Critère numérique de stabilité

Notations : k corps algébriquement clos

$\mathbb{G}_m$ groupe multiplicatif $\qquad \mathbb{G}_m(R) = \operatorname{spec}\left(\frac{R[x,y]}{xy-1}\right) \qquad \mathbb{G}_m(k) = k^*$

$\mathbb{A}^1$ droite affine $\qquad \mathbb{A}^1(R) = \operatorname{spec}(R[x])$

$\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^1$

Def : Soit G un groupe algébrique affine
Un sous groupe à un paramètre de G est un morphisme de groupes algébriques
$\lambda : \mathbb{G}_m \to G$

Si $G = GL_n$, un tel sous-groupe est toujours diagonalisable
Il existe des entiers $r_1 \dots r_n$ ~~tel que~~ et une matrice $A \in GL_n$ tels que

$$\lambda(z) = A^{-1}\begin{pmatrix} z^{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{r_n}\end{pmatrix} A$$

En effet, $\lambda : \mathbb{G}_m \to GL(E)$ correspond à une structure de co $k[z,z^{-1}]$-module sur E

$$\Delta : E \longrightarrow k[z,z^{-1}] \otimes E$$
$$v \longmapsto \lambda \cdot v = \sum z^r v_r$$

$1 \cdot v = v$ donc $v = \sum v_r$

$\lambda(tz) \cdot v = \lambda(t) \circ \lambda(z) \cdot v$ donc $\sum (tz)^r v_r = \lambda(t) \sum z^r v_r \qquad \forall r \quad \lambda(t) \cdot v_r = t^r v_r$

Si G agit sur X | schéma / variété algébrique séparée propre sur k

si $\lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$ est un 1-PS (alors $\mathbb{G}_m$ agit sur X)

si $x \in X(k)$

alors
$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{G}_m &\longrightarrow X \\ z &\longmapsto \lambda(z)\cdot x \end{aligned}$$
se prolonge par propreté en $f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow X$

On notera
$$\lim_{z \to 0} \lambda(z)\cdot x := f(0)$$

Comme $\lambda(t)\cdot(\lambda(z)\cdot x) = \lambda(tz)\cdot x$ $f(0) \in X^{\mathbb{G}_m}$ est fixe sous $\mathbb{G}_m$.

Si L est un fibré en droites algébrique G-linéarisé sur X

$L_{f(0)}$ est une droite sur laquelle $\mathbb{G}_m$ agit, donc par
$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m \times L_{f(0)} &\longrightarrow L_{f(0)} \\ (z\ ,\ l) &\longmapsto \lambda(z)\cdot l = z^r l \end{aligned}$$

On notera $\mu^L(x,\lambda) = -r$

<u>Théorème</u>: (Hilbert-Mumford)

Soit G un groupe affine réductif agissant sur une variété propre $X_{/k}$
L un fibré en droites ample G-linéarisé
$x \in X(k)$

Alors
$$x \in X^{ss}(L) \iff \forall \lambda \text{ 1-PS} \quad \mu^L(x,\lambda) \geq 0$$
$$x \in X^{s}(L) \iff \qquad \mu^L(x,\lambda) > 0$$

<u>Réduction</u>: comme $\mu^{L^k}(x,\lambda) = k\,\mu^L(x,\lambda)$ on peut supposer L très ample.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(1) \arrow[d] \\ X \arrow[r, hook, "i_L"] & \mathbb{P} = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(H^0(X,L)) \end{tikzcd}$$

$V = H^0(X,L)$

Comme L est ample et $H^0(X,L)^G = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1))^G$

$$x \in X^{ss}(L) \iff \cancel{i_L(x)} \in \mathbb{P}^{ss}(\mathcal{O}(1))$$

On notera désormais x pour $i_L(x)$

G agit sur V et sur V^* de sorte que $\pi : V^* - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}$ soit G-équivariant.

<u>Proposition</u> : $x \in \mathbb{P}^{ss}(\mathcal{O}(1)) \iff$ l'orbite $G(x^*)$ de x^* dans V^* ne contient pas 0 (pour un x^* au dessus de x)

$x \in \mathbb{P}^{s}(\mathcal{O}(1)) \iff \psi_{x^*} : G \longrightarrow V^*$ est propre

On est alors ramener à étudier l'action linéaire de G sur V^*

<u>Dem</u> : 1) Si $x \in \mathbb{P}^{ss}(\mathcal{O}(1))$ $\exists d \in \mathbb{N}^*$ $\exists s \in H^0(\mathcal{O}(d))^G$ / $s(x) \neq 0$

$\exists F \in k[X_0, \dots X_n]^G_d = (S^d V)^G$ $\quad F(x^*) \neq 0$

Comme $F(0) = 0$ $\quad 0 \notin \overline{G(x^*)}$

Réciproquement, si $0 \notin \overline{G(x^*)}$, comme G est réductif, il existe $F \in k[X_0, \dots X_n]^G = k[V^*]$ tel que $F(0) = 0$ et $F(\overline{G(x^*)}) = 1$

$F = F_{d_1} + \dots + F_{d_m}$ $\quad F_{d_i}$ homogène, G-invariant

L'un des $F_{d_i} \neq 0$ sur x^* donc $s_{F_{d_i}}(x) \neq 0$.

2) $x \in \mathbb{P}^s(\mathcal{O}(1)) \iff$ Stab(x) fini

$\exists d, \exists s \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(d))^G$ $\quad s(x) \neq 0$ et $G(x)$ fermée dans D_s

$\iff$ L'application d'orbite $\psi_x : G \longrightarrow D_s$ propre

(elle est affine ~~par [illegible]~~ car G est affine)

A s correspond $F_s \in k[X_0, \dots X_n]^G_d$ $\quad \exists a \in k - \{0\}$ $\quad G(x^*) \subset \{F = a\} = Z_a$

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\Psi_{x^*}} & Z_a & \subset & V^* \\ \| & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ G & \xrightarrow{\Psi_x} & D_s & \subset & \mathbb{P} \end{array}$$

$Z_a = \operatorname{spec} \dfrac{k[X_0 .. X_n]}{F-a}$ $\uparrow$ module de type fini sur

$D_s = \operatorname{spec} \dfrac{k[X_0, .. X_n](d)}{F-a}$ $\nwarrow$ sous alg engendré en degré d

Donc π' est propre

Ψ_{x^*} propre $\Leftrightarrow$ Ψ_x propre.

Description pratique de $\mu^{\mathcal{O}(1)}(x, \lambda)$

Dans un système de coordonnées pour V^*, l'action de G_m est donnée par

$$G_m \longrightarrow GL(V^*)$$
$$z \longmapsto \begin{pmatrix} z^{r_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z^{r_n} \end{pmatrix}$$

Prop: Soit $x \in \mathbb{P}(k)$ un point fermé, λ 1-PS de G
$x^* \in V^* - \{0\}$ au dessus de x.
Alors pour le choix de coordonnées précédent,
$$\mu^{\mathcal{O}(1)}(x, \lambda) = \max \{ -r_i \text{ tel que } x_i^* \neq 0 \}$$

De plus

$\lambda(z) \cdot x^*$ n'a pas de limite $\Leftrightarrow$ $\mu^{\mathcal{O}(1)}(x, \lambda) > 0$

a une limite dans $V^* - \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\mu^{\mathcal{O}(1)}(x, \lambda) = 0$

tend vers 0 dans V^* $\Leftrightarrow$ $\mu^{\mathcal{O}(1)}(x, \lambda) < 0$

Dem : On pose $\nu = \max \{-r_i$ tel que $x_i^* \neq 0\} = -\min \{r_i$

$\lambda(z) \cdot x^* = (z^{r_0} x_0^*, \dots \dots z^{r_n} x_n^*)$

$\lambda(z) \cdot z^{\nu} x^* = (z^{r_0+\nu} x_0^*, \dots , z^{r_n+\nu} x_n^*)$ a une limite non nulle en 0.

soit y^*

Si on montre que $\nu = \mu^{O(1)}(x, \lambda)$ alors on aura montrer la conséquence

y^* est au dessus de $y := \lim_{z \to 0} \lambda(z) \cdot x$

$y^* = (y_0^*, \dots , y_n^*) = \lim (z^{r_0+\nu} x_0^*, \dots , z^{r_n+\nu} x_n^*)$

Si $x_i^* = 0$ ou si $\nu > -r_i$ alors $y_i^* = 0$

Donc $\lambda(z) \cdot y^* = z^{-\nu} y^*$

Comme y^* engendre $O(1)_y$, $\nu = \mu^{O(1)}(x, \lambda)$

On doit montrer

$$\begin{array}{ccc} \Psi_{x^*} \text{ non propre} & \overset{?}{\Longleftrightarrow} & \exists \lambda \text{ 1-PS } / \ \lambda(z) \cdot x^* \text{ a une limite} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x \notin \mathbb{P}^s(O(1)) & & \exists \lambda \text{ 1-PS } / \ \mu^{O(1)}(x, \lambda) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \in \overline{G(x^*)} & \overset{?}{\Longleftrightarrow} & \exists \lambda \text{ 1-PS } / \ \lim \lambda(z) \cdot x^* = 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x \notin \mathbb{P}^{ss}(O(1)) & & \exists \lambda \text{ 1-PS } / \ \mu^{O(1)}(x, \lambda) < 0 \end{array}$$

Les implications $\Leftarrow$ sont faciles

(La limite de $\lambda(z).\, x^*$ est fixe et n'est donc pas dans l'orbite de x^* c'est à dire que l'image de Ψ_{x^*} n'est pas fermée)

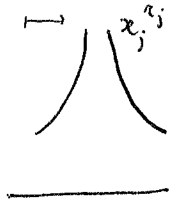
Si Ψ_{x^*} n'est pas propre

$R =$ ~~spec~~ $k[[t]]$ $\qquad$ spec R = germe $(\mathbb{A}^1, 0)$

$K = k((t))$ $\qquad$ spec K = germe $(\mathbb{A}^1, 0)$ épointé

Un sous-groupe $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$
donc $\langle\lambda\rangle \in G(K)$ par
par exemple si $G = (\mathbb{G}_m)^N$

$$\prod k[z_i, z_i^{-1}] \xrightarrow{\lambda^\#} k[z, z^{-1}] \longrightarrow k((t))$$
$$x_j \longmapsto x_j^{r_j} \longrightarrow t^{r_j}$$



$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\Psi_{x^*}"] \\ \operatorname{spec} K \arrow[ur, "\phi"] & V^* \end{tikzcd}$$

Il existe $\phi : \operatorname{spec} K \longrightarrow G$ qui ne se prolonge pas en un spec $R \longrightarrow G$ mais tel que $\Psi_{x^*} \circ \phi$ est un spec $R \longrightarrow V^*$

<u>Lemme</u> : Toute matrice M_ϕ de $GL_{n+1}(K)$ s'écrit

$$M_\phi = A \begin{pmatrix} \xi_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_n \end{pmatrix} B$$

avec A et B dans $SL_{n+1}(R)$ et $v(\xi_0) \leq \dots \leq v(\xi_n)$

<u>Dem</u> : On choisit comme pivot le coefficient de plus petite valuation //

Donc ϕ s'écrit $\quad A \begin{pmatrix} z^{r_0} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{r_n} \end{pmatrix} B$

Soit $a \in SL_{n+1}(k)$ et $b \in SL_{n+1}(k)$ les spécialisations de A et B

On choisit une base de V^* où $b^{-1}\lambda b$ est diagonal $\begin{pmatrix} z^{r_0} & & \\ & \ddots & \\ & & z^{r_n} \end{pmatrix}$

$$\Psi_{x^*} \circ \phi = \phi \cdot x^* = \underbrace{A b}_{\in G(R)} \underbrace{b^{-1}\lambda b}_{\text{diagonal}} b^{-1} B \cdot x^* \in V^*(R)$$

$$X_i \left((Ab)^{-1} \cdot \phi \cdot x^* \right) = z^{r_i} \; X_i \left(b^{-1} B \cdot x^* \right)$$

$b^{-1} B \cdot x^* \longrightarrow x^*$ donc $X_i(b^{-1}B \cdot x^*) = X_i(x^*) + z\, Z_i$

Si $X_i(x^*) \neq 0$ alors $r_i \geq 0$ donc $\underset{\mu(x,\, b^{-1}\lambda b)}{\overset{\|}{\partial(x^*)}} \leq 0$

Si $0 \in \mathcal{O}(x^*)$ on obtient $\Psi_{x^*} \circ \phi \in z\, V^*(R)$

et donc $\mu(x, b^{-1}\lambda b) < 0$