

§1. Modules (de courbes)

def S-schéma (ou variété), $g \in \mathbb{N}$ (en général ≥ 2)

S-courbe de genre g = ~~une~~ S-schéma $\Gamma \xrightarrow{f} S$ propre et lisse, à fibres géom. irréductibles de dim 1 et de genre g .

Pour S fixé elles forment une catégorie $\mathcal{C}_g(S)$ (morphismes = iso-morphismes), et on a des foncteurs de $\mathcal{C}_g$ de base.

$$(\varphi: S' \rightarrow S) \mapsto (\varphi^*: \mathcal{C}_g(S) \rightarrow \mathcal{C}_g(S'))$$

$$\mathcal{M}_g(S) = \text{Isom}(\mathcal{C}_g(S)) / \sim$$

def un ~~espace~~^{schéma} de modules fin pour les courbes de genre g est un schéma/variété M qui représente $\mathcal{M}_g$.

Rem ça n'existe pas.

Si ça existait on aurait une courbe universelle $\Gamma_u \rightarrow M$ t.q. toute S-courbe soit $\simeq \varphi^* \Gamma_u$, pour un unique $\varphi: S \rightarrow M$.

En particulier (avec $S = \text{Spec } \mathbb{C}$): $\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) \hookrightarrow M(\mathbb{C})$

Si M est un schéma, on note h_M le foncteur qu'il représente :

$$h_M(S) = \text{Hom}(S, M).$$

def un schéma de modules grossier pour $\mathcal{M}_g$ est un schéma M + morphisme $\mathcal{M}_g \rightarrow h_M$ vérifiant:

(i) $\forall \Omega \text{ corps alg}^k \text{ clor}, \varphi: \mathcal{M}_g(\Omega) \leftrightarrow M(\Omega)$

(ii) tout morphisme $\mathcal{M}_g \rightarrow h_N$ (N schéma) se factorise de façon unique par φ .

ex $g=1$: l'invariant modulaire j donne un morphisme $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1}$ qui fait de $\mathbb{A}^1$ un schéma de modules grossier pour les courbes de genre 1 (et pour les c. elliptiques)

②

Stratégie remplacer $\mathcal{H}_g$ par un faisceau $\mathcal{H}_g$ de courbes plongées dans un projectif (pas n'importe comment); on obtiendra un schéma de modules fon; ensuite on passe au quotient par le changement de plongement >>

§2. Schéma de Hilbert

S schéma, $n \geq 1$,

$$\underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^n}(S) := \left\{ \text{sous-schéma fermés de } \mathbb{P}_S^n = \mathbb{P}^n \times S, \right. \\ \left. \text{plats sur } S \right\}$$

$\mathcal{H}_g$ = "familles de sous-schéma fermés de $\mathbb{P}^n$, paramétrées par S "
 ça donne un foncteur $\underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^n} : (\text{Sch})^S \rightarrow (\text{Ens})$

[Th] (Grothendieck) $\underline{\text{Hilb}}_{\mathbb{P}^n}$ est représentable par un schéma $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ somme (infinie) de schémas quasi-projectifs.

Rappel: si $X \subset \mathbb{P}_k^n$ son polynôme de Hilbert $\Phi_X \in \mathbb{Q}[t]$ (relatif au faisceau ample $\mathcal{O}(1)$) est caractérisé par

$$\Phi_{X/k}(m) = \begin{cases} \chi(X, \mathcal{O}_X(m)) & (m \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ h^0(X, \mathcal{O}_X(m)) & (m \gg 0) \end{cases}$$

Si $X \subset \mathbb{P}^n \times S$ est plat sur S alors la fit $g \mapsto \Phi_{X_g/K(g)}$ est localement constante, de sorte que $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}$ est somme de sous-schémas (ouverts et fermés) $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\Phi$, $\Phi \in \mathbb{Q}[t]$.

[Th] (Grothendieck) chaque $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^\Phi$ est quasi-projectif.

§3. Courbes tricanoniques

On s'intéresse au faisceau $\mathcal{H}_g$ pour $g \geq 2$ fixé.

Rappels: $C \xrightarrow{f} S$ courbe de genre g :

- le faisceau $\Omega_{C/S}^n$ des diff relatives est inversible ample, de degré $3g-2$ dans les fibres

Si $S = \text{Spec}(k)$ (corps), $\chi(C, \Omega_{C/k}^{\otimes m}) = m(2g-2) + 1 - g$

$h^0(C, \Omega_{C/k}^{\otimes m})$ dès que $m \geq 2$

Donc $m \geq 2$. Pour $m \geq 3$, $\Omega^{\otimes m}$ est très ample et définit un plongement « tricanonique »

$$C \xrightarrow{f_C} \mathbb{P}(\Gamma(C, \Omega^{\otimes 3})) \simeq \mathbb{P}^{5g-6}$$

Version relative, pour $C \xrightarrow{f} S$ quelconque:

$\mathcal{E}_{C/S} := f_* \Omega_{C/S}^{\otimes 3}$ est local libre de rang $5g-5$ sur S

il commute à tout ch^v de base: $\forall S' \xrightarrow{\pi} S, C' = C \times_S S',$
 $\downarrow f'$
 S'

$$\pi^* \mathcal{E}_{C/S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{C'/S'}$$

En particulier, si $s \in S(k)$ (k corps), $\mathcal{E}(s)$ s'identifie à $\Gamma(C_s, \Omega_{C_s/k}^{\otimes 3})$

On a un plongement tricanonique $f_{C/S}: C \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_{C/S})$

(pas dans Mumford) localement $\simeq \mathbb{P}_S^{5g-6}$

Définition: $\tilde{\mathcal{E}}_g(S) = \text{cat des couples } (C \xrightarrow{f} S, \sigma) \text{ où } C \text{ courbe de genre } g,$
 et $\sigma: \mathbb{P}(\mathcal{E}_{C/S}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{5g-6}$ (« base tricanonique »).
 $\tilde{\mathcal{H}}_g(S) = \text{famille d'isom. d'objets de } \tilde{\mathcal{E}}_g(S) \}$, isom respectant les bases

Requie pas d'automorphismes!

On a un morphisme d'oubli $\tilde{\mathcal{H}}_g \rightarrow \mathcal{H}_g$
 et un morphisme évident $\psi: \tilde{\mathcal{H}}_g \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}$

avec $\Phi(t) = (6t-1)(g-1)$ $(C, \sigma) \mapsto (\sigma \circ f_{C/S})(C) \subset \mathbb{P}_S^{5g-6}$

Prop. ψ est injectif; son image H est formée des $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{P}_S^{5g-6}$ (de Hilbert Φ)
 vérifiant: (i) $\Gamma \rightarrow S$ est une courbe lisse de genre g ,
 (ii) $\mathcal{O}_\Gamma(1) \simeq \Omega_{\Gamma/S}^3 \otimes h^* L$ pour un L inversible sur S
 (iii) « engendrent » $\mathbb{P}$: $\forall s \in S, (k)$, k corps, la courbe $\Gamma_s \subset \mathbb{P}_k^{5g-6}$ n'est pas contenue dans un hyperplan
 (« courbes tricanoniques dans $\mathbb{P}^{5g-6}$ ») ■

Points clés :

(3 bis)

l'image est $\subset H$. (i) et (iii) sont faciles.

$$(ii) \quad C \xrightarrow{f_{C/S}} \mathbb{P}(\mathcal{E}_{C/S}^{\otimes 5}) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}(\mathcal{F}), \quad \mathcal{F} = \mathcal{O}_S^{5g-5}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ f \swarrow & & \searrow q \\ & S & \end{array} \quad (\mathcal{E}, \mathcal{F} \text{ local' libres})$$

Fait : tout morphisme $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F})$ se déduit d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur S et d'un isomorphisme $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{F}$. //

• Soit $\Gamma \in H$, comment retrouver (C, σ) :

on prend évidemment $C = \Gamma \hookrightarrow \mathbb{P}^{5g-6} = \mathbb{P}(\mathcal{F})$.

$$\begin{array}{ccc} & & \\ f \swarrow & & \searrow q \\ & S & \end{array}$$

la cond. (ii) entraîne que $f_* \mathcal{O}_C(1) \simeq \mathcal{E}_{C/S} \otimes \mathcal{L}$ donc est loc' libre de rang $5g-5$

la cond (iii) assure que le morphisme de $\mathcal{O}_S$ -modules (loc' libres de même rang)

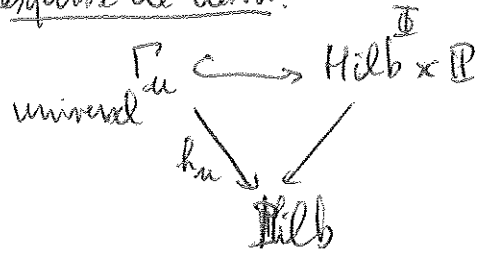
$$q_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) \xrightarrow{\sim} f_* \mathcal{O}_C(1) \quad (\text{restriction à } C)$$

est injectif dans les fibres aux pts de S . $\simeq \mathcal{E}_{C/S} \otimes \mathcal{L}$

C'est donc un isomorphisme. D'où $\sigma: \mathcal{F} \simeq \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$

Prop (5.1 de Mumford) H est représentable par un sous-schéma (localement fermé) de $\text{Hilb}^{\mathbb{P}}_{\mathbb{P}^{5g-6}}$.

esquisse de dém.



- h_u est ~~se~~ propre et plat, à fibres de dim 1
- il y a un + grand ouvert $U_2 \subset \text{Hilb}$ au-dessus duquel h_u est liss à fibres géom^t connexes (automatiz^m de genre g)

$h_u^{-1}(U_2)$
"

$\Gamma_2 \rightarrow U_2$ «représente» les sous-schémas vérifiant (i).

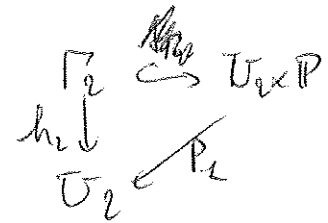
Pour $\Gamma \hookrightarrow S \times \mathbb{P}$ vérifiant (i), le faisceau $\Omega_{\Gamma/S}^{\otimes 3}(-1)$ correspond



à une section $\omega_{\Gamma/S} : S \rightarrow \text{Pic}_{\Gamma/S}^0$ (jacobienne relative de Γ).
la cond. (ii) équivaut à $S = 0$ (section nulle) -

Donc les cond. (i)+(ii) sont représentées par le ~~pre~~ noyau de la double flèche $U_2 \xrightarrow[\alpha_{\Gamma_2/U_2}]{0} \text{Pic}_{\Gamma_2/U_2}^0$, qui est un sous-schéma

fermé parce que $\text{Pic}_{\Gamma_2/U_2}^0$ est séparé.



Pour la condition (iii) on regarde

$$\mathcal{O}_{U_2}^{5g-5} = \underbrace{p_{2*} \mathcal{O}_{\Gamma_2}(1)}_{\text{restre à } U_2} \xrightarrow{p} \underbrace{h_{2*} \mathcal{O}_{\Gamma_2}(1)}$$

loc libres de rang $5g-5$

et on prend l'ouvert $U_3 \subset U_2$ où p est un isomorphisme. $\square$

§4. Retour à $\mathcal{M}_g$

On a une action ~~de~~ de $G = \mathrm{PGL}_{5g-5}$ sur H ; au niveau de $\tilde{\mathcal{M}}_g \simeq H$ elle correspond au «changement de σ »:

$$\left\{ \begin{array}{l} (C \rightarrow S) \in \mathcal{M}_g(S) \\ \sigma: \mathbb{P}(\mathcal{E}_{C/S}) \simeq \mathbb{P}^{5g-6} \\ \sigma \in G(S) \text{ (morphisme } S \rightarrow G) \end{array} \right\} \mapsto (C \rightarrow S, \sigma \cdot \sigma)$$

Il est clair que $\tilde{\mathcal{M}}_g(S)/G(S) \simeq \{ C \xrightarrow{f} S \in \mathcal{M}_g(S) \mid \mathbb{P}(\mathcal{E}_{C/S}) \}$
 « En particulier toute courbe $C \rightarrow S$ provient «localement $\simeq \mathbb{P}^{5g-6}$ » sur S » d'un él^r de $\tilde{\mathcal{M}}$.

Donc $S = \bigcup_i U_i$, $C|_{U_i}$ provient de $(C_{0i} \rightarrow U_i, \sigma_i) \in \tilde{\mathcal{M}}(U_i)$
 (par descente d'uniformité)

Prop N schéma:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(\mathcal{M}_g, \mathbb{A}_N^1) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mor}(\tilde{\mathcal{M}}_g, h_N)^G \simeq \mathrm{Mor}(H, N)^G \\ (\mathcal{M}_g \xrightarrow{f} h_N) & \mapsto & (\tilde{\mathcal{M}}_g \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g \xrightarrow{f} h_N) \\ \text{(morphisme de foncteurs)} & & \end{array}$$

dém l'injectivité: $q_1, q_2: \mathcal{M}_g \rightarrow h_N$, $q_1 \pi = q_2 \pi$

pour H $C \xrightarrow{f} S$ on a donc $q_1(C \rightarrow S), q_2(C \rightarrow S): S \rightarrow N$

Suffit de voir que $q_1 = q_2$ local^t sur S , donc OPS que C provient de $\tilde{\mathcal{M}}(S)$ et dans ce cas c'est clair.

surjectivité: soit $\tilde{q}: \tilde{\mathcal{M}}_g \rightarrow \mathbb{A}_N^1$ G -invariant.

Pour $C \rightarrow S$ donnée, on veut construire $q(C \rightarrow S): S \rightarrow N$

Donc (U_i) rec^t de S tq $C|_{U_i}$ provienne de $(C_{0i} \rightarrow U_i, \sigma_i) = \tilde{C}_i$

d'où un morphisme $\tilde{q}(\tilde{C}_i): U_i \rightarrow N$

Sur U_{ij} σ_i et σ_j diffèrent par un él^t de $G(U_i \cap U_j)$ donc

$\tilde{q}(\tilde{C}_i) = \tilde{q}(\tilde{C}_j)$ sur U_{ij} , d'où q $\blacksquare$

Cor (prop 5.4 de Mumford)

(a) si $H \rightarrow M$ est un quotient catégorique, il se

factorise par $M_g \rightarrow M$ vérifiant la propriété (ii) des modules grossiers

(b) si de plus c'est un quotient géométrique, M est un schéma de modules grossier.

dém (a) $\begin{array}{c} \mathcal{H}_g \\ \downarrow \end{array}$ $H \rightarrow M$ est G -invariant donc se factorise en $M_g \rightarrow M$.

Si $M_g \xrightarrow{\Psi} h_N$ quelconque alors $H \rightarrow M_g \rightarrow h_N$ est G -invariant donc induit $M \rightarrow N$, etc.

(b) Si quotient géométrique, et Ω alg^r loc, alors

$$M(\Omega) \leftrightarrow (\text{orbites de } G(\Omega) \text{ dans } H(\Omega)) \leftrightarrow M_g(\Omega) \quad \blacksquare$$