique* associé à M est $\bar{M} = (\mathbf{2n}, \bar{\mathcal{B}})$, où $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{B} / B \in \mathcal{B}\}$.

Definition

Le *semi-corps tropical* $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$:

- $a \oplus b = \max\{a, b\}$;
- $a \odot b = a + b$.

Definition

Soit k un corps valué algébriquement clos. Soit $P = \sum_{a_1,\dots,a_n} f_{a_1,\dots,a_n} X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \in k[X_1, \dots, X_n]$. La *tropicalisation* de P est

$$trop(P) := \bigoplus_{a_1,\dots,a_n} val(f_{a_1,\dots,a_n}) \odot x_1^{\odot a_1} \odot \cdots \odot x_n^{\odot a_n}$$

$n \in \mathbb{N}$
K un corps algébriquement clos
$car(K) = 0$
V un espace vectoriel sur K
$dim(V) = 2n$
Fixons une base de V $e_1, e_2, ..., e_n, e_{1^*}, e_{2^*}, ..., e_{n^*}$.

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{i^*} + \sum_{i=1}^{n} x_{i^*} y_i$$

Une forme bilinéaire symétrique

Definition

Un sous-espace vectoriel $U \subseteq V$ est *(totalement) isotrope* si $\forall$ $u, v \in U,\ Q(u, v) = 0$

Soit U un sous-espace isotrope. On lui associe un vecteur de Wick $w \in \mathbb{P}^{\mathcal{P}(n)}$

$$w_{[n]\setminus S} = \begin{cases} Pf(A_S) \text{ si } |S| \text{ est pair,} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$w_{Sabcd} \cdot w_S + w_{Sab} \cdot w_{Scd} + w_{Sac} \cdot w_{Sbd} + w_{Sad} \cdot w_{Sbc};$$
$$w_{Sabc} \cdot w_{Sd} + w_{Sabd} \cdot w_{Sc} + w_{Sacd} \cdot w_{Sb} + w_{Sbcd} \cdot w_{Sa})$$

Example

$n = 4,\ U \subset \mathbb{C}^8$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1^* & 2^* & 3^* & 4^* \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$|w_{134}| = Pf(A_{2\Delta 3}) = Pf(A_{23}) = 3;$
$|w_4| = Pf(A_{124\Delta 3}) = Pf(A_{1234}) = 1 \cdot (-5) - (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 1,$
$|w_{24}| = 0.$

Definition

Un vecteur $p = (p_S) \in \mathbb{T}^{\mathcal{P}(n)}$ est appelé *vecteur de Wick tropical* s'il vérifie les relations de Wick tropicales, donc si

$$\max_{i \in S \Delta T} (p_{S \Delta i} + p_{T \Delta i})$$

est atteint au moins 2 fois.

Definition

Le *support* d'un vecteur $p = (p_S) \in \mathbb{T}^{\mathcal{P}(n)}$ est la collection

$$supp(p) := S \subseteq [n]. p_S \neq -\infty$$

$p = (p_S) \in \mathbb{T}^{\mathcal{P}(n)}$

$$\Gamma_p := convex\{e_S . S \in supp(p)\}$$

$\mathcal{D}_p$ est la subdivision de Γ_p induite par p.

Theorem

Soit $p = (p_S) \in \mathbb{T}^{\mathcal{P}(n)}$, p est un vecteur de Wick tropical si et seulement si $\mathcal{D}_p$ est une subdivision d'un polytope d'un Δ-matroïde pair en polytopes de Δ-matroïdes pairs.

Remarque

Une généralisation à d'autres matroïdes de Coxeter est envisageable...

$$\mathbb{Z}[p] = \mathbb{Z}[p_{i_1 i_2 \dots i_d} / 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n]$$

L'*idéal de Plücker* $I_{d,n}$ est l'idéal homogène, premier dans $\mathbb{Z}[p]$ composé de toutes les relations des déterminants des sous-matrices de taille $d \times d$ d'une matrice de taille $d \times n$.

Definition

La variété projective de $I_{d,n}$ est la *grassmanienne* $G_{d,n}$, la *grassmanienne tropicale* $\mathcal{G}_{d,n}$ est la variété tropicale de la tropicalisation de l'idéal de Plücker.

$$I^{\Delta}_{d,n} = \begin{array}{c} \langle \sum_{i=1}^{s} (-1)^i \omega_{\tau_i \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r} \cdot \omega_{\tau_1 \tau_2 \cdots \hat{\tau}_i \cdots \tau_r} \\ + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \omega_{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \hat{\sigma}_j} \cdots \sigma_r \cdot \omega_{\sigma_j \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s} \rangle \end{array}$$

avec σ and τ in $\mathcal{P}(n)$. C'est l'ensemble de tous les vecteurs de Wick tropicaux (Δ-Dressian).

L'étude de la variété qui lui est associée, la Δ-grassmanienne tropicale (tropical spinor variety), permettrait de résoudre la représentabilité des Δ-matroïdes.

$M = (E, \mathcal{B})$ un matroïde de rang r défini par ses bases
$\omega \in \mathbb{R}^E$ une fonction poids,

$$\forall B = \{b_1, ..., b_r\} \in \mathcal{B},\ \omega_B = \sum_{i=1}^{r} \omega_{b_1}$$

$$M_\omega := \{B \in \mathcal{B} \text{ t.q. } \omega_B = \min_{B' \in \mathcal{B}} \omega_{B'}\}$$

L'*éventail de Bergman* de M :

$$\tilde{\mathcal{B}}(M) := \{\omega \in \mathbb{R}^E, \forall e \in E, \exists B \in M_\omega \text{ t.q. } e \in B\}$$

BUT : Calcul de l'*éventail de Bergman* d'un Δ-matroïde.

Merci de votre attention !

Questions ?